Spacelike Mean Curvature One Surfaces in de Sitter 3-Space

藤森, 祥一

(Degree)
博士 (理学)
(Date of Degree)
2006-03-25
(Date of Publication)
2008-07-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲3547
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003547

【261】

氏　　名・（本　籍）　藤森　祥一　（　北海道　）

博士の専攻分野の名称　博士（理学）

学　位　記　番　号　博い第305号

学位授与の　要　件　学位規則第５条第１項該当

学位授与の　日　付　平成18年3月25日

【 学位論文題目 】

Spacelike Mean Curvature One Surfaces in de Sitter 3-Space
(3次元ドジッター空間内の平均曲率1を持つ空間的曲面について)

審　査　委　員

主 査　教　授　佐々木　武

教　授　高野　恭一

教　授　中西　康剛

助教授　ﾗｽﾏﾝ　ｳｪｲﾝ

本博士論文では、3 次元 de Sitter 空間内の平均曲率 1 を持つ空間的曲面について、その end における曲面の振る舞いや特異点の形状に重点を置いて論じる。

3 次元 Euclid 空間内の極小曲面、即ち平均曲率（mean curvature）が恒等的に消えている曲面は、石鹸膜の数学的モデルと考えられることから、18 世紀半ば Euler や Lagrange の頃から多くの数学者によって研究が進められてきた。特に 1866 年に Weierstrass によって、2 つの有理型関数の対（Weierstrass data と呼ばれる）とその積分を用いて極小曲面を表現する、所謂 Weierstrass の表現公式が発見されてからは多くの例も発見され、さらに 1960 年代頃からは Osserman 等を中心として大域的な性質についても研究が進められている（[8]）。

また、3 次元双曲空間内の平均曲率が恒等的に 1 の曲面（以後、CMC 1 曲面と略記する。CMC は Constant Mean Curvature の略）の理論も、1987 年に Bryant によって Weierstrass の表現公式と類似の表現公式が発見されてから、大阪大学の梅原雅顕氏、九州大学の山田光太郎氏らを中心として急速に発展している（[2], [3], [12]）。実はこれら二つの曲面論には、Lawson 対応と呼ばれる局所的な等長対応の存在が知られている（[7]）。

一方、3 次元 Lorentz 空間内の空間的極大曲面、即ち、曲面への誘導計量が正定値で、その平均曲率が恒等的に消えている曲面に関しては、3 次元 Euclid 空間内の極小曲面における Weierstrass の表現公式に酷似した表現公式が、1983 年、小林治氏により発見されているが、完備な極大曲面は平面しか存在しないという事実などが原因となり、その後の研究はあまり盛んに行われていなかった。しかし、ある種の特異点を許容して、その上で改めて完備性の定義をうまく与えることにすれば、3 次元 Euclid 空間内の極小曲面と類似の結果が得られるであろうことが期待される。例えば、梅原氏、山田氏は、ある種の特異点を許容した極大曲面で end が完備なものは、Osserman 不等式と呼ばれる、完備かつ有限全曲率な極小曲面が満たす不等式と同様の不等式が成り立つことを、等号条件まで込めて示した（[13]）。

また、極小曲面と極大曲面は、その内在的な性質に大きな違いがある。即ち、極小曲面の Gauss 曲率は非正であるが、極大曲面のそれは非負である。このことから、極小曲面にはない極大曲面独自の性質も発見されることが期待される。実際、梅原氏、山田氏は、極大曲面の完備な end は、有限全曲率を持つという著しい結果を示した。これは極小曲面には無い性質である（例えば常螺旋面は完備な極小曲面であるが、その全曲率は無限である）。

