確率概念の認識における水準とそれに基づくカリキュラムに関する研究

岡部，恭幸

(Degree)
博士（学術）

(Date of Degree)
2007-03-25

(Date of Publication)
2008-07-18

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲3883

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003883

博 士 論 文

確率概念の認識における水準とそれに基づくカリキュラムに関する研究

平成18年12月

神戸大学大学院総合人間科学研究科

岡 部 恭 幸

目次

序　章　本研究の目的とその背景　1

第 I 部　確率概念の認識とその教育についての基礎的検討

第 1 章　確率教育の歴史と現状　9
1.1　日本における確率教育の歴史と現状 9
1.2　確率教育の世界的動向 18

第 2 章　確率概念の認識に関する先行研究　27
2.1　海外における先行研究 27
2.2　日本における先行研究 43
2.3　カリキュラム開発の視点からみた認識研究 53

第 1 部のまとめ　55

第 II 部　確率概念の認識における水準

第 3 章　数理認識論と「方法の対象化」　57
3.1　数学言語の構成と数理認識 57
3.2　学習水準論と「方法の対象化」 59
3.3　数理認識の視座からみた「方法の対象化」 65

第 4 章　確率概念の認識における水準　68
4.1　確率概念の認識における「方法の対象化」 68
4.2　「確率概念の認識における水準」の設定 75

第 5 章　水準からみた確率概念の認識の様相　79

5.1　認識調査 I －確率学習前の生徒の認識の様相 79

5.2　認識調査 II －確率学習後の生徒の認識の様相 83

5.3　第 2 水準から第 3 水準への認識の様相 87

第 2 部のまとめ　96

第 III 部　「確率概念の認識における水準」に基づくカリキュラム

第 6 章　水準に基づくカリキュラムの改善　99

6.1　日本のカリキュラムの現状とその問題点 100

6.2　NCTM のスタンダードとその問題点 106

6.3　カリキュラム改善のための指針とそれに基づく試案 109

第 7 章　水準の上昇のための単元開発とその実際　114

7.1　第 0 水準から第 1 水準への上昇のための単元 114

7.2　第 1 水準から第 2 水準への上昇のための単元 123

7.3　第 2 水準から第 3 水準への上昇のための単元 134

第 3 部のまとめ　146

終　章　研究の成果と今後の課題　148

資料　157

謝辞　170

序　章

本研究の目的とその背景

1. 本研究の背景

確率論は 300 年以上前に、ギャンブルをめぐる現実的課題の解決の過程で誕生したという。その後、確率論は大量に生起する偶然現象の中に潜む法則性の探究へと向かい、統計学や数学を含む自然科学とつながることになる。Poincare(1950) が「あらゆる科学は自覚しないで確率論を適用したものに過ぎない。確率論を排斥することは、科学を排斥することである」と述べたように、現代においては、数理科学においても確率論の見方や手法が用いられる等、必要不可欠な分野となっている。また、日常生活においても、宝くじや抽選、保険、医療診断、品質管理、天気予報、スポーツのハンディキャップ、遺伝等、「確率」の見方や考え方を必要とする場や機会は非常に多い。今や確率は生活に深く根付いていると言っても過言ではない。

このような時代の進展は、算数・数学の教育における確率の学習の必要性を増大させる。日本においても、数学教育の現代化の流れとともに小・中学校の教育に確率が導入される。小学校では、1968 年の学習指導要領の改訂ではじめて導入されるものの、現代化への批判の高まりとともに次第に内容が縮小されていき、1977 年の学習指導要領改訂で完全に削除される。その後、現在まで日本の算数教育で確率が扱われることはなかった。中学校では、同じく現代化の 1969 年の改訂ではじめて導入され、第 2 学年に配当される。そして、1978 年の改訂以降は、現代化への批判とともに、順列、組合せ、期待値等の内容の削除を余儀なくされる。この改訂以降、第 3 学年に配当されていたが、現行の学習指導

要領ではまた中学校の第２学年に配当されている。その内容は縮小されたままである。

このように日本における小・中学校の義務教育での確率教育は、数学教育の現代化以降充実傾向にあるとは言えない。しかし、世界的には近年特に確率の教育は充実の傾向にある。この傾向は National Council of Teachers of Mathematics(NCTM,1989,2000)、Ausutralian Education Council(AEC,1991,1994)、Department of Education and Science and the Welsh office(DES,1989) 等のカリキュラム改訂において明白である (Jones,2005)。その導入も次第に低年齢化しており、上記のカリキュラムでは、小学校の下学年から確率の教育を導入している。さらに、中国でも 2003 年のカリキュラム改訂において、小学校の 1〜3 年、4〜6 年、７〜9 年のそれぞれの段階にすべて確率が位置づけられている (李,2005)。日本の確率教育の傾向は明らかに世界の流れに逆行している。このような状況を鑑みると、日本においても早急に確率に関するカリキュラムを整備する必要がある。

確率のカリキュラム開発を考える上で、その基盤となる研究としてどのようなものが必要であろうか。伝統的な「確率」のカリキュラムは、組合せ論に基づいており、確率論に独特の概念や見方・考え方が適切に扱われているとは言えない (Scheaffer 他,1998) という指摘がある。組合せ論に依拠するのではなく、生徒の確率概念の形成を見つめ、その成長を支援していくように適切なカリキュラムを構築していくことが求められている。そのためには生徒の確率概念の認識についての研究が不可欠である。欧米では、Piaget & Inhelder(1951/1975) の研究を端緒とし、Kahnemann&Tversky(1972)、Fishbein(1975) 等へと続く一連の心理学的な立場からの研究がある。このような立場の研究は日本においては川嵜 (1983)、伊東 (1995) がある。しかし、これらの心理学的研究は生徒の現在の実態に基づくものであり、特に日本のように確率教育のそのものが未整備である場合には、教育における確率概念の発達や成果が明確にされず、カリキュラム開発のための視点を得ることは難しい。では、カリキュラム開発のためにはどのような確率概念の認識に関する研究が有効なのであろうか。

この課題に対し、本研究では「方法の対象化」に着目する。「方法の対象化」は van Hiele の水準論の重要な特徴の１つである。オランダの高校教師である van Hiele 夫妻は、1957 年に Utrecht 大学において、幾何における思考水準に関する構造や教授実験を展開させた学位論文を完成させた。ある明確な教育的目的の下に数学的内容を構成し、その指導方法を明確にするための原理を単元・カリキュラム構成原理だと考えると、van Hiele の「学

習水準論」は数学教育における単元構成原理およびカリキュラム構成原理に成り得る (小山,1985)。この van Hiele の水準論から、前の水準の組織化の方法がその次の水準では考察の対象となるという「方法の対象化」という特徴を読みとることができる。平林 (1987) は「実際、数学の学習は決して連続的な上昇曲線で表示されるような過程ではなく、突然に洞察的な飛躍によって新しい学習水準へと上昇するものであり、このことはおそらく数学の学習のもっとも特徴的な様相であろう。」と指摘している。筆者は、この飛躍を特徴付ける原理こそが「方法の対象化」であると考えている。

van Hiele の水準論は幾何の分野で展開された理論であるが、他の分野でこの飛躍を考察しそれに向けての学習過程を実践的に整備することは、数学教師に固有の仕事であり、van Hiele の様相の一般的記述は 1 つの指針と成り得る (平林,1987)。幾何の場合については、ある程度はこの水準に沿ったカリキュラムが実施されているという (小山,1985)。van Hiele の水準論は、上述したようにその重要性が指摘されており、その一般化について以前から取り組まれており (礒田,1987 ; 廣谷他,1988 等)、確率分野についても福間・礒田 (2003) の研究がある。しかし、それらの研究は、水準の上昇、つまり「方法の対象化」という特徴が、必ずしも明確にされたものではない。それは、これらの研究が心理学的な視点からアプローチしており、「方法の対象化」という数学の 1 つの構造を中心にして行われたものではないからである。この構造を明確に論ずるには数学を用いる必要がある。

この課題を解決するため、本研究では、「数理認識とはものごとを数学という枠組み (一種の言語体系である枠組み—数学言語—) で捉えることである」という船越 (1996,1998) の立場をとる。そして、数理概念を数学的に形式化して考察していく。「方法の対象化」の構造が数学的に形式化できれば、当然この構造は明確になる。そうすれば、確率概念の認識についても明確に水準を設定することが可能になる。このような研究は数学教育におけるカリキュラム研究の新しい可能性をもたらすのではと考えている。

2. 本研究の目的と課題

日本においては確率概念の認識の研究に基づいた確率のカリキュラム開発が急務であった。さらに、カリキュラム開発につながる認識の研究は、心理学からの知見からだけではなく、数理認識の視座からも検討を行う必要があるのであった。前節でも述べたように、本研究では、カリキュラムの開発に必要な原理を得るための視点として、van Hiele の水

準論を特徴付ける「方法の対象化」に着目する。具体的には次の手順によって原理を得る。

まず、van Hiele の水準や確率概念の認識の様相を、数学言語構成の視点から数学的に形式化する。そうすることによって、確率概念の認識における「方法の対象化」の構造を明確にする。そして、それに基づき、「確率概念の認識における水準」を設定する。この「確率概念の認識における水準」がカリキュラムを構成する原理となる。

次に、この「確率概念の認識における水準」に基づいて、義務教育段階でのカリキュラムを開発していく。カリキュラム構成においては、水準の上昇が重要となる。そのために、その水準の上昇の様相を明らかにし、水準の上昇を促進する具体的な教材・単元を開発・実践していく。

確率概念の認識の様相を明らかにし、得られた知見に基づいて、小学校・中学校・高等学校を見通した確率教育のカリキュラムを構成することが、本研究の目的である。

その目的に近づくため、具体的課題として次の諸点を設定する。

(1) 数理認識の視座から、「確率概念の認識における水準」を設定する。

(2) 確率概念の認識の様相について分析を行い、水準の妥当性を検証する。

(3) 水準に基づくカリキュラムの現状分析と改善のための試案を作成する。

(4) 試案に基づいた単元開発と教育実践を行い、カリキュラムの妥当性を検証する。

3. 本研究の概要

第 1 章では、日本の確率教育の歴史と確率教育の世界的動向について概観した。そして、日本の確率教育がより低学年への導入を含め拡大の方向で進められている海外の動向に反し、現代化以降、縮小傾向であることについて述べた。また、日本では生徒の確率の認識の発達に基づきそれを促進するようなカリキュラムの開発が取り組まれておらず、その要因の 1 つとして、継続的な確率概念の認識についての研究が不十分であることを指摘した。

第 2 章では、カリキュラムの構築に不可欠である確率概念の認識についての研究について概観した。海外の研究として、Piaget & Inhelder(1951)、Fishbein(1975,1998 等)、Jones(1997)、Horvath(1998) を、日本の研究としては、川嵜 (1983、1990)、福間・磯田 (2003)、守屋ら (1997,1998)、横地 (2006) の研究について概観した。そして、心理学的研

究のみでは、十分なカリキュラム構成の根拠となっていないことを指摘した。

第 3 章では、数理認識論の視座より van Hiele の水準論の特徴である「方法の対象化」について述べた。カリキュラム構成の原理としての学習水準論は有効である。しかし、水準論の構造的特徴である「方法の対象化」を明確にすることは必ずしも容易ではない。そこで、van Hiele の「幾何における水準」を数学的に形式化することで「方法の対象化」を明確にし、その数学的構造を明らかにした。

第 4 章では、第 3 章で得られた知見をもとに確率概念の数学的形式化と確率認識に関する先行研究の成果からの検討を行い、確率概念の認識における「方法の対象化」の構造を明らかにした。そして、その知見に基づき「確率概念の認識における水準」を設定した。

第 5 章では、実施した認識調査の結果をもとに確率概念の認識の様相について詳述するとともに、水準の妥当性について検討した。そして、生徒の認識の様相において「試行の結果を対象とする見方」「全事象の空間を対象とする見方」「確率を対象とする見方」が存在することが明らかになり、水準の妥当性が示された。さらに、第 2 水準から第 3 水準への上昇において、式や図が深く関わっており、特に確率樹形図が上昇の手がかりになっていることが明らかになった。

第 6 章では、確率教育のカリキュラムの現状を概観し、それらのカリキュラムの問題点について「確率概念の認識における水準」に基づく立場から検討した。そして、得られた知見をもとに、「方法の対象化」に基づく小・中・高等学校を見通したカリキュラム改善のための試案を提案した。

第 7 章では、「確率概念の認識における水準」をもとに、水準の上昇を促進する単元を開発し、教育実験を行った。本章では、その結果について詳述した。行った教育実験は以下の通りである。

(1) 第 0 水準から第 1 水準への上昇のための単元
(2) 第 1 水準から第 2 水準への上昇のための単元
(3) 第 2 水準から第 3 水準への上昇のための単元

それぞれの教育実験において、事前・事後調査を実施した結果、水準の上昇と見られる認識の変容が確認された。

4. 本研究に関する論文

本学位審査論文は、以下の論文をもとにしたものである。

まず、確率概念の認識や教育に関する論文は以下の通りである。

査読審査付き論文

岡部恭幸 (2006)「確率認識の発展を促す教材の開発－中学校におけるランダムウォークの教材化」,『数学教育学会誌 vol.46 No.1・2』, 掲載予定

岡部恭幸 (2006)「確率概念の認識における『方法の対象化』」,『数学教育学会誌 vol.46 No.3・4』, 数学教育学会, 掲載予定

岡部恭幸、今堀妙香 (2006)「確率概念の認識に基づいたカリキュラムに関する考察」,『日本数学教育学会第 39 回数学教育論文発表会』, pp.409-414

岡部恭幸 (2005)「確率概念の認識に関する考察－確率を対象とする見方を獲得する過程における図的表現」,『日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会論文集』, pp.427-432

岡部恭幸 (2004)「確率概念の認識における水準について」,『日本数学教育学会第 37 回数学教育論文発表会論文集』, pp.385-390

その他の論文

岡部恭幸 (2004)「『方法の対象化』を原理とした確率のカリキュラム構成 (1) －確率概念形成における『方法の対象化』」,『2004 年度数学教育学会秋季例会発表論文集』, pp.79-81

岡部恭幸 (2005)「『方法の対象化』を原理とした確率のカリキュラム (2) －認識調査の分析とカリキュラムへの示唆」,『数学教育学会春季年会発表論文集』, pp.108-110

岡部恭幸 (2005)「『方法の対象化』を原理とした確率のカリキュラム (3) －中学校におけるランダムウォークの教材化」,『数学教育学会秋季年会発表論文集』, pp.42-44

岡部恭幸 (2006)「方法の対象化を原理とした確率のカリキュラム構成 (4) －小学生を対象にした確率教育の試み」, 2006 年度数学教育学会春季例会発表論文集, pp.152-154

守屋誠司・岡部恭幸 他 (2006)「TV 会議システムを利用した中学生による日独遠隔協同研究会について」, 2006 年度数学教育学会春季例会発表論文集, pp.170-172

学会発表等

岡部恭幸 (2006)「確率教育の問題点とその改善に関する研究」,『近畿数学教育学会第39 回例会発表資料』

岡部恭幸 (2006) 「2006 年度数学教育学会秋季例会 organized session『確率概念の認識とそれに基づく実践』」,『2006 年度数学教育学会秋季例会発表論文集』, pp.63-65

また、本研究で取り組んだ水準の設定は、筆者が今までに取り組んできた数理認識論研究をもとにして展開している。関連する発表論文は以下の通りである。

査読審査付き論文

岡部恭幸 (1999)「関数認識における水準についての一考察」,『第 32 回数学教育論文発表会論文集』, pp.397～402

岡部恭幸・澤田麻衣子 (2003)「空間（図形）図形認識の育成における投象の役割」,『日本数学教育学会　第 36 回数学教育論文発表会論文集』pp.211-216

澤田麻衣子・岡部恭幸(2004)「投象による空間 (図形) 認識の力の変容」,『数学教育学会誌 2003』vol.44 No.3.4, pp.85-92

その他の論文

澤田麻衣子・岡部恭幸(2003)「投象による空間 (図形) 認識の力の変容 (1) －中学 1 年生を対象とした授業実践」,『2003 年度数学教育学会秋季例会発表論文集』, pp.159-161

澤田麻衣子・岡部恭幸(2004)「投象による空間 (図形) 認識の力の変容 (2)」,『2004 年度数学教育学会春季年会発表論文集』, pp.176-178

第Ⅰ部

確率概念の認識とその教育についての基礎的検討

第1章

確率教育の歴史と現状

本章では、まず、日本の確率教育の歴史と現状について述べる。そして、日本においては現在まで生徒の確率の認識の発達に基づきそれを促進するような教育が行われていなかったことを示すとともに、なぜ、そのような確率教育が行われなかったかについて考察する。さらに、確率教育の世界的動向についても述べる。

1.1 日本における確率教育の歴史と現状

1.1.1 日本の確率教育の黎明

日本における確率教育の歴史について、松宮 (1998, 2000) をもとに概観する。

1890 年当時の中学校では、算術、幾何初歩、代数、幾何、三角法を教授することになっていたが、教科書が西洋数学の翻訳・翻案ものだったために確率については教科書に一部含まれており、指導したところもあったようである。しかし、この確率の導入は決して意図的なものではなかったので、当時の中学校において確率がどれくらい実施されたのかは明らかではない。松宮 (1998) は、この時期を「第 I 期　教材としての受容」としている。

松宮 (1998) は、藤沢の数学教授法講義で「確率は中学程度のことには関係ない」と発言していることと、尋常中学校数学科教授細目 (1898)、数学教授要目 (1902) で「順列、組合」は取り入れたが「確率」は採用されていないこと、さらに次の改正の数学教授要目 (1911) では時間数不足という理由から「順列、組合、二項定理」も削除されていることから、この時期を、「第 II 期　教材からの排除」としている。当時確率は高等学校、陸軍関係の学校で教えられていたにとどまる。

1910 年代にはいると、日本にもペリー、クライン等の数学教育改造運動の影響が及び、新しい教材の導入の議論が展開されはじめる。大上茂喬は中学校の代数科に加えるべきものとして、函数概念、座標概念、公算概念 (確率概念のこと) をあげ、公算概念については、事実によって数理思想を養成する視点から、順列組合せよりも公算論、誤算論、あるいは統計学の方が重要であると述べている。そして、1918 年の全国師範学校中学校高等女学校数学科教員協議会において、「順列組合及びプロバビリチーに関する大体の観念を与へ且指数が正の整数なる場合の二項定理をも授くること」として中学校の教育内容に確率が加えられる提案がなされた。しかし、この時期は小倉金之助 (1924) が導入されるべき新教材の 1 つとしてあげながらも「近来我が国に於いても公算の導入に関する熱心なる論者を見る。けれども、私は複雑なる問題に関する公算を排斥したい。公算論は其定義ときわめて簡単な二三の場合丈に止め・・・・」というようにその導入に際する留意点を述べている。このことからも、その導入については多くの意見が伴ったことが推測される。

改正数学教授要目 (1931) では、順列、組合、確率は明示されていないが、中学校の第 4 学年、第 5 学年において増課教材が認められており、これが「実際生活ニ適切ナルモノ」とされていることから、授業者が取扱いたいと思えば扱えたようである。例えば、当時の教科書「初等数学／算術・代数 (続巻)」(東京師範学校附属中学校内数学研究会編、目黒書店) には確率の教材として「確率、排反スル事象ノ確率、独立スル事象ノ確率、二項分布」があげられている。松宮 (1998) ではこの時期を、「第 III 期　教材としての摂取」としている。なお、林鶴一他『公算論』(1908) ではじめて「確率」の用語が導入され、この時期には、これまでは公算と呼ばれていたものが、学問としての高まりや広まりとともに次第に確率という用語に変わってきている。

1935 年になると、教科書に実際に確率の教材が取り上げられ始める。数学教育改良運動への反応がどちらかというと鈍かった中学校より、その影響を強く受けた小学校でまず取り入れられることになる。1935 年より逐年第一学年ずつ使用された緑表紙教科書の「小算五上、下」には、次のような組合せや確率の問題が載っている。

> 「(12) 甲・乙・丙・丁・戊ノ五人ガ町へ行クノニ、三人ハ乗合自動車ニ乗リ、二人ハ歩クコトニナッタ自動車ニ乗ル者ト歩ク者トノ分ケ方ハ幾通リアルカ。」
>
> 「(13) 上ノ問題デ、自転車ニ乗ル者ト歩ク者トヲクジビキデ定マルトスレバ、コノ中ノ一人ハ、乗ル方ト歩ク方ト、ドチラノクジニアタリヤスイカ」

(小算五上、p.81)

「(16) 将棋ノ駒ノ金将一枚ヲ、三回續ケテフッタトキノ表ト裏トノ出ル組合ハセヲ調ベヨ。」

「(17) 将棋ノコマノ金将四枚ヲ一ショニフッタトキニ出ル表ト裏トノ組合セヲ調ベヨ。ドンナ場合ガ出ヤスクテ、ドンナ場合ガ出ニクイカ」

(小算五下、p.77)

そして、中学校でも緑表紙を学んだ児童が中学校へ進学するのにあわせ、数学教授要目の改正 (1942) が行われる。この改正ではじめて、旧制中学校の教授要目に確率が導入された。確率教材については次のように示されている。

- 中学校第四学年第一類
  「箇数ノ処理／有限個ノモノヲ分類處理スル能力ヲ養ウ／順列　組合セ　確率　二項定理」
- 高等女学校第五学年
  「統計図表ノ考察」の中の四項目の一つで、「順列　組合セ　確率」

確率を含む実際の中学校教科書 (『数学 4』第一類　中等学校教科書株式会社　昭和一九年発行) には、次の項目が盛られている (「3　統計と確率」、全 30 頁)。

(1) 見込みの立て方	(2) 確率	(3) 数学的確率	(4) 場合の数
(5) 確率の計算	(6) 分布表の考察	(7) 種々の問題	

この教材の取扱いは従来のものとは異なり、「同様に確からしい」から導入するもので、当時の確率の学問としての高まり、広まりを反映しているという。しかし、当時勤労動員が始まっている時代でもあり、この教材がどの程度に実践されたかは定かではない。松宮 (1998) は、この時期を「第Ⅳ期　教材としての成立」としている。

戦後になり、学制改革が行われ新制の中学校・高等学校がスタートする。旧制中学の第 4 学年等で扱われていた確率は、以降高等学校で扱われ中学校の教育内容としては扱われない。小学校でも緑表紙以来継続して「場合の数」は扱われるが確率は扱われていない。また、高等学校では、カリキュラム上最終段階に位置づけられていることや大学入試に出題されないこともあり、指導されないこともあったという。すなわち、不遇な時代という

ことができる。松宮 (2000) はこの時期を「第Ⅴ期　不振な時代」としている。

以上のことを松宮 (1998, 2000) は、次のようにまとめている。

第Ⅰ　期	(1890〜1900 頃)	教材としての受容
第Ⅱ　期	(1900〜1910 頃)	教材からの排除
第Ⅲ 期	(1910〜1935 頃)	教材としての摂取
第Ⅳ 期	(1935〜1945 頃)	教材としての成立

1.1.2　日本の確率教育と数学教育の現代化

数学教育の現代化の時代には従来高校だけで指導していた確率を、中学校のみならず小学校でも扱うようになる。確率教材重視の時代である。では、なぜ確率が重視されるようになったのであろうか。それは、欧米で 1950 年代後半から起こった「数学教育の現代化運動」の影響にあることは明らかである。

1958 年に発足した学校数学研究グループ (SMSG) がアメリカ数学会、アメリカ数学協会、全米数学教員会議のもとに組織され、アメリカにおける数学教育の現代化を推進する最も有力な活動を行った。SMSG によって編集された教科書は、「今日及び将来の社会は、数学や科学技術を非常に要求しており、数学に強い人が多数必要となり、また庶民も今以上に多くの数学的素養を持つことが必要となるであろう。したがって、将来の社会生活のために新しい数学をもっと多くの人々に教えなくてはならない」という考えに基づいている。この教科書には、そのような数学の 1 つとして確率が取り上げられている。また、アメリカの NCTM(全米数学教師協会) がまとめた「The Revolution in School Mathematics」(1961) にも、扱うべき教育内容として、構造、演算とその逆、測定、グラフ表示の広範な利用、各種の記数法、数の性質・実数系の展開、集合－言葉と初等的理論、論理的演繹法、妥当的な一般化とともに、確率・統計的推論があげられている。この傾向は西ヨーロッパにおける現代化でも同様であり、確率・統計的推測は、新しい分野として取り上げられている (正田,1967)。

当然、確率は、当時の教師にとっても新しい内容である。和田 (1962) は現代化の講演において「集合、論理、確率の 3 つが数学を最も有効に活用するための基礎になるもの」としながらも、現場の教師の理解の点から「集合、論理、確率は小・中学校でも教えるこ

とになりますが、...　中略 ...問題になるのは確率だと思います」と述べ、確率導入に対しての教師の理解の不十分さという問題点を指摘している。しかし、世界的な現代化での確率導入の流れを受けて、日本においても、1968、1969 年の指導要領の改訂で小・中学校でも確率が導入される。中学校への導入の趣旨は次の通りである。

「数学教育の進歩に応じ、集合、確率、不等式等の中学校としては新しい概念を導入するとともに函数の概念を明確にして指導できるようにし、数学教育の現代化にふさわしい改善を行った。」

小学校への確率の導入も同様の趣旨である。小中学校への確率の導入の背景として、第一は、数学的な考え方の育成をはかるため、関数的な考え方に対する蓋然的な考え方も必要と考えられたこと、第二は、当時、数学教材編成にスパイラル方式が強調されたこと、第三は、現代数学として確率・統計の著しい進歩があったことがあげられた。そして、小学校では、第 6 学年に「確からしさ」、中学校では第 2 学年に「確率」というそれぞれの単元として位置づけられる。この学習指導要領の具体的な記述としては次の通りである。

小学校第 6 学年
「(4) 簡単な事柄について、起こり得る場合を順序よく整理して調べたり、それに基づいて事柄の起こる確からしさ (確率) をくらべたりする能力を順次伸ばす。」
(1968 年改訂)

さらに、指導計画の作成と内容の取扱いでは、

「3. 集合、関数、確率等の概念の指導については、...、それを指導する概念を一応指示しているものがあるが、これらの概念は、特定の学年の指導のみで育成される性格のものではないので、その指導が、児童の発達に即応して継続的、発展的に行われるよう配慮することが必要である。」

と述べている。また、確率教育の主要なねらいとしては、

「不確定な事象の傾向を表すのにも数を用いられることやそうした数の用い方について、より正しい理解ができるようにするところにある。」

とある。

教科書・指導書 (啓林館算数 6 年下) の確率の見出しと目標は、以下の通りである (この前の章は場合の数を扱っている)。この教科書では 12 頁にわたって確率を扱っている。

(1)　くじとさいころ

- くじのあたりやすさを、当たりくじの数の、くじ全体の数に対する割合で表せることに気づかせる。
- くじを引いて当たった割合と当たりくじの割合とをくらべて当たりりくじを引く確からしさを数で表すことを理解させる。
- さいころをふって 1 の目の出る確からしさについて考えさせる。

(2)　確からしさの問題

- 10 円玉 2 個を同時に投げたとき、表、裏の出方のいろいろな場合を考えその確からしさを求め、実験してその結果とくらべる。
- 2 人でじゃんけんしたとき、勝ち、負け、あいこになるいろいろな場合を考え、その確からしさを求め、実験してその結果を求める。

(3)　実験や調査で調べた確からしさ

- 同じように確からしいという判断のできない事象の確からしさについてどの考えるか知らせる。
- 多数回の実験をしたり、統計資料を調べたりして、ことがらの起こる確からしさを判断させる。

また、中学校第 2 学年において (確率・統計の領域の中で) は

「多数の観察や多数回の試行によって得られた結果について、頻度の傾向を表すのに確率が用いられることを理解させる。」

ア．確率の意味　　イ．順列と組合せの考え方

ウ．簡単な場合について確率を求めること　エ．期待値の意味

[用語：確率　順列　組合せ　期待値]

となっている。

しかし、このような現代化の流れに対し、米国における現代化批判もあり、各方面から批判の声が上がる。マスコミは、数学教育の現代化はいたずらに学習内容を多くし、質を高めたために、数学嫌いや落ちこぼれの生徒を大量生産したと繰り返し非難を続けた。小

平邦彦、広中平祐等著名な数学者からも現代化批判が高まったこと (大木,1997) や基礎的な知識や技能の定着をはかるための指導時間が不十分であるという現場からの要望もあり、1972 年に完全実施されると、それほどの時間を経ることもなく、軌道修正が討議されるようになる。

1.1.3 現代化以降の日本の確率教育

数学教育現代化に関わって新しく入れられた内容については、次の学指導要領の改訂に向けて大幅な再検討がなされることとなる。1977 年の学習指導要領改訂に向けて、教育課程審議会で特別委員会が設けられ、その下部組織である教科別委員会 (算数、数学) において、改善の基本方針がまとめられる。その方針は次の 3 点である。(正田, 1997)

(1) 小学校、中学校及び高等学校相互の関連や児童生徒の発達段階を考慮し、内容の程度、分量及び取扱いが一層適切になるよう基本的な事項に精選する。

(2) 新しく取り入れられた内容については、その指導の経験に鑑み、本来の趣旨が達成されるよう個々の内容のねらいや取扱いの程度を明確にし、指導の効果が上がるように改善する。

(3) 小学校、中学校及び高等学校を通じて繰り返し発展的に扱われている内容については不必要な重複や深入りを避け、指導の効果が上がるように改善する。

その背景としては、第一に数学教育現代化の後退があげられるであろう。個別に確率教材の是非が問われたというよりも、集合や論理等、他の教材への批判とともに、現代化からの後退とともに削減がなされたのである。確率もこの方針によって縮小されていった。

1977 年、小学校の学習指導要領の改訂では、小学校第 6 学年の「確からしさ」は削除され、第 6 学年の「A 数と計算」(2) イに「数が不確定な事象の起こる程度を表すものにも用いられることを知ること」があって、確率の扱いの伏線として位置づけられた。その後、1988 年の小学校の改訂では、この扱いも姿を消す。

1978 年の中学校第 2 学年の確率は、その内容が縮小され、順列、組合せ、期待値が削除されて第 3 学年へと移される。この論拠には、上述したスパイラル方式への反省が大きく影響しているだろう。内容的にも、形式的な指導に陥ったという反省から、数学的確率重視から統計的確率の強調への指導観の転換がはかられたが、教科書の内容にはその趣旨

が十分に生かされたとは言えなかった (松浦,2005)。

しかし、このような削減は、小・中・高等学校のそれぞれの段階での確率概念の認識があり、それぞれの認識に沿った教育が展開されるべきだという立場にたっていないことを示している。しかし、当時は、後述する確率概念の認識に関する研究は十分に進展しておらず、それぞれの段階での教育が展開されることの妥当性を示す根拠が希薄であったことは否めない。

1.1.4 日本の確率教育の現状

このように、数学教育の現代化以降、確率教材は急激に縮小していく。このことは、学習指導要領の領域の変遷からも読み取れる。中学校の確率は、1958 年の学習指導要領では数量関係の中に位置づけられていたが、1969 年の改訂では、数量関係が関数と確率・統計に分けられ、これは 1977 年の改訂でも、維持される。しかし、1989 年の改訂では、数量関係の中に統合されている。以来、確率教材縮小の方向は継続しており、小学校では 1977 年の改訂で含まれていた第 6 学年「A 数と計算」(2) イに「数が不確定な事象の起こる程度を表すものにも用いられることを知ること」という確率の扱いの伏線としての位置づけも 1988 年の改訂では姿を消す。中学校では、1978 年の改定以来、確率の単元は第 3 学年に定着していたが、現行の学習指導要領では中学校の第 2 学年で学習するように移され、内容はより縮小されたものとなっている。

このように内容の面では現代化以降大きな変化のない確率教育ではあるが、方法の面ではコンピュータ等の機器の利用をした実践が盛んに行われるようになる。従来より、「確からしさ」の導入としては、数学的確率より相対度数に依存する統計的確率が用いられてきた。それは、頻度の漸近性の実験を通じて「確からしさ」の存在を明らかにすることができるからである。しかし、多数回の試行を必要とすることから、実際の実験は決して容易ではなかったが、近年コンピュータ等の活用が広まるにつれ、このような実験が以前より容易になった。しかし、それは方法面での工夫に留まっており、生徒の確率概念の認識について十分に考慮したものとは言えなかった。

表 1.1　日本における確率教育の歴史

第 I 期	(1890～1900 頃)	海外の教科書の教材として受容された時期
第 II 期	(1900～1910 頃)	旧制中学校の教材からの排除された時期
第 III 期	(1910～1935 頃)	旧制中学校への導入が議論された時期
第 IV 期	(1935～1945 頃)	旧制中学校の教材としての成立した時期
第 V 期	(1945～1970 頃)	高等学校において導入されるも不遇だった時期
第 VI 期	(1970～1980 頃)	現代化における小・中学校へ導入された時期
第 VII 期	(1980～　　)	小・中学校の内容が縮小された時期

以上、概観した確率教育の歴史を筆者なりにまとめると表 1.1 のようになる。

現在の日本の確率教育は、上述したように、縮小の時代を迎えている。しかし、日本の確率教育の歴史からみると、中学校において最も定着して指導されている時期だと言える。これは、後退したとはいえ、数学教育の現代化の確率教育への 1 つの功績だと言ってよいだろう。

1.2 確率教育の世界的動向

前節で述べたように、日本において確率教育は縮小の時代を迎えているのであった。しかし、世界的な傾向は決してこの限りではない。Jones(2004) によると、小学校下学年から確率を導入する傾向は世界的に拡がりを見せているという。

