



数式処理システムを用いた数学の発見的学習に関する研究

宮寺, 良平

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

2007-09-25

(Date of Publication)

2012-11-02

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲4099

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1004099>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



数式処理システムを用いた 数学の発見的学習に関する研究

神戸大学総合科学研究科
人間形成科学専攻 人間学習論講座

038F405F

宮寺良平

指導教員 高橋 正

数式処理システムを用いた 数学の発見的学習に関する 研究

神戸大学総合科学研究科
人間形成科学専攻 人間学習論講座
038F405F
宮寺良平
指導教員 高橋正

目次

第1章	はじめに	3
1.1	高校生による数学研究の可能性	5
1.2	$(a+b)^n$ によってできる美しい図形	5
1.3	9999999999^n の形の数によってできる美しい図形	9
第2章	高校生による数学研究の発展	16
2.1	パスカルの三角形の拡張	16
2.2	パスカル的な三角形の数学的構造	20
2.3	一定確率を持つゲーム	23
2.4	ゲームの極限確率と、現れる興味深い数	26
2.5	2人のゲームに現れるきれいな法則	29
2.6	パスカルのような三角形と、それから作られるシュルピンスキーのようなガスケット	34
2.7	パスカル的な三角形から作られる数列 1	41
2.8	数列 $A_{p,v}(n)$ の確率論的意味について	45
2.9	パスカル的な三角形から作られる数列 2	46
2.10	$B_{p,v}(n)$ をフィボナッチ数列 $F(n)$ で表すこと	50
2.11	循環数の平方根の作る数列	58
2.12	フォアボールだけを待つことで何点取れるだろうか?	61
2.13	高校生(進んだレベル)に理解できるやり方で円周率を3000ケタ以上計算する方法	65
2.14	ある累乗反復プロセスの持つ奇妙な性質について	66
2.15	ワールドシリーズと日本シリーズの確率論	70
2.16	一般ヨセフス問題	75
2.17	一般ヨセフス問題の持つ再帰関係	79
2.18	先生の癖の問題	86
2.19	$n^{n^{n^{\dots^n}}}$ の1桁目を計算する世界で一番速いアルゴリズム	90
第3章	活動経過と教育的支援	92
第4章	考察	97
4.1	高校生による研究と伝統的な数学教育の関係	97
4.2	数式処理システムを道具として用いた数学教育の可能性	104

第1章 はじめに

近年、テクノロジーの進歩が著しい。数学教育においても、グラフ電卓の利用、図形ツールの利用、数式処理システムの利用等、様々なテクノロジーが利用されている。しかし、日本の数学教育におけるテクノロジーの利用は、現状では、個々の教師の試みとしての活動に近いと言える。数学教育へのテクノロジーの利用に対して、今後進むべき、明確なビジョンを示し、学習者（生徒・学生）にも、社会的にも、さらには、教師自身にも納得できるような目標と方法を持たなければならない。このような状況の下で、数式処理システムの数学教育への活用として、生徒の活動意欲を高め、その活動を支援する道具としての効果的な役割を研究することは重要である。

教育の現場で、数式処理システムを利用することによって、次のようなことが新たに可能となる。(1) 手計算ではできなかった複雑な問題を、例題や演習問題として取り上げることが可能になる。(2) グラフ表示機能を利用して、数学をより視覚的・動的に理解することができる。(3) 新しい概念の習得に必要な計算技術を十分に習得していない生徒も、生徒自身が数式処理システムを利用することにより新しい概念を習得できる。(4) 数式処理システムを通じて、多くの例を作ることができる。

これらのことによって、

計算機実験 → 観察 → 定理の予想 → 証明

あるいは、

予想 → 計算機実験 → 観察 → 証明

という形の数学の学習が可能になる。従って、数式処理システムは、数学教育の教授法をより多様にできる強力な道具であり、数式処理システムの利用が普及すれば、広い意味で数学教育を大きく変えることになる。

数式処理システムの数学教育への利用と言っても、中等教育（中学・高校）と高等教育（大学教育）では、使用方法や要求される仕様も異なる。また、現場教師や数学教育研究者による数式処理システムの教育利用に関する研究も、ソフトウェアの多様化、オブジェクト指向のソフトウェア開発の普及等によって変化している。