また、特異点を許容するということで、どのような特異点が現れるか、といった問題も自然に生ずる。

3 次元 Lorentz 空間内の空間的極大曲面と 3 次元 de Sitter 空間内の空間的 CMC 1 曲面との間には、やはり局所的な等長対応が知られている（[9]）。3 次元 de Sitter 空間内の空間的 CMC 1 曲面に関しては、3 次元双曲空間内の CMC 1 曲面における Bryant の表現公式に酷似した表現公式が、1998 年、東京理科大学の芥川和雄氏、筑波大学の相山玲子氏によって発見されている（[1]）。しかし、極大曲面と同様に 3 次元 de Sitter 空間内の完備な空間的 CMC 1 曲面は平坦なものに限られることが知られている。

そこで本論文では、上述の梅原氏、山田氏の方法と同様に、3 次元 de Sitter 空間内の空間的 CMC 1 曲面にある種の特異点を許容した新しいクラスの曲面を定めて CMC 1 face

と名付け、その上で改めてそれらの曲面の完備性を定義し、大域的な性質を調べた。特に楕円型 end と呼ばれる end の振る舞いを詳しく考察し、それを用いて、楕円型 end を持つ CMC 1 face に対して Osserman 型の不等式が成り立つことを、等号条件まで込めて示した（[4]）。

さらに、与えられた Weierstrass data から特異点の形状を判別する判定条件を与え、それをもとに CMC 1 face に generic に表れる特異点は cuspidal egde、swallowtail、cuspidal cross cap の 3 種類に限られることを示した（[6]）。

また、数値計算を用いて種数 1 で 2 つの end を持つの CMC 1 face の 1 径数族を構成した（[5]）。

本博士論文は、次のように構成されている。第 1 章では本研究に関する歴史的な背景や論文の概要を解説する。第 2 章では 3 次元 de Sitter 空間の基本的な性質を復習し、その中の空間的曲面の局所理論を整理する。特に CMC 1 曲面や平坦な曲面は、有理型関数の対からなる、所謂 Weierstrass 型の表現公式を許容するので、それらの公式の簡単な証明を与える。第 3 章では、空間的 CMC 1 曲面にある種の特異点を許容した CMC 1 face を定義し、そこにも 1 章で与えた表現公式が拡張できることを見る。第 4 章では CMC 1 face の特異点の形状を考察する。具体的には、与えられた Weierstrass data から特異点を判定する条件を与え、それを用いて CMC 1 face に generic に表れる特異点を分類する。CMC 1 face の end は、そのモノドロミー表現が Poincare 円盤の等長変換群と等しくなることから、楕円型、双曲型、放物型の 3 種類に分類されるが、第 5 章ではこのうち楕円型の end をもつ CMC 1 face の性質を考察する。これは、ここ 15 年程非常によく研究されてきた 3 次元双曲空間内の CMC 1 曲面の end が常に楕円型であることによる。実際、楕円型の end のみを持つ CMC 1 face は 3 次元双曲空間内の CMC 1 曲面と類似の性質を多く持ち、Osserman 型不等式も本質的には 3 次元双曲空間内の CMC 1 曲面に関する理論と類似の方法で得られる。第 6 章では、多くの例を構成する。最初に基本的な例をいくつか構成し、次に双曲空間内の既約な CMC 1 曲面を de Sitter 空間に転送して CMC 1 face を構成する方法を導き、それを用いて種数 0 の CMC 1 face を非可算無限個構成する。さらに、数値計算を用いて、種数 1 で 2 つの end を持つ CMC 1 face の 1 径数族を構成する。補遺 A では、3 次元 Euclid 空間、3 次元双曲空間、3 次元 Lorentz 空間内の空間的曲面の局所理論を復習する。また、双曲空間内の曲面と de Sitter 空間内の空間的曲面との間にある、ある種の双対性に関しても考察する。補遺 B では、第 4 章で得られた結果の応用として、3 次元 Lorentz 空間内の極大面と呼ばれる曲面に現れる特異点を分類する。

（氏名：　藤森祥一　NO.　3）

参考文献

[1] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $H^3(c^2)$ and $S_1^3(c^2)$, Ann. Global Anal. Geom. (1) 17 (1998), 49-75.