そこで本節では、最近の諸外国における確率カリキュラムについて述べるとともに、その動向について報告する。

1.2.1 NCTM のスタンダードにおける確率教育

本項では、米国の全米数学教師協議会 (National Council of Teachers of Mathematics) が公表している 2 つのスタンダード－具体的には Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics(1989) と、Principles and Standards for School Mathematics(2002) －における確率教育について、NCTM(2000)、能田他 (1997)、筑波大学数学教育研究室 (2001) をもとに述べる。

1989 年度版のスタンダードは、幼稚園 (K) － 4 学年、5 － 8 学年、9 － 12 学年の 3 つの学年帯にわかれている。それぞれの学年帯により区分は若干違うが、「幼稚園－ 4 学年」では「確率と統計」、「5 － 8 学年」と「9 － 12 学年」では「確率」という領域が存在する。

それぞれの領域における確率に関する具体的内容は表 1.2 の通りである。(統計の内容が併記されている場合は統計の内容のみを省略した。)

表 1.2　1989 年版 NCTM のスタンダードにおける確率の内容

【幼稚園から第 4 学年－確率と統計】

幼稚園から第 4 学年では、数学カリキュラムは、生徒が以下のことができるようにデータ分析や確率についての経験を含むべきである。

- 起こり得る度合い (chance:運) についての概念を探求する。

【第 5 学年から 8 学年－確率】

第 5 学年から第 8 学年では、数学カリキュラムは、生徒が次のことができるように、実世界の場面の確率の探求を含むべきである。

- 確率を求めるために実験あるいはシミュレーションを考案し、実行することによって場面をモデル化する。
- 確率を求めるために標本空間を構成することによって場面をモデル化する。
- 数学的予想と実験結果とを比較することによって確率モデルを利用することの威力を感得する。
- 実験的あるいは理論的な確率に基づいて予測をする。
- 実世界において広範囲にわたって確率が使われていることを知り、そのよさを感得する。

【第 9 学年から第 12 学年－確率】

第 9 学年から第 12 学年では、数学のカリキュラムは、すべての生徒が次のことをできるようにひきつづき確率の学習を含むべきである。

- 不確実性を伴う問題を表現し解決するために、適切な実験的あるいは理論的確率を利用すること
- 確率を見積もるためにシミュレーションを利用すること
- 確率変数の概念を理解すること
- 離散確率分布をつくり解釈すること
- 正規曲線を一般的な用語で記述することと、その曲線のもつ性質を利用して正規分布であると仮定されるデータ集合についての問題に答えること。

さらに、大学進学希望の生徒は、

- 確率変数の概念を二項分布、一様分布、正規分布、カイ二乗分布などの確率分布の作成と解釈に応用すること。

表 1.3　2000 年版 NCTM のスタンダードにおける確率の内容

【幼稚園入園前から第 2 学年】

- 生徒の経験に関係した出来事を、起こりそう、または、起こりそうもないとして、論ずる。

【第 3 学年から 5 学年】

- 出来事を、起こりそう、または、起こりそうもないとして記述し、起こりやすさの程度を「確か」「同じように確からしい」「不可能」のような言葉を使って論ずる。
- 簡単な実験結果の確率を予測しそれを検証する。
- ある出来事の起こりやすさの計量が、0 と 1 の間の数で表すことができることを理解する。

【第 6 学年から第 8 学年】

- 余事象と排反事象を記述するための適切な用語を理解し使う。
- 実験とシミュレーションの結果についての予想を立て検証するために、比例関係及び確率の基礎的理解を使う。
- 簡単な複合事象の確率を系統立てられた表、樹形図、面積も出るような方法を使って計算する。

【第 9 学年から第 12 学年】

- 標本空間と確率分布の概念を理解し、簡単な場合に標本空間と分布を構成する。
- 経験的な確率分布を構成するためにシミュレーションを使う。
- 簡単な場合に確率変数の期待値を計算し解釈する。
- 複合事象の確率をどのように計算するかを理解する。

次に 2000 年度版のスタンダードについて述べる。まず、このスタンダードでは学年の分け方が、前幼稚園 (preK) − 2 学年、3 − 5 学年、6 − 8 学年、9 − 12 学年の 4 区分となっている。

そして、全ての学年帯は、「数と演算」、「代数」、「幾何」、「測定」、「データ解析と確率」、「問題解決」、「推論と証明」、「コミュニケーション」、「つながり」、「表現」の 10 個の領域から出来ている。特筆すべきは、このどの学年帯においても、「データ解析と確率」という領域が設定されていることである。さらに、この領域のどの学年帯においても「確率の基礎的概念を理解し、応用する」という項目がおかれている。確率がより低学年で導入される傾向があることは、2000 年度版のスタンダードにおいて、より低学年の区分が細かくなり、その中でも確率が扱われていることからも分かる。

2000 年度版における、それぞれの学年帯の「確率の基礎的概念を理解し、応用する」という項目の具体的内容は表 1.3 の通りである。

以上のことより、米国のカリキュラムについて、小学校の低学年から確率が導入されており、そのことは近年の改訂でより強調されていることが明らかになった。また、目標に、基礎的概念を理解することとともに、「応用する」ことが併記されていることにも注目する必要がある。

1.2.2 英国における確率教育

英国では、1988 年にサッチャー首相の強い意志の下、「教育改革法」が成立し、National Curriculum が必修教科に導入された。本節では、英国のこの国定カリキュラムにおける確率教育について、DfEE and QCA(1999)、長崎 (1994)、深澤・二宮 (2006a,2006b) に基づいて概観する。

国定カリキュラムは 10 教科において設定されている。そして、数学の場合、教育内容を 5 つの領域 (attainment target) に分け、それに指導順序と指導計画を付けている。5 つの領域は、「数学の利用・応用」、「数」、「代数」、「図形と空間」、「資料の扱い」であり、確率は「資料の扱い」の中に位置づけられている。また、指導順序は 10 の段階 (レベル 1 〜10) に分けられ、それが表 1.4 の 4 つの主段階 (key stage) に分けられている。

1999 年版のカリキュラムから小・中学校段階での確率に関する内容を抜粋したものが表 1.5 である。

表 1.4　主段階と年齢

主段階	年齢
第 1 主段階	5 歳から 7 歳
第 2 主段階	8 歳から 11 歳
第 3 主段階	12 歳から 14 歳
第 4 主段階	15 歳から 16 歳

表 1.5　国定カリキュラムにおける確率に関する内容 (1999 年版)

主段階	内容
2	・0 から 1 の範囲にある確率を理解し活用できる。 ・確率を調べ、十分な根拠を示すことができる。そして、等しく起こりやすい結果や実験に基づく方法を適切に選び、活用して、確率やその近似値を見つけ正当化することができる。 ・実験を繰り返し行うことにより異なる結果がでることを理解できる。
3	・問題を解決するとき、すべての結果の確率を足すと 1 になるという知識を用いることができる。 ・相対頻度を理解し、確率の推定や実験の結果の比較に活用できる。
4	・複合事象の確率の計算方法を理解し、問題解決に活用できる。 ・独立で互いに排他的事象と関連した確率を用いて、いつどのように調査を行うべきかを判断できる。

表 1.6　国定カリキュラムにおける確率に関する内容 (1991 年版)

主段階	内容
1	ランダムな事象の可能な結果
2	不確かな度合い
3	可能性の順序、事象の考え、公平と不公平

表 1.5 より、小学校の段階から確率の内容が位置づけられ、指導されていることがわかる。英国では、小学校低学年から統計のカリキュラムが非常に充実している。このカリキュラムでは第 1 主段階では統計の内容は扱われているが、確率の内容は第 2 主段階からの扱いとなっている。

このことは、1991 年版のカリキュラムとは相違がある。1991 年度版の小・中学校段階での確率に関する内容を抜粋したものが表 1.6 である。1991 年版のカリキュラムでは、小学校の低学年に該当する第 1 主段階から確率が扱われているものの、1999 年版のカリキュラムでは、1991 年版よりも第 2 主段階での内容がより充実していると考えられる。また、1991 年版のカリキュラムは、NCTM のスタンダードのものに近いものとも言えよう。統計と確率の学習において、問題解決に活用が意識されていることにも注意しておく必要がある。

このように、英国においても、確率を含む統計教育が重視され小学校の段階から確率が導入されていることがわかった。

1.2.3 中国における確率教育

本節では中国での確率教育の現状について、李 (2005、2006a,2006b) をもとに概観する。

中国では 1999 年から「先進諸国の教育政策、システム、方法などを研究し、導入すべきものを導入する」という方針の「創新教育」のもと、教育改革を実施してきており、数学教育のカリキュラムとしては「小学数学教学大綱」を実施してきた。しかし、この「小学数学教学大綱」は「内容は難しく教える知識は古く教える範囲は狭い」という批判があり、2003 年に「小学数学の標準カリキュラム (小学数学課程標準)」に改訂している。

以下、「小学数学課程標準」における確率教育について述べる。

まず、学年の分け方であるが、「小学数学課程標準」では以下 3 つに学年を区分している。

- 第一学習段階 (1～3 学年)
- 第二学習段階 (4～6 学年)
- 第三学習段階 (7～9 学年)

そして、それぞれの学習段階は「代数と数」「空間と図形」「統計と確率」「実践と総合応用」という 4 つの領域に分かれている。つまり、「確率」はこの 3 つ全ての段階に位置づけられていることとなる。

また、カリキュラムの目標は「総目標」と「具体的な目標」に分かれており、さらに、具体的な目標は「知識と技能」「数学的な考え方」「問題の解決」「情緒と態度」の 4 つに分けられている。確率に関わる目標は、このうちの「知識と技能」の中に次のように位置づけられている。

具体的な目標 (知識と技能)

●数学の学習活動の中で問題例提出 (作問) を体験する。

・ ものごとのデータ収集、処理を通して、その結果と予測のプロセスを体験する。

・ 統計と確率の基礎知識と基本技能を掌握する。

・ 簡単な統計と確率の問題ができる。

そして、内容の標準として、以下のように示されている。

具体的な目標 (知識と技能)

「統計と確率」の内容は、主に実生活のデータと偶然の事象を研究することであり、データの収集、整理及び分析を通して、ものごとの発生する可能性を合理的に予測・推定することである。

具体的な内容の構成として、次の表 1.7 のように示されている。以上より、中国においても、統計・確率教育がたいへん重視されており、確率も小学校の低学年から導入され、継続的に指導が行われていることがわかる。また、具体的な目標の中の「数学の学習活動の中で問題例提出 (作問) を体験する」という項目に位置づけられており、児童の主体的な活動の中での学習が目標とされていることも注目に値する。これらは、英国の国定カリキュラムや NCTM のスタンダードの影響があったと考えてよいだろう。

表 1.7　小学数学課程標準における確率

学習段階	統計と確率
第一段階 (1〜3 学年)	不確定事象
第二段階 (4〜6 学年)	偶然事象
第三段階 (7〜9 学年)	確率

1.2.4 確率教育の世界的動向

このように、世界に眼を向けると、確率教育は新しい局面をむかえている。米国のNCTMのスタンダード(1989、2000)では小学校下学年から児童・生徒の発達にそってカリキュラムがつくられている。この傾向は、英国、中国のカリキュラムも確率については同様の傾向にある。これらのカリキュラムは活動を積極的に取り入れており、上級学校で教えられていた確率の内容を早期に導入しようとした、現代化の時のカリキュラムとは大きく方針を異にする。

欧米におけるこのような小学校下学年から確率教育を導入するという新しい動向には、継続して取り組まれ発展している確率概念の認識の研究の発展があることは間違いない。しかし、日本においては、小学校の下学年からの確率教育はもちろんのこと、現代化の撤退から現在まで、生徒の確率の認識の発達に基づきそれを促進するような確率教育についての議論は行われていない。それは、日本において確率概念の認識における研究が、十分に行われていなかったということも１つの要因であろう。

もちろんその他の要因としては、確率の学問としての歴史の浅さが背景にあり、現代化の当時では現代数学の発展という理由の強調には無理もあっただろう。しかし、これは日本に限られたことではない。現在となっては、確率は学問としても十分な高まりと広がりを持つようになっている。また、私たちの日常生活にも深く関わってきていることからも、教材として受け入れる環境は十二分に整ってきている。今こそ、日本においても生徒の確率の認識の発達に基づき、それを促進するような確率教育のカリキュラムが求められている。

次章においては、確率概念の認識についての内外の先行研究について概観する。

第2章

確率概念の認識に関する先行研究

カリキュラムの構成には、確率概念の認識についての研究が不可欠である。

海外においては、Piaget & Inhelder(1951) の研究を端緒とし、Fishbein(1975,1998 等)、Jones(1997) 等、カリキュラム開発の拠り所になったと考えられる多くの研究が存在する。それに対して、日本の数学教育においても少数ではあるが、川嵜 (1983)、福間・磯田 (2003)、松浦 (2005,2006) 等、確率概念に関する研究がある。

また、適切なカリキュラムの構成に言及したものとしては、守屋ら (1997,1998)、横地 (2005,2006) がある。守屋ら (1997,1998) は小学生に対する認識調査より小学校での期待値の導入の妥当性を述べ、横地 (2005,2006) は 5 歳児の確率概念に認識から小学校への確率教育の導入について提言を行っている。

本章では、これらの先行研究について概観するとともに、これらの認識研究をカリキュラム開発の原理と考えた時の問題点を指摘する。

2.1 海外における先行研究

2.1.1 Piaget&Inhelder による研究

Piaget&Inhelder(1951/1975) は子どもの確率概念の発達について一連の体系的な研究を行った。Piaget らによると、確率概念の発達には、3 つの段階が認められる。第 1 段階は、5、6 歳までで、Piaget の一般的な発達段階では前操作期に相当する。この段階の子どもは可能性と必然性の区別をすることができない。そのため、偶然や確率という概念を持つことはない。

表 2.1　Piaget らによる確率概念の発達

第 1 段階	前操作期	5、6 歳まで	偶然や確率の概念はない。
第 2 段階	具体的操作期	7、8 歳から 10 歳まで	偶然を、操作の結果を推論できないこととして捉える。
第 3 段階	形式的操作期	11、12 歳以降	偶然を、操作の結果に多数の可能性が考えられるがそのうちどれが生じるかが明らかではない状況として捉える。

第 2 段階は 7、8 歳から 10 歳頃までの具体的操作期に相当する。この頃になると論理数学的な直観の発達は新たな段階に到達するため、科学的な操作の理解が可能になる。これに伴い、不可逆的で推論が不可能なものとしての偶然の概念が現れ始める。しかし、これはあくまでも偶然を「操作の結果を推論できないこと」として偶然を捉えている。

第 3 段階は 11 歳あるいは 12 歳以降の形式的操作期にあたる。子どもは形式的な思考が可能な段階に到達するし、目の前に存在しない対象について抽象的に様々な可能性を考えることが可能になり、順列や組み合わせについても、単純な対象についてであれば、体系的に考えることができるようになる。この段階では「偶然を操作の結果に多数の可能性が考えられるが、そのうちどれが生じるかが明らかではない状況」として捉えることができるようになる。これにより、多数回繰り返せば生起することもあるというように、偶然による事象の生起を確率的に扱うことが可能になる。また、この時期には比率が理解できるようになり、確率を合理的に理解できる基礎が出来上がる。

以上のことをまとめたのが、表 2.1 である。

つまり、Piaget らは、子どもの確率概念は具体的操作期から形式的操作期にかけての認知発達に伴って発達し、11 歳から 12 歳頃になると基本的な確率概念が獲得されるとする。

2.1.2 Fischbein による研究

Fischbein(1975) は、Piaget らの研究に基礎をおきながらも、確率概念の発達過程が Piaget らの主張するほど単純ではないことを示した。Fischbein の主張の 1 つは、Piaget らのいう第 1 段階の子どもでも偶然や確率についての直観を持っているということである。これは、第 3 段階のように概念的なレベルのものではなく、起こり得る場合が少ない時にのみ推論できるという不安定なものではある。

表 2.2 は、Fischbein が主張する確率概念の発達である。Hawkins & Kapadia(1984) は、Piaget がその過程で子どもたちの “自然発生的な”発達を考察しているのに対し、Fischbein は確率概念の発達をより修正する方法を含む教師の行動等を考慮していると指摘する。

表 2.2　Fishbein による確率概念の発達

5、6 歳まで	偶然を正しく推論する (ただし、起こり得る場合が少ない時)。
7、8 歳から 10 歳まで	概念上のレベルでさえも、偶然と推論できることを区別できる。
11、12 歳以降	現実のものだけではなく、可能性について仮説演繹法で推論することができる。

また、Fischbein は学校教育を含む文化的要因が確率概念の発達にとって妨害的に働いている場合があるとも主張する。確率判断の中には、年齢が高くなるほど誤りが多かったり、合理的ではなくなるものがある。Fischbein は、このことを確率の直観に基づくミスコンセプションの年齢に伴って変化を調べることにより示した (Fischbein,et al.,1998)。Fischbein はこれらの現象を、現代社会における決定論的な説明を偏重する文化、教育的な背景がもたらしたものとしている。なお、松浦 (2006) は、この Fischbein 等の研究を受けて日本の児童・生徒に対して実態調査を行なっている。

2.1.3 Horvarth らによる研究

Piaget が子どもたちの "自然発生的な" 発達を考察しているのに対し、Fischbein は確率概念の発達をより修正する方法を含む教師の行動等も考慮しているのであった。さらに、Horvarth らは、確率を教えることと学ぶことを統合するという立場のモデルを採用するという、より積極的な支援をする立場をとる。

Horvath らは、①2 年生 (7〜8 歳)、②4,5 年生 (9〜11 歳)、③大人の 3 つのグループに対して実験を行い、偶然と不確実のモデルの発達について、5 つの構成要素— a) 確実と不確実の間の区別 b) 実験的試行の性質 c) 個々の出力と出力の結果の間の関係 d) 事象の構造 e) 誤差の扱い—にそって能力を分析している。彼らは確率に認識の様相を詳しく述べている。以下、Horvath,et al.(1998) をもとに述べる。

a) 確実と不確実の間の区別

Horvath らは、4,5 歳の子どもでさえも何らかのシステムでの不確実性の概念を理解しており、すべての 7〜8 歳の児童は、他のより決定的な課題での確実とサイコロを振る等の単純な装置の課題での不確実をはっきり区別したという。にもかかわらず、多くの子どもはサイコロを投げることをまったくのランダムとは考えていない。7〜8 歳の児童の多くは、サイコロを振った時に、何とかして結果に影響を及ぼすことができると信じたけれども、次第にこれらの考えを捨て、サイコロを振って出る目の結果を不確実としてみなすことができた。他の 2 つのグループ (9〜11 歳、大人) は両方とも、はっきりと確実と不確実の間の違いを理解し、調査の間中、取り組んだ課題の結果を不確実とみなしたという。

表 2.3　確実と不確実の間の区別

<table>
<tr><td>① 7〜8 歳の児童</td><td>確実と不確実を区別できるが、出る結果に影響を及ぼせると考える。</td></tr>
<tr><td>② 9〜11 歳の児童</td><td rowspan="2">確実と不確実を区別でき、出る結果が不確実であることも理解できる。</td></tr>
<tr><td>③ 大人</td></tr>
</table>

b)　実験的試行の性質

2つのスピナーを回転させることを考える。1つは時計回りで、もう1つは反時計回りである。実験的試行の性質を理解することは、2つのスピナーを回転させても、同じ実験の2つの試行と考えることができることである。実験的試行においては、同じランダムな結果が産み出される、つまり、鍵となる構造が同一であることが、本質的な前提条件なのだという。

7〜8歳の児童は、サイコロやスピナーを使って取り組んだ課題に対して、実験的試行の性質を理解しなかったという。いくらかの児童は、実験装置に含まれる仕組みや他の外力(サイコロの投げ方やスピナーのまわし方等)の影響で、結果が何らかの偏りを持つと考えた。

他の2つのグループ(9〜11歳、大人)は両方とも調査を通して結果の偏りを受け入れることができたが、9〜11歳の児童は、期待していたのではない結果が表れた時は、偏りの原因を実験装置の仕組みや他の外力等に求めようとしたと報告している。

c)　単一の事象と分布の間の関係

サイコロを1回投げる場合を考える。1回投げた時、何の目が出るかは予測することが難しいが、繰り返しサイコロを投げると、どの目がどれぐらい出るかという、全体の結果の分布は予測できるという。このことは、大数の法則として説明される。この法則は、試行の数が大変大きい時、結果の規則が事象の構造から得られるある分布に収束するだろうということをことを示している。

7〜8歳の児童はすべて、サイコロを1回投げた時の結果を予測することが難しいとみなした。繰り返しサイコロを投げた時の結果の分布についても、予測することが難しいと考えたという。しかしながら、いくらかの児童は、彼らの予測は違ったように見えたにもかかわらず、結果の分布を予測することが難しいとしている。

9〜11歳の児童は、1回投げた時の結果は予測することが難しいが、試行を繰り返した時の結果の分布は予測可能だとみなした。しかしながら、予測した分布の性質は、標本空間の要素の理解に常に基づいているとは言えなかったという。大人は、1回投げた時の結果を予測不可能として、試行を繰り返した時の結果の分布は予測可能として全体をみたという。予測した分布は、完全に標本空間の要素の理解に基づいていたと報告している。

表 2.4　実験的試行の性質

①　7～8 歳の児童	実験的試行の性質を理解しなかった。結果の偏りを受け入れることはできなかった。
②　9～11 歳の児童	実験的試行の性質を理解したが、結果の偏りは受け入れがたいこともあった。
③　大人	実験的試行の性質を理解し、結果の偏りを受け入れた。

表 2.5　単一の事象と分布の間の関係

①　7～8 歳の児童	ほとんどの児童は 1 回の試行の結果は予測不可能、試行を繰り返した時の結果の分布についても、予測不可能と考えた。
②　9～11 歳の児童	1 回の試行の結果は予測不可能だが、試行を繰り返した時の結果の分布については予測可能だとみなした。 予測した分布は、標本空間の要素の理解に基づいている。
③　大人	1 回の試行の結果は予測不可能だが、試行を繰り返した時の結果の分布については予測可能だとみなした。 予測した分布は、標本空間の要素の理解に基づいている。

d)　事象の構造

Horvath らによると、偶然の伝統的なモデルは標本空間の概念に依拠しているという。例えば、2 枚のコインを投げ、2 枚のコインの裏表を予想する問題を考える。この時に、表 1 枚、裏 1 枚という結果に到達する 2 つの違う方法があることに注意しなければならない。すなわち、最初のコインが表で 2 番目が裏である場合と、その反対、つまり、最初のコインが裏で 2 番目が表である場合の 2 通りがあることである。そして、このような起こり得る場合を徹底的に調べ、{表表、裏表、表裏、裏裏} という標本空間を構成することが必要となる。そして、標本空間を結果の分布へ写像しなければならない。Horvath らは、この事象の構造を 3 つのグループの児童がどのように理解しているかを実験によって調査している。

たいていの 7〜8 歳の児童は、調査を始めた時、標本空間と結果の間の関係についても理解することができなかった。しかし、棒グラフという表記のシステムを知ることとクラスでの会話という 2 つの支援を与えられた後は、この関係を理解できるようになった。しかしながら、支援するのをやめた時、少数の児童だけが、それらの関係についての推論を続けた。

9〜11 歳の児童では、実験を始めた時、標本空間と結果の間の関係について考慮することができなかったという。しかしながら、教師からの支援、表記システムの支援 (標本空間を表記し、具象化する棒グラフ) で、彼らはすぐに標本空間についての重要な考えを推論に組み込み、支援が取り除かれた後でさえもそれをすることを続けた大人は、実験の至る所で、どのように (結果の理想的な分布の代表であった) 標本空間が結果と関連しているか、つまり、事象の構造が結果へ関係しているかを理解した。

e) 誤差の扱い

伝統的なモデルでは、データの一群は (理想的な) 標本空間の近似とみなされる。そうすると、モデルとモデル化された現象間に誤差 (例えば、予想と実際の結果の間の相違) があることが予想される。Horvarth らによると、この誤差の扱いについて、7〜8 歳の児童の大多数と 9〜11 歳の児童、大人のグループの間に著しい違いがあった。

表 2.6　事象の構造

①　7～8 歳の児童	たいていの児童は、標本空間と結果の間の関係について理解することができなかった。支援をすると、この関係を理解できるようになったが、支援するのをやめると、少数の児童しかそれらの関係についての推論することができなかった。
②　9～11 歳の児童	実験を始めた時、標本空間と結果の間の関係について考慮することができなかったが、支援によってこの関係を理解できるようになり、支援が取り除かれた後でさえもそれらの関係についての推論をすることができた。
③　大人	実験の至る所で、標本空間と結果の間の関係について理解した。

表 2.7　誤差の説明

① 7～8 歳の児童	大多数の児童は、すぐに誤差を、避けられない実験の結果として理解するが、誤差を、単に予測を変化させることによって説明した。
② 9～11 歳の児童	はじめは、過去の結果と誤差に基づいた予測を修正することによって理解したが、すぐに、避けられない実験の結果として誤差を受け入れるようになり、標本空間によって示されたモデルに基づいて理解した。
③ 大人	偶然と不確実のモデルが実際の現象の理想化であったことを理解し、理想と実際の間の相違が誤差であることを完全に理解した。

7〜8 歳の児童の生徒の大多数は、すぐに予測からの誤差を不確実な環境での避けられない実験の結果として理解するようになった。しかしながら、彼らは誤差を推量と標本空間の「くるい」を説明することによってではなく、過去の経験をよりよく一般化するため、単に予測を変化させることによって説明した。

9〜11 歳の児童の先生は、実験を通して、その領域の標本空間の予測に基礎を置いた。いくらかの誤差に気付いた後の彼らの最初の反応は、7〜8 歳の児童と同じく、過去の結果と誤差に基づいた予測を修正することであった。しかし、彼らはすぐに避けられない実験の結果として誤差を受け入れるようになった。そして、調査の終わりまでに彼らの予測はもはや過去の経験の一般化ではなく、標本空間によって示された領域のモデルに基づくものとなった。

大人はモデル化する過程から誤差の性質とそのための推論を理解した。彼らは、偶然と不確実のモデルが実験していた実際の現象の理想化であったことを理解し、理想と実際の間の相違があることを完全に理解した。

2.1.4 Jones による児童の確率の思考を評価、養成するためのフレームワークについての研究

Jones らは、児童の確率認識についての研究は Piaget、Fischbein をはじめとし多くあるものの、児童の確率の思考を組織的に記述したり予測したりするためのフレームワークを産み出す研究はないとし、児童の確率の思考を評価、養成するためのフレームワークを提案している (Jones 他,1997)。本節では、この Jones が提案したフレームワークについて述べる。

彼らは数学的確率の形成過程に焦点を絞って研究を進めている。これは、統計的確率を軽んずるということではなく、それに続けていくための基礎として、数学的確率での子どもたちの直観的な考えから研究を始めるという立場からであるとしている。

この研究で特筆すべき点は、彼らが具体的な確率概念をあげ、その形成過程を記述している点である。具体的には、標本空間、事象の確率、確率の比較、条件つき確率という 4 つの鍵となる構成概念を取り上げている。そして、この 4 つの鍵となる構成概念のそれぞれに対して、レベル 1 からレベル 4 までの 4 つレベルを通して記述する。4 つのレベルの説明は、表 2.8 の通りである。

そして、これらの視点からの先行研究の分析と小学校 3 年生の児童を対象にした調査・観察の結果より、表 2.9 に示すフレームワークを得たという。

なお、この表の、1 段階の実験 (one-stage experiment) とは、コインを 1 つ投げる場合のような単一事象の試行のことであり、2 段階の実験 (two-stage experiment) とは、例えば、コインを 2 つ投げる場合のような、複合事象の試行のことを指す。

また、Jones らは、このフレームワークをカリキュラム開発のための手がかりとしており、このフレームワークに基づいて小学校第 1 学年から第 3 学年の確率教育プログラム (Probability Instructional Program) を実際に作成しているという (Jones,1999)。

また、このフレームワークは、その後の確率概念の認識研究にも影響を与えている。例えば、Polaki は、複合的事象における確率の認識に焦点を絞り、このフレームワークを拡張したものを提案している (Polaki,2005)。また、Tarr と Lannin は、このフレームワークをもとにしながらも、対象を中学生とし、条件的確率と独立性の概念の形成について考察している (Tarr&Lannin,2005)。このように、Jones のフレームワークはその後の確率認識研究の 1 つの枠組みとして利用され、現在も拡張されている。

表 2.8　Jones による「4 つのレベル」

Level 1	Subjective	$\Rightarrow$	主観的な思考
Level 2	Transitional	$\Rightarrow$	(主観的な思考と生まれつきの量的な思考との) 過渡期的な思考
Level 3	Informal Quantitative	$\Rightarrow$	インフォーマルな量的な思考
Level 4	Numerical	$\Rightarrow$	数値的な推量

表 2.9　確率的思考のフレームワーク (Probabilistic Thinking Framework)

構成概念	レベル 1 主観的	レベル 2 過渡期的	レベル 3 インフォーマルな量的	レベル 4 数値的
標本空間	・1 段階の実験の結果の不完全な集合をリストアップする。	・1 段階の実験の結果の完全な集合をリストアップする。 ・時々、制限された組織的でない方略を用いて複合的な試行の結果の完全な集合をリストアップする。	・部分的に一般的な方略を用いて 2 段階の実験の結果を一貫してリストアップする。	・2 段階や 3 段階の実験の場合の結果の完全なリストアップができる一般的な方略を採用し、適用する。
事象の確率	・主観的な判断に基づいてもっとも起こりそうな (起こることがなさそうな) 事象を予測する。 ・確実に起こる事象と不可能な事象について認識する。	・主観的な判断に基づくだけでなく量的な判断に基づいてもっとも起こりそうな (起こることがなさそうな) 事象を予測する。	・離散的な結果を伴う状況を含めて量的な判断に基づいてもっとも起こりそうな (起こることがなそうな) 事象を予測する。 ・確率を比べるためにインフォーマルに数字を使う。 ・確実な事象と不可能な事象、起こり得る事象を区別し、量的な選択を正しいと判断する。	・単一な試行についてのもっとも起こりそうな (起こることがなさそうな) 事象を予測する。 ・(本当の確率か見込みの形で)1 つの事象に対して数値的な確率を与える。
確率の比較	・たいていは多様な主観的か数値的な判断に基づいて、2 つの違う標本空間で事象の確率を比べる。 ・“不公平な” 確率の状況から “公平な” 確率の状況を区別することができない。	・(正しく数値で表すことができないかも知れないし、離散的な事象が含まれているところでは制限されるかも知れないが) 量的な判断に基づいて確率の比較をする。 ・“不公平な” 確率の状況から “公平な” 確率の状況を区別することができはじめる。	・一貫性のある量的な判断に基づいて確率の比較をする。 ・離散的な事象が含まれる時には制限があるかも知れないが、妥当な量的な理由で正しく判断する。 ・妥当な数値的な数値的な推論に基づいて、“不公平な” 確率の生成系と “公平な” 確率の生成系を区別することができる。	・数値的な確率の尺度を与え、事象を比較する。 ・確率の決定に際して離散的な結果と連続的な結果を合併する。 ・等しく起こりやすい事象に対して等しい数値的な確率を与える。
条件つき確率	・1 段階の実験で 1 回の試行を続ける時、最初試行の前に完全なリストが与えられても、結果の完全なリストを与えない。 ・確実と不可能となな事象が交換できない状況で発生することを認識する。	・交換できない状況において、ある事象の確率が変わることを認識する。しかしながら認識は不完全で、たいてい事前に起きた事象に制限される。	・交換できない状況において確率の尺度が変わることを判断することができない。 ・交換できない状況において、すべての事象の確率が変わることを認識する。	・交換できる状況や交換できない状況において数値的な確率を与える。 ・従属事象と独立事象を区別する。

2.2 日本における先行研究

2.2.1 川嵜による Piaget や Fischbein の解釈と提案

川嵜 (1983,1990) は、Piaget や Fischbein 等の心理学的な先行研究をもとに確率教育の問題点を指摘している。

川嵜 (1990) によると、確率概念のとらえ方は各研究者により異なるが、すべての研究者が確率概念は偶然概念と比例概念の 2 つの下位概念により形成される概念であると考えるのが妥当だとしている。しかし、その形成時期については大きく 2 つの説に分けられ、それぞれの説における代表的人物が Piaget と Fischbein だという。つまり、Piaget の確率概念は子どもが形式的操作期 (11 歳頃から) になるまでは形成されないという説に対し、Fischbein は遅くとも 6、7 歳、早ければ 4 歳の子どもでもすでに確率を判断することができるという説をとる。この相違は、Piaget が確率概念の 2 つの下位概念である偶然概念と比例概念が並行して発達すると仮定しているのに対し、Fiscbein は両概念が独立して発達すると仮定しているのに起因するという。

そして、川嵜は Fischbein の立場をとり、Fischbein の

> 子どもは 5,6 歳で偶然に直観を持ち始めており、確率概念の理解に必要な心理的機能はこの頃すでに現れはじめているのであるが、それを用いるようになるのには簡単な学習をしなければなならない。しかし、学校にはいると規則性の強調、決定論的概念の詰め込みのために、その健全な発達が妨げられてしまう (Fischbein,1975、川嵜訳)