後期中等教育（高校レベル）の数学教育の主目的および達成目標は、以下に代表される高校数学で導入される数学の基本的概念の知識と技能の習得である。

関数とグラフの対応

陰関数とグラフの対応

パラメータを含む式の意味

微分の意味と導関数とグラフの対応

和の極限としての積分の意味の理解

求積計算と積分の対応

これらの教育を目的としながら、かつ、生徒の探求的学習を目的として、生徒に研究活動を行わせることが可能になる。

本論文において、数式処理システムを用いた高校生による数学研究の方法と可能性について考察する。ここで研究というのは、数学的に新しい事実を見つけることである。高校生にそのようなことが可能であるのかと、疑問に思う人も多いと考える。この論文の目的は、高校生による研究が可能であることを示し、探求的な学習可能であることを示すものである。

世界全体を見ても、特別な天才が高校生時代に定理を発見したということは報告されているが、定理の発見を普通の高校生を対象とした教育で目指すことは、発見学習に詳しいニューヨーク市立大学の数学者 Robert Cowen によると、世界でも例がない。大学の学部レベルでも MIT などの少数の大学で、極めて優れた学生を対象に行われているだけである。R. Cowen は高校へ出張教授をして、組み合わせゲームを生徒と共に研究し、冊子にまとめるということを行った経験を持つ。彼のような例も極めて稀だと考える。したがって、私と生徒が行ったような一年を通じた研究を長く続けて成果をあげたということは、先行事例を持たない。

これまでの数学教育の中で、私の方法に近いものを探すとすれば「発見的学習方法」や「オープンエンドアプローチ」などをあげるのが適当であると考える。しかし、これらにおいては本当の発見が行われることはなく、教師が用意した教材による再発見であり、オープンエンドと言っても、教えている教師の予想がつかないような終結はあり得ない。

それに対して、私の方法は真の意味の発見であり、結論が全く予想できないという意味では本当にオープンエンドな教育方法である。

この論文には、関西学院高等部の生徒が、10年以上にわたって研究して発見した数学的事実がある。それらは、高校生にもわかるが、数学者も知らなかったような数学的事実である。これらの事実を見ていただければ、高校生による研究が可能であることは、納得していただけると思う。

そして、詳細な事例研究によって、高校生による研究方法については、どのようなやり方が有効であるのかがわかってきた。研究方法については、ある程度確立できたと考えている。

数学の発見を目的とするような数学教育は、これまでの数学教育には存在しなかったものである。そして、伝統的な数学教育と適切に組み合わせることによって、創造的な資質をもった科学者や技術者を育てるために、効果的な教育方法となる。

1.1 高校生による数学研究の可能性

これまでの実践における高校生の研究成果は内外の学会で生徒たちによって発表され、国内や海外の雑誌に掲載された。

また、カナダのサイエンスフェアで1位を取り、高校生対象として伝統を持っている数理の翼セミナーに招待されてで、高校生による数学研究の成果として発表した。次の同セミナーでは、高校生に対して数学研究の指導をするという意欲的な試みを考えている。また、Mathematica 開発元の Wolfram Research 社にも認められて最新版ソフトの贈呈も受けた。

これらの成果は、「高校生でも理解できるが、数学者も知らない数々の定理」である。

そして、この論文は、私の教育方法の研究と共に、生徒たちの成果の報告ともなっている。

私たちの研究の面白さは、いろいろな個性の生徒が、それぞれ違った関わり方で貢献して、成果を生んでいることである。

ここで、研究というのは、文字通り新しい事実を発見することである。そのようなことが果たして可能であるのかという疑問を持つ人は多いだろう。

多数の高校生が長い期間、研究を続けて成果を出したのは、私たちが世界最初であると考えて良いだろう。

私たちの研究において、種々の発見をした生徒の中には、数学が得意な生徒もいるが、あまり得意でない生徒も多くいる。数学の成績が良い生徒は、問題を解くことが得意なタイプが多いが、新しいことを見つけるためには、必ずしも問題を解く力が優れている必要はない。大切なことは、いろいろなことに興味があり、ある意味で雑念が多いことである。

好奇心の強さは、しばしば気が散るとか、集中力がないという現象として扱われ、否定的に見られることがある。

雑念が多いというと、それに当てはまる生徒は高校生には多いだろう。

そして私たちが行ってきてような研究は、高校生の特質に非常にうまく合っていたのではないかと考える。

私たちが使ったのは、数式処理システムの Mathematica である。Mathematica を使う人のために、プログラムを書いているところもあるが、この論文を読むために Mathematica の知識が必要なわけではない。