[2] R. Bryant, Surfaces of Mean Curvature One in Hyperbolic Space, Asterisque 154-155 (1987), 321-347.

[3] P. Collin, L. Hauswirth and H. Rosenberg, The geometry of finite topology Bryant surfaces, Ann. of Math. (2) 153 (2001), 623-659.

[4] S. Fujimori, Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space, to appear in Hokkaido Math. J.

[5] S. Fujimori, Spacelike mean curvature 1 surfaces of genus 1 with two ends in de Sitter 3-space, preprint.

[6] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Cuspidal cross caps and singularities of maximal surfaces, preprint.

[7] H. B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 335-374.

[8] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math. (2) 80 (1964), 340-364.

[9] B. Palmer, Spacelike constant mean curvature surfaces in pseudo-Riemannian space forms, Ann. Global Anal. Geom. (3) 8 (1990), 217-226.

[10] W. Rossman and K. Sato, Constant Mean Curvature Surfaces in Hyperbolic 3-Space with Two Ends, J. Exp. Math. 7(2) (1998), 101-119.

[11] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, preprint.

[12] M. Umehara and K. Yamada, Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space, Ann. of Math. (2) 137 (1993), 611-638.

[13] M. Umehara and K. Yamada, Maximal surfaces with singularities in Minkowski space, to appear in Hokkaido Math. J.

（別紙１）　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	藤森　祥一		
論文題目	Spacelike Mean Curvature One Surfaces in de Sitter 3-space（3 次元 de Sitter 空間内の平均曲率 1 を持つ空間的曲面について）		
審査委員	区　分	職　名	氏　　　名
	主　査	教授	佐々木　武
	副　査	教授	髙野　恭一
	副　査	教授	中西　康剛
	副　査	助教授	ラスマン　ウェイン
	副　査		印

要　　旨

本論文では、3 次元 de Sitter 空間の平均曲率 1 (CMC-1) をもつ空間的曲面に関する新しい結果が述べられている。このような曲面には、有理型関数の対からなる表現公式が知られていたが、完備な例は全臍的かつ平坦なものに限られるという事実から、大域的な理論の研究はほとんど行われてこなかった。しかしながら、本論文ではある種の特異点を許容した新しい曲面のクラスを定義し（論文中では「CMC 1 face」と名付けている）、その上で改めて完備性を定義することで、大域的に興味深い結果を得ている。また、特異点の形状に関しても、今まで知られていなかった新しい結果を得ている。

まず、大域的な結果に関してであるが、最初に特異点を許容した曲面 (CMC 1 face) が完備であることを、各エンドが完備であることと定める。そして、各エンドのモノドロミー行列の固有値が S^1 に値をもつときに、Osserman 型不等式と呼ばれる重要な不等式が成り立つことを、その等号条件まで込めて示している。また、等号が成り立つ例や成り立たない例を具体的に数多く構成している。この結果は、Hokkaido Mathematical Journal に掲載されることが決まっている。

次に、特異点の形状に関する結果についてであるが、近年、波面 (wave front) と呼ばれるクラスの曲面に関してはその特異点の形状を判定する結果が得られているが、CMC 1 face は波面よりも広い「frontal」と呼ばれるクラスである。そこで frontal に現れる典型的な特異点の判定条件を与え、さらに CMC 1 face にジェネリックに現れる特異点が cuspidal edge、swallowtail、cuspidal cross cap の 3 種類であることを示している。この結果は、佐治健太郎氏（北海道大学）、梅原雅顕氏（大阪大学）、山田光太郎氏（九州大学）との共著論文として、投稿中である。

さらに、新しい CMC 1 face の例として、種数 1 で 2 つのエンドを持つものを、数値計算を用いて構成している。この結果は現在投稿中である。

本研究は 3 次元 de Sitter 空間の CMC-1 空間的曲面について、その特異点と大域的性質を研究したものであり、それらの性質について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者の藤森祥一は、博士（理学）の学位を得る資格あると認める。