という意見から小学校の早期から偶然概念に基づいた指導を行うべきなのだと主張する。

現在の確率指導では、比例概念の形成が大前提となっており、比例概念に基づいて複雑な分数計算が重視されている。そのため、比例概念に比べて偶然概念がおろそかになっており、そして、そのことが確率指導における様々な問題点の原因となっているという。

2.2.2 福間・磯田による確率分野における学習過程の水準

福間・磯田は、確率の学習の発達の様相およびそこでの均衡化の内容を明らかにすることを目的として、確率分野における水準を作成している。そして、作成した水準を、一般化された水準と対比したり、実態調査から検討を加えたりして、水準の記述を実体化し

た。以下、福間・磯田 (2003) を参考に、福間らの「確率分野における学習過程の水準」について述べる。

福間らは「確率分野における学習過程の水準」を次のように設定している。

第 0 水準　事象を 経験から予測して 考察する。

第 1 水準　予測を 確率 で考察する。

第 2 水準　確率を 確率の規則性 で考察する。

第 3 水準　確率の規則性を 確率の命題 で考察する。

第 4 水準　確率の命題を 公理的 に考察する

(下線部が認識方法である)

これをまとめたものが表 2.10 である。

福間らは、それぞれの水準について説明を加えている。以下にその説明を記す。

第 0 水準 : 直観的確率

事象の起こり得る場合を自ら予測する水準である。自分の考えや経験から確率を見つけだす。「確率」という言葉を用いることもあるが、「確率」がどんなものであるかはわかっておらず、場合を取りつくす意識もない。

第 1 水準 : 割合としての確率

予測したことを確率で表すことができる水準である。数値の大小を用いて、起こりやすさを判断することができる。統計的確率と数学的確率の区別はなく、どちらも確率という言葉を用いて表すが、その確率という語も次のように使う。数学的な確率としては、簡単場合を取りつくして確率を求めるが、同様に確からしいことの前提はあいまいである。統計的な確率としては、標本における割合として確率を求めるが、大数の法則は問題にしない。

第 2 水準 : 確からしさとしての確率

数学的確率と統計的確率は区別される。

(数学的確率) : 定式化された算法としての確率

確率を順列・組み合わせの計算により考察できる水準である。積、和の法則を用いて順列・組み合わせを考えることができ、経験的には加法定理を用いるが、条件つき確率・乗法定理は用いることができない。

(統計的確率) : 極限的発想としての確率

確率を割合で表すことができ、試行回数を増やしていくと、ある確率に近づいていくことがわかる。

第 3 水準 : 理論化された確率

確率の命題を用いて確率を求めることができる水準である。

(数学的確率) : 代数的方法による確率

条件つき確率、加法定理、乗法定理を用いることができる。事象の独立と従属等を考えるが、確率空間では考えることができない (統計的確率) : 積分方法による確率

確率を正規分布、二項分布等で表し、平均分散、標準偏差を用いる。

第 4 水準 : 公理的確率

確率を公理で考える水準である。確率モデルを用い、測度論で確率を考える。

数学的確率と統計的確率は、水準に応じて分化し、定式化され、統合されていくことから、確率における水準での組織化原理とみることができると述べている。そして、小、中、高校生に対して、水準を明確にするための調査 (とインタビュー) を行い、その結果から水準の妥当性を示したとしている。

表 2.10　確率分野における学習過程の水準

水　準	対　象	方　法
第 0 水準	事象	経験からの予測
第 1 水準	予測	(割合としての) 確率
第 2 水準	確率	確率の規則性
第 3 水準	確率の規則性	確率の命題
第 4 水準	確率の命題	公理

2.2.3 守屋らによる確率期待値の概念についての研究

守屋・神保 (1997) は、アメリカの教科書を調査して、アメリカの小学校では 1 年生から毎学年確率の指導が行われていることを明らかにした。しかし、現在の日本の数学教育では、中学 2 年生で行われている。アメリカと比較するとずいぶん遅いが、日本の確率の指導の時期の妥当性はどうなのであろうか。守屋・神保 (1998) は、このような問題点から、日本の小学生にとって、確率の概念が自然に目覚め、発達し始めるのはいつからなのかという子どもの実態を調査し、確率の指導開始時期を提案している。

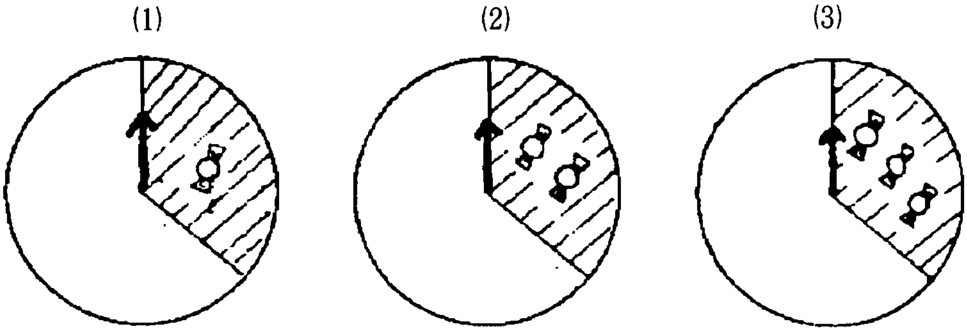
守屋らは、1997 年 7 月下旬に、小学校の 2 年生から 6 年生の 1 クラスに対して、右のような教具を使った確率期待値の概念の調査を実施している。次に、守屋らが行った設問を要約したものが表 2.11 である。

また、表 2.12 は守屋らの調査の結果である。この結果から、守屋らは次のように考察している。

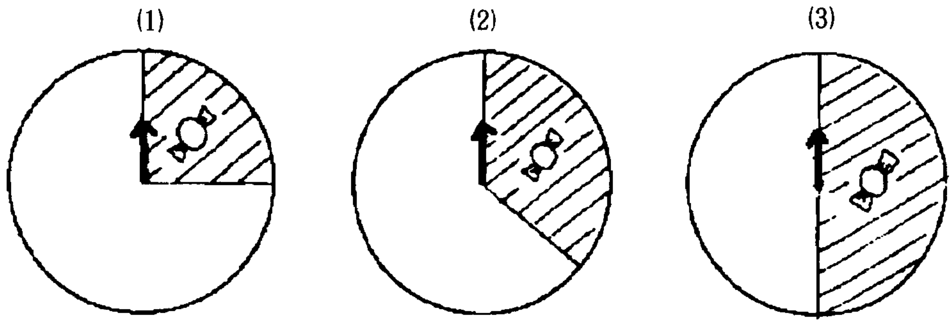
設問①②③のような簡単な確率の概念については、小学校までの日常生活で、十分に培われている児童が多い。小学校 4 年以前の段階で十分に指導が可能と思われる。が、小学校の 6 年生でほぼ全員正答できるわけではない。また、期待値は、高等学校で指導されているが、小学校 6 年生でも指導の効果が期待できる。また、「確率」という言葉は、小学校の 4 年生以降の子どもたちにとって、生活用語になっていると思われる。そして、これらの考察から、確率は小学校の低学年から、期待値は正答率が上昇する小学校の 6 年生から行うのが適当だと結論づけている。

表 2.11　守屋らが行った設問

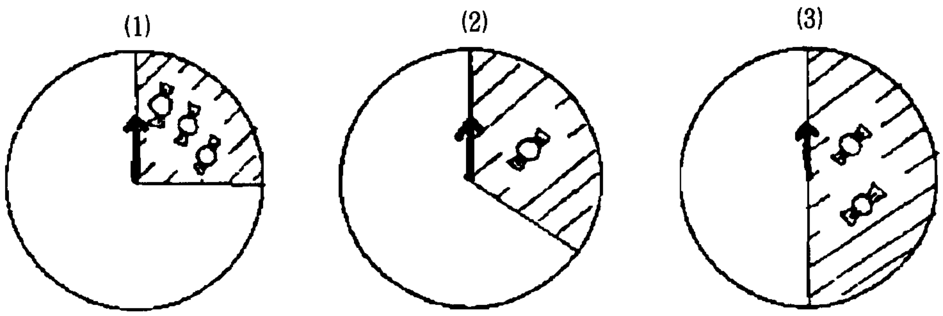
① 一番うまくあめをもらえそうなのはどれか。理由も書け。



② 一番うまくあめをもらえそうなのはどれか。理由も書け。



③ 一番うまくあめをもらえそうなのはどれか。理由も書け。



④ 2.1 写真 4.2.2 の教具を 8 回まわした時、あめは何個もらえそうか。理由も書け。

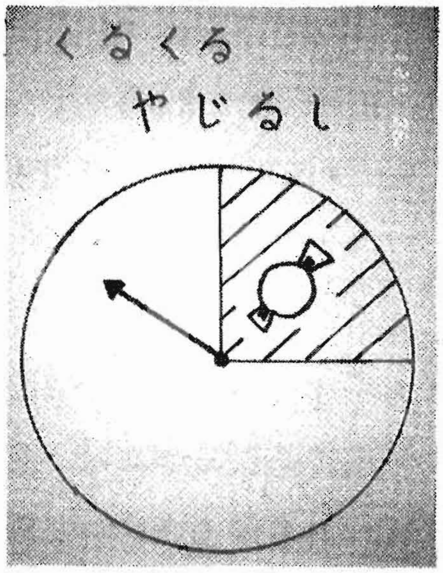


図 2.1　守屋ら (守屋・神保、1998) で用いられた教具

表 2.12　守屋ら (1998) の調査の結果

正答率	問①	問②	問③	問④
2 年	0.79	0.89	0.57	0.03
3 年	0.68	0.84	0.66	0
4 年	0.47	0.85	0.71	0.24
5 年	0.97	0.88	0.75	0.09
6 年	0.95	0.9	0.83	0.33

2.2.4 横地による小学校への確率教育導入の提案

Piaget や Fishbein 以降継続して行われている一連の確率概念の認識の研究の成果には諸説があるが、欧米では、一般的に小学校第 3 学年で確率を捉えているとされている (Jones,2004)。それに対して、横地 (2006) は、5 歳児が確率現象に強い興味を示し確率空間や確率変数の概念を含む遊びに興じる様子を次のように報告している。

5 歳児が「色色どんな色」を主題とした年間通しの総合保育において、トンネル状の「色の道」を通って、その出口において、5 歳児が「どの色が好きですか」と質問する。例えばそれに「おれんじ色です」と答えると、5 歳児は「おれんじ色の壺から、くじを 1 本ひいてください」と言ったという。壺には 6 本の「ひご」が入っていて、1 から 6 までの数字がそれぞれに貼ってあり、6 が当たると、その番号に対応するの占い文を手渡される。「色の道」は全部で 6 種類の色があり、各色の壺に 6 本の「ひご」が入っている。子どもたちは全部で $6 \times 6 = 36$ 種類の占い文を用意していたという。

横地は、この事実から 5 歳児が 6 個の色がさらに 6 通りに分かれる 36 種類の重複試行を想定し手分けして占い文を作文していたことがわかるとし、さらに、5 歳児が重複試行の場合分けを嗜み、36 個の根元事象からなる確率空間について、お金といった数値ではなく占い文ではあるが、いわば確率変数を対応させたと解釈する。さらに、市民社会への確率の進出もあって、今日の 5 歳児は確率現象が大好きで、サイコロ投げや銭投げに満足する段階ではないと指摘する。

さらに、横地 (2006) は、この事実をもとに小学校下学年からの確率教育の必要性を説き、表 2.13、表 2.14、表 2.15、表 2.16 のように実際の教育内容を提案している。(確率の内容のみを抜粋)

このように、小学校 1 年生では、確率が適用される不確定の事象に注意を向けさせることや、各根元事象の確率が等しいとみなされるとき根元事象の集合でできた事象の確率の大小を判断することなどを、2 年生では、簡単な場合について独立な 2 つの試行についての重複試行の確率の大小を判定することを、そして、3・4 年生では、1 つの試行についての根元事象やそれらの集合で編成された事象の確率を分数で表すことを取り上げることを提案している。さらに、現段階では「確率」は 4 年から 5 年にかけての時期が学習に適した時期だと想定されるとし、5・6 年では確率に関する法則、確率変数の概念の体得に迫れるとしている。

表 2.13　横地による確率の内容の提案 (1 年)

例題 1　次のことがらのうち、起こることが確かな事柄はどれですか。起こるかどうか確かでない事柄はどれですか

① 明日、初めて家の外に出たとき、男の人が自転車に乗って走るのを見る。

② 今日が日曜日とすると、明日は火曜日である。

③ 今、さいころを振るとすると、最初に出る目は 3 である。

例題 2　1 から 12 までの目を記したルーレットを回します。矢は目の境い目にこないとします。このとき、次に答えなさい。

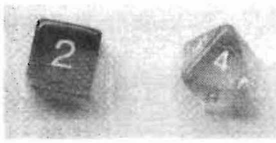
① 3 の目がでる確からしさと、8 の目がでる確からしさは、同じですか。それとも、どちらか一方が他方より小さいですか。

② 4 または 5 の目が出る確からしさと 10 以上の目が出る確からしさとは、どちらが大きいですか。

表 2.14　横地による確率の内容の提案 (2 年)

例題 1　袋の中に、同じ形をしていて、色だけが違う玉が 8 こ入っています。赤玉が 3 こ、白玉が 5 こです。袋から勝手に 1 こ取り出すとき、玉が赤玉である場合と白玉である場合とで、どちらが出やすいですか。

例題 2　右の写真のように、2 つのさいころがあります。左側は 1 から 6 までの目がある赤のさいころで、右側は 1 から 8 までの目がある黄のさいころです。赤と黄のさいころを一緒に振ります。このとき、次に答えなさい。



① 赤のさいころの目が 4、黄のさいころの目が 7 と出たとき (ア 4、キ 7) と書くことにします。目の出方は全部でどれだけですか。上の記号を使って全部の場合を書きなさい。

② 赤のさいころの目が偶数で、黄のさいころの目が 3 の倍数となる場合は、全部でどれだけですか。

③ 赤のさいころの目が 3 の倍数で黄のさいころの目が 4 の倍数の場合と、赤のさいころの目が 5 で黄のさいころの目が偶数の場合では、どちらが出やすいですか。

表 2.15　横地による確率の内容の提案 (3・4 年)

例題 1　1 から 6 までの目の出るさいころを 1 回振ります。このとき、次に答えなさい。 ① 奇数の目の出る確率 ② 3 の倍数の目の出る確率 ③ ①の場合と②の場合と、どちらが出やすいですか。 例題 2　1 から 12 までの目が出るさいころ A と、1 から 6 までの目が出るさいころ B があります。このとき、次に答えなさい。 ① A のさいころを 1 回振ったとき、目が 4 以上になる確率はどれだけですか。 ② B のさいころを 1 回振ったとき、目が 4 の倍数になる確率はどれだけですか。 ③ ①の場合と②の場合と、どちらが目が出る確率が高いですか。

表 2.16　横地による確率の内容の提案 (5・6 年)

次の内容を扱う。 ① 排反する事象の確率に関する法則 ② 余事象に関する確率の法則 ③ 相次いで行われる独立な 2 つの試行についての重複試行の確率 ④ 経験的確率 (統計的確率の導入) ⑤ 確率変数の見方の導入

2.3　カリキュラム開発の視点からみた認識研究

これらの先行研究をカリキュラムの開発の視点からみると、以下のような問題点があげられる。

Piagetが、子どもたちの「自然発生的な」発達を考察しているのに対し、Fischbeinは確率概念の発達をより修正する方法を含む教師の行動等も考慮している。さらに、Horvarthらは、確率を教えることと学ぶことを統合するという立場のモデルを採用するという、より積極的な支援をする立場をとる。このように自然発生的な考察から、より教育の視点を取り込んでいることは評価できる。しかし、これらは数学的な視点から確率概念の形成過程を組織的に記述しているとは言えず、川嵜が指摘するように、指導時期の検討の点からはカリキュラム開発に有効ではあるが、カリキュラム構成のための原理を得るには至っていない。

カリキュラムの原理とするためのもう1つのアプローチとして、Jonesが提案した「確率の思考を評価、養成するためのフレームワーク」がある。これは、児童の確率認識についての研究は多くあるものの、児童の確率の思考を組織的に記述したり予測したりするためのフレームワークを産み出す研究はないとして取り組まれたものである。この認識論的研究は、今までの先行研究の成果や問題点をよく整理しており、特に4つの鍵となる構成概念(標本空間、事象の確率、確率の比較、条件つき確率)に着目したことで、これまでの確率的な直観等に着目してきた心理的研究とは一線を画する。しかし、このフレームワークはある程度広範囲に確率概念の認識の様相を明らかにしているが、基本的には数学的確率に焦点を絞って議論をすすめており、それ以前に重要であると考えられる統計的確率や、それ以降に重要であると考えられる確率の命題等の概念は守備範囲としない。この意味では確率概念全体の認識において有効とは言えず、カリキュラム構成の原理としてはその適用の範囲が限定されたものとなっている。また、4つのレベルを設定しているが、今までの文献研究、生徒の調査、観察をもとにして設定しており、その設定の構造は必ずしも明らかになっているとは言えない。

日本における確率概念の認識に関する研究として、福間・磯田の「確率分野における水準」があった。これは、確率の学習の発達の様相等を明らかにすることを目的として作成されたもので、作成した水準を一般化された水準と対比したり、実態調査から検討を加え

たりして、水準の記述を実体化している。ただし、小学生〜中学校第2学年まではまったく意図的な教育を受けていない現在の日本のカリキュラムを前提にした児童生徒を対象に聞き取り調査を行っているため、"自然発生的"な立場だと言えよう。また、これらの水準は van Hiele の幾何の学習水準の一般化の1つであるが、その特徴である「方法の対象化」は必ずしも明確ではなく、その設定の構造は必ずしも明らかになっているとは言えない。

守屋、横地らの研究は、日本における確率概念の認識の研究の中において、概念の適切な指導時期という視点からカリキュラムの改善について言及しているという点では貴重である。しかし、守屋らの研究はそこで扱っている概念が期待値という確率認識の一部分に留まっており、確率概念の認識全体の構造を明らかにしようとしたものではないので、当然確率分野のカリキュラム全体の構成に言及したものではない。また、横地の研究はあくまでも5歳児に対する実験での知見から構築された1つの提案であり、確率概念の認識の構造等から導かれたものではない。

このように、これまでの確率概念の認識に関する研究は、生徒の思考を記述し、そのカリキュラムの開発に一定の視点を与えてきたことは評価できる。しかし、カリキュラムの構成を考えるための原理という視点からみた時、その構造は必ずしも明確ではない。これからは、確率概念の認識の構造を記述した認識論的研究が求められていると考える。

第1部のまとめ

第1部においては、本研究の基礎となる確率概念の認識とその教育に関する先行研究について概観するとともに、検討を行った。

第1章では、日本の確率教育の歴史と確率教育の世界的動向について概観した。まず、第1節で日本の確率教育の歴史と現状について述べ、概観した確率教育の歴史をまとめた。そして、日本において、確率教育は次第に縮小の時代を迎えており、現在まで生徒の確率の認識の発達に基づきそれを促進するような確率カリキュラムについての議論は行われていないことを指摘した。第2節では、近年の諸外国における確率カリキュラムの動向について述べた。NCTMのスタンダードでは、小学校下学年から児童・生徒の発達にそってカリキュラムがつくられており、この傾向は英国・中国のカリキュラムについても同様である。また、これらのカリキュラムは活動を積極的に取り入れており、現代化の時のカリキュラムとは大きく方針を異にすることを指摘した。

第2章では、カリキュラムの構築に不可欠である確率概念の認識についての研究について概観した。第1節では、海外においてカリキュラム開発の拠り所になったと考えられるPiaget & Inhelder(1951)、Fishbein(1975,1998等)、Jones(1997)、Horvath(1998)の研究を取り上げ概観した。第2節では、日本の確率概念に関する研究として川嵜(1983、1990)、福間・磯田(2003)の研究を、適切なカリキュラムの構成に言及した研究として守屋ら(1997,1998)、横地(2005、2006)らの研究を取り上げた。そして、これらの認識研究が生徒の思考を記述しそのカリキュラムの開発に一定の視点を与えてきたことは評価できるが、カリキュラムの構成を考えるための原理という視点からみたとき、その構造は必ずしも明確ではなく、十分なカリキュラム構成の根拠となっていないことを指摘し、確率概念の認識の構造を記述した認識論的研究が必要であることを述べた。

第II部

確率概念の認識における水準

第3章

数理認識論と「方法の対象化」

本研究の目的の１つは、カリキュラムを構成するための原理を得るために、確率概念に対する認識論的研究を進めることであった。

従来、数学のカリキュラムを開発するにあたっては、児童・生徒の実態調査に依拠する心理学からのアプローチや、数学の系統性に依拠する数学からのアプローチが多かった。しかし、本研究では、そのどちらの立場でもなく、確率概念を数学的に形式化することでその認識の構造を明らかにするという数理認識論からアプローチするという立場をとる。

本研究で明らかにする認識の構造は「方法の対象化」である。「方法の対象化」は、van Hiele の水準論において水準を特徴付けるとされる構造である。「方法の対象化」によって設定された水準は、カリキュラム構成の原理となる。本章では、まず船越の数理認識論(1995,1998) について述べる。そして、この視座から、van Hiele の水準論について考察を加え、「方法の対象化」の構造を明確にすることを目的とする。

3.1 数学言語の構成と数理認識

本研究では数理認識に関する基本的な立場として、「数理認識とはものごとを数学という枠組み (一種の言語体系である枠組み—数学言語—) で捉えることである」という船越の立場をとる (船越,1995,1998)。

日常生活においては、現象・思想・意志等を日常使う言語 (日常言語) を通して捉えている。それに対して、ものごとを数・量・図形・文字・式・関数等の「数学」という枠組み (数学の体系) で捉えることが数理認識である。つまり、数学という枠組みは一種の言語の体系と考えられる。これを数学言語と呼ぶことにする。

日常言語は、コミュニケーションの媒介物として使われる。数学言語も同様に、数学という枠組みで捉えたことがらを表現・伝達する手段であって、コミュニケーションの手段である。日常言語が使われる中で、使い方を通して意味が理解されていくように、数学言語も使われる中で、使い方を通して意味が理解される。このように、数学言語は、数学を働きとして捉えることである。数学を理解するとは、数学言語として使えるようになることである。そのためには、数学 (言語) を学習者が構成かつ構造的に学ぶことが必要である。

船越 (1995,1998) は、上述のような視座から、数学概念の認識の様相、つまり学習者の数学言語の構成の様相を、数学的に形式化することを提案している。以下、この数理認識の数学的形式化について、船越 (1995,1998) をもとに述べる。

任意の集合 X について、$\mathcal{P}(X)$ を X の部分集合の全体とすると $\mathcal{P}(X)=\{A|A\subset X\}$、$\mathcal{P}$ は X の部分集合を規定する操作である。任意の 2 つの集合 X,Y について、X と Y の直積集合 $X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$ を考える。集合 X と Y の間の関係は $X\times Y$ の部分集合を規定することに対応するから、$\mathcal{P}(X\times Y)$ は X と Y の間の関係の全体と考えることができる。つまり、$\times$(直積) と $\mathcal{P}$(部分集合を考える) の対は X と Y の間の関係を規定する操作である。

集合変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ に対して、2 つの操作 $\times,\mathcal{P}$ を任意に組み合わせれば (0 回も含む)、いろいろな形式が得られる。例えば、$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_1)\times X_2),\mathcal{P}((\mathcal{P}(X_1\times X_2)\times\mathcal{P}(X_3))\times\mathcal{P}(X_4))$ である。このようなものを一般に、変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の上の操作図式という。

今、$A_1,A_2,\cdots,A_n$ を集合、$T(X_1,X_2,\cdots X_n)$ を変数 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 上の操作図式とする。このとき、M が変数 $X_1,X_2,\cdots X_n$ に、それぞれ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ を代入して得られる集合に等しいならば、つまり、$M=T(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ ならば、M を $A_1,A_2,\cdots,A_n$ から操作図式 $T(X_1,X_2,\cdots X_n)$ によって構成された数学的体系という。また、$A_1,A_2,\cdots,A_n$ を対象集合、M の要素を基礎概念という。したがって、基本概念、つまりそれぞれの数学の概念は、何らかの「操作」によって構成されることになる。

数学的体系が「数学的に同じもの」であるとき、これらは同型 ($\cong$) であるという。数学的体系全部の集合 $\mathcal{M}$ において、$\mathcal{M}/\cong$ の要素、つまり同型な数学的体系を、同一視したものを言語化 (概念化) 可能であるという。言語化可能な同値類に対して数学言語が定められるのである。数学言語は同値類の代表元である。

このように数理概念は、数学的に形式化することができる。この数学的形式化によっ

て、数学概念の認識の様相を明確に捉えることができるのである。

3.2　学習水準論と「方法の対象化」

本節では、「方法の対象化」と、それを大きな特徴とする学習水準論について述べる。まず、この議論の端緒となった van Hiele の水準論について取り上げ、その一般化と多領域での設定について述べる。そして、この水準論から、「方法の対象化」という構造に特に着目した Freudenthal の水準の考察を取り上げる。

3.2.1　van Hiele の水準論

オランダの高校教師である van Hiele 夫妻は、1957 年に Utrecht 大学において、幾何における思考水準に関する構造や教授実験を展開させた学位論文を完成させた。ある明確な教育的目的の下に、数学的内容を構成し、その指導方法を明確にするための原理を、単元・カリキュラム構成原理だと考えると、van Hiele の「学習水準論」は、数学教育における単元構成原理およびカリキュラム構成原理に成り得るという (小山, 1985)。van Hiele は、その典型的な例証を幾何 (図形) 教材の学習について示している。van Hiele の幾何の学習水準は以下の通りである。

第 0 水準

これは、子どもが身の回りのものをその形によって区別している段階である。ここでは、子どもの認識対象は机・窓・本・時計等その身の回りのものであり、形はそれらの認識手段、あるいは、分類基準として利用されているに過ぎない。例えば、机の面、窓枠、本の表紙等は何れも「四角形」として、時計は「円」として整理される。

第 1 水準

これまで身の回りのものを整理する手段として用いられてきた形、あるいは、その表象としての図が、今度は研究の対象になる。

そして、今度は、その図の持っている性質が、図形の認知・分類の手段として利用される。しかし、この段階では、図形の性質そのものは直接研究の対象になっていない。おそらく、長方形と円とは性質の異なった形として設定され、その区別の基準となる性質は意識されているけれども、単に区別の手段ないしは目安として利用されているだけのことで

ある。

第2水準

ここでは、第1水準において図形研究の観点に過ぎなかった図形の「性質」が研究の対象となる。そして、性質間の関係、いうなれば命題が、これらの性質を整理する原理となる。例えば、三角形で二辺が等しいという性質と二角が等しいという性質は「二等辺三角形の底角は等しい」という命題によって結ばれる。しかし、命題そのものは、この段階では研究対象ではない。

第3水準

前段階で、性質を整理する原理となっていた命題が、ここでの研究の対象になる。そして、命題を整理する手段、あるいは、命題間の関係を認定する手段として、論理がはじめて登場する。ここで注目すべきことは、van Hiele のいう「論理」は、論理学の対象と成り得るいわゆる論理であって、Piaget のいう論理とは概念的に全く異なっていると言わねばならない。

第4水準

ここでは、第3水準での命題の組織原理であった「論理」が研究の対象になる。すなわち、論理・演繹的体系そのものが研究の対象になるが、それはすでに数学者の水準である。そして、学校では、この水準は滅多に達成されない。

平林 (1987) は「実際、数学の学習は決して連続的な上昇曲線で表示されるような過程ではなく、突然に洞察的な飛躍によって新しい学習水準へと上昇するものであり、このことはおそらく数学の学習のもっとも特徴的な様相であろう」と指摘している。

そして、「教師自身がこの飛躍の事実を十分に考慮しないで、連続的上昇の意識で学習指導に精出しているというのが実状であり、数学の学習指導においては、この質的な飛躍は、絶えず意識され、その達成がいつも配慮されなければならない。」としている。

平林は、幾何の学習の水準を表 3.1 にまとめている。

表 3.1　幾何の学習水準 (平林,1987)

水準	0	1	2	3	4
対象	身の回りのもの	図	性質	命題	論理
方法	図	性質	命題	論理	

表 3.1 からもわかるように、全ての学習水準で、学習対象と学習方法が区別されており、ある水準での学習方法は、その次の水準では学習対象になっている。この質的な飛躍が「方法の対象化」である。

水準概念の核心は、同一の科学の対象も、水準が異なれば全く異なるものだということであり、このことは、異なった水準にいる者はしばしば相互に理解し得ないという結果をもたらす。言い換えれば、水準が異なった者は、全く異なった言葉を語るということである。

3.2.2 学習水準論の一般化と他領域での設定

van Hiele の水準論は幾何の分野で展開された理論であるが、他の分野でこの飛躍を考察し、それに向けての学習過程を実践的に整備することは、数学教師に固有の仕事であり、van Hiele の様相の一般的記述は、一つの指針と成り得るという (平林，1987)。

この水準の理論がアメリカで紹介された 1970 年代半ばから、この理論の研究が強力に展開されていく。この研究の 1 つの方向が、この理論を幾何以外のほかの数学の領域に拡大していこうとするものである。van Hiele は、その典型的な例証を幾何の学習について示しているが、もちろんそれは他の数学教材の学習、例えば、計算教材の学習についても設定できるとしている。学習水準論の一般化を推し進めた Hoffer(1983) によると、各水準における思考は次のように記述できるとしている。

第 0 水準：研究領域の基本的な要素を考察できる。
第 1 水準：基本的要素を分析するための性質について考察できる。
第 2 水準：性質を関連づける命題 (文章) について考察できる。
第 3 水準：命題の部分的な系列について考察できる。
第 4 水準：部分的な系列を分析する性質について考察できる。

この Hoffer の研究にも刺激され、今日ではいろいろな領域の水準が研究されている。この方向は van Hiele 自身によっても示唆されており、学習水準が次のように一般的に表現されている (van Hiele，1986)。

第 0 水準：視覚的水準
第 1 水準：記述的水準
第 2 水準：理論的水準
第 3 水準：形式的論理的水準
第 4 水準：論理法則の本性の水準

van Hiele にとっては数学教育の全領域でこのような学習段階を設定することが主要な研究目標であるかもしれないが、平林 (1986) によると、幾何以外の領域ではあまり明確に示されていないという。近年では、日本でも関数領域についての研究 (磯田,1987,1988)、代数領域 (国宗,1996) での研究等がある。しかし筆者は、それらの研究についても、水準の上昇、つまり「方法の対象化」という特徴が、十分に吟味されたものではないと考えている。

平林 (1987) は、学習段階の綿密な設定はむしろ従属的なことであり、重要なことは、数学的思考は絶えず上述のような「方法の対象化」という質的な飛躍を繰り返して進展するという認識であり、学習水準の設定よりもむしろ何が学習を飛躍させるかということの考察が、数学教育の研究としてはより重要であると指摘している。そのためにも、飛躍の構造、つまり「方法の対象化」の構造を、明確にすることが肝要である。しかし、従来の一般化研究では、必ずしもこの構造が明確だとは言えない。それは「方法の対象化」という構造が数学の 1 つの構造であり、この構造を明確に論ずるには、数学を用いてその構造を明確にする、つまり、数学的に形式化する必要があるからである。

3.2.3 Freudenthal による水準論

上述したように、van Hiele の思考水準は、幾何領域における数学的知識の階層性が水準として記されている。そして、その階層性の成り立ちを考えるとき、「前の水準における方法は、次の水準で対象になる」という構造が浮かび上がってくる。この「方法の対象化」という構造の重要性を指摘したのが Freudenthal である。ここでは、Freudenthal の水準に関する考察について、Freudenthal(1973)、磯田 (2003) を元に述べる。

Freudenthal は、New Math 運動を批判し、その人間化運動の思潮を率いた人物の 1 人とされている。彼の数学的活動論は、「数学化」という語に象徴される。Freudenthal は、「活動としての数学」と「閉じた体系 (所産) としての数学」とを対置する。そし

て、生徒が学ぶべきは「閉じた体系としての数学」ではなく、「活動としての数学」であることを指摘し、「活動としての数学」の言い換えとして、「数学化」を提起している。Freudenthal は「数学化」を経験の蓄積を対象として、数学的方法により組織することと定義した。そして、数学化を学校数学に具体化する枠組みとして、van Hiele の水準論に着目する。Freudenthal は、水準について以下のように述べている。

「学習過程は、水準によって構造化される。下位水準の活動は、その水準の方法で組織されるが、やがて行為水準では分析する教材となる。下位水準における操作材は、高位水準において教材になるのである。生徒は数学的方法によって組織することを学ぶ。すなわち、生徒は自分自身の活動に潜在する内容を数学化することを学ぶのである。」

「その前の水準における組織化の方法は、分析の対象になる」

(Freudenthal,1973,p.125, 訳は磯田による)

これらの記述が「方法の対象化」と要約され、数学的活動の本質として、今日の数学教育研究並びに教材の発展系統の分析に際して、広く参照されている。

しかし、van Hiele の水準の解釈と Freudenthal の水準の解釈は全く同一とはいえない。磯田 (2003, p.38) によると、Freudenthal は水準を van Hiele が示した 5 つの水準に準じて割りあてるよりは、話題にした数学的内容・方法の相違に応じて水準を区別する立場に立つ。例えば、水準を記述する対象は、幾何のような大規模な内容領域に限定されておらず、水準の区分も幾何のように 5 つに限定されない。

実際、Freudenthal は、数学的帰納法を例に挙げ、次のように述べている。

「最下位の水準においては、帰納的推測が実践される。次の水準では、数学的帰納法は、原理と見なされ、反省の対象となる。同じ (さもなくばより高位の) 水準で、その原理は、数学的帰納法の証明パターンとして定式化される。そこから、自然数に対するペアノの公理系までの過程は、局所的には議論できない。」(1973,pp.122-123)