以下に、初期の実践における、高校生による数学研究の事例を示す。

1.2 $(a + b)^n$ によってできる美しい図形

数式処理システムの Mathematica を使った授業で、生徒に数式の展開をさせて遊ばせた。すると、ある生徒が $(a + b)^n$ を展開し、自然数 n をだんだんと大きくした。これ以後実名で登場するのは、すべてこの論文の著者である。

新しい事実の発見について、発見者の名前を明記していない場合も多い。それは、研究していた多くの生徒たちがいろいろ話しているうちに、なんとなく、グループとして研究方向ができ、結果として発見が行われた場合である。

例 1. $(a + b)^{40}$ を展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & a^{40} \\
 & 40a^{39}b^1 \\
 & 780a^{38}b^2 \\
 & 9880a^{37}b^3 \\
 & 91390a^{36}b^4 \\
 & 658008a^{35}b^5 \\
 & 3838380a^{34}b^6 \\
 & 18643560a^{33}b^7 \\
 & 76904685a^{32}b^8 \\
 & 273438880a^{31}b^9 \\
 & 847660528a^{30}b^{10} \\
 & 2311801440a^{29}b^{11} \\
 & 5586853480a^{28}b^{12} \\
 & 12033222880a^{27}b^{13} \\
 & 23206929840a^{26}b^{14} \\
 & 40225345056a^{25}b^{15} \\
 & 62852101650a^{24}b^{16} \\
 & 88732378800a^{23}b^{17} \\
 & 113380261800a^{22}b^{18} \\
 & 131282408400a^{21}b^{19} \\
 & 137846528820a^{20}b^{20} \\
 & 131282408400a^{19}b^{21} \\
 & 113380261800a^{18}b^{22} \\
 & 88732378800a^{17}b^{23} \\
 & 62852101650a^{16}b^{24} \\
 & 40225345056a^{15}b^{25} \\
 & 23206929840a^{14}b^{26} \\
 & 12033222880a^{13}b^{27} \\
 & 5586853480a^{12}b^{28} \\
 & 2311801440a^{11}b^{29} \\
 & 847660528a^{10}b^{30} \\
 & 273438880a^9b^{31} \\
 & 76904685a^8b^{32} \\
 & 18643560a^7b^{33} \\
 & 3838380a^6b^{34} \\
 & 658008a^5b^{35} \\
 & 91390a^4b^{36} \\
 & 9880a^3b^{37} \\
 & 780a^2b^{38} \\
 & 40a^1b^{39} \\
 & b^{40}
 \end{aligned}$$

… Figure (1)

注意. このような数式の形は、数式処理システムを使っている人には馴染みのあるもので、授業を担当していた宮寺も、気に留めることはなかった。しかし全く経験が無い高校生にとっては、新鮮な驚きであったようで、この形

が何か意味を持っているのではないかという疑問を持った。

生徒の疑問に啓発されて宮寺もこの問題に関心を持ち、生徒と共にいろいろ試してみても、指数を大きくすると一定の相似形に近づくという予想ができた。証明するためにはスターリングの公式が必要であったが、それ以外は高校数学だけを使って次の定理を得た。

補題 1. 十分大きい自然数 n, t が $t < n$ を満たす時、次の式が成立する。

$$\frac{\log_{10} t!}{n} \sim \frac{t \log_{10} t - t \log_{10} e}{n}$$

証明. 自然数 t に対してスターリングの公式を使うと、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\log_{10} t!}{n} &\sim \frac{\log_{10}(\sqrt{2\pi} t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t})}{n} \\ &\sim \frac{t \log_{10} t - t \log_{10} e}{n} \end{aligned}$$

, ここで、 n が十分に大きいときは、 $\log_{10} \sqrt{2\pi}$ と $\frac{1}{2} \log_{10} t$ が n に比べて非常に小さいことを使っている。

補題 2. $\frac{m}{n}$ の大きさをほぼ一定に保ちながら、 n, m を十分に大きくすると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\log_{10} {}_n C_m}{n} \\ = -\left(\frac{n-m}{n} \log_{10}\left(\frac{n-m}{n}\right) + \frac{m}{n} \log_{10}\left(\frac{m}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