つまり、数学的帰納法という数学の方法を次の 3 つの水準に区別している (磯田,2003,p.38)。

(1) 帰納的推測までできる第 0 水準

(2) 数学的帰納法で証明までできる第 1 水準

(3) 数学的帰納法を成立させる自然数の公理系まで前提にできる水準

Freudenthal の主張の独自性は、数学化をあくまでも水準という語で特徴付け、水準上昇として数学化を記述すべきことを強調していることである。また、Freudenthal は、数学化は、反省的思考によると考えている。これは、水準の上昇は指導の過程であって生物学的な順序での発達と考えるべきではないとする van Hiele の考えとは明らかに異なる。

3.3 数理認識の視座からみた「方法の対象化」

本節では、上述した「方法の対象化」について数理認識の視座から考察する。

船越 (1998) は、言語的視点から捉えた数学の構成には、階層性と呼ぶ特徴があるとしている。数学言語 (数学的体系) は、操作図式と対象集合によって構成される。また、操作図式は直積を作る作用 $\times$ と部分集合を作る作用 $\mathcal{P}$ を有限回 (0 回を含む) 適用して得られるのであった。つまり、数学言語は、この段階的な組合せ、つまり「操作の概念化」の繰り返しによって構成されるのである。この構成の特徴が階層性である。この階層性は、まさに「方法の対象化」と同義である。この階層性は、van Hiele の水準論においても、Freudenthal の水準論においても特徴付けとなる。このように数理概念を数学的形式化することによって、「方法の対象化」の構造を明確に示すことができるのである。

次に、van Hiele の幾何における学習水準において、それぞれの水準で構成される数学概念を階層性に着目して数学的に形式化することで、「方法の対象化」を明確にする。ただし、ここでは学校教育で扱われる第 0 水準から第 3 水準までを考察することとする。

第 0 水準

第 0 水準では、身の回りのものを対象として、図やその形を方法として区別する水準であった。X_0 を身の回りのものの集合とし、X_1 を図や形の集合とすると、身の回りのものをその形によって区別する操作は、操作図式では $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_0) \times X_1)$ と書くことができる。

第 1 水準

第 1 水準は、形や図を対象に、その性質を方法として認知・分析をしていく水準であった。X_1 を形や図の集合、X_2 を性質の集合だとすると、形や図を性質によって認知・分析

していく操作は、$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_1) \times X_2)$ と表せる。

<u>第 2 水準</u>

第 2 水準は、図形の性質を対象として、性質間の関係、つまり命題を方法として、整理していく水準であった。X_2 を図形の性質の集合、X_3 を命題の集合だとすると、図形の性質を命題によって整理していく操作は、$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_2) \times X_3)$ と表すことができる。

<u>第 3 水準</u>

第 3 水準は、命題を対象に、論理を方法として命題の関係を整理していくのであった。X_3 を命題の集合、X_4 を論理の集合とすると、命題を論理によって整理していく操作は $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_3) \times X_4)$ と表すことができる。

以上のことを表にまとめたのが、表 3.2 である。

表 3.2 に示される矢印の部分は、各水準の上昇における階層性の特徴を表している。つまり、van Hiele の水準論において、それぞれの水準で構成される概念を数学的に形式化することで、各水準の上昇は「方法の対象化」の構造を持つことを明確に示すことができた。

前節で指摘したように、水準論の一般化研究において「方法の対象化」の構造を明確に示すことは重要ではあるが、容易ではない。しかし、前述したように「階層性」に着目し、数理概念を数学的に形式化することで、「方法の対象化」を明確に示すことができた。この手法は当然他領域にも活用することができる。つまり、「方法の対象化」を特徴付けの原理とした van Hiell の水準論の一般化が可能になるのである。

また、Freudenthal の水準の解釈は、van Hiele が示した 5 つの水準に準じて割りあてるというよりは、話題にした数学的内容・方法の相違に応じて水準を区別する立場に立ったのであった。そして、水準の設定より「方法の対象化」による特徴付けを重要だと考えているのであった。このことから、本論文での水準設定の立場は、この Freudenthal の立場、つまり「方法の対象化」の解釈に近いと考えられる。

表 3.2　van Hiele の水準における「方法の対象化」の構造

水準	操作図式
第 0 水準	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_0) \times X_1)$
第 1 水準	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_1) \times X_2)$
第 2 水準	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_2) \times X_3)$
第 3 水準	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_3) \times X_4)$

第4章

確率概念の認識における水準

第3章では、van Hiele の水準を数学的形式化することにより、「方法の対象化」の構造を明確にした。本章では、確率概念を数学的に形式化することによって、その「方法の対象化」の構造を明確にするとともに、「確率概念の認識における水準」を設定することを目的とする。

4.1 確率概念の認識における「方法の対象化」

本節では、確率概念を数学的に形式化するとともに、Fischbein(1975)、Jones(1997)、Horvath(1998) 等の先行研究で明らかにされた認識の様相とを関連づけることを通して確率概念の認識における「方法の対象化」の構造を明確にする。

4.1.1 確率概念の数学的形式化

(a) 偶然的な事象を対象にする

確率は、偶然の量的表現と捉えることができるという (河野,1999)。確率概念の認識の始まりは、偶然と出会うことから始まると考えられる。すると、まずはじめに考察の対象となるのは、「偶然的な現象」である。

Horvath 等は、児童に対してサイコロに関する実験を行い、確実性と不確実性を区別できるし、実際に区別するという結果を得た。例えば、サイコロを投げるという偶然的な現象を、他のより決定的な動作—例えば、書く、ある場所から他の場所へ歩く、算数の問題を解く等ーからはっきりと区別しているというのである。不確実性を認識できるとは、実

際に経験した結果のうちのどれかが起こるということを理解しているということである。しかし、Horvath 等によると、多くの子どもはサイコロを投げることをまったくのランダムとは考えない。いくらかの子どもは、過去の結果に基づいて、“幸運な数字”があると思い込んだり、サイコロの投げ方によって希望する数字が出やすくなると信じる。つまり、過去の結果に基づきながらも、それを主観的に判断しているのである。これは、Jones がレベル 1 として「主観的な判断に基づいてもっとも起こりそうな事象を予測する」としていることにも符合している。このことから、児童は偶然的な現象を対象とし、今までに経験した結果と関連づけることで主観的に考察していることがわかる。すなわち、考察の方法は経験した結果である。

このことを数学的に形式化する。まず、偶然的な現象の集合と今までに経験した結果を列挙したものの集合を考える。上で述べた児童の認識の例は、偶然的な現象の集合の部分集合を規定し、過去に経験した結果を列挙したものの集合との関係を規定する操作だと考えることができる。今、偶然的な現象の集合を X_0、今までに経験した結果を列挙したものの集合を X_1 とすると、X_0 の部分集合と集合 X_1 との関係を規定する操作は $\mathcal{P}(X_0)$ と X_1 の関係を規定する操作だと考えられる。つまり、操作図式では $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_0) \times X_1)$ と表すことができる。

(b) 試行の結果を対象にする

起こりやすさを量として表そうと考える時、過去に経験した結果を詳細に捉えようとすることは自然である。サイコロの実験では、過去の経験は「実際の試行において観察された結果」であり、これは根元事象に着目することで整理される。

例を挙げよう。Horvath 等は、1 つの標準的でないサイコロ (2 の目が 4 面、6 の目が 2 面) を投げる実験を 7 − 8 歳の児童について行っている。子どもたちに、1000 回の試行を行った時のそれぞれの目が出る頻度の分布のグラフの形を聞いたところ、2 の目が出る頻度が 6 の目が出る頻度よりずいぶんと大きいことを確信したという。そして、2 の目の出た回数を表すグラフの高さが、6 の目のグラフの 2 倍になること等を議論したという。つまり、試行の結果を根元事象に着目することで詳細に分析し、起こりやすさを考察しているのである。このことから児童は、実際の試行で観察された結果を対象とし、根元事象を方法として考察していることがわかる。

このことを数学的に形式化する。まず、実際の試行で観察された結果を列挙したものの

集合と、根元事象の集合を考える。上で述べた児童の認識の例は、実際の試行で観察された結果の集合の部分集合を規定し、根元事象の集合との関係を規定する操作だと考えることができる。今、実際の試行で観察された結果を列挙したものの集合を X_1、根元事象の集合を X_2 とすると、X_1 の部分集合と集合 X_2 を規定するという操作は、$\mathcal{P}(X_1)$ と X_2 の関係を規定する操作だと考えられる。つまり、操作図式では $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_1) \times X_2)$ と表すことができる。

(c) 全事象の空間を対象にする

起こりやすさを求める時、実験をせずに求めることができればと考えるのは自然である。この時には、根元事象全体の集合、つまり全事象の空間に着目することとなる。

前項で述べた Horvath 等の、1 つの標準的でないサイコロ (2 の目が 4 面、6 の目が 2 面) を投げる試行を例に考える。実験をすると、2 の目が出る頻度と 6 の目が出る頻度が明らかにわかるので、起こりやすさを実験の結果で表すことができる。この試行において、実験せずに 2 の目が出る確率を求めることを考える。ここでは、全事象の空間は $\{2, 2, 2, 2, 6, 6\}$ となることから、2 の目が出る確率を、2 の目が 4 面あることと関連づけて捉えるのである。つまり、起こり得る全ての場合の数 6 通りのうちの 2 の目が出るのは 4 通り、つまり、$\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ と捉えるのである。Horvath 等によると、9〜11 歳の児童では、このように考えて予測した結果と実験で得られる結果との誤差を避けられないものとして理解することができるようになるという。この時、考察の方法は根元事象だと考えられる。

このことを数学的に形式化する。「2 の目が出る」という事象は、全事象の空間の部分集合である。「2 の目が出るという事象」の確率を求めることは、全事象の空間 $\{2, 2, 2, 2, 6, 6\}$ から部分集合 $\{2, 2, 2, 2\}$ を規定し、このそれぞれの集合の要素の個数の比、つまり数学的確率を求めることである。これは、全事象の空間の部分集合と $0 \leqq p \leqq 1$ を満たす p を要素とする集合との関係を規定するという操作だと考えることができる。

今、$X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を、$X_3 = \{p | 0 \leqq p \leqq 1\}$ とする。この時、全事象の空間の部分集合を規定する操作は操作図式では $\mathcal{P}(X_1)$ と表すことができる。そして、数学的確率を求める操作は、$\mathcal{P}(X_2)$ と X_3 との関係を規定する操作だと考えられる。つまり、操作図式では、$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_2) \times X_3))$ と表すことができる。

(d) 数学的確率を対象にする

全事象の空間を対象とする場合、全事象やその部分集合の要素の個数を樹形図や順列・組合せの計算等で数え上げることが具体的な手法となる。しかし、複合事象などより複雑な場合には数え上げの手法だけでは難しい。そこで、それを解決する方法として、加法定理、乗法定理など、確率についての命題を用いることが考えだされる。

具体的な例を挙げて考える。赤玉 3 個と白玉 4 個が入っている袋から、よくかき混ぜて 2 回、玉を同時に取り出すとする。ただし、取り出した玉は元に戻すものとする。この時、2 個の玉がともに赤である確率を求めることを考える。これは、全事象の空間を対象として樹形図で場合の数を数え上げて求めることもできる。しかし、この場合のように全事象の空間や事象が複雑になると、樹形図を描いたり数え上げるのが煩雑になり、数え間違い等の誤りが起こる。そこで、確率の命題、つまり加法定理や独立試行の乗法定理等を使うことが有効となる。

2 個ともが赤玉である確率は、独立試行の乗法定理を用いて次のように求められる。1 回目に赤玉を取り出す事象を A とすると、$P(A) = \dfrac{3}{7}$ となる。そして、2 回目に赤玉を取り出す事象を B とすると、$P(B) = \dfrac{2}{6}$ である。今、2 回とも赤玉を取り出す事象 C の確率 $P(C)$ とすると、独立試行の乗法定理より、

$$P(C) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

となる。

このことを数学的に形式化する。この操作は、1 回目に赤玉が出る確率と 2 回目に赤玉が出る確率の集合を対象として、これを独立試行の乗法定理という命題と関連づけることで考察している。

X_3 を数学的確率の集合、X_4 を確率の命題の集合とする。独立試行の乗法定理を用いて確率を求める操作は、X_3 の部分集合 $\mathcal{P}(X_3)$ を規定し、さらに、集合 X_4 との関係を規定する操作である。操作図式では、$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_3) \times X_4)$ と表される。

この他、余事象の確率、独立試行の確率、反復試行の確率、確率の乗法定理等の概念は、全て同様に確率の集合を対象として構成される。つまり、数学的確率の集合を対象とし、確率の命題を考察の方法としていると考えられる。

(e) 命題を対象にする

20 世紀に入って確率論は、公理的に構成されるようになる。幾何学においても、点、直線、平面の間の関係を公理化することによって、幾何学の公理的構成を行った。これが van Hiele のいう第 4 水準であった。これと同様に、確率論を公理を土台として築きあげるのが公理的構成であり、Kolmogorov の公理的確率論 (Kolmogorov,1933) が代表的である。ただし、このような活動は学校教育の範囲ではない。

確率空間を公理によって構成していく例としては、確率空間にディラック測度やポアソン測度等の確率測度を定義していくことが考えられる。これは、規定した部分集合と確率測度の集合との関係を規定している。つまり、命題が成り立っている空間を対象とし、公理を考察の方法としている。

これを数学的に形式化する。余事象、加法定理、乗法定理等の確率の命題の集合を X_4 とする。命題の集合の部分集合を規定することは、それらの命題が成り立っている空間を規定することを意味する。この操作は、$\mathcal{P}(X_4)$ という操作図式で表される。今、確率測度の集合を X_5 とすると、今この空間に測度を定義するという操作は、これと確率測度の集合 X_5 の関係を規定するということであり、操作図式では $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_4) \times X_5)$ と表される。

4.1.2 確率概念の認識における方法の対象化

前節において、いくつかの確率概念の認識を「対象」に着目し、以下のように分類した。

(a) 偶然的な事象を対象にする。
(b) 試行の結果を対象にする。
(c) 全事象の空間を対象にする
(d) 数学的確率を対象にする。
(e) 命題を対象にする

(a)〜(d) のそれぞれについて Freudenthal の解釈 (Freudenthal,1973) での「方法の対象化」の構造を明確にする。

(a) では、偶然的な事象を対象とし、過去に観察された結果に着目して「起こりやすさ」を考察するのであった。この時の組織化の方法は結果の列挙である。(b) では、(a) での組織化の方法であった「観察された結果」の集合、つまり「結果を列挙したものの集合」が対象となる。ここに「方法の対象化」の構造が存在すると考えられる。

(b) では、「結果を列挙したものの集合」を対象とし、根元事象に着目して整理し「起こりやすさ」を考察するのであった。この時の組織化の方法は根元事象である。(c) では、(b) での組織化の方法であった「根元事象」の集合全体、つまり「全事象の空間」が対象となる。ここにも「方法の対象化」の構造が存在すると考えられる。

(c) では、「全事象の空間」を対象とし、全事象の要素の個数と事象の要素の個数の比に着目して「起こりやすさ」を考察するのであった。この時の組織化の方法は「数学的確率」である。(d) では「数学的確率の集合」を対象とし、乗法定理、加法定理等の確率同士の関係、つまり命題に着目して「起こりやすさ」を考察するのであった。この時の組織化の方法は「確率の命題」である。ここにも「方法の対象化」の構造が存在すると考えられる。

(e) では、「確率の命題の集合」つまり、「確率の命題が成り立つ空間」を対象とし、確率測度などに着目して考察を行う。この時の組織化の方法は「公理」である。これも「方法の対象化」の構造が存在する。

上述したことを、数学的に形式化し、表にまとめたのが表 4.1 である。

このように、これらの操作図式は、直積を作用 $\times$ と部分集合をつくる作用 $\mathcal{P}$ を有限回適用して得られるのであった。この段階的な組合せ、「操作の概念化」の特徴こそが階層性であり、これは「方法の対象化」の構造を明確に表すのであった。

表 4.1 からわかるように確率概念の認識の過程は階層性を持つ。このことは確率概念の認識を数学的に形式化することにより明確になった。よって、確率概念の認識は、ここで示したように、「方法の対象化」の構造を持つと考えられるのである。

表 4.1　確率概念の認識の数学的形式化

操作図式	
(a)	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_0) \times X_1)$
(b)	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_1) \times X_2)$
(c)	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_2) \times X_3)$
(d)	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_3) \times X_4)$
(e)	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X_4) \times X_5)$

4.2 「確率概念の認識における水準」の設定

確率概念の認識の発達において「方法の対象化」が明確になったことから、「確率概念の認識における水準」を設定することが可能となる。

表 4.1 を元に、水準に整理したものが表 4.2 である。

これまで得た知見より、確率概念の認識における水準を以下のように設定する。

-確率概念の認識における水準-

第 0 水準　偶然的な事象を対象とし、結果を列挙したものを方法として考察する。

第 1 水準　結果を列挙したもの (の集合) を対象とし、根元事象を方法として考察する。

第 2 水準　全事象の空間 (根元事象の集合全体) を対象とし、数学的確率を方法として考察する。

第 3 水準　数学的確率 (の集合) を対象とし、確率の命題を方法として考察する。

第 4 水準　確率の命題が成り立つ空間 (確率の命題の集合) を対象とし、公理を方法として考察する。

以下、それぞれの水準について、前節で明らかになったことを元に、van Hiele の「幾何の学習水準」(van Hiele,1986, 平林,1987) の記述を参考にしながらまとめる。

第 0 水準：偶然的な現象を対象とし、結果を列挙したものを方法として考察する。

この水準は、子どもが偶然的な事象を過去の経験などに基づいて判断している段階である。ここでは、子どもの認識対象は「くじをひいたら何が出るか」「明日の天気はどうなるか」等、身の回りの偶然的な事象であり、過去の経験はそれらを判断する手段として主観的に利用されているにすぎない。例えば、過去の経験からいくつかある結果のどれかが出るとは考えるが、それがランダムに出ると考えるのではなく、「僕はこの数字が好きだから出やすい」とか「強く祈ると出る」というように主観的に判断している場合が多い。

表 4.2　確率概念の認識における水準

水準	対　象	方　法
0	偶然的な現象	結果を列挙したもの
1	結果を列挙したもの (の集合)	根元事象
2	根元事象 (の集合)	数学的確率
3	数学的確率 (の集合)	確率の命題
4	確率の命題 (の集合)	公理

第 1 水準：結果を列挙したものを対象とし、根元事象を方法として考察する。

ここでは、主観的な判断の手段となってきた過去の経験、あるいは実際の実験で観察された結果が考察の対象となる。

そして、今度は起こりやすさを捉えるために観察された結果をそれぞれの根元事象に着目して数えた頻度が判断の手段として利用される。しかし、この段階では、根元事象全体自体、つまり全事象の空間は、直接考察の対象になっていない。おそらく、起こりやすさについては実際に観察した結果に左右されている場合が多いと考えられる。また、複合事象など複雑な事象についてもなんとか根元事象を手掛かりに頻度を求めようとするが、「ダランベールの誤り」のように根元事象を正しく認識していないこともある。

第 2 水準：全事象の空間を対象とし、数学的確率を方法として考察する。

ここでは、第 1 水準について結果を整理するための観点にすぎなかった「根元事象」(の集合全体) が研究の対象となる。そして、全事象とそれぞれの事象の要素の個数の比、つまり数学的確率が起こりやすさを表す手段となる。

例えば、「1 つのサイコロをふった時に奇数の目が出る確率は、奇数の目が出る事象 $\{1,3,5\}$ と全事象 $\{1,2,3,4,5,6\}$ の要素の個数の比 $\dfrac{3}{6}$ で起こりやすさを表す。実際の試行の結果との誤差は避けられないものとして理解することができる。しかし、数学的確率そのものはこの段階では研究対象ではない。

第 3 水準：数学的確率を対象とし、確率の命題を方法として考察する。

前段階で、起こりやすさを表す手段となっていた「数学的確率」が、ここでの考察の対象になる。そして、数学的確率同士の関係、すなわち確率の命題が、「起こりやすか」を求める手段となる。確率の命題とは、余事象の定理、加法定理、乗法定理等のことである。

例えば、今、例として、「赤玉 3 個と白玉 4 個が入っている袋から、よくかき混ぜて 2 回、玉を同時に取り出すとする。ひいた玉は元に戻すものとする。2 個の玉がともに赤である確率」を求めるとする。確率の命題を用いると、2 個ともが赤玉である確率は、独立試行の乗法定理を用いて $\dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{7}$ というように、数学的確率同士を関連づけることで求められる。しかし、この命題が成り立つ (確率) 空間そのものは、この段階では考察の対象にはならない。

第 4 水準：確率の命題が成り立つ空間を対象とし、公理を方法として考察する。

ここでは、第 3 水準での組織原理であった「命題」の集合が考察の対象になる。命題の集合とは、つまり、それらの命題が成り立つような確率空間を意味する。確率空間そのものが考察の対象となり、公理がその手段となる。

これはすでに数学者の水準であり、小・中・高等学校の教育においては扱われることはない。例としては、Kolmogorv の公理論的確率論が挙げられる。

本章では、Horvath 等の確率認識の先行研究を参考に、確率概念を数学的に形式化することで、確率概念の「方法の対象化」を明確にした。そして、得られた知見より、「確率概念の認識における水準」を設定した。これは van Hiele の幾何の学習水準の一般化研究の 1 つといえるが、その水準の解釈は「方法の対象化」の構造をより重視する Freudenthal の立場に近いものである。

第5章

水準からみた確率概念の認識の様相

第4章において、確率概念を数学的に形式化することで「方法の対象化」の構造を明らかにし、「確率概念の認識における水準」を設定した。

本章では、特に現行のカリキュラムで確率教育の中核となっている中学生を対象に認識調査を実施することで、確率概念の認識の様相を明らかにし、その様相から、この水準の妥当性を検証する。

5.1　認識調査I－確率学習前の生徒の認識の様相

第4節で述べたように、確率概念の認識の過程を「方法の対象化」として捉えると、生徒の認識にはそれぞれの水準に対応する

① 試行の結果を対象とした見方 (第1水準)

② 全事象の空間を対象とした見方 (第2水準)

③ 確率を対象とした見方 (第3水準)

が混在していることが予想される。

特に、学校教育で確率の組織化した教育が行われる以前には、日常経験等により生徒の認識は無意識に構成されていると考えられる。そのため、確率を学習する前の生徒には、上記の①～③の見方が混在していることが予想される。

そこで、生徒が何を対象にして確率を理解しているのか、確率学習前の生徒、K大学附属S中学校　第2学年38名を対象として、2004年12月上旬に次の調査を行った。

次の確率に関する文を読んで、それを小学生に説明するようなつもりで文章で説明しなさい。

(1)　サイコロを振って1の目の出る確率は、$\frac{1}{6}$ である。

(2)　2つのサイコロを振って2つの目の和が3になる確率は、$\frac{1}{18}$ である。

分析の方法は、記述されたものを次頁の①～③に分類することによって行った。

① 試行の結果を対象とした見方

「60回振ったとしたら、そのうちの10回」

「6回振ったら、1回1の目が出る」

「18回振って1になるのは1回だから」

等の記述

② 全事象の空間を対象とした見方

「6つあるうちの1つで $\frac{1}{6}$」

「振ったら1～6までのどれかがでるから」

「36種類の出方のうちの2つ」

等の記述

③ 確率を対象とした見方

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 2$、

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

等の記述

設問(1)(2)の調査の結果は表5.1、表5.2の通りである。

設問(2)の主な記述は表5.3の通りである。

表 5.1　設問 (1) の結果

分類	人数	割合
①	9 人	23.7%
②	27 人	71.1%
③	0 人	0%
無回答	1 人	2.6%
その他	1 人	2.6%

表 5.2　設問 (2) の結果

<table>
<tr><th colspan="2">分類</th><th>人数</th><th>割合</th></tr>
<tr><td colspan="2">①</td><td>3 人</td><td>7.9%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">②</td><td>正答</td><td>8 人</td><td>21.1%</td></tr>
<tr><td>誤答</td><td>3 人</td><td>7.9%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">③</td><td>正答</td><td>4 人</td><td>10.5%</td></tr>
<tr><td>誤答</td><td>4 人</td><td>10.5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">無回答</td><td>11 人</td><td>28.9%</td></tr>
<tr><td colspan="2">その他</td><td>4 人</td><td>10.5%</td></tr>
</table>

表 5.3　設問 (2) の主な記述

①の主な記述		
18 回振って 3 になるのは 1 回だ		
②の主な記述		
正答	36 種類の出方のうちの 2 つ	
誤答	1 か 2 になる確率は 3 分の 1	(1)
	12 あるうちの 2 回で 6 分の 1	(2)
③の主な記述		
正答	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 2$	
誤答	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$	(2)
	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$	(2)
その他の主な記述		
誤答	2 つの目の和が 3 になるのは 1 の目の倍で $\frac{1}{18}$	(1)
	1 個 $\frac{1}{6}$ だから 2 個だと $\frac{1}{12}$	(4)

※誤答の（　）内は人数

認識調査Ⅰは、確率を学習する以前の生徒を対象とした。つまり、確率に対する概念は学校教育以外のそれぞれの経験から得たものだと考えることができる。

表 5.1、表 5.2 より分かるように、設問 (1) では、

① 試行の結果を対象とした見方

② 全事象の空間を対象とした見方

が、設問 (2) では

① 試行の結果を対象とした見方

② 全事象の空間を対象とした見方

③ 確率を対象とした見方

をしている生徒が混在している。これは、それぞれの水準の活動を行っている結果だと考えることができる。よって、確率学習前の中学校第 2 学年の生徒には、第 1 水準、第 2 水準、第 3 水準の各生徒が混在していると考えてよい。

5.2　認識調査Ⅱ－確率学習後の生徒の認識の様相

現行の学習指導要領では、中学校では、確率の集合を対象にすることを目的とした学習活動は扱われていないため、確率学習後の中学生には、主に確率の集合を対象としている生徒とそうではない生徒、つまり、第 2 水準に達している生徒と第 3 水準に達している生徒が混在していると考えられる。

そこで、この段階の生徒が何を対象として、確率を理解しているかに着目することによって、第 2 水準の生徒と第 3 水準に生徒が混在していることを明らかにする。このことを目的として、K大学附属S中学校第 3 学年（127 名）を対象として 2004 年 7 月上旬に調査を行った。

設問は、以下の内容である。

(1)　白玉 2 個、赤玉 3 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し、色を調べてから元にもどすことを 3 回続けて行う。1 回目に赤、2 回目に白、3 回目に赤の玉が出る確率を求めよ。
(2)　2 個のサイコロを同時に投げるとき、異なる目が出る確率を求めよ。

表 5.4 は、設問 (3) と設問 (4) について、正答率と、正答してなおかつ

a) 根拠として式を書いている割合

b) 根拠として樹形図

を書いている割合を求めたものである。

ただし、a) と b) には重複がある。

式を根拠としている正答の記述の分析を、認識調査 I と同様に、以下の②と③に分類することで行った。

②全事象の空間を対象とした見方

$$\frac{3\times 2\times 3}{5\times 5\times 5}=\frac{18}{125}$$

$$\frac{36-6}{36}=\frac{5}{6}$$

等の事象の要素の数を計算で求めていると考えられる記述

③確率を対象とした見方

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times 35=\frac{18}{125}$$

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

のように確率同士の計算を用いている記述

分析の結果は、表 5.5、表 5.6 の通りである。また、表 5.6 は、それぞれの設問における記述のうち、主なものを挙げた。

表 5.4　正答率と式や樹形図を記述している割合

	設問 (1)	設問 (2)
正答率	61.4%	87.4%
a）式	39.4%	78.0%
b）図	37.0%	22.8%

表 5.5　設問 (1)(2) の分析

分類	設問 (1)	設問 (2)
②	10	63
③	39	47
合計	49	110

(単位：人)

表 5.6　記述の分析

設問 (1) の主な記述	
②	$\dfrac{3 \times 2 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \dfrac{18}{125}$ $5 \times 5 \times 5 = 125,\ 3 \times 2 \times 3 = 18$
③	$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{125}$
設問 (2) の主な記述	
②	$\dfrac{36-6}{36} = \dfrac{5}{6}$ $\dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$
③	$1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ $1 - \dfrac{6}{36} = \dfrac{5}{6}$ $\dfrac{36}{36} - \dfrac{6}{36} = \dfrac{5}{6}$ $\dfrac{6}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

また、認識調査IIについては、表5.5、5.6から分かるように、

②全事象の空間を対象とした見方 (第2水準)

③確率を対象とした見方 (第3水準)

の2つの見方をしている生徒が混在している。

以上のように、中学校の生徒について、

① 試行の結果を対象とした見方

② 全事象の空間を対象とした見方

③ 確率を対象とした見方

の3つの見方が混在していることが確かめられた。つまり、第1水準に達している生徒から第3水準に達している生徒までが混在しているとみてよい。このことは、確率概念の認識の発達過程が、前述の水準で捉えられることを示している。

5.3　第2水準から第3水準への認識の様相

第5.1節、第5.2節では、認識調査の結果より水準の妥当性を検証した。本節では、図的表現の関連に着目して、第2水準と第3水準への水準の上昇の様相について考察する。認識調査I、IIでは、生徒の式の記述に着目し、第2水準、第3水準での対象を分類したのであった。ここでは、それらの記述をさらに詳しく、表5.7のように分類する。

表5.7　式の分類

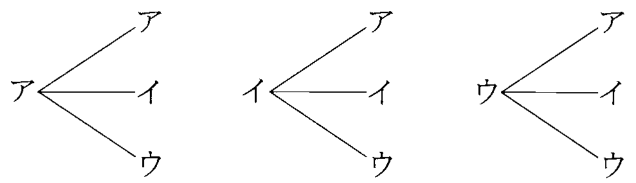
(E-1)	$3 \times 3 = 9 \quad 2 \times 2 = 4$ なので $\dfrac{4}{9}$
(E-2)	$\dfrac{2 \times 2}{3 \times 3} = \dfrac{4}{9}$
(E-3)	$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

(E-1) は、全事象の空間を対象とした見方をしており、これに対して、(E-3) は確率を対象とした見方をしていると捉えることができる。(E-2) は、(E-1) から (E-3) へ移行する上での足がかりとなっていると考えられる。

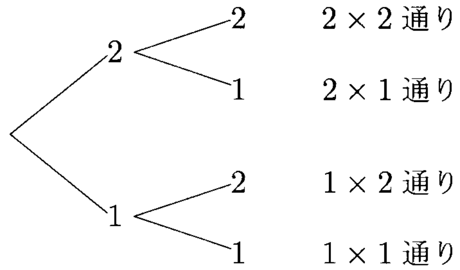
表 5.8　図の分類

(TD-1)

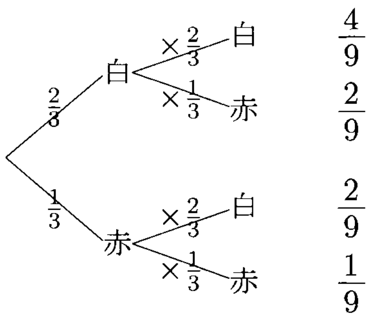
白玉をア、イ、赤玉をウとすると



(TD-2)



(TD-3)



実際に生徒の実態調査では、式だけでなく図を併用して答えていることが多い。そこで、次に、生徒がこの問いを解決するのに用いたと考えられる樹形図に代表される図的表現に着目することとする。

認識調査Ⅱの解答の記述にあった図的表現を取り出し、表 5.8 のように 3 つのタイプに分類する。

(TD-1) は教科書で学習するタイプの樹形図である。起こり得るすべての場合の数や事象の数を数えるために用いられる。

(TD-2) は、各色の玉を選ぶ場合の数のみを描いていくタイプの図的表現である。

(TD-3) は、(TD-2) と同じ構造を持ちながらも、各色の玉を選ぶ確率を意識して描いている図的表現である。一般に確率樹形図と呼ばれる。図に直接確率を書き込んではいない場合も、同様の考えが用いられている場合はこれに含ませることとする。

(TD-1) は、明らかに全事象の空間を対象とした見方をしていると考えられる。(TD-2) も、起こり得るすべての場合の数や事象の場合の数に着目していることから、全事象の空間を対象とした見方をしていると考えられる。

それに対して、(TD-3) は確率を対象とした見方をしている。しかし、(TD-2) と (TD-3) はその構造に類似性もみられる。また、(TD-3) は (E-3) に関連の深い図といえよう。

これらの 3 つのタイプの樹形図が、第 2 水準から第 3 水準への上昇にどのような関わりがあるかを明らかにするために、次のような調査を行った。

平成 17 年 2 月下旬に K 大学附属 S 中学校の第 3 学年 125 名 (4 クラス) を対象として調査を行った。ただし、グループ編成は 4 人 1 組とし、全体で 16 グループであった。調査の内容は、図 5.1 のような 1 次元の対称なランダムウォークと非対称なランダムウォークのゲームを取り上げ、それぞれの目にとまる確率を求めるという課題について、グループで協力し解決するというものである。

この課題は第 2 水準の活動としては複雑であるが、第 3 水準に達している生徒にとっては容易に解決できると考えられる。そして、その解決に当たってどのような図的表現を用いるかをみることで、前述の分類が妥当か、また第 2 水準から第 3 水準への上昇においてどのような図的表現が有効かを明らかにできると考えた。

対称ランダムウォークと非対称ランダムウォークの解決に、手がかりとして用いられた図的表現は表 5.9 の通りである。

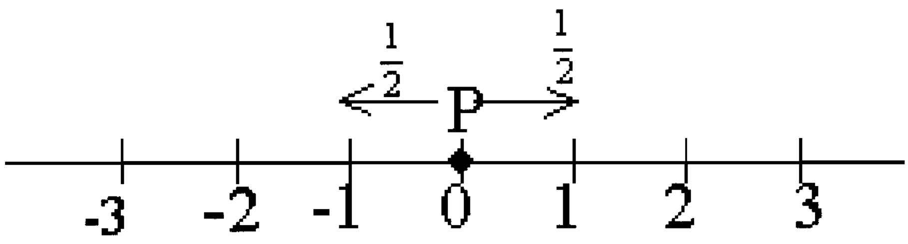


図 5.1　1 次元のランダムウォーク

表 5.9　図的表現の分類

	対称	非対称	合計
TD-1	10	4	14
TD-2	0	3	3
TD-3	1(1)	4(1)	5(2)
合計	11	11	22

※ () の中の数は経路図

対称なランダムウォークの場合の代表的なものは図 5.2 のような樹形図である。これは教科書で学習した樹形図そのものである。また、図 5.3 のように、(TD-1) の樹形図を非対称なランダムウォークの場合にも活用している小集団もあるが、これは、等確率でないため工夫を要し、大変煩雑になっている。この図を試みた 4 グループのうち、1 つのグループしか正答に至っていない。また、工夫したことで、より (TD-3) に近づいている。

非対称な場合は (TD-1) 以外の図的表現を模索したことが表 5.9 から読み取れる。生徒は、この活動を通して、図 5.4(TD-2)、図 5.5(TD-3) 等の図的表現を得ている。図 5.5 では、樹形図を細かく分けて描いてあるが、これも (TD-3) に分類できる。この図的表現では、図に計算を対応させている様子を読み取ることができる。

図 5.6 は、経路図と呼ばれるもので、ランダムウォークの解析によく使われるものである。この小集団は、教えられたのではなく、この図的表現を自ら見出した。これも (TD-3) と分類できるだろう。

次に、これらの図的表現を確率を対象とする見方の獲得との関わりで解釈すると、次のようになる。

図 5.2(TD-1) は明らかに全事象の空間を対象とする見方に関わりが深い。しかし、その見方だけでは解決しがたい課題に出会うことで、生徒はそれとは違う図的表現である図 5.3、図 5.4、図 5.5 等を考え出していく。

図 5.5(TD-3) は、乗法定理に至る直接的な手がかりとなっており、確率を対象とする見方を獲得するのに強い関わりを持つ。また、図 5.4(TD-2) は、全事象の空間を対象とする見方を元にしながらも、(TD-3) に類似の構造を持っており、(TD-3) の図的表現に至る前の中間的な表現になっていると考えることができる。これは式表現でいうならば、(E-2) に当たるものと考える。確率を対象とする見方を獲得する過程において、式表現、図的表現の両方において、このような中間的な表現がみられたことは注目に値する。

生徒たちは 3 種類の図的表現を自分から見出した。これらの図的表現は第 3 水準への移行に深く関わっていると考えることができる。

日本の教科書では、第 2 水準から第 3 水準への移行にあたる部分が十分考慮されておらず、(TD-1) に分類される樹形図しか扱われてない。しかし、生徒の認識では、それをさらに発展させたような図的表現を利用している。

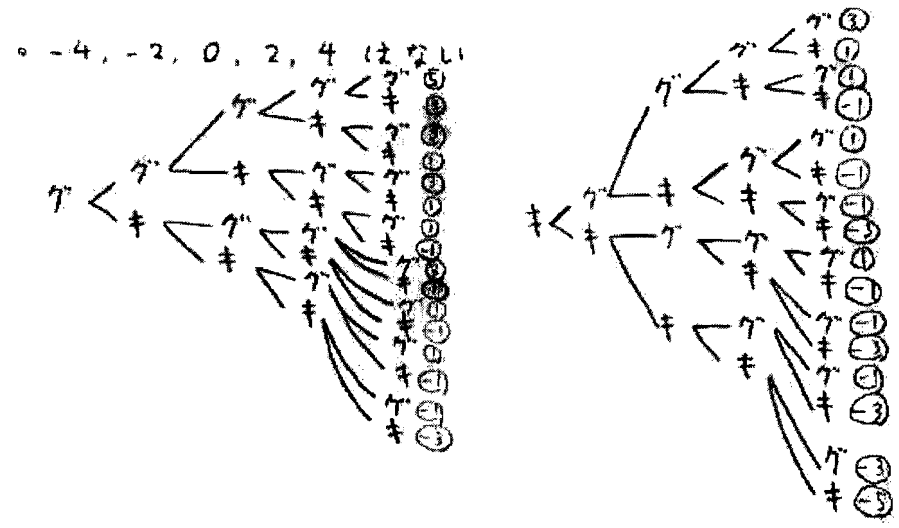


図 5.2　対称の場合の図的表現 (TD-1)

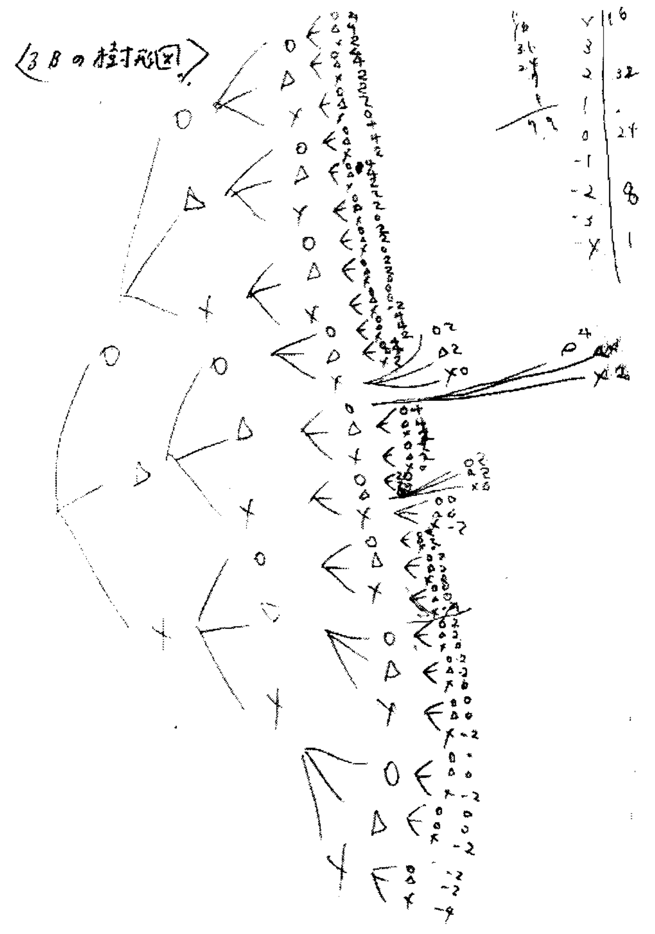


図 5.3　非対称の場合の図的表現 (TD-1)

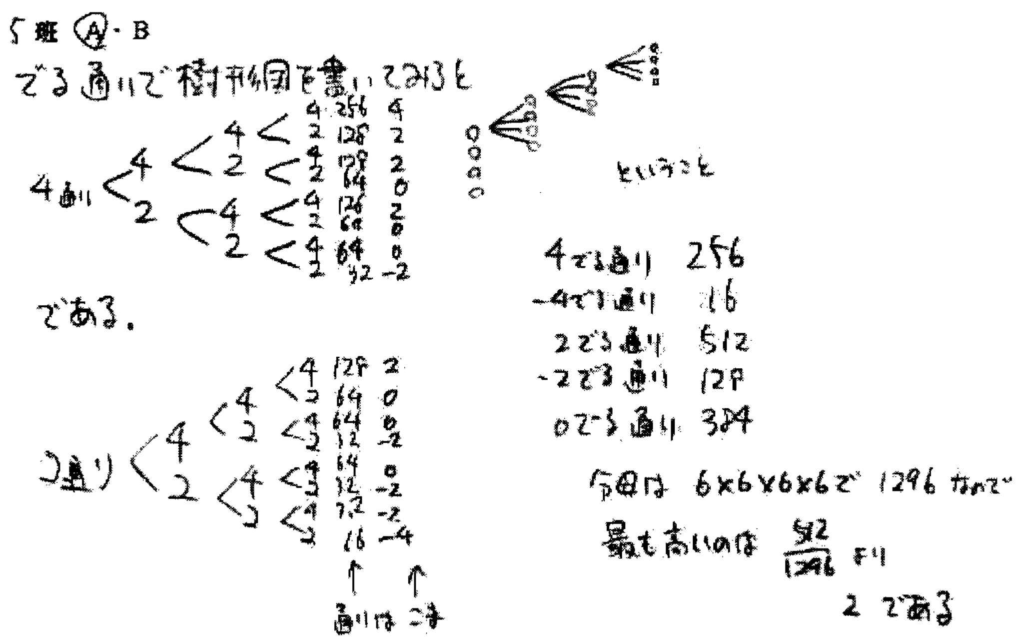


図 5.4　非対称の場合の図的表現 (TD-2)

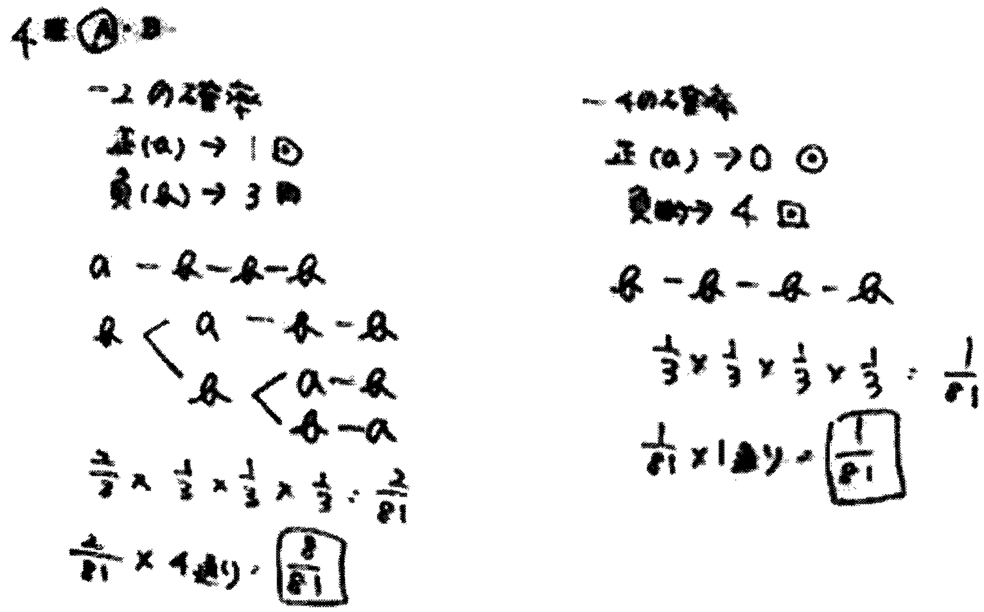


図 5.5　非対称の場合の図的表現 (TD-3) の一部

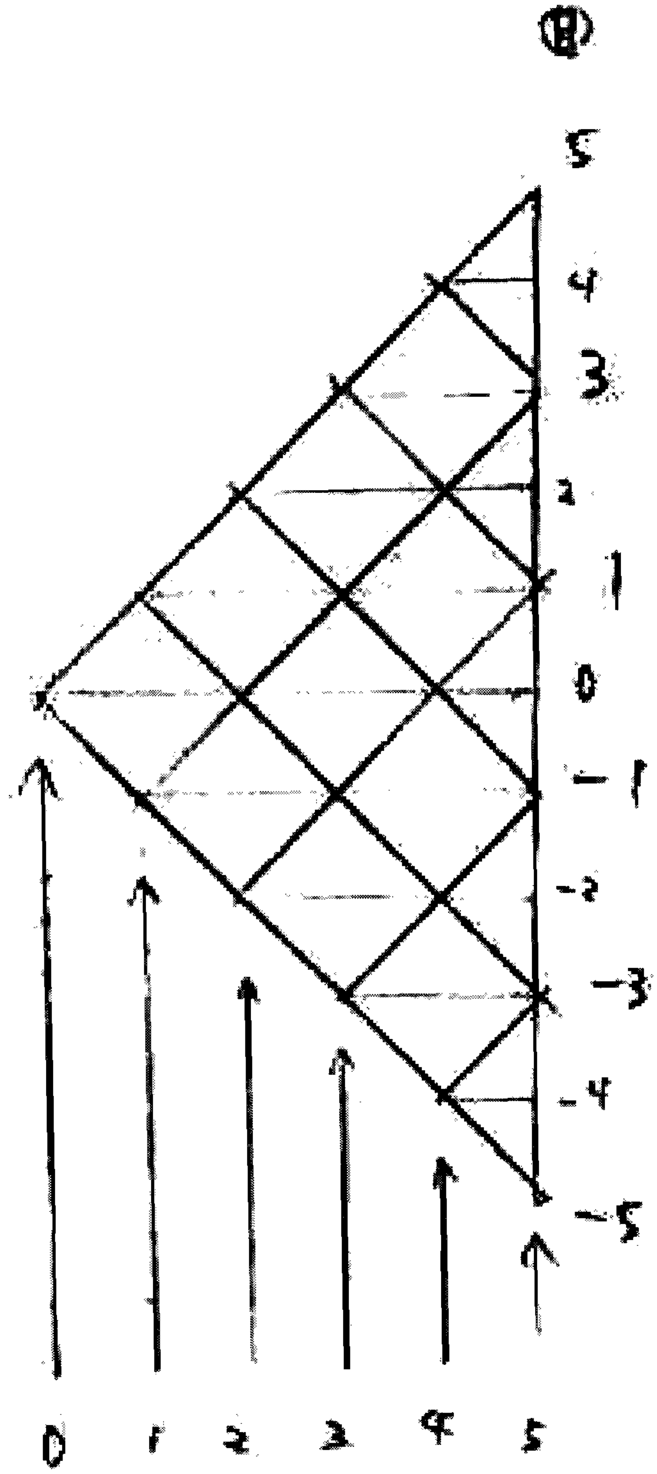


図 5.6　経路図に似た図的表現

本章では、中学生を対象にした2つの認識調査を実施することで、生徒の認識に第1水準から第3水準までが混在することが明らかになった。これは「確率概念の認識における水準」の妥当性を示すものである。

また、その認識調査において生徒の記述を詳細に分析することで、第2水準から第3水準への上昇に関わりのある認識の様相として、図的表現と式表現に着目し、第2水準、第3水準それぞれに関わりが深い表現と、確率樹形図というその2つの中間的表現がみられることを見出した。この確率樹形図が水準の上昇に深く関わっていることを指摘した。

第2部のまとめ

第2部の目的は、数理認識の視座から、カリキュラム開発の原理と成り得る「確率概念の認識における水準」の設定にある。

第3章では、数理認識論の視座より、van Hieleの水準論の特徴である「方法の対象化」について述べた。カリキュラム構成の原理としての学習水準論は有効である。しかし、水準論の構造的特徴である「方法の対象化」を明確にすることは必ずしも容易ではない。そこで、van Hieleの「幾何における水準」を数学的に形式化することで「方法の対象化」を明確にし、その数学的構造を明らかにすることを目的とする。

第1節では、まず、数理認識に関する基本的な立場として、「数理認識とはものごとを数学という枠組み (一種の言語体系である枠組み—数学言語—) で捉えることである」という船越の数理認識論 (船越,1995,1998) について述べた。

第2節では、「方法の対象化」とそれを大きな特徴とする学習水準論について述べた。まず、この議論の端緒となったvan Hieleの水準論について取り上げ、その一般化と他領域での設定について述べ、「方法の対象化」という構造に特に着目したFreudenthalの水準の解釈について述べた。

第3節では、数理認識の視座からvan Hieleの水準論について考察を加えることによって、「方法の対象化」の構造を明確にした。さらに、本研究の水準の解釈がvan Hieleの解釈よりも「方法の対象化」の構造をより重視するFreudenthalの水準の解釈に近いことを述べた。

第4章では、前章で得られた知見をもとに、「方法の対象化」の構造を明らかにするとともに、「確率概念の認識における水準」の設定を目的とした。

第1節では、確率認識に関する先行研究の成果から明らかになった認識の様相と、いくつかの代表的な確率概念についての数学的形式化を通して、確率概念の認識における「方法の対象化」の構造を明らかにした。

第 2 節では、前節から得た知見に基づき、以下のような「確率概念の認識における水準」を設定した。

第 0 水準　偶然的な事象を対象とし、結果を列挙したものを方法として考察する。

第 1 水準　結果を列挙したもの (の集合) を対象とし、根元事象を方法として考察する。

第 2 水準　全事象の空間 (根元事象の集合全体) を対象とし、数学的確率を方法として考察する。

第 3 水準　数学的確率 (の集合) を対象とし、確率の命題を方法として考察する。

第 4 水準　確率の命題が成り立つ空間 (確率の命題の集合) を対象とし、公理を方法として考察する。

第 5 章では、実施した認識調査の結果をもとに確率概念の認識の様相について詳述するとともに、水準の妥当性について検討することを目的とした。

第 1 節、第 2 節では、特に現行のカリキュラムで確率教育の中核となっている中学生を対象に確率学習前と確率学習後に認識調査を実施し、確率概念の認識の様相を明らかにし、その明らかになった様相から水準の妥当性を検証した。

その結果、生徒の認識の様相において「試行の結果を対象とする見方」「全事象の空間を対象とする見方」「確率を対象とする見方」が存在することが明らかになり、水準の妥当性が示された。

第 3 節では、前節の認識調査においての生徒の記述を詳細に分析することで、第 2 水準から第 3 水準への上昇に関わりのある認識の様相として、図的表現と式表現に着目し、第 2 水準、第 3 水準それぞれに関わりが深い表現と確率樹形図というその 2 つの中間的表現がみられることを見出した。さらに、この確率樹形図が水準の上昇に深く関わっていることを指摘した。

第III部

「確率概念の認識における水準」に基づくカリキュラム

第6章

水準に基づくカリキュラムの改善

第1章でも述べたように、日本では数学教育の現代化の流れとともに小学校の教育に確率が導入されるものの、現代化への批判の高まりとともに次第に内容が縮小されていき、1977年の学習指導要領改訂で完全に削除される。その後、現在まで日本の算数教育で確率が扱われることはなかった。

中学校では、同じく現代化の改訂ではじめて導入され、第2学年に配当されるが、1978年の改訂以降は、現代化への批判とともに内容の削減が進められる。

高等学校では、数学Aで確率とその基本的な法則、独立な試行と確率、期待値等を学習し、数学Cでは、事象の独立・従属、条件つき確率等の確率の計算、確率分布等を学習する。平成14年度高等学校教育課程実施状況調査によると、数学Aは74.5%が履修しているものの、数学Cは20.0%しか履修していないことを考えると、確率のカリキュラムは一般的には、中学第2学年と数学Aを中心として行われていると考えてよい。

これに対して諸外国では、近年特に確率の教育が強調される傾向にあり、その導入も次第に低年齢化している。日本に比べて確率概念の発達に沿った形で低学年からの確率カリキュラムが構築されていると言える。そこで本章では、日本における確率のカリキュラムの問題点を明らかにするとともに、NCTMのスタンダードにおける確率のカリキュラムについても分析を行い、カリキュラムの改善について考察を行う。そして、得られた知見をもとにカリキュラムの試案を提案する。

6.1　日本のカリキュラムの現状とその問題点

6.1.1　日本のカリキュラムの現状

まず、日本のカリキュラムの現状について具体的に述べる。現行の指導要領 (文部省,1998) で、確率は次のように取り上げられている。次は、指導要領から確率に関わる部分を抜粋したものである。

中学校　第 2 学年

1　目標

(3). . . ＜中略＞　. . . また、具体的な事象についての観察や実験を通して、確率の考え方の基礎を培う。

2　内容　C 数量関係

(2) 具体的な事象についての観察や実験を通して、確率について理解する。

ア　起こり得る場合を順序よく整理することができること。

イ　不確定な事象が起こり得る程度を表す確率の意味を理解し、簡単な場合について求めることができること。

3　内容の取扱い

(5) 内容の「C 数量関係」の (2) のイについては、起こり得るすべての場合を樹形図等を利用して簡単に求めることができる程度の事象を取り上げるものとする。

(6) 内容の「C 数量関係」の (2) のイについては、確率を余事象の考えによって求めることは扱わないものとする。

目標に「具体的な事象についての観察や実験を通して」とあるように、第 1 水準の活動を行うことは書かれている。しかし、「2　内容」ではア、イとも場合の数を数え上げて数学的確率を求めること、つまり、第 2 水準の活動を述べている。つまり、目標では第 1 水準の活動を取り上げていながらも、第 1 水準の具体的な内容については書かれていない。また、「3　内容の取扱い (5)」でも同様で、第 2 水準の活動を強調して述べている。さらに、(6) では余事象の考え等第 3 水準の活動にはふれないことを確認している。

このように、中学校の指導要領では、第 1 水準の活動から第 2 水準への活動が取り上げ

られてはいるが、第 1 水準の具体的な活動はなく、主に第 2 水準の活動を中心として構成されていることが分かる。これでは、第 1 水準から第 2 水準への上昇を意識したものとは言えない。

高等学校の指導要領 (文部省,1999) では、確率は次のように取り上げられている。次は、指導要領から確率に関わる部分を抜粋したものである。

高等学校　数学A

1　目標

平面図形，集合と論理及び場合の数と確率について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を育てるとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識できるようにする。

2　内容

(3)　場合の数と確率

具体的な事象の考察等を通して，順列・組合せや確率について理解し，不確定な事象を数量的にとらえることの有用性を認識するとともに，事象を数学的に考察し処理できるようにする。

ア 順列・組合せ

イ 確率とその基本的な法則

ウ 独立な試行と確率

[用語・記号] ${}_n\mathrm{P}_r$ ， ${}_n\mathrm{C}_r$ ， 階乗 $N!$ ， 余事象，排反

3　内容の取扱い

(3) 内容の (3) のアに関連して，2 項定理を扱うものとし，ウに関連して，期待値を扱うものとする。ただし，事象の独立，従属は扱わないものとする。

数学 A においても、目標に、「具体的な事象の考察等を通して $\cdots$」とあるように、第 2 水準の活動を中心に展開している。内容的には、加法定理や余事象等の基本的な法則や期待値を扱うので第 3 水準の活動も含んでいる。しかし、これらはあくまでも数え上げで計算ができる、つまり、第 2 水準で解決できる範囲の例が取り上げられており、第 2 水準から第 3 水準への上昇が意識された教材ではない。このことは、内容の結果を列挙したもので「ただし，事象の独立，従属は扱わないものとする」ことからも分かる。確率の意味を

重視するという配慮からであろう、第３水準の活動には深く入り込むことを避けている。

高等学校 数学C 1　目標 　行列とその応用，式と曲線，確率分布又は統計処理について理解させ，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，それらを積極的に活用する態度を育てる。 2　内容 (3)　確率分布 確率の計算及び確率変数とその分布についての理解を深め，不確定な事象を数学的に考察する能力を伸ばすとともに，それらを活用できるようにする。 ア 確率の計算 イ 確率分布 （ア）　確率変数と確率分布 （イ）　2項分布 ［用語・記号］ 条件つき確率，平均，分散，標準偏差 3　内容の取扱い (1)　この科目は，履修する生徒の実態に応じて，内容の（1）から（4）までの中から適宜選択させるものとする。 (4)　内容の（3）のアについては，「数学A」の確率の内容に続いて，条件つき確率等を扱う程度とする。

これに対し、数学Cにおいては、選択制とはいえ、確率変数、条件つき確率等第３水準の活動が中心となる。「3　内容の取扱い」には、「数学Aの確率の内容に続いて･･･」とあるが、第２水準から第３水準への上昇に配慮した内容にはなっていない。

以上のことをまとめたものが表6.1である。

このように、現在の日本のカリキュラムは「確率概念の認識における水準」の視点からみると断片的なもので、整理されたものではない。特に生徒の認識の形成を考えたときに重要である「方法の対象化」の獲得、つまり水準の上昇については、全く配慮されていないと言える。

表 6.1　現行のカリキュラムの分析

学年＼水準	0	1	2	3
小学校				
中学 2 年		△	◎	
数学 A			○	○
数学 C(選択)				◎

◎：主に扱われている　○：扱われている　△：あまり扱われていない

6.1.2 日本のカリキュラムの問題点

前項でのカリキュラムの現状分析をもとに、本節では「確率概念の認識における水準」の視点から現行の日本のカリキュラムの問題点を考察する。

(1) 第 0 水準、第 1 水準の活動の不足

日本の現行のカリキュラムでは、中学校第 2 学年のみでの学習となっており、小学校において確率は全く扱われない。よって、それまでの確率概念の形成は、個々の経験や成長に委ねられている。小学校の早い時期に意図的に偶然的な現象が存在することを知ることは重要である。

現状では、中学校において確率をはじめて学ぶときに、生徒は主に数学的確率を学習するため、試行の結果を対象にした活動の経験が十分ではなく、全事象の空間の認識が確かではないまま、数学的確率の学習をしていると考えられる。これではどうしても、数学的な確率を求める手続き、つまり場合の数の計算が、強く印象づけられることになる。本来、確率概念は偶然的な現象の結果を予測するためのものであり、そのためには実際に経験した結果が推論の根拠となる。このことは、実際の試行の結果を得ること、つまり、実際の実験が重要であることを示唆している。

現行のカリキュラムでも、教科書には実験が取り入れられている。しかし、それは、単一な事象を扱うのみで、統計的確率のみを求めることを目的とする（例えば、画鋲を投げる）実験であったり、数学的確率と統計的確率を一致させる大数の法則の理解を目的とする実験である。これらは正しく「全事象の空間」の認識をするための実験ではなく、「方法の対象化」に基づいたカリキュラムとは言えない。そこで、数学的確率を学習する以前に、「全事象の空間」を正しく認識することを目的とした実験を学習するように、カリキュラムを改善することが必要だと考える。

このように「確率概念の認識における水準」からみると、現行の確率のカリキュラムは、第 1 水準の活動、つまり実際の試行の結果を対象とする活動が不足していると考えられる。

(2) 第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進する教材の欠落

このように「確率概念の認識における水準」からみると、現行の確率のカリキュラムは、第 1 水準の活動、つまり実際の試行の結果を対象とする活動が不足してい

ると考えられる。

第 2 水準への上昇を考えるとき、それと同時に、第 1 水準でも解決できないことはないが第 2 水準の活動としての方がより効率よく適切に解決できるような活動が必要である。単一事象や一様な分布を持つ事象のみでは第 2 水準の必要性を十分に感じることはできない。そこで、一様でない分布を持つ事象や複合的な事象を扱い、実際に実験を繰り返すことで確率分布を予測し、経験的な確率を求める。そして、その理由を考えることで数学的確率について理解していく。このような活動を通して根元事象に着目していくのである。

(3) 第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進する教材の欠落

現在の確率分野の中学校での学習は、加法・乗法定理、余事象等確率の集合を対象とする第 3 水準の活動は扱わず、全事象の空間を対象とする第 2 水準の活動を中心として構成される。それに対して、数学 A では第 3 水準の内容が取り上げられるが、前述したようにそれは不十分であり、数学 C では確率の集合を対象とすることを前提、つまり第 3 水準を前提に学習が進められる。つまり、第 2 水準から第 3 水準への上昇は、現在のカリキュラムではちょうど狭間になっている。その結果、第 2 水準から第 3 水準への上昇が十分な形で行われていないと考えられる。中学校段階でこの確率を対象とする見方を獲得させる活動を行うカリキュラムを用意することで、高等学校初年級で第 3 水準の活動を十分に取り扱うことができると考える。

(4) 第 3 水準の活動の不足

先にも述べたように、数学 A で確率の計算等は取り上げられているが、これはあくまでも第 2 水準の延長として扱われることが多く、十分に第 3 水準への上昇を意識したものではなかった。そのため、ここでは第 3 水準の活動が十分に行われていないことが考えられる。また、数学 C は選択制であり、決して多くが履修するものではなかった。よって、第 3 水準に上昇した後の活動が十分でないことが予測される。

6.2 NCTMのスタンダードとその問題点

次に、NCTM のスタンダードにおける確率のカリキュラムについて、水準の視点より考察を加える。以下はスタンダードにおける確率に関する記述である (筑波大学数学教育学研究室,2001,NCTM,2000)。

【幼稚園入園前から第 2 学年】

- 生徒の経験に関係した出来事を、起こりそう、または、起こりそうもないとして論ずる。

【第 3 学年から 5 学年】

- 出来事を、起こりそう、または、起こりそうもないとして記述し、起こりやすさの程度を「確か」「同じように確からしい」「不可能」のような言葉を使って論ずる。
- 簡単な実験結果の確率を予測しそれを検証する。
- ある出来事の起こりやすさの計量が、0 と 1 の間の数で表すことができることを理解する。

【第 6 学年から第 8 学年】

- 余事象と排反事象を記述するための適切な用語を理解し使う。
- 実験とシミュレーションの結果についての予想を立て検証するために、比例関係及び確率の基礎的理解を使う。
- 簡単な複合事象の確率を系統立てられた表、樹形図、面積も出るような方法を使って計算する。

【第 9 学年から第 12 学年】

- 標本空間と確率分布の概念を理解し、簡単な場合に標本空間と分布を構成する。
- 経験的な確率分布を構成するためにシミュレーションを使う。
- 簡単な場合に確率変数の期待値を計算し解釈する。
- 複合事象の確率をどのように計算するかを理解する。

【幼稚園入園前から第2学年】における「・・・出来事を、起こりそう、または、起こりそうもない・・・」という内容は、まさに第0水準の活動と言える。NCTMのスタンダードでは第0水準の活動は十分に保証されている。

【第3学年から5学年】では、「起こりやすさ」の程度を量的に表すことを目標としている。まず、「起こりやすさの程度を「確か」「同じように確からしい」「不可能」のような言葉を使って論ずる」ことは、第0水準の活動だと考えられる。また、第1水準の活動だと考えられる「・・・実験を通して確率を探求する・・・」という記述も説明にあるが、どちらかというと第2水準の活動との関連で重きがおかれている。つまり、第0水準の活動から第2水準の活動まで広範囲に取り上げられていると考えられる。

【第6学年から第8学年】では、余事象や確率同士の計算等、確率を対象とする第3水準の活動についても扱っているが、表や樹形図等を用いて確率を求める等、第2水準の活動を中心に取り上げている。また、複合事象等では、データとの関連を大切にしており、第1水準の活動についても意識されていることが分かる。ここでも第1水準から第3水準まで広範囲な活動が取り上げられている。

【第9学年から第12学年】では、主な活動は第3水準だが、ここでもシミュレーションを十分に活用した、実験結果を対象にした活動、つまり第1水準の活動が重視されている。

このことから分かるように、NCTMのスタンダードでは、幼稚園入園前の幼児から第12学年までを見通して確率のカリキュラムを位置づけられている。水準の視点からも第3水準の活動が十分に扱われていないことを除けば、内容的には全範囲を含むようにカリキュラムが配置されていると言える。

しかし、水準の上昇という視点からみると、必ずしも十分に配慮されているとは言えない。本来、下位の水準の活動を十分に行った上で、次の水準への上昇を促進していくことがのぞましいと考える。スタンダードでは確かに内容的には網羅的に扱ってはいるが、下位の水準から次の水準への上昇を促進するような扱いにはなっておらず、水準の上昇や活動のつながりを十分意識しているとは考えられない。

以上の内容を水準の視点から分析したものが表6.2である。

表 6.2　NCTM のスタンダードの分析

学年＼水準	0	1	2	3
preK － 2 年	◎			
3 － 5 年	○	◎	○	
6 － 8 年		○	◎	○
9 － 12 年		○	△	◎

◎：主に扱われている　○：扱われている　△：あまり扱われていない

6.3 カリキュラム改善のための指針とそれに基づく試案

6.3.1 カリキュラム改善のための指針

前節で述べたカリキュラムの問題点を改善するために、「確率概念の認識における水準」と確率概念の発達の先行研究の知見より、以下のようなカリキュラム改善の指針を提案する。

(1) **小学校下学年において第 0 水準の活動を十分に行うとともに第 0 水準から第 1 水準への上昇を促進する活動を組織する。**

児童の確率概念の発達から考えると、小学校下学年に第 0 水準や第 1 水準の活動を導入することがのぞましい。つまり、偶然的な現象が存在することを取扱い、それを実験で確かめるような活動ができると考える。このような経験は生活の中で育成されているとも考えられるが、意図的に取り上げることで児童の偶然概念を確かにすることができる。第 0 水準の活動や第 1 水準への上昇を意識した活動を独立して小学校 1〜2 年に取り上げることも可能であるが、現行の他の分野のカリキュラムとのバランスから考えると、小学校第 3 学年に第 0 水準の活動の確認も含める形で位置づけることができるのがのぞましいと考える。具体的には、単一事象を取り上げることが妥当だと考えるが、一様な分布になるものだけではなく、様々な分布になる事象を取り上げることが重要だと考える。

(2) **小学校上学年において第 1 水準の活動を十分に行うとともに第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進する活動を組織する。**

第 1 水準から第 2 水準への上昇、つまり方法の対象化を、しっかり獲得させることが目的となる。そのためには、全事象の空間を構成するためのいろいろな実験を行い、分布の形を予想する等、第 1 水準での豊かな経験をベースにしながら、なぜそうなるのかを数学的確率を方法としてしっかり考察させることが重要となる。

具体的には、複合事象を含む様々な実験を取り上げ、実際の実験から理論的な考察へと導くことが適切である。

(3) 中学校において第 2 水準の活動を十分に行うとともに第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進する活動を組織する。

第 2 水準の活動を十分に行うことが中心となる。さらに、その後第 2 水準から第 3 水準への上昇を促す活動を組織する。具体的には、確率モデル、確率判断や確率分布を取り入れた活動等、数学的確率を対象とする活動を充実させることが必要となる。

また、日本の教科書では第 2 水準から第 3 水準への移行にあたる部分が十分考慮されておらず、第 6 章で述べたように (TD-1) に分類される樹形図しか扱われない (例えば、啓林館,2005)。第 2 水準から第 3 水準への移行を促進させるためには、(TD-2) や (TD-3) の確率樹形図等を積極的に利用することも重要であると考える。

(4) 高等学校において第 3 水準の活動を十分に行う。

高等学校初年級において必修科目として、第 3 水準の活動である確率を対象とする計算を十分に取り上げる。さらに、条件つき確率についても、第 3 水準の見方の必要性を十分に感得させるという目的において取り上げる。また、生活との関わりの中で確率モデルの考えを取り入れた教材についても導入する。

以上のことをまとめたものが表 6.3 である。

表 6.3 『方法の対象化』に基づくカリキュラム

水準 学年	0	1	2	3
小学校下学年	◎→	○		
小学校上学年		◎→	○	
中学校			◎→	○
高等学校				◎

◎：主に扱われている　○：扱われている　↑：水準の上昇を意識した扱い

6.3.2 カリキュラム改善のための試案

上記の指針より、次のようなカリキュラムの改善が考えられる。

【小学校下学年】

- 偶然的な現象の存在を知り、具体的な事象についての観察や実験を通して確率の考え方の基礎を培う。

【小学校上学年】

- 具体的な事象の考察等を通して確率の意味を理解するとともに、簡単な場合の数学的確率についてその意味や必要性を理解することができる。

【中学校】

- 数学的確率についてその意味を理解し、求めることができるとともに、簡単な場合の確率の計算についてもその意味や必要性を理解することができる。

【高等学校】

- 確率の計算の理解を深め、不確定な事象を数学的に考察し処理できるようにする。
- 不確定な事象を数学的に考察する能力を伸ばすとともにそれらを活用できるようにする。

本研究では、現行の日本のカリキュラムにおける時間的な制約等は考慮せず、あくまでも確率教育の立場から適切と考えられる試案を示すことが目的である。そこで、現行の学年ではなく、年齢を用いたカリキュラム試案を表 6.4 に示す。ただし、このカリキュラム試案は、現段階のものであり、あくまでも暫定的な案である。

表 6.4　「方法の対象化」に基づくカリキュラム試案

年齢	目標	学習内容
8–9 歳	偶然的な現象の存在を知り、具体的な事象についての観察や実験を通して確率の考え方の基礎を培う。	不確定な事象の意味 起こりやすさの比較 (一様でない分布も含む)
	第 0 水準の活動の充実と第 1 水準への上昇	
12–13 歳	単一事象や簡単な場合の複合事象が起こり得る程度を表す数学的確率の意味を理解し、求めることができる。	場合の数 (数学的) 確率の求め方 数学的確率と統計的確率との関係
	第 1 水準の活動の充実と第 2 水準への上昇	
14–15 歳	具体的な事象の考察等を通して順列組合せや確率について理解するとともに、簡単な場合の確率の計算についてもその意味や必要性を理解することができる。	確率の計算の意味 (確率モデル等)
	第 2 水準の活動の充実と第 3 水準への上昇	
16 歳	確率の計算の理解を深め、不確定な事象を数学的に考察し処理できるようにする。	確率の基本法則 独立的な試行 条件つき確率
	第 3 水準の活動の充実	

第7章

水準の上昇のための単元開発とその実際

第6章では、「確率概念の認識における水準」の視点から、現行のカリキュラム上の問題点を考察し、改善のための試案を示した。カリキュラムは、実際には、具体的な単元作りや実践を通して経験的に構築される。そこで、水準の上昇の促進を想定した単元を開発し、その開発した単元を用いて教育実験を行う。その実験を通して水準の上昇がみられたかどうかを認識の変容に着目することで明らかにする。

具体的には、水準の上昇を促進する単元を設定し、以下の教育実験を行った。

(1) 第0水準から第1水準への上昇を促進するための単元

(2) 第1水準から第2水準への上昇を促進するための単元

(3) 第2水準から第3水準への上昇を促進するための単元

これらの教育実験の結果について詳述する。

7.1　第0水準から第1水準への上昇のための単元

7.1.1　単元開発

本節では、第0水準から第1水準への上昇を促進するために開発した単元について述べる。第0水準から第1水準への上昇を促進するためには、まず、第0水準の活動を十分に行い、その上で第0水準では解決しにくい課題に取り組ませることが有効だと考えられ

る。そこで、次のようなゲームを中心とする単元を開発した。

ゲーム

サイコロを使って「アンパンマンとバイキンマン」のゲームをします。サイコロを振って1と3と5が出たらアンパンマンのポイントになります。2と4と6が出たらバイキンマンのポイントになります。ポイントが多い方が勝ちとなります。どっちが勝つと思いますか。

このゲームを行った時に、「どちらが勝つと思うか」を予想させる。第0水準の児童は、アンパンマンかバイキンマンのどちらかが勝つことは理解しているが、その根拠は主観的なものであることが多いと考えられる。そこで、「いつも、○○が勝つと思うか」という発問を投げかけることで実際の実験を通してその結果に着目させ、起こりやすさを議論する必要を迫ることで、第1水準への上昇を促進することができると考えた。

具体的には、以下のように学習を進める。

- どちらが勝つと思うか考える。
- 各自が1つのサイコロを30回振ることによって行う。
- 各自がワークシートに「正」の字を用いて記録する。
- クラス全員の結果を黒板を用いて合計し、ポイントを比べて勝敗を決める。
- 「このゲームをまたするとしたら、○○○○マン (勝った方) がいつも勝つと思うか？」という問いについて考える。

7.1.2 教育実験の概要

本実験の目的は、 第0水準の活動を十分に行うとともに第0水準から第1水準への上昇を意識した活動を中心に単元化を行い、児童の認識の変容を確かめることで、単元の妥当性を確かめ、カリキュラム構築の一助とすることにある。開発した単元を用いて、以下のように教育実験を行った。

日程 2006年7月上旬 に2単位時間

対象 K大学附属S小学校第3学年38名

指導者 今堀妙香 (K大学大学院生)

学習の流れは、表7.1の通りであった。

表 7.1　学習の流れ

学習活動 (2 時間)
○本時のゲームの内容について説明を行う。 サイコロを使って「アンパンマンとバイキンマン」のゲームをします。サイコロを振って 1 と 3 と 5 が出たらアンパンマンのポイントになります。2 と 4 と 6 が出たらバイキンマンのポイントになります。ポイントが多い方が勝ちとなります。30 回振った時、どっちが勝つと思いますか。 ○どちらが勝つと思うか、その理由とともにワークシートに書く。(調査 1) ・アンパンマンが勝つ ・バイキンマンが勝つ ・わからない 等　　　　　※理由は、表 7.2 ○サイコロを 30 回振って結果を記録する。 ・ワークシートに「正」の字を用いて記録。   ○黒板で集計する。 合計のポイント・・・アンパンマンが 567、バイキンマンが 587 ○このゲームをまたするとしたら、バイキンマンがまた勝つと思うか、話し合う。 (調査 2) ・いつも勝つわけではない ・いつも勝つ 等　　　　　※理由は、表 7.2

「どちらが勝つと思うか」という問いに対する児童の考えをゲームを行う前に聞いた調査 1 の結果は表 7.2 の通りである。ただし、理由は複数回答がある。

このことから、この実験で対象とした小学校第 3 学年の児童は、どちらかが起こるということは理解している、つまり、第 0 水準には達していると考えられる。しかし、以前の経験 (サイコロを用いた同種のゲームをこれ以前に行っている) や確率とは関係のない要因に左右されたり、起こりやすさというものを実際の結果や目の数等に結びつけて考えてはいない児童が多いことが、記述から判断できる。つまり、この段階では第 1 水準以降には達していない児童が多いと考えられる。

次に、事後の「このゲームをまたするとしたら、またバイキンマンがいつも勝つと思いますか。」という発問に対しての児童の考えをワークシートに記述させた調査 2 の結果は表 7.3 の通りである。

このように、いつも勝つということについては、ほとんどが否定したが、その理由については、「気持ちによってかわる」というものと、「運だからいつもだとは限らない」という 2 つの考えに大きく分かれた。しかし、「メカとかは関係ない」等、事前の問いで多くみられた意見は否定された。「運だから」という意見の中には、「実験で得られたポイントが同じぐらいだったから」という実験の結果を根元事象に着目して捉えようとしているものもみられた。また少数ではあるが、「アンパンマンとバイキンマンのポイントになる面の数が同じだからどちらが勝つかわからない」というように、面の数に言及しているものもみられた。

表 7.2　調査 1 の結果

問　: アンパンマンとバイキンマンどっちが勝つ？

結果:　アンパンマン 12 名　バイキンマン 23 名　わからない　3 名

バイキンマンと答えた児童の主な理由：

- バイキンマンはメカがある、強い、カッコイイ等 (4)
- バイキンマンが出やすそうだから (4)
- 2、4、6 が出やすそう、数が大きい (6) 等
- 以前の経験に言及 (6)

アンパンマンと答えた児童の主な理由:

- アンパンマンはアンパンチがあるから (1)
- アンパンマンとえんがよいみたい (1)
- 1 が出やすい、1、3、5 が出やすい (10)
- 以前の経験に言及 (3)

わからないと答えた児童の主な理由:

- 負けたり勝ったりする (1)
- どっちかわからない (1)
- 以前の経験に言及 (2)

表 7.3　調査 2 の結果

いつも勝つわけではない　35 名

- 運による、何が出るかわからない (16)
- サイコロの面の数に言及 (6)
- 気持ちによる (11)
- (黒板で) アンパンマンもいっぱい出てたから (1)
- 振り方によって (1)

いつも勝つ　1 名

- 数字が大きいから (1)

無回答　2 名

7.1.3 実験の結果と考察

前節で述べた実験の結果について、さらに認識の変容に着目して考察を深める。

調査 1 と調査 2 の結果を 1 つの表にまとめたものが表 7.4 である。この表から、「どちらかが勝つ」と考えていた児童の多くが、「いつも○○マンが勝つわけではない」と考えるようになったことが読み取れる。

このように変容した原因としては、実験を経験したことが原因となっていると考えてよいだろう。例えば、調査 2 の記述には次のようなものがみられる。

> 私は、バイキンマンがいつも勝つとは思わないと思います。りゆうはひょうをみた時アンパンマンもたくさんの数が出たからです。(M.U)

つまり、調査 1 の段階で、「アンパンマンが勝つ」とか「バイキンマンが勝つ」と考えるのは、偶然的な事象を結果を列挙したものとして考察はしているが、それはあくまでも主観的な理由で捉えた第 0 水準の活動である。それに対して、上記の M.U の記述等からは、実験の結果 (結果を列挙したもの) を根元事象に着目して数えることを通して考察している第 1 水準の活動だと考えられる。つまり、第 0 水準から第 1 水準への上昇がみられたのではと考えることができる。

そこで、さらに、調査 1 で予想の根拠として確率とは関係のない要因をあげた児童、つまり第 0 水準だと考えられる児童の調査 2 の結果に着目することで、このことを詳細に考察する。抽出児童の認識の変容をまとめたのが、表 7.5 である。

これらの抽出児童は、「縁がある」とか「メカがある」等、調査 1 において明らかに主観的にどちらが勝つかを判断している。そして、「アンパンマンが勝つ」もしくは「バイキンマンが勝つ」というように答えている。この意味において、第 0 水準だと判断できるのであった。

表 7.4　認識の変容 1

調査 1 ＼ 調査 2	いつも勝つわけではない	いつも勝つ	無回答	計
アンパンマンが勝つ	9	2	1	12
バイキンマンが勝つ	23	0	0	23
わからない	3	0	0	3
計	35	2	1	38

(単位：人)

表 7.5　認識の変容 2

氏名	調査 1	調査 2
N.H	アンパンマンとえんがよいみたい。	うんでかわると思います。気もちのもんだいだと思います。
Y.M	アンパンマンはアンパンチがあるから。	サイコロっていうのは、うんだからぜったいかつっていうのはないと思います。
Y.Y	バイキンマン はロボット作りがうまいから。	きもちがこころをひらいてかみさまにいうから。
K.H	バイキンマン はつよそうだから。	きもちによってちがうと思う。
Y.K	バイキンマン の方がカッコイイから。	アンパンマンとバイキンマンの数は同じだし、うんだからどっちがかつかわからない。
Y.H	バイキンマン はマシンとバイキンでたおすから。	みんなの気もちによってちがうと思います。

しかし、調査 2 においては、これらの全ての児童が「いつもバイキンマン」が勝つとは限らないと考えている。ここに、どちらかが勝つという 2 つの可能性の一方を強く信じていたことからの認識の変容がみてとれる。その根拠としては「運でかわる」「気もちによってかわる」等をあげているが、これは、実際の実験の結果に着目して考察することを通して、一方が勝つということはないと判断したと考えられる。つまり、第 1 水準の活動だと考えられる。しかし、これらの児童の認識は、根元事象を対象にしての考察を根拠にはしていないことから、第 2 水準以降には達していないと考えられる。

それに対して、調査 1 で「わからない」と答えていた児童は、3 人とも調査 2 では「いつも勝つわけではない」と答えている。これは、調査 1 の段階から、どちらが出るかは判断できないと考えていたからである。このことは、3 人の中の 1 人である T.O の次の記述から判断できる。

サイコロは 1～6 まであってころがして何が出てもおかしくない。　　(U.M)

この児童は調査 1 の段階で、すでに第 1 水準に達していたと考えることができる。調査 2 の段階では、第 2 水準に極めて近い考え方をしていると考えられる。

7.1.4　教育実験のまとめ

本節では、前章で得られたカリキュラム改善の指針のうち、「小学校下学年において第 0 水準の活動を十分に行うとともに、第 0 水準から第 1 水準への上昇を促進する活動を組織する」にしたがって単元を開発し、小学校第 3 学年を対象に教育実験を行い、その概要と結果を報告した。

その結果、小学校第 3 学年の児童は、第 0 水準の活動は、十分に行うことができた。また、起こりやすさを実験の結果との関連で理解する点において、第 1 水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。この結果から、開発した単元は、第 0 水準の活動を十分に行い、第 0 水準から第 1 水準への上昇を促進するために有効であったと考えられる。

しかし、今回は一様事象を扱ったが、この他にも一様でない事象等を扱い、起こりやすさの量的な比較を行うことも可能であり、このことは水準の上昇に一層有効ではないかと考えられる。本節で開発した他にも教材を充実させ、小学校段階での実践を蓄積することが、今後の課題と言える。

7.2　第１水準から第２水準への上昇のための単元

7.2.1　単元開発

本節では、第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進するために開発した単元について述べる。そのためには、第 1 水準の活動を十分に行い、その上で第 1 水準では解決しにくい課題を取り扱うことが有効である。

そこで、まず、実際の試行の結果を対象とした活動を中心にした教材を取り入れることが考えられる。確率を偶然的な現象を予測することから導入し、そして、その予測を確かめるべく実験をする。なぜそのような確率になるのかを予測していくことで、数学的確率を学んでいく。つまり、統計的確率と数学的確率との関係に疑問を持ち、それを追究することで、第 2 水準への上昇を促していくのである。Steinbring(1991) も複合事象についてのゲームを取り入れた教材を取り上げ、統計的確率と数学的確率を関連して扱うことの重要性を指摘している。

このような視点から、次のような単元を開発した。

【予想ゲーム 1】

1、2、3、4 の目がかいてある正四面体のサイコロ (図 7.1) があります。サイコロを振って出た目のところにおいてある駒を 1 つ進めます。

どの駒が最初にゴールするか予想してみましょう。最初にゴールした目を予想した人が勝ちです。(図 7.2、図 7.3)

このゲームでは、児童が偶然的な事象の結果を予想することから始める。そして、その結果を確かめるためにゲームを行う。この場合は、何度もゲームを繰り返すことでほぼ同じ確率であることに気づいていくだろう。実際には、クラスを 3 − 4 人のいくつかのグループに分ける。グループごとにゲームを行い、その結果をクラス全体でまとめることが必要になる。

図 7.1　正四面体のサイコロ

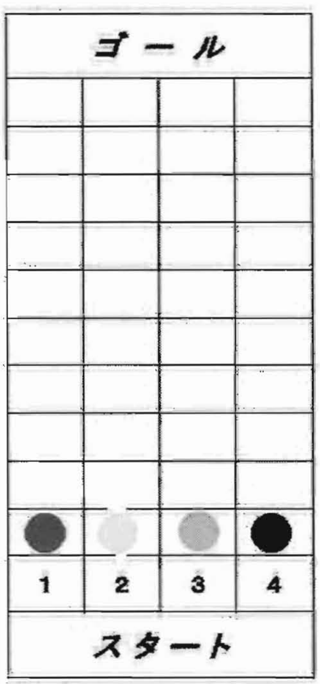


図 7.2　ゲーム盤 (開始時)

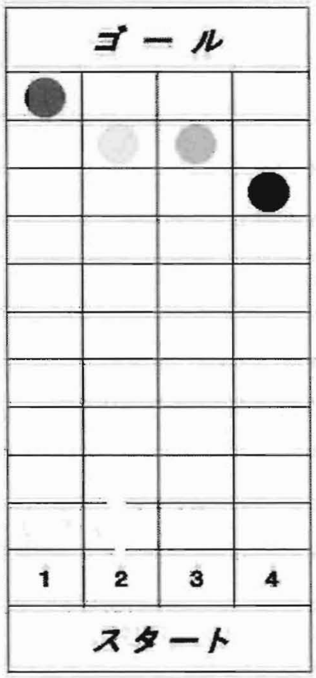


図 7.3　ゲーム盤 (終了時)

小学校中学年を対象に、この段階での経験を豊かにすることを目的にするならば、数学的確率を導入することなく、出やすさを比較することも重要である。いろいろな実験を行い、分布の形を予想する活動を展開することができる。

高学年であれば、ほぼ同じ確率で目が出ることを確認し、その理由を追及することで、数学的確率を導入することができるだろう。なお、正四面体のサイコロを用いるのは、全事象の空間が大きくなることで複雑になることを避けるためである。

次に、正四面体のサイコロを 2 つ同時に投げ、その目の和によって駒を動かすゲームを行う。これは複合事象の確率を経験的に考える課題である。ゲームは次の通りである。

【予想ゲーム 2】

2 つの正四面体のサイコロ (図 7.4) があります。

サイコロを振って出た目の和を求め、その数字のところにおいてある駒を 1 つ進めます。どの駒が最初にゴールするか予想してみましょう。最初にゴールした駒を予想した人が勝ちです。(図 7.5、7.6)

このゲームでも、児童が偶然的な事象の結果を予想することから始め、その結果を確かめるためにゲームを行うという流れをとる。はじめは、児童はどの数字の駒も同じような確率だと考えるだろう。しかし、何度もゲームを繰り返すことで、この場合はそう単純ではないことに気づいていくだろう。ゲーム盤の端の駒より中央の駒の方が勝ちやすいことに気づいていくと思われる。ただ、駒同士の確率の差を感じ取るには、やはり、グループごとに行ったゲームの結果をクラス全体でまとめることが必要になる。

この結果が実験より明らかになると、当然、次にはなぜそうなるのかを解き明かしたくなる。この段階での経験を豊かにすることを目的にするならば、数学的確率を導入することなく、出やすさを比較する等にとどめ、いろいろな実験を行い、分布の形を予想する活動を展開することができるだろう。しかし、高学年であれば、この仕組みを解き明かす追究活動を扱いたい。そのためには、もちろん順列の考えや数学的確率で表現することが必要になる。これは、第 1 水準から第 2 水準への上昇を促す格好の教材となろう。なお、正四面体のサイコロを用いるのは、全事象の空間が大きくなることで複雑になること避けるためであった。単一事象であれば普通のサイコロでも問題はないが、複合的事象等を扱う場合は特に効果的だと考える。

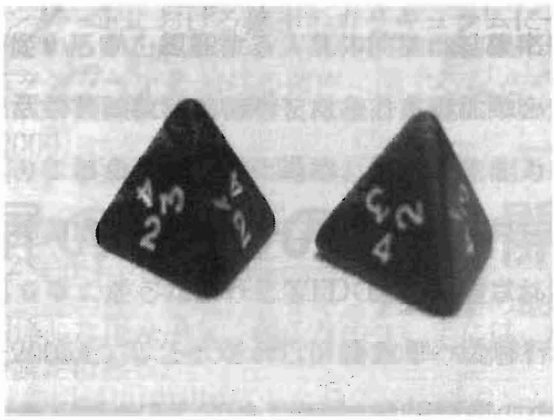


図 7.4　正四面体のサイコロ

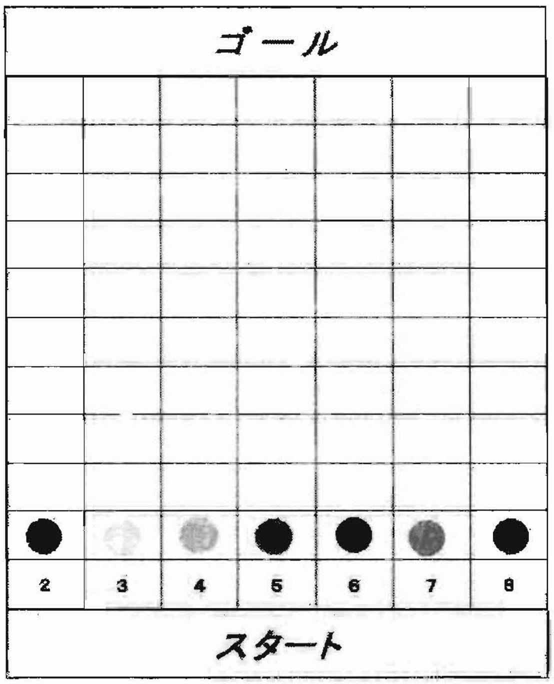


図 7.5　ゲーム盤 (開始時)

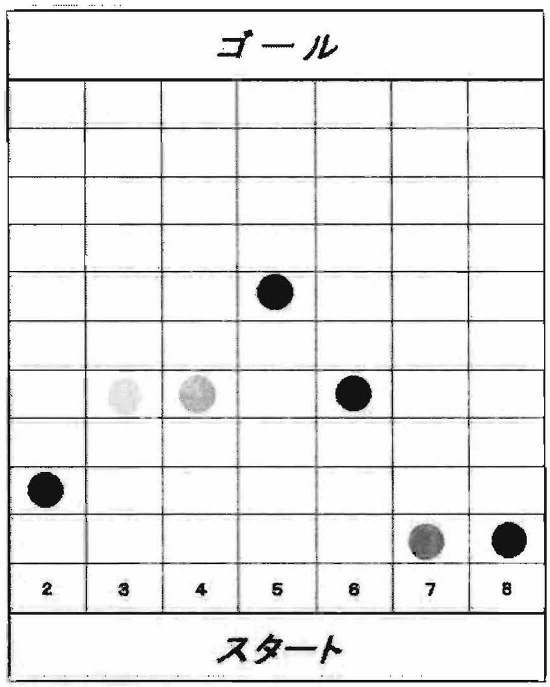


図 7.6　ゲーム盤 (途中)

7.2.2 教育実験の概要

本実験の目的は、第１水準の活動を十分に行うとともに第１水準から第２水準への上昇を意識した活動を中心に単元化を行い、児童の認識の変容を確かめることで、単元の妥当性を確かめ、カリキュラム構築の一助とすることにある。開発した単元を用いて、以下のように教育実験を行った。なお、本実験は、京都教育大学公開講座「なるほど＠ワールド」(親子で楽しむ形と数の教室) の１講座として実施した。

日程 2005 年 9 月 24 日 (土)　13:00～15:00

対象 小学 1 年生 (1 名)、4 年生 (8 名)、5 年生 (3 名)、6 年生 (1 名)、7 年生 (1 名)

指導者 岡部恭幸

※授業には、数名の児童の保護者も参加

授業では、予想ゲーム１と予想ゲーム２の２種類のゲームを扱った。予想ゲーム 1,2 の流れは次の通りである。

＜予想ゲーム１，２の流れ＞

どこに賭けたらよいか考える

→

試しのゲームをする (結果を記録する)

→

個人でどこに賭けたらよいか考える

→

本番のゲームをする

→

教室全体の結果を記録する（黒板に）

→

どこに賭けたらよいか全体で考え、説明する。

児童は、正四面体のサイコロに興味を持ち、その目の読み方にはすぐ慣れた。はじめの予想では、どこに賭けても同じというのはなく、この数字が好きとか、みた感じとかの理由でどこかが出やすいと考えた。ゲームを繰り返す中で、どこに賭けても結局は同じ、運次第だという考えになっていく。黒板を用いて、数学的確率で考えるとこれらは $\frac{1}{4}$ と考えられること、1 回のゲームでは予測できないが、多くのゲームをするとどれも同じくらい出ること等を説明し、理解した。

予想ゲーム 2 の流れも予想ゲーム 1 と同様である。はじめの予想では、多くの児童が、やはり、予想ゲーム 1 と同様にどこに賭けても同じと考えた。実際に、両端の数字に賭けた児童も多かった。しかし、ゲームを繰り返す中で、端に賭けたのでは勝てないということに気づいていく。真ん中の駒の方に賭けた方が勝てるということを数回ゲームを繰り返すうちに理解していった。

自分たちのゲームの結果を繰り返し、黒板の表にそれを書き込み、教室全体の結果として考える材料とした。そして、中央の方の数字が出やすく、両端の数字が出にくいことを確認した後、なぜこのようになるのか問い返した。児童は、表 7.6 のように 5 の数字が出るには (1,4)(2,3)、6 の数字が出るには (2,4)(3,3) のように、複数の目の出方があることには気がついたが、表 7.7 のように 5 の数字が出るには (1,4)(2,3)(3,2)(4,1) の 4 通り、6 の数字が出るには (2,4)(3,3)(4,4) の 3 通りというように、順列を考えて数えることはすぐにはできなかった。

しかし、表 7.6 のように考えたのでは、2，3 の数字、7，8 の数字の出やすさ、そして、4，5，6 の数字の出やすさが同じになり、実験で得た結果とはちがう。そこで、児童たちは考え直しを迫られ、2 名の生徒が表 7.7 のように考えたらよいことに気づき、発表した。黒板を用いて、数学的確率として結果 (表 7.8) を求め直し、説明を加えた。

予備実験の様子は図 7.7 の通りである。

表 7.6　目の数え方 1

数字	2	3	4	5	6	7	8
目の出方	(1,1)	(1,2)	(1,3) (2,2)	(1,4) (2,3)	(2,4) (3,3)	(3,4)	(4,4)

表 7.7　目の数え方 2

数字	**2**	**3**	4	5	6	7	8
目の出方	**(1,1)**	**(1,2)** **(2,1)**	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(2,4) (3,3) (4,2)	(3,4) (3,4) (4,3)	(4,4)

表 7.8　各駒が勝つ数学的確率

数字	2	3	4	5	6	7	8
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

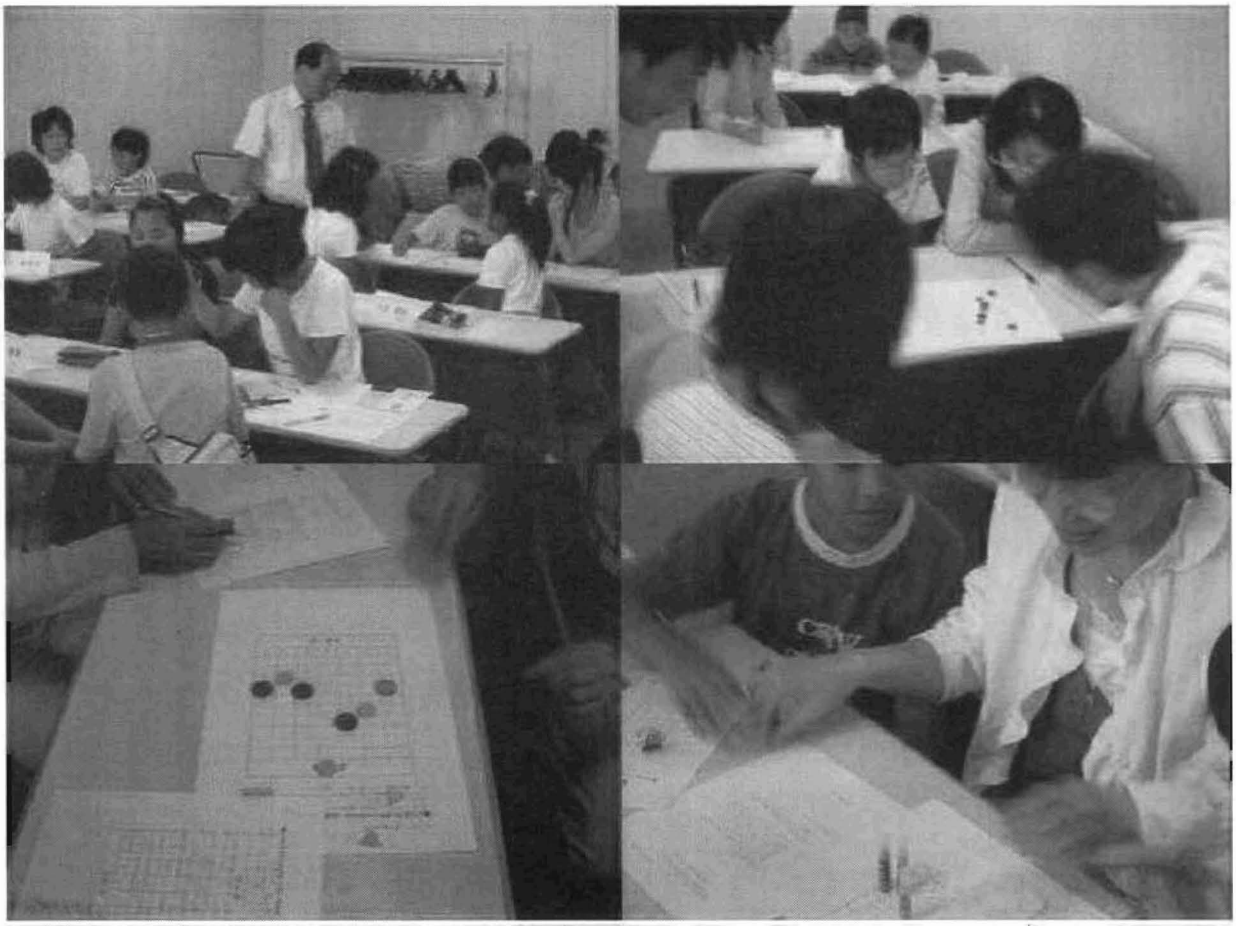


図 7.7　予備実験の様子

7.2.3 実験の結果と考察

実験の後に、以下のような調査を行った。

＜調査問題＞

問 1　普通のサイコロを 1 回投げた時、3 の目が出る確率はいくらだと考えますか。

問 2　普通の 2 つのサイコロを同時に 1 回投げた時、2 つの目の和が 7 になる確率はいくらだと考えますか。

調査の結果は表 7.9 の通りである。

この結果から、以下のことがわかる。

- 単一事象の場合は、4 年生で数学的確率を理解することができた。
- 複合事象については、4 年生では十分に数学的確率を求めることができなかった。
- 参加した児童は、実験を通して統計的確率と数学的確率の関係を十分に理解することができた。

1 年生については、4 年生の児童の妹ということで特別に参加した。ゲームの内容は理解していたが、出やすさの比較、分数の表記が理解することができなかったと思われる。

問 1 で、4 年生の中に誤答はなく、△が 1 名だけいるが、これは分数の表記が理解できなかったためである。第 1 水準の活動は十分にできていたと考えられる。

複合事象になると、出る目の順番を考える必要が出てくるが、これが 4、5 年生の中には理解しにくかった児童がいた。6 年生、中学 1 年生では理解することができた。

また、これらの活動には、既存のカリキュラム高等学校の数学 C でしか扱わない確率分布が含まれている。第 1 水準なりの理解の仕方があり、十分に小学校 4 年生の児童で理解できることが示された。この結果より、小学校 4 年生で第 1 水準の活動が十分に達していることがわかる。そして、このような単元を学習することで、数学的確率を十分に理解する、つまり第 2 水準へ上昇することができると考えてよいだろう。ただし、それは単一事象の場合に限られる。複合事象の場合については、順列という別の要素が関連する。

表 7.9　調査の結果

学年 (人数)		1年生 (1)	4年生 (8)	5年生 (3)	6年生 (1)	中学1年生 (1)
問1	○		7	3	1	1
	△		1			
	×	1				
問2	○		4	1	1	1
	△		2			
	×	1	4	2		

単位：人

○：正答、 ×：誤答

△： 場合の数だけを答えたもの

7.2.4 教育実験のまとめ

本節では、前章で得られたカリキュラム改善の指針のうち、「小学校上学年において第1水準の活動を十分に行うとともに第1水準から第2水準への上昇を促進する活動を組織する」にしたがって単元を開発し、小学校上学年を主な対象として教育実験を行い、その概要と結果を報告した。その結果、小学校上学年の児童は、第1水準の活動は十分に行うことができ、第2水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。また、開発した教材は、第1水準の生徒に対し、第2水準への上昇を促すのに効果的であることが確かめられた。しかし、今回の実験はあくまでも少人数の児童・生徒を対象にした教育実験であった。この結果を踏まえて、小学生の一般の学級を対象にした第1水準の活動から第2水準の上昇を促進する単元の開発と実施が、今後の課題である。

7.3　第 2 水準から第 3 水準への上昇のための単元

7.3.1　単元開発

本節では、第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進するために開発した単元について述べる。題材として 1 次元のランダムウォークを取り上げる。数直線上を動く点 P を考える。時刻 $t = 0$ において動点 P は原点にあるとする。動点 P は t が 1 増えるごとに隣の点に移動する。この時、両隣のどちらに移動するかは等確率であるとする。

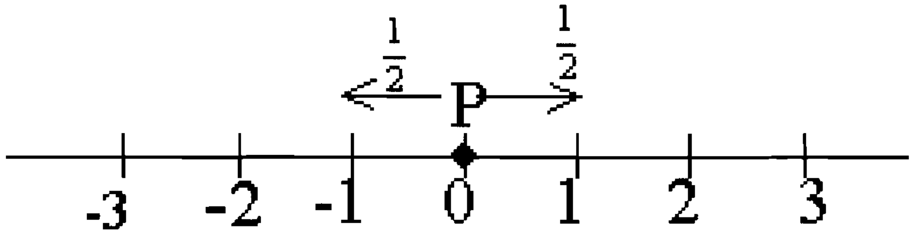


図 7.8　1 次元のランダムウォーク

原点を「よっぱらい」の自宅、動点 P を「よっぱらい」に見立て、数直線を 1 本の長い道とし、「よっぱらい」は一定時間歩くごとに進む方向を確率 $\frac{1}{2}$ で選んでさまよいはじめるとする。これは 1 次元のランダムウォークの例である。上記の例は、等確率であるので対称ランダムウォークと呼ばれる。どちらの点に移動するかが等確率でない場合を非対称ランダムウォークという。ランダムウォークは、株価の変動、鳥の飛行パターン等をモデル化する基本的な確率モデルの 1 つである。ランダムウォークは単純なルールで決定されるにもかかわらず、思いもかけない不思議な挙動を示す。その挙動は直観で予測することが難しく、確率を用いて考えることのよさや必要性を感じ取ることができる題材である。また、その基本構造は中学生にも十分に理解できる単純なものである。ランダムウォークの問題は、簡単なものについては樹形図を用いて事象の数を数え上げること、つまり第 2 水準の活動で、解くことができる。しかし、非対称な場合等は、樹形図で解くことは困難になる。その時には、乗法定理等を用いた確率同士の計算、つまり第 3 水準の活動が、必要となる。そこで、ランダムウォークの仕組みを追求することは、「確率を対象とする見方」を獲得する教材としてふさわしいと考えた。本単元では、ランダムウォークをゲーム

化し、その仕組みを確率の考えを用いて解き明かすという活動を軸に学習を展開する。何回かサイコロを振って、サイコロの目によって右方向、もしくは左方向に動点 P を進めるランダムウォークを考える。どちらの方向に進むかの確率が等確率である時、対称ランダムウォークとなり、等確率でない時、非対称ランダムウォークとなる。そして生徒は、サイコロを振る回数を指定した時に、どこの目に動点 P が止まるかを予想する。その予想を適切なものとするために、動点 P が止まる確率を考えるのである。この単元にとって、生徒の追求を乗法定理の概念の獲得に焦点化することは重要である。生徒が乗法定理の概念を獲得することは、「確率を対象とする見方」を獲得する、－第 2 水準から第 3 水準への上昇－と考えられるからである。そこで、対称ランダムウォークから導入し、次に非対称ランダムウォークへと発展させるように単元を進める。

7.3.2 教育実験の概要

本実験の目的は、第 2 水準の活動を十分に行うとともに第 2 水準から第 3 水準への上昇を意識した活動を中心に単元化を行い、生徒の認識の変容を確かめることで、単元の妥当性を確かめ、カリキュラム構築の一助とすることにある。開発した単元を用いて、以下のように教育実験を行った。

日程	2005 年 2 月下旬
対象	K 大学附属 S 中学校第 3 学年 34 名
指導者	岡部恭幸

単元計画は、表 7.10 に示す通りである。

この教育実験の目的は、中学校第 3 学年の生徒がこの教材を学習することで「確率を対象とする見方（第 3 水準)」を獲得できるかどうか、つまり、第 2 水準から第 3 水準へ水準が上昇するかどうかを明らかにすることである。

対象生徒は中学校第 2 学年の時に現行カリキュラムでの確率を学習し、ほぼ第 2 水準に達していると考えられる。授業の展開は表 7.11 の通りである。

表 7.10　単元計画 (全 5 時間)

次、時	学習主題
第 1 次　1〜2 時	対称ランダムウォーク
第 2 次　1〜2 時	非対称ランダムウォーク
第 3 次　1 時	まとめと練習

表 7.11　第 1・2 次の流れ

試しのゲーム
→
個人で考える（予想とそうなる理由）
→
小集団で話し合う（作戦タイム）
→
小集団対抗のゲームを行う (本番のゲーム)
→
クラス全体で各小集団の考えを交流する

授業の様子は以下の通りである。第１次では、以下のようなルールを確認し、対称なランダムウォークゲームを行ってみることから始めた。

＜ルールⅠ＞
①0 からスタートする
②サイコロを n 回振る。
偶数の目が出た時、正の方向に１進み、
奇数の目が出た時、負の方向に１進む
③止まるところを予想した人が勝ち。

まず、試しのゲームとして n = 5 の場合を数回、４人１組で試してみる。(図 7.9)

試しのゲームの中で、生徒はいくつかの目盛りに均等な確率で止まるわけではないこと、止まらない目盛りがあること等に気づいていく。

次に、確率を用いて、小集団でどこに止まりやすいかを考え、その結果をもとに小集団対抗のゲームを行うことを伝えた。生徒は少しでも自分の小集団が有利になるように、既習の確率の概念を用いて、話し合いを重ねた (図 7.10)。

その結果をもとに次時に小集団対抗でゲームを行い、その後それぞれの小集団の考えをまとめたプリントを配布し、全体で交流した。生徒の考えの例は図 7.11、7.12 の通りである。対称な場合のゲームでは、ほとんどの小集団が、樹形図を用いて数え上げる考え (図 7.11) が多かった。

計算を用いようと試みる小集団（図 7.12）もあったが、結論に至ることはできなかった。全体的には、樹形図の説明が最もクラス全員にわかりやすかった。

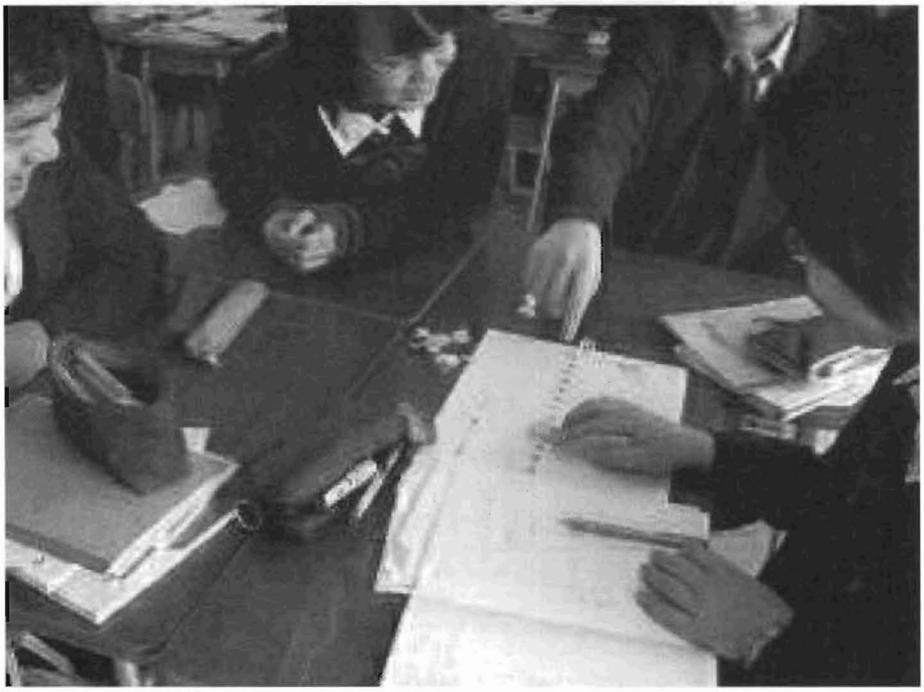


図 7.9　試しのゲーム

図 7.10　話し合いの様子

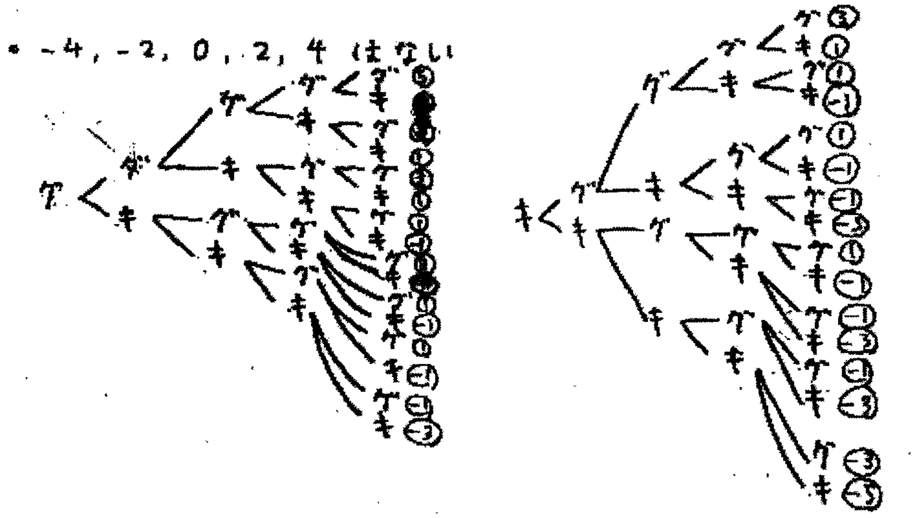


図 7.11　小集団の考え①

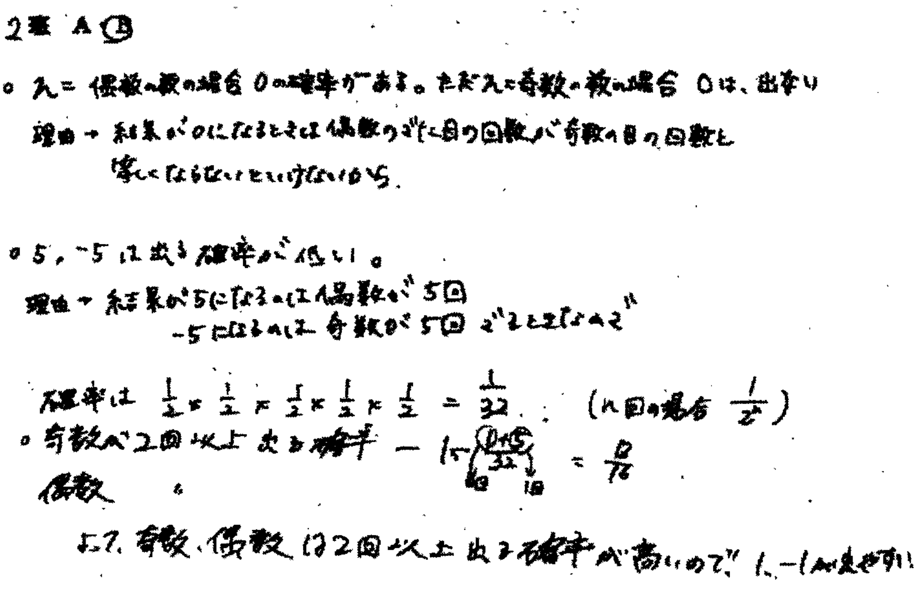


図 7.12　小集団の考え②

第2次では、次のようなルールの非対称なランダムウォークゲームを考えた。

<ルールⅡ>
①0からスタートする。
②サイコロをn回振る。
1, 2, 3, 4の目が出た時、正の方向に1進み、
5, 6の目が出た時、負の方向に1進む。
③止まるところを予想した人が勝ち。

生徒は第1次と同様に試しのゲームを数回行い、見通しを持った後、小集団でその仕組みを考えていった。

この場合は、樹形図を用いて考える方法（図7.13)、計算で求める方法（図7.14）等が出されたが、樹形図で求めることができたのは10の小集団のうち1つにとどまった。なんとか計算で求めようとする小集団が多かったが、正しく求められたのは2つの小集団のみであった。しかし、考えを交流をした後では、計算で求める方法が支持された。

その理由は、「個数が多くなってくると時間がかかる」「樹形図だと複雑になってくると間違いやすい」「計算の方がシンプルではやい」等であった。

まだ、「樹形図の方がやはり具体的でわかりやすい」という意見もあったが、これらの記述から、確率同士の計算で求めることの仕組みやよさを獲得したと考えられる。

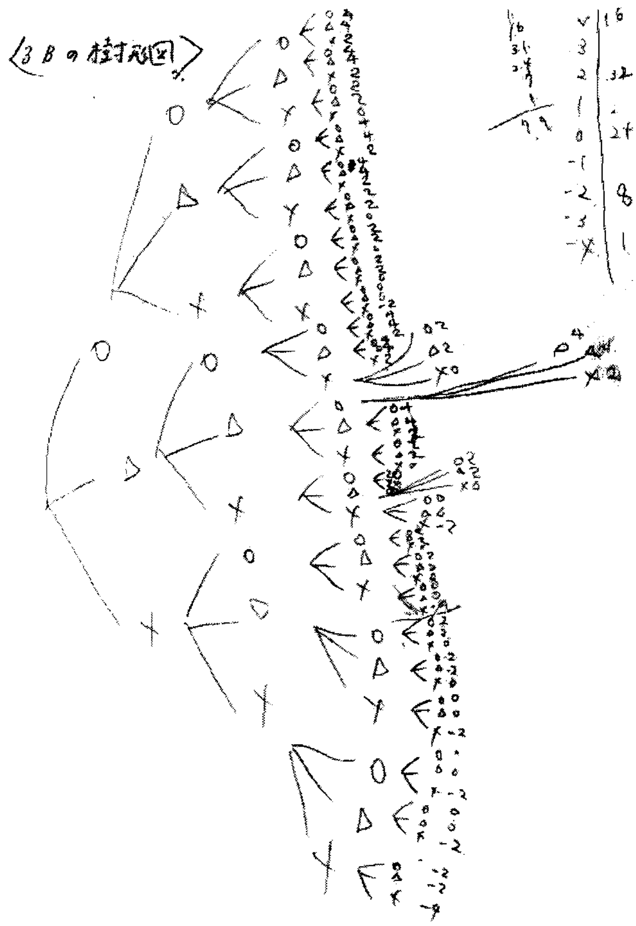
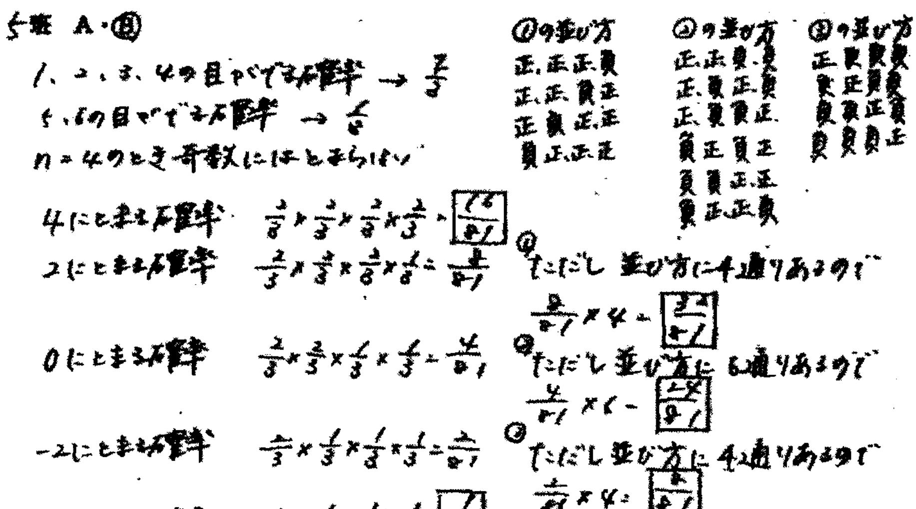


図 7.13　小集団の考え③


5班 A・B

1、2、3、4の目がでる確率 → $\frac{2}{3}$
5、6の目がでる確率 → $\frac{1}{3}$
n＝4のとき奇数にはとまらない

①の並び方
正、正、正、負
正、正、負、正
正、負、正、正
負、正、正、正

②の並び方
正、正、負、負
正、負、正、負
正、負、負、正
負、正、負、正
負、負、正、正
負、正、正、負

③の並び方
正、負、負、負
負、正、負、負
負、負、正、負
負、負、負、正

4にとまる確率　$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\boxed{\frac{16}{81}}$

2にとまる確率　$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$　① ただし並び方に4通りあるので $\frac{8}{81}\times4=\boxed{\frac{32}{81}}$

0にとまる確率　$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$　② ただし並び方に6通りあるので $\frac{4}{81}\times6=\boxed{\frac{24}{81}}$

−2にとまる確率　$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$　③ ただし並び方に4通りあるので $\frac{2}{81}\times4=\boxed{\frac{8}{81}}$

−4にとまる確率　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{81}}$

最もとまりやすいのは2で次に0、4、−2 最もとまりにくいのは−4である

図 7.14　小集団の考え④

7.3.3 実験の結果と考察

この学習を通して第 2 水準から第 3 水準への上昇が促進されたかどうか調べるために、次のような調査を行った。調査は本実験に参加した K 大学附属 S 中学校の第 3 学年 3 組 34 名 (1 クラス) を対象とし、平成 17 年 11 月下旬と 2 月下旬に行った。

調査は次に示した問題を事前 (調査 1) と事後 (調査 2) に実施し、その解答の正誤と記述内容を分析することで行った。

白玉 2 個、赤玉 3 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し、色を調べてからもとにもどすことを 3 回続けて行う。1 回目に赤、2 回目に白、3 回目に赤の玉が出る確率を求めなさい。

この問題の解答のうち、正答を「1」、誤答を「0」とし、水準については、第 2 水準の記述として、数え上げ、樹形図、計算で場合の数を求めているどうかで判断し「2」と、第 3 水準は乗法定理等確率同士の計算を用いているかどうかという視点から読み取ることで判断し「3」とした。調査の結果を表 7.12 に示す。

表 7.12 から、正誤については、事後の方が明らかにポイントが高いことがわかる。また、調査 1・調査 2 の水準の変化に着目してまとめたものが表 7.13 である。

さらにこのうち、事前調査で無回答、もしくは第 2 水準と判断された生徒について詳述する。表 7.14 から事前の調査で無回答であった 3 名は、第 2 水準、第 3 水準へと変化している。これらの生徒は実質的に水準が上昇したと考えてよいだろう。また、事前の調査において第 2 水準であった 14 名は、表 7.15 のように、水準が変化している。無回答の 1 名は、計算でやろうとして失敗した生徒である。記述の内容から第 3 水準に達していると考えてよいだろう。また第 2 水準で変化のない 4 名は、やはり樹形図を用いる方が考えやすいと判断した生徒と考えられる。これらの生徒の水準は第 2 水準と判断してよいだろう。

表 7.12　調査の結果

番号	正誤		水準	
	事前	事後	事前	事後
1	1	1	2	2
2	1	1	3	3
3	1	1	2	3
4	0	1	3	3
5	0	1	2	3
6	0	1	無回答	3
7	1	1	3	3
8	1	1	3	3
9	1	1	3	3
10	1	1	2	3
11	0	1	2	2
12	0	1	2	2
13	0	1	3	3
14	1	1	3	3
15	1	1	3	3
16	1	1	3	3
17	0	1	2	3
18	1	1	3	3
19	1	1	3	3
20	0	1	無回答	2
21	1	1	3	3
22	1	1	2	3
23	0	1	2	3
24	0	1	無回答	3
25	1	1	3	3
26	0	1	2	3
27	0	1	3	2
28	0	0	2	3
29	1	1	3	3
30	1	1	3	3
31	0	1	2	2
32	0	0	2	無回答
33	0	0	2	3
34	1	1	3	3
平均	0.529	0.912		

表 7.13　調査の結果 2

	調査 1	調査 2
第 2 水準	14 名 (41.2%)	6 名 (17.64%)
第 3 水準	17 名 (50.0%)	27 名 (79.4%)
無回答	3 名 (8.8%)	1 名 (2.9%)

表 7.14　無回答の生徒の水準の変化

事前 → 事後	人数
無回答から第 2 水準	1 名
無回答から第 3 水準	2 名

表 7.15　第 2 水準の生徒の水準の変化

事前 → 事後	人数
第 2 水準から無回答	1 名
第 2 水準から第 2 水準	4 名
第 2 水準から第 3 水準	9 名

表 7.16　第 3 水準への上昇

	人数
第 3 水準へ上昇したもの	13 名
第 3 水準へ上昇しなかったもの	4 名

また、事前調査で第 3 水準であった生徒 17 名のうち、16 名はそのまま第 3 水準と判別された。残りの 1 名は、事後調査の記述では第 2 水準と判断されたが、この生徒に理由を聞いたところ、計算でもできるが、学習しているうちに複雑な樹形図をあえて書きたくなったからと答えている。この生徒も第 3 水準に達していると考えよい。

これらの結果より、事前調査において無回答、第 2 水準と判断された 17 名のうち、水準が上昇したのは 13 名、上昇していないと考えられるのは 4 名である (表 7.16)。直接確率計算によると、その人数差は有意である ($p=0.0245$, 片側検定)。この結果からこの単元は、水準の上昇、つまり「確率を対象とする見方の獲得」に効果があったと考えられる。

7.3.4　教育実験のまとめ

本節では、前章で得られたカリキュラム改善の指針のうち、「中学校において第 2 水準の活動を十分に行うとともに第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進する活動を組織する」にしたがって単元を開発し、中学校第 3 学年を主に対象として教育実験を行い、その概要と結果を報告した。その結果、中学校の生徒は十分に第 3 水準に達することができる段階に発達しており、第 3 水準の上昇を促す活動は、現行のカリキュラムより十分に早い時期に学習できることが確かめられた。また、開発した教材は、第 2 水準の生徒に対し、第 3 水準への上昇を促すのに効果的であることが確かめられた。この活動には既存のカリキュラムでは高等学校数学 C ではじめて学習する確率変数の内容が含まれているが、中学生でも十分にその水準なりの理解ができることが示された。

第3部のまとめ

第3部は、設定した「確率概念の認識における水準」に基づいたカリキュラムを教育実践の蓄積を通して構築していくことが目的であった。

第6章では、日本と米国の確率教育のカリキュラムの現状を概観し、それらのカリキュラムの問題点について、「確率概念の認識における水準」に基づく立場から検討した。そして、得られた知見をもとに「方法の対象化」に基づく小・中・高等学校を見通したカリキュラム改善のための試案を提案した。

第1節では、日本のカリキュラムの現状について、「確率概念の認識における水準」の視点からカリキュラムの問題点を考察した。その結果、次のことが明らかになった。

(1) 第0水準、第1水準の活動の不足

(2) 第1水準から第2水準への上昇を促進する教材の欠落

(3) 第2水準から第3水準への上昇を促進する教材の欠落

(4) 第3水準の活動の不足

第2節では、NCTMのスタンダードにおける確率のカリキュラムについて、水準の視点より考察を加えた。NCTMのスタンダードでは、幼稚園入園前の幼児から第12学年までを見通して、内容的には全範囲を含むようにカリキュラムが配置されていることがわかった。しかし、水準の上昇という視点からみると、必ずしも十分に配慮されているとは言えないことが明らかとなった。

第3節では、第1節、第2節で述べたカリキュラムの問題点を改善するためのカリキュラム改善の指針を以下のように提案した。

(1) 小学校下学年において第0水準の活動を十分に行うとともに第0水準から第1水準への上昇を促進する活動を組織する。

(2) 小学校上学年において第 1 水準の活動を十分に行うとともに第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進する活動を組織する。
(3) 中学校において第 2 水準の活動を十分に行うとともに第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進する活動を組織する。
(4) 高等学校において第 3 水準の活動を十分に行う。

第 7 章では、「確率概念の認識における水準」をもとに、水準の上昇を促進する単元を開発し、教育実験を行い、その結果について詳述した。

第 1 節では、「小学校下学年において第 0 水準の活動を十分に行うとともに第 0 水準から第 1 水準への上昇を促進する活動を組織する」というカリキュラム改善の指針にしたがって単元を開発し、小学校第 3 学年を対象に教育実験を行い、その概要と結果を報告した。その結果、小学校第 3 学年の児童は、第 0 水準の活動は十分に行うことができ、第 1 水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。

第 2 節では、「小学校上学年において第 1 水準の活動を十分に行うとともに第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進する活動を組織する」というカリキュラム改善の指針にしたがって単元を開発し、小学校上学年を主な対象として教育実験を行い、その概要と結果を報告した。その結果、小学校上学年の児童は、第 1 水準の活動を十分に行うことができ、第 2 水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。

第 3 節では、「中学校において第 2 水準の活動を十分に行うとともに第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進する活動を組織する」というカリキュラム改善の指針にしたがって単元を開発し、中学校第 3 学年を主な対象として教育実験を行い、その概要と結果を報告した。

それぞれの教育実験において、事前・事後調査を実施した結果、水準の上昇と見られる認識の変容が認められた。これらの結果から、開発した単元はそれぞれの水準への上昇を促進するために有効であることが確かめられた。

終　章

研究の成果と今後の課題

本研究は、確率概念の認識における構造を明らかにし、カリキュラム開発の原理と成り得る「確率概念の認識における水準」を設定し、それに基づいて水準の上昇の様相を明らかにし、小学校・中学校・高等学校を見通した義務教育段階の確率教育のカリキュラムを構成することが目的であった。

その目的に近づくため、具体的課題として、次の諸点を設定した。

(1) 数理認識の視座から「確率概念の認識における水準」を設定する。
(2) 確率概念の認識の様相について分析を行い、水準の妥当性を検証する。
(3) 水準に基づくカリキュラムの現状分析と改善のための試案を作成する。
(4) 試案に基づいた単元開発と教育実践を行い、カリキュラムの妥当性を検証する。

本章では、本論文を要約するとともに得られた知見を整理し本研究の成果と今後の課題について述べる。

1. 本研究のまとめ

第1部においては、本研究の基礎となる確率概念の認識とその教育に関する先行研究について概観するとともに、検討を行った。

第1章では、日本の確率教育の歴史と確率教育の世界的動向について概観した。まず、第1節で日本の確率教育の歴史と現状について述べ、概観した確率教育の歴史をまとめ

た。そして、日本において、確率教育は次第に縮小の時代を迎えており、現在まで生徒の確率の認識の発達に基づきそれを促進するような確率カリキュラムについての議論は行われていないことを指摘した。第2節では、近年の諸外国における確率カリキュラムの動向について述べた。NCTMのスタンダードでは、小学校下学年から児童・生徒の発達にそってカリキュラムがつくられており、この傾向は英国・中国のカリキュラムについても同様である。また、これらのカリキュラムは活動を積極的に取り入れており、現代化の時のカリキュラムとは大きく方針を異にすることを指摘した。

第2章では、カリキュラムの構築に不可欠である確率概念の認識についての研究について概観した。第1節では、海外においてカリキュラム開発の拠り所になったと考えられるPiaget & Inhelder(1951)、Fishbein(1975,1998等)、Jones(1997)、Horvath(1998)の研究を取り上げ概観した。第2節では、日本の確率概念に関する研究として川嵜(1983、1990)、福間・磯田(2003)の研究を、適切なカリキュラムの構成に言及した研究として守屋ら(1997,1998)、横地(2005、2006)らの研究を取り上げた。そして、これらの認識研究が生徒の思考を記述しそのカリキュラムの開発に一定の視点を与えてきたことは評価できるが、カリキュラムの構成を考えるための原理という視点からみたとき、その構造は必ずしも明確ではなく、十分なカリキュラム構成の根拠となっていないことを指摘し、確率概念の認識の構造を記述した認識論的研究が必要であることを述べた。

第2部の目的は、数理認識の視座から、カリキュラム開発の原理と成り得る「確率概念の認識における水準」の設定にある。

第3章では、数理認識論の視座より、van Hieleの水準論の特徴である「方法の対象化」について述べた。カリキュラム構成の原理としての学習水準論は有効である。しかし、水準論の構造的特徴である「方法の対象化」を明確にすることは必ずしも容易ではない。そこで、van Hieleの「幾何における水準」を数学的に形式化することで「方法の対象化」を明確にし、その数学的構造を明らかにすることを目的とする。

第1節では、まず、数理認識に関する基本的な立場として、「数理認識とはものごとを数学という枠組み(一種の言語体系である枠組み—数学言語—)で捉えることである」という船越の数理認識論(船越,1995,1998)について述べた。

第2節では、「方法の対象化」とそれを大きな特徴とする学習水準論について述べた。まず、この議論の端緒となったvan Hieleの水準論について取り上げ、その一般化と他領域での設定について述べ、「方法の対象化」という構造に特に着目したFreudenthalの水

準の解釈について述べた。

第3節では、数理認識の視座から van Hiele の水準論について考察を加えることによって、「方法の対象化」の構造を明確にした。さらに、本研究の水準の解釈が van Hiele の解釈よりも「方法の対象化」の構造をより重視する Freudenthal の水準の解釈に近いことを述べた。

第4章では、前章で得られた知見をもとに、「方法の対象化」の構造を明らかにするとともに、「確率概念の認識における水準」の設定を目的とした。

第1節では、確率認識に関する先行研究の成果から明らかになった認識の様相と、いくつかの代表的な確率概念についての数学的形式化を通して、確率概念の認識における「方法の対象化」の構造を明らかにした。

第2節では、前節から得た知見に基づき、以下のような「確率概念の認識における水準」を設定した。

第0水準　偶然的な事象を対象とし、結果を列挙したものを方法として考察する。

第1水準　結果を列挙したもの (の集合) を対象とし、根元事象を方法として考察する。

第2水準　全事象の空間 (根元事象の集合全体) を対象とし、数学的確率を方法として考察する。

第3水準　数学的確率 (の集合) を対象とし、確率の命題を方法として考察する。

第4水準　確率の命題が成り立つ空間 (確率の命題の集合) を対象とし、公理を方法として考察する。

第5章では、実施した認識調査の結果をもとに確率概念の認識の様相について詳述するとともに、水準の妥当性について検討することを目的とした。

第1節、第2節では、特に現行のカリキュラムで確率教育の中核となっている中学生を対象に確率学習前と確率学習後に認識調査を実施し、確率概念の認識の様相を明らかにし、その明らかになった様相から水準の妥当性を検証した。

その結果、生徒の認識の様相において「試行の結果を対象とする見方」「全事象の空間を対象とする見方」「確率を対象とする見方」が存在することが明らかになり、水準の妥当性が示された。

第3節では、前節の認識調査においての生徒の記述を詳細に分析することで、第2水準から第3水準への上昇に関わりのある認識の様相として、図的表現と式表現に着目し、第

2水準、第3水準それぞれに関わりが深い表現と確率樹形図というその2つの中間的表現がみられることを見出した。さらに、この確率樹形図が水準の上昇に深く関わっていることを指摘した。

第3部では、設定した「確率概念の認識における水準」に基づいたカリキュラムを教育実践の蓄積を通して構築していくことが目的であった。

第6章では、日本と米国の確率教育のカリキュラムの現状を概観し、それらのカリキュラムの問題点について、「確率概念の認識における水準」に基づく立場から検討した。そして、得られた知見をもとに「方法の対象化」に基づく小・中・高等学校を見通したカリキュラム改善のための試案を提案した。

第1節では、日本のカリキュラムの現状について、「確率概念の認識における水準」の視点からカリキュラムの問題点を考察した。その結果、次のことが明らかになった。

(1) 第0水準、第1水準の活動の不足
(2) 第1水準から第2水準への上昇を促進する教材の欠落
(3) 第2水準から第3水準への上昇を促進する教材の欠落
(4) 第3水準の活動の不足

第2節では、NCTMのスタンダードにおける確率のカリキュラムについて、水準の視点より考察を加えた。NCTMのスタンダードでは、幼稚園入園前の幼児から第12学年までを見通して、内容的には全範囲を含むようにカリキュラムが配置されていることがわかった。しかし、水準の上昇という視点からみると、必ずしも十分に配慮されているとは言えないことが明らかとなった。

第3節では、第1節、第2節で述べたカリキュラムの問題点を改善するためのカリキュラム改善の指針を以下のように提案した。

(1) 小学校下学年において第0水準の活動を十分に行うとともに第0水準から第1水準への上昇を促進する活動を組織する。
(2) 小学校上学年において第1水準の活動を十分に行うとともに第1水準から第2水準への上昇を促進する活動を組織する。
(3) 中学校において第2水準の活動を十分に行うとともに第2水準から第3水準への上昇を促進する活動を組織する。

(4) 高等学校において第 3 水準の活動を十分に行う。

第 7 章では、「確率概念の認識における水準」をもとに、水準の上昇を促進する単元を開発し、教育実験を行い、その結果について詳述した。

第 1 節では、「小学校下学年において第 0 水準の活動を十分に行うとともに第 0 水準から第 1 水準への上昇を促進する活動を組織する」というカリキュラム改善の指針にしたがって単元を開発し、小学校第 3 学年を対象に教育実験を行い、その概要と結果を報告した。その結果、小学校第 3 学年の児童は、第 0 水準の活動は十分に行うことができ、第 1 水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。

第 2 節では、「小学校上学年において第 1 水準の活動を十分に行うとともに第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進する活動を組織する」というカリキュラム改善の指針にしたがって単元を開発し、小学校上学年を主な対象として教育実験を行い、その概要と結果を報告した。その結果、小学校上学年の児童は、第 1 水準の活動を十分に行うことができ、第 2 水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。

第 3 節では、「中学校において第 2 水準の活動を十分に行うとともに第 2 水準から第 3 水準への上昇を促進する活動を組織する」というカリキュラム改善の指針にしたがって単元を開発し、中学校第 3 学年を主な対象として教育実験を行い、その概要と結果を報告した。

それぞれの教育実験において、事前・事後調査を実施した結果、水準の上昇と見られる認識の変容が認められた。これらの結果から、開発した単元はそれぞれの水準への上昇を促進するために有効であることが確かめられた。

2. 本研究の成果

本節では、次の 4 つの具体的課題について研究の成果を述べる。

(1) 数理認識の視座から「確率概念の認識における水準」を設定する。
(2) 確率概念の認識の様相について分析を行い、水準の妥当性を検証する。
(3) 水準に基づくカリキュラムの現状分析と改善のための試案を作成する。
(4) 試案に基づいた単元開発と教育実践を行い、カリキュラムの妥当性を検証する。

(1) 数理認識の視座から、「確率概念の認識における水準」を設定する。

まず成果としては、van Hiele の「幾何における水準」を数学的形式化することにより、「方法の対象化」の構造を明確にしたことがあげられる。その知見をもとに「方法の対象化」を確率概念の認識について一般化し、次の「確率概念の認識における水準」を設定した。

確率概念について「方法の対象化」を原理とし水準を設定した研究はこれまでになく本研究の大きな成果だと考えている。

第 1 水準: 偶然的な現象を対象とし、結果を列挙したものを方法として考察する。
第 2 水準: 結果を列挙したものを対象とし、根元事象を方法として考察する。
第 3 水準: 全事象の空間を対象とし、数学的確率を方法として考察する。
第 4 水準: 数学的確率を対象とし、確率の命題を方法として考察する。
第 5 水準: 確率の命題を対象とし、公理を方法として考察する。

(2) 確率概念の認識の様相について分析を行い、水準の妥当性を検証する。

中学生に対して認識調査を行い、確率概念の認識の様相について、水準の視点から分析を行った。その結果、以下の 3 つの見方が実際に混在していることが認められた。

① 試行の結果を対象とした見方 (第 1 水準)

② 全事象の空間を対象とした見方 (第 2 水準)

③ 確率を対象とした見方 (第 3 水準)

これは、第 1 水準、第 2 水準、第 3 水準の活動が実在することを意味する。

また、第 2 水準から第 3 水準への上昇の様相を分析した結果、水準の上昇において確率樹形図が手がかりとなることが認められた。

中学生の確率概念に対して水準の視点による分析は他の研究ではみられない。また確率樹形図についても一部の高等学校の教科書等には用いられているものの、水準の上昇との関連を指摘したものはなくこれも本研究から得られる教育への示唆として大きな成果であると考えられる。

(3) 水準に基づくカリキュラムの現状分析と改善のための試案を作成する。

日本の現状のカリキュラムについて、水準の視点から分析を行った。その結果、① 第 0 水準や第 1 水準の活動の不足、② 第 1 水準から第 2 水準への上昇を促進す

る教材の欠落、③ 第2水準から第3水準への上昇を促進する教材の欠落　という3点が明らかになった。また、NCTMのスタンダードについても同様の視点から考察を加えた。

そして、カリキュラム改善のための視点として

① 小学校下学年において第0水準の活動を十分に行うとともに第0水準から第1水準への上昇を促進する活動を組織する。

② 小学校上学年において第1水準の活動を十分に行うとともに第1水準から第2水準への上昇を促進する活動を組織する。

③ 中学校において第2水準の活動を十分に行うとともに第2水準から第3水準への上昇を促進する活動を組織する。

④ 高等学校において第3水準の活動を十分に行う。

の4点の示唆が得られた。

これらの示唆は小・中・高等学校の確率教育を見通したカリリッキュラムが存在しない日本においては特に重要である。

(4) 試案に基づいた単元開発と教育実践を行い、カリキュラムの妥当性を検証する。

以下の単元開発を行い、教育実践を行った。

① 第0水準から第1水準への上昇を促進するための単元

② 第1水準から第2水準への上昇を促進するための単元

③ 第2水準から第3水準への上昇を促進するための単元

①の実験の結果より、小学校第3学年の児童は、第0水準の活動については十分に行うことができた。また、起こりやすさを実験の結果との関連で理解する点において、第1水準への上昇についても十分に可能であることがわかった。

②の実験の結果より、小学校4年生で第1水準の活動が十分に達していることが認められた。このような単元を学習することで、数学的確率を十分に理解、つまり第2水準へ概ね上昇することができる可能性が示された。

③の実験では、第3水準への上昇、つまり「確率を対象とする見方」を獲得することに効果があった。また、この活動には、既存のカリキュラムでは高等学校数学Cではじめて学習する確率変数の内容が含まれているが、中学生でも十分に理解で

きることが示された。

これらの実験の結果から、開発した単元は、それぞれ水準の上昇を促進するために有効であったと考えられる。これらの実験結果と開発した単元は今後の確率教育の充実において大きな意味を持つと考えている。

2. 今後の課題

以下、残された課題について言及する。

第1点目は、さらなる水準の妥当性の検証である。設定した水準の妥当性については、Horvath、Jones、Fischbein 等の先行研究との関連を明らかにすることと、中学生に対して認識調査を行い、その認識の様相を明らかにすることで、検証を行った。今後さらに広範囲な認識調査を行い、検証を重ねることが必要だと考えている。具体的には、小学生や既存のカリキュラムで学習した大学生等にも対象を広げ、調査・分析していきたいと考えている。そして、確率概念の認識の様相を明らかにするとともに、水準の上昇の促進についてもさらに詳細に分析したいと考えている。

第2点目は、さらなる教育実験の蓄積とこれらの成果を踏まえたカリキュラムの構築である。これまでの成果を踏まえ、さらに、カリキュラムの整理と妥当性の検討も重ねる必要がある。特に小学校上学年については、今回は単元開発を行っていない。現在の中学校でのカリキュラムと重なる部分もあるが、単元の開発と実践の蓄積は早急に取り組むべき課題である。そして、これらの教育実験を踏まえた上で、経験的に小・中・高等学校を見通したカリキュラムを具体的に構築していきたいと考えている。

また、学習内容をより深く理解するためには、学習したことを自分なりに発展させ、相手に伝えていくことは有効である。そうすることで、得た知識が精緻化されるからである。このような学習を実現する方法として、岡部らは遠隔学習に取り組んできている(蝦名・岡部他,1998；永井・岡部他,1999；岡部・永井,2000；永井・岡部,2000；永井・岡部,2003；守屋・岡部他,2005)。その成果を利用して、日本の中学1年生とドイツのギムナジュウム3年生とにおいて、それぞれの学校の生徒が確率に関する研究を行い発表し合う遠隔協同研究会の実験を開始している (守屋・岡部他,2006)。ドイツは日本と同様に小学校での確率のカリキュラムが十分に充実していない。そこで、ともに開発した単元を学習し、それをおのおのに発展させて学習し合う遠隔学習研究会を実施することで、カリキュ

ラムの評価もできると考えた。

現在の取り組みでも、授業では基礎的な事項を学び、その発展と応用について生徒が自ら行った研究をお互いに発表するという国際遠隔協同学習会が実現しつつあるが、今後このような教育実験を継続的に行い成果を蓄積していくことが必要である。また、今後の課題として、日独双方の生徒の確率認識の調査やカリキュラムの妥当性の検討、学習の様相の比較があげられる。

さらに、実験等を取り入れた数学的活動を考えるとき、パソコンやグラフ電卓等の情報機器の活用は重大な意味を持つ。さらに、前述した遠隔学習においては、生徒のプレゼンテーションや共通の実験を考えるときに、ICT 技術を活用することは不可欠である。しかし、本研究では情報機器の活用については扱うことができなかった。これについても今後の課題としたい。

資料

1. 第 0 水準から第 1 水準への上昇のための単元

2. 第 1 水準から第 2 水準への上昇のための単元

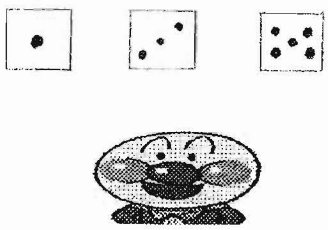
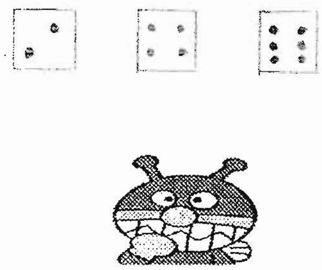
3. 第 2 水準から第 3 水準への上昇のための単元

ゲーム

アンパンマンとバイキンマンのどちらが勝つかな？

アンパンマン・バイキンマン

理由

ルール	回数	合計
		
		

《考えたことを書こう》

確率の世界に遊ぶ

■テトラサイコロでゲームしよう。

１，２，３，４の目のあるテトラサイコロがあります。

コマを一番下のマス目のどれかに置きます。このサイコロをふって、出た目のコマを上に１つ進めていきます。最初にゴールした人が勝ちです。

ゴール			
1	2	3	4
スタート			

親子で楽しむ形と数の教室Ⅱ

【ゲームをする前に予想してみよう】
どのコマが一番先にゴールすると思いますか。理由も書きましょう。

【ためしのゲームをしてみよう】
どの目が出たか記録しておこう。

	１の目	２の目	３の目	４の目
第１ゲーム				
第２ゲーム				
第３ゲーム				
第４ゲーム				
第５ゲーム				
合計				

【本番のゲームをしよう】

	１の目	２の目	３の目	４の目
結果				

【算数で考えると】

年生・保護者　　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

■2つのテトラサイコロでゲームをしてみよう。

２つの テトラサイコロを同時に投げます。このとき２つ出た目の和を求めます。和は２，３，４，５，６，７，８の場合があります。

テトラサイコロをふって、出た目の和においたコマを上へ１つ進めます最初にゴールしたコマを予想した人が勝ちです。

ゴール						
2	3	4	5	6	7	8
スタート						

親子で楽しむ形と数の教室Ⅱ

【ゲームをする前に予想してみよう】
どのコマが一番ゴールしやすいですか。また、どのコマが一番ゴールしにくいですか。
　なぜ、そのように考えられますか。

【ためしのにゲームをしてみよう】
どの数字（２つの目の和）がよくでましたか。記録しておきましょう。

目の和／ゲーム	2	3	4	5	6	7	8
第１ゲーム							
第２ゲーム							
第３ゲーム							
第４ゲーム							
第５ゲーム							
合計							

【本番のゲームをしよう】

目の和／ゲーム	2	3	4	5	6	7	8
結果							

【算数で考えると】

年生・保護者　　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　）

第１次第１時

(1)　主題　「試しのゲーム１」

(2)　ねらい　　１．試しのゲームをし、解決の見通しを持つことができる。
　　　　　　　２．ゲームの仕組みについて考えをまとめることができる。

(2)　学習指導過程

時間	学習の流れ	指導上の留意点 ・評価
0	○リーダー学習をする ○学習の主題とねらいを確認する	・３年間の復習問題に継続的に取り組む。 ・教科リーダーが中心となって学習を進める。 ・本時の主題とねらいを読ませることで確認する。
5	○ランダムウォークについて知る。 ゲームのルールを確認する。	・ゲームのルールを板書して確認する。 ゲームのルール ①　駒は０からスタートする。 ②　サイコロをｎ回ふる。 偶数の目ならば正の方向へ１進む。 奇数の目ならば負の方向へ１進む。 ③　止まるところを各自が予測する。
１０	○試しのゲームをする。 どこの目によくとまるか考えをつくる。	
２０	○小集団で協力して確率を求める方法を考える。	・４人の小集団でゲームを行う。 ・まず、結果を予測する。そして、それを確かめるためのゲームを行う。出たさいころの目と予測は必ずノートに記録する。 ・多様な方法が生まれるように小集団で協力して自由に考えさせる。 ・確率が求まったグループには、実験で確かめるように示唆する。
３５	○学習カードに小集団の考えをまとめ、提出する。	・小集団の考えを学習カードに書かせる。
４５	○次時の予定を聞く。	・すべての小集団の学習カードを学習プロフィールにまとめ、配布し、それを用いて学習を進めることを知らせる。
５０		

第１次　　第２時

(1)　主題　「ランダムウォークの仕組み１」

(2)　ねらい　　　　１．ゲームの結果の確率について説明することができる。
　　　　　　　　　２．樹形図を用いてゲームの結果の確率を求めることができる。

(2)　学習指導過程

時間	学 習 の 流 れ	指導上の留意点 ・評価
0	○リーダー学習をする。 ○学習の主題とねらいを確認する。	・３年間の復習問題に継続的に取り組む。 ・教科リーダーが中心となって学習を進める。 ・本時の主題とねらいを読ませることで確認する。
5	○実際のゲームを行う。	・前時に考えたことをもとに、確率のよさと限界を感じ取ることが出来るよう実際にアメをかけてゲームを行う。
１５	○学習プロフィールを読む。	・前時に小集団で考えた考えを学習プロフィールにまとめて配布する。
２５	○それぞれの考えを小集団で吟味する。	・まず、学習プロフィールをしっかり読ませ、小集団の中で互いに説明し合う。１つ１つの考えを◎○△×で評価させる。
４０	○黒板に小集団で吟味した結果を示す。	・それぞれの小集団の考えを吟味した結果（◎○△×）を黒板の表に書き込む。
４５	○それぞれの考えについて意見を交流する。	・まず、◎が多いところに発表をさせる。次に×がつけた班がその理由を述べ、それに答える形で討議を進める。 ・確率の分布の様子、樹形図で確率を求める方法に話し合いが焦点化するように支援する。
５０	○本時のまとめと次時の予定	・次時のすすめ方について確認する。

学習指導過程（２次第１時）

(1)　主題　「試しのゲーム２」

(2)　学習指導過程

時間	学習の流れ	生徒の活動
	始	
0	リーダーの問題を解く	○リーダー学習を行う。 ・３年間の復習問題 ○学習の主題とねらいを確認する。
5	確かめのゲーム	○小集団で前時に行った対称ランダムウォークの結果の確率を考える。 ・樹形図を用いて解く ・経路図を用いて解く ・計算で解く ○小集団からはなれて確かめのゲームをする。
1５	確かめのゲームのまとめと試しのゲームの説明	○対称ランダムウォークの結果の確率について確認する
2５	試しのゲーム	○非対称ランダムウォークのゲームのルールについて知る。 ・サイコロ　５，６の目→正の方向に１進む １，２，３，４の目→負の方向に１進む ○試しのゲームを数回行う。
	考えをつくる	○小集団で結果の確率について予測する。 ・樹形図を用いて考える。 ・経路図を用いて考える。 ・計算を用いて考える。 ○どのようにすれば確率が求まるか考えをつくる ○小集団の考えをカードにまとめる
４５	まとめ	○各小集団の考えをまとめたカードを提出する。 ○次時のすすめ方についての説明を聞く。 ・次時の始めにゲームをする ・その後に、各小集団の考えについて検討し、それをもとに全体に話し合う。
５０	終	

(3)　ねらい

①　試しのゲームをし、解決の見通しを持つことができる。

②　ゲームの仕組みについて考えをまとめることができる。

主な発問・指示など	指導上の留意点・評価
	○復習問題をシリーズとして続けて取り組み、３年間の復習が出来るようにする。
○確かめのゲームの結果の確率を小集団で考えよう。	○アメを一人１個配布しそれを実際に賭けてゲームを行うことで確率を用いて考えることのよさと限界に気づくようにする。
○確かめのゲームをしよう。	○時間を制限して、小集団で協力して確率を求め、その結果を生かしてゲームに臨むようにする。
	○樹形図を用いて解く方法は全員が出来るように確認する。 ○生徒の状況に応じて、経路図、計算を用いたとき方については補足説明を加える。 ○結果の確率を確認するときに、確率分布に目がいくように説明する。
○試しのゲームをして結果の確率を予想してみよう。	○必ず、ゲームを数回行ってから、結果の予測をするようにリーダーに指導する。 ○生徒にとっては少しハードルの高い課題であるので、解決を急がさず、自由に考えることを大切にする
○結果の確率がいくらになるか考えてみよう。	・試しのゲームをすることで結果の確率の分布をを予測することが出きるか。 ・小集団で協力することでゲームの仕組みについて考えることができるか。
	○話し合ったり、考えたりすることを学習カードにまとめる。 ○学習カードにまとめたそれぞれの小集団の考えを学習プロフィールにまとめ、次時はそれを教材に学習を進めることを伝える。

第２次　　第２時

(1)　主題　「ランダムウォークの仕組み２」

(2)　ねらい　　　１．ゲームの結果の確率について説明することができる。
　　　　　　　　２．計算を用いてゲームの結果の確率を求めることができる。

(2)　学習指導過程

時間	学習の流れ	指導上の留意点　・評価
0	○リーダー学習をする。 ○学習の主題とねらいを確認する。	・３年間の復習問題に継続的に取り組む
5	○実際にゲームをする。	・小集団を解体して、実際にゲームを行う。アメを賭けてゲームをすることで、身をもって小集団の考えを確かめる。
	○結果を確かめる。	・勝った人に、何に賭けたかを発表させることで、確率で考えるよさと限界を感じ取らせる。
１５	○それぞれの考えを小集団で吟味する。	・前時に小集団で考えた考えを学習プロフィールにまとめて配布する。 ・まず、学習プロフィールをしっかり読ませ、小集団の中で互いに説明し合う。１つ１つの考えを◎○△×で評価させる。
３０	○吟味した結果を示す。	・それぞれの小集団の考えを吟味した結果（◎○△×）を黒板の表に書き込む。
	○それぞれの考えについて意見を交流する。	・まず、◎が多いところに発表をさせる。次に×がつけた班がその理由を述べ、それに答える形で討議を進める。 ・確率の分布の様子、（乗法定理を用いた）計算で確率を求める方法に話し合いが焦点化するように支援する。 ・どのように結果の確率を求める方法について説明できるか。
５０	○本時のまとめ	○　次時のすすめ方について確認する。

第３次　　第１時

(1)　主題　「まとめと練習」

(2)　ねらい　　１．経路図と計算で確率をもとめる方法を説明することができる。
　　　　　　　２．経路図と計算で確率を求めることができる。

(2)　学習指導過程

時間	学習の流れ	指導上の留意点　・評価
0	○リーダー学習をする。 ○学習の主題とねらいを確認する。	・３年間の復習問題に継続的に取り組む
5	○経路図の書き方と確率を計算で求める方法を確認する。	・前時の例題を用いて、経路図の書き方と経路の数え方、乗法定理を用いて計算で確率を求める方法を説明し、確認する。
２０	○練習問題をする。 ・さいころ５回 ・1,2,3,4 の目の時　正へ１ 5,6 の目の時　負へ１	・小集団でまず練習問題を考える。今回は、試しのゲームは先に行わず、経路図と計算を用いて確率を求める。 ・小集団で練習問題について考え、経路図、確率の計算が正しくできているか､相互に確認する。
３５	○実際のゲームをする。	・求めた確率をもとに実際のゲームに取り組む。
４５	○単元の振り返りを書く。	・単元を振り返ってわかったところや感じたことなどをノートにまとめる。
５０		

謝辞

本研究は数多くの数多くの方々に支えられて完成することができました。

指導教官である船越俊介教授には、研究方法に始まり研究活動全般にわたり、丁寧に指導していただきました。また、自ら数学教育を創り出していくことは、数学を創ることと同様に楽しく、大切であることに気づくことができたのは船越先生のおかげです。心より御礼申し上げ、感謝いたします。

また、神戸大学発達科学部の先生方には様々な点についてご指導頂きました。

高橋正教授には数学教育の観点から論文の書き方について、そして高橋譲二教授には数学的手法に関することについて丁寧にご指導頂きました。

白倉暉弘教授、伊藤篤教授には本論文をまとめるにあたって、統計的な処理の方法をはじめ様々なご意見ご助言をいただきました。ここに深く心より感謝いたします。

本研究の教育実験において心よく授業や調査に協力して下さった神戸大学発達科学部附属住吉小・中学校の先生方や生徒の皆さんに心よりお礼申し上げます。本当にありがとうございました。

最後に、いつも私を励まし続けて支えてくれた妻に感謝いたします。

2006 年 12 月

岡部恭幸

参考及び引用文献

A

Ahlgren,A.,Garfield,G.(1991)Analsis of the Probability Curricculum,Chance Encounter Probability in Education,Kluwer,pp.107-134

B

馬場良和 (1997)『確率論』, 放送大学教育振興会

D

Department for Education and Employment and Qualifications and Curriculum Authority(1999)Mathematics-National Curriculum for Englnad, http://www.nc.uk.net

E

海老名邦禎・吉永潤・岡部恭幸・伊藤求 (1998)「マルチメディア時代のコミュニケーション教育－中学生による遠隔ディベート実験成果から」『神戸大学発達科学部研究紀要第 5 巻第 2 号』,pp.309-325

F

深澤弘美・二宮智子 (2006)「統計教育カリキュラムの国際比較－ニュージーランドの統計教育」,『2006 年度数学教育学会春季年会発表論文集』,pp.125-127

深澤弘美・二宮智子 (2006)「統計教育カリキュラムの国際比較－イギリス・オーストラリア・ニュージーランドの統計教育」,『2006 年度数学教育学会秋季年会発表論文集』,pp.100-102

福間政也・磯田正美 (2003)「確率分野における学習過程の水準に関する研究」, 日本数学教育学会『第 36 回数学教育論文発表会論文集』,pp.229-234

船越俊介 (1995)「言語的視点から捉えた数学教材構成の原理」, 日本数学教育学会『第 23 回数学教育論文発表会論文集』,pp.97-100

船越俊介 (1998)「数理概念構成 (認知) の数学的形式化について－《群性体》－」,『神戸大学発達科学部研究紀要第 5 巻第 2 号』,pp.157-166

Fischbein,E.(1975)The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children,D.reidel

Fschbein,E.,et al.(1998)The evolution with age of Probabilistic ,Intuitively Based Misconceptions ,Journal for Research in Mathematics Education Vol.28,pp.96-105

Freudentahal,H.(1973) Mathematics as an Educational Task,D.Reidel

H

波多野完治・滝沢武久 (1963)『子どものものの考え方』岩波新書,pp.130-148

平林一栄 (1987)『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版

廣谷真治・岡部初江 (1988)「算数・数学科における「L-O 理論」による指導の研究」, 西日本数学教育学会『数学教育学研究紀要 14』,pp.81-88,

Hawkins.A.S. and Kapadia.R.(1984)Children's Conceptions of Probability: a psychological and pedagogical review,Educational Studies in Mathematics Vol.15 ,pp.349-377

Hoffer,A.(1983)van Hiele-Based Research , In R.Resh and M.Landau(Eds.) , Acquisition of Mathematics concepts and Processes , Academic Press,pp.205-227

Horvath,J.K.Lehrer,R.(1998)A model based perspective on the development of children's understanding of chance and an certainty , In S.P.Lajoie(Ed.) , Reflections on Statistics,Lawrence Erlbalum,pp.121-148

I

磯田正美 (1984)「数学化の見地からの創造的な学習過程の構成に関する一考察－H.Freudentahal の研究をふまえて」,『筑波数学教育研究第 3 号』,pp.60-71

礒田正美 (1987)「関数の思考水準とその指導についての研究」,『日本数学教育学会誌 69 (3)』,pp.82-92,

磯田正美 (1988)「関数の思考水準としての道程と特徴付けに関する一考察」,『日本数学教育学会誌　論究　Vol.49』,pp.50-

磯田正美 (2003)「H.Freudenthal の数学的活動論に関する一考察」,『筑波大学教育学系論集第 27 巻』,pp.31-48

伊東裕司 (1995)「確率概念」, 吉田甫, 多鹿秀継編『認知心理学から見た数の理解』, 北大路書房,pp.144-162

J

Jones,G.A.,et al.(1997)A Framework For Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability,Educational Studies in Mathematics 32,pp.101-125

Jones,G.A.,et al. (1999)Students' Probabilistic Thinking in Instruction,Journal for Research in Mathematic Education Vol.30,No.5,pp.487-519

Jones,G.A.(2005)An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. In Jones,G,A(Eds.) Exploring probability in school: Challenges for Teaching and learning , Springer,pp.65-92

K

河野敬雄 (1999)『確率概論』, 京都大学学術出版会

川嵜道広 (1983)「子どもの確率概念の発達についての考察」, 西日本数学教育学会『数学教育研究紀要 9』,pp.61-65

川嵜道広 (1990)「学校数学における確率教材の研究」『数学教育学のパースペクティブ』, 聖文社,pp.397-412

国宗進・熊倉啓之 (1996)「文字式についての理解の水準に関する研究」,『日本数学教育学会誌　論究　Vol.65,66』,pp.35-54

啓林館 (2005)『未来へひろがる数学 1』

小山正孝 (1985)「数学教育における学習水準に関する基礎的研究 (1)」,『広島大学大学院教育学研究科博士課程論文集第 11 巻』,pp.171-177

M. クライン, 柴田録治監訳 (1976)『数学教育現代化の失敗』, 黎明書房

A. コルモゴロフ, 根本伸司訳 (1975),『確率論の基礎概念』, 東京書籍

M

松浦武人 (2005)「初等教育における児童の確率概念を促す学習材の開発」第 1 回統計教育の方法論ワークショップ発表資料

松浦武人 (2006)「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」,『全国数学教

育学会誌　数学教育研究　第12巻』,pp.141-151
松宮哲夫(1998)「中学校の確率教育変遷史／1890〜1945年」,『数学教育学会1998年度秋季例会発表論文集』,pp.32-34
松宮哲夫(2000)「確率教育の歴史／1945年以後」,『数学教育学会200年度秋季例会発表論文集』,pp.47-49
守屋誠司・神保秀幸(1997)「アメリカ・中国にみる確率統計教育」,『東北数学教育学会年報第28号』,pp.36-43
守屋誠司・神保秀幸(1998)「小学生の確率期待値の概念について」,『大阪教育大学数学教室数学教育研究第27号』,pp.65-70
守屋誠司・岡部恭幸他(2005)「日タイ遠隔協同総合学習の試み(２)」『数学教育学会2005年度数学教育学会春季年会発表論文集』,pp.38-40
文部省(1998)「中学校学習指導要領」
文部省(1999)「高等学校学習指導要領」
文部科学省(2002)『平成14年度高等学校教育課程実施状況調査』,
http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm

N

中原忠男(1996)『算数数学教育における数学的アプローチの研究』,聖文社,pp.99-111
永井正洋・岡部恭幸,越川浩明,高橋正(1999)「Web上における数学科共同学習の展開IV：2校間でのCSILE型データベース使用を通しての一考察」『第32回数学教育論文発表会論文集』,pp.137-142
永井正洋・岡部恭幸(2000)「分散型ネットワーク上における数学科共同学習の展開：2校間でのCSILE型データベース使用と環境のデザイン」,『日本数学教育学会誌数学教育第82巻第5号』,pp.12-21
永井正洋・岡部恭幸・永田潤一郎・赤堀侃司(2003)『Web上の複数中学校間における数学科共同学習の特徴に関する研究』,『日本教育工学会論文誌』,vol.26,No.4,pp.285－297
長崎栄三(1994)「イギリスノ算数・数学教育」,岡本光司編『国際理解教育と教育実践：算数・数学における国際理解教育』,エムティ出版,pp.34-69 能田伸彦・清水静海・吉川成夫(1997)『21世紀への学校数学の創造－米国NCTMによる「学校数学に

おけるカリキュラムと評価のスタンダード」』, 筑波出版会
NCTM(2000),Principles and Standards for School Mathematics, http://standards.nctm.org/

O

大村二良・船越俊介 (1999)「言語的視点から捉えた数学教材構成の原理-微分・積分の授業について」, 日本数学教育学会『第 27 回数学教育論文発表会論文集』,pp.281-286
大木正大 (1997)「数学教育の現代化で学んだもの」, 日本数学教育学会編『20 世紀数学教育思想の流れ』, 産業図書,pp.203-216
岡部恭幸・永井正洋 (2000)「遠隔共同学習による数学的コミュニケーションの育成」, 『近畿数学教育学会学会誌第 13 号』,pp. 7-16
岡部恭幸 (2004a)「確率概念の認識における水準について」『日本数学教育学会第 37 回数学教育論文発表会論文集』,pp.385-390
岡部恭幸 (2004b)「『方法の対象化』を原理とした確率のカリキュラム構成 (1) －確率概念形成における『方法の対象化』－」, 『2004 年度数学教育学会秋季例会発表論文集』,pp.79-81
岡部恭幸 (2005a)「『方法の対象化』を原理とした確率のカリキュラム (2) －認識調査の分析とカリキュラムへの示唆－」, 『数学教育学会春季年会発表論文集』,pp.108-110
岡部恭幸 (2005b)「『方法の対象化』を原理とした確率のカリキュラム (3) －中学校におけるランダムウォークの教材化」, 『数学教育学会秋季年会発表論文集』 ,pp.42-44
岡部恭幸 (2005c)「確率概念の認識に関する考察－確率を対象とする見方を獲得する過程における図的表現」『日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会論文集』,pp.427-432
岡部恭幸 (2006a)「確率教育の問題点とその改善に関する研究」, 『近畿数学教育学会第 39 回例会発表資料』
岡部恭幸 (2006b)「確率認識の発展を促す教材の開発－中学校におけるランダムウォークの教材化」, 『数学教育学会誌 vol.46 No.1・2』, 掲載予定
岡部恭幸 (2006c)「確率概念の認識における『方法の対象化』」, 『数学教育学会誌 Vol.3・4』, 数学教育学会, 掲載予定
岡部恭幸 (2006d)「方法の対象化を原理とした確率のカリキュラム構成 (4)-小学生を対

象にした確率教育の試み-」,2006 年度数学教育学会春季例会発表論文集,pp.152-154
小倉金之助 (1924)『数学教育の根本問題』, イデア出版,p.204

P

Piaget,J. and Inhelder,B.(1951/1975) The Origin of The Idea of Chance in Children,W.W Norton
H. ポアンカレ, 河野伊三郎訳 (1950)『科学と仮説』, 岩波文庫,p.216
Polaki,M.V.(2005)Dealing With Compound Events Exploring probability in school :Challenges for teaching and learning,Springer,pp.191-214

R

李全生 (2005)「グローバル時代に向ける中学の数学教育の改革について」,『近畿数学教育学会誌第 18 号』,pp.17-26
李全生 (2006a)「日・中数学教育の『学力観』について－中国の新しい『小学数学の標準カリキュラム』に関する考察－」,『近畿数学教育学会誌第 19 号』,pp.73-82
李全生 (2006b)「中国の新しい『小学数学の標準カリキュラム』に関する考察」,『第 38 回近畿数学教育学会例会発表資料』

S

正田健次郎他 (1967)『数学教育革新のために－中学校編』, 啓林館
正田實 (1997)「現代化以降の我が国の数学教育」, 日本数学教育学会編『20 世紀数学教育思想の流れ』, 産業図書,pp.219-232
佐々木元太郎 (1997)「数学教育現代化とその評価」, 日本数学教育学会編『20 世紀数学教育思想の流れ』, 産業図書,pp.185-202
数学教育研究会 (2001)『算数教育の理論と実際』, 聖文新社,pp.205-215
Scheaffer,L.R.,et al.(1998)What Every High School Graduate Should Know About Statistics, In P.Lajoie(Ed.),Reflections on statistics,Lawrence Erlbalum associates,pp.3-31
Steinbring,H.(1991)The Theoretical Nature of Probability in the Classroom,Chance Encounter Probability in Education,Kluwer,pp.135-168

T

筑波大学数学教育学研究室　翻訳・監修 (2001)「新世紀をひらく学校数学学校数学のための原則とスタンダード」

Tarr,J.E.,Lannin,J.K.(2005)How can teachers build notions of conditional probability and independence?,in Jones,G.A.(ed.),Exploring probability in school:Challenges for teaching and learning,Springer,pp.215-238

V

van Hiele, P.M.(1986) Structure and Insight-A Theory of Mathematics Education, Academic Press

W

和田義信 (1962/1997)「数学教育現代化」,『和田義信著作講演集５数学教育の現代化』, 東洋館出版,p.33-69

和田義信 (1964/1997)「数学教育現代化の思想と内容」,『和田義信著作講演集５数学教育の現代化』, 東洋館出版,p.180

Y

横地清 (2006)「教師は算数授業で勝負する」明治図書,p.62-72,p.131-132

横地清・菊池乙夫・守屋誠司 (2005)「算数・数学科の到達目標と学力保障 別巻 理論編」, 明治図書

横地清監修・中雄雄治編 (2005)「算数科発展学習教科書 第３巻 第５学年編」, 明治図書

横地清監修・中雄雄治編 (2005)「算数・数学科の到達目標と学力保障 第６巻 第３学年」, 明治図書