証明. $\frac{m}{n}$ の大きさは一定で、 n, m は十分大きいとするので $n, m, n-m$ に対して補題 1. を使うことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\log_{10} {}_n C_m}{n} &= \frac{m}{n} \log_{10} \frac{n!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{\log_{10} n! - \log_{10}(n-m)! - \log_{10} m!}{n} \\ &\sim \frac{n \log_{10} n - n \log_{10} e - ((n-m) \log_{10}(n-m) - (n-m) \log_{10} e) - (m \log_{10} m - m \log_{10} e)}{n} \\ &= \frac{n \log_{10} n - (n-m) \log_{10}(n-m) - m \log_{10} m}{n} \\ &= \frac{(n-m) \log_{10} n - (n-m) \log_{10}(n-m) + m \log_{10} n - m \log_{10} m}{n} \\ &= -\left(\frac{n-m}{n} \log_{10}\left(\frac{n-m}{n}\right) + \frac{m}{n} \log_{10}\left(\frac{m}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

定理 1. 式 $(a+b)^n$ を展開して上記のように並べ、自然数 n で割ることによって、大きさをほぼ一定に保ちながら $n \rightarrow \infty$ とすると、極限図形は、関数 $f(x) = -(x \log_{10} x + (1-x) \log_{10}(1-x))$ のグラフに限りなく近づく。ただし、 x 軸を垂直に、 y 軸を水平にとる。

証明. $a^{n-m} b^m$ の係数は、 ${}_n C_m$ で、桁数は $\log_{10} {}_n C_m$ となり、これが Figure

1 の図形の幅となる．縦の長さは、 $n + 1$ である．図形を n で割ると、幅は $\frac{\log_{10} n C_m}{n}$ となり、 n を限りなく大きくしていくと、縦の長さは 1 となり、補題 2 を使ってから、 $\frac{n-m}{n}$ を x で置き換えると、定理の結論を得る．

以上の証明は既に、[11] と [17] で発表している．

注意． $(a + b)^n$ の展開式は、数式処理システムを使っている人ならば、一度は見たことがあるはずである．そして展開式がこのような極限図形を持つことは、説明を受ければ数学の専門家なら、すぐに納得できる．しかしこのような初等的な事実がこれまで発見されずにきて、高校生によって初めて発見されたことは興味深い．

また、このような発見は、数式処理システムがあつて初めて可能なものである．数学の歴史のなかで、数式処理システムに高校生が触れる機会ができたのは、ごく最近のことである．高校生が時間をかけて数式処理システムを使えば、発見できるような事実がまだ多く残っていると考えて良いだろう．

このような発見が可能であつたのは、生徒が数式処理システムで遊ぶ時間があつたことと、生徒の疑問に対して教師が興味を持ったことによる．一年間にこれだけの知識を学ばせるということを決めて、予定をしっかりと守って授業をすると、このような発見は起こりえないと考える．しっかりとした知識を身につけるための授業と、発見したり、問題を提起していく力を身につけるための授業は、全く別のものであり、どちらも大切である．

新しい発見を目指すような授業や課外活動は、時にはかなりだらだらとした雰囲気を作り出す．教師にとっては、そのような雰囲気を肯定することが難しい場合がある．研究の経験を持つ教師ならば、良いアイデアを生み出すためには、真剣に考える時間と共に、非常に気楽に、自由に空想する時間が必要であることは分かっている．私たちの研究の場合は、良いアイデアは常に、そのような気楽な時間の直後に生まれている．

Open problems. この問題に関連して分かっていないことがある． $(a + b)^n$ の展開式は、形としては $(x + 1)^n$ の展開式と変わらない．では、 $(x^2 + x + 1)^n$ の展開式はどうなるだろうか．展開式の形を式で表すことは可能か．もしそれができないとすると、 n で割った展開式の形が、何かの図形を極限として持つのだろうか．ただし、これらの未解決問題はかなり難しいかもしれない．もし解決できなくても、コンピュータを使って調べてみて、いろんな予想を立てるだけでも面白い．極限值に収束することが証明できなくても、数値実験を行うこともできる．

1.3 999999999ⁿの形の数によってできる美しい図形

Mathematica を使った授業で、大きな数で遊ぶということを試みた。すると生徒であった近藤と池田が自然数 $x = 99999 \dots 99$ と $y = 999 \dots 99$ に対して x^y の形の数を計算した。彼らの発想は非常に単純で、大きな数を作るためには数字の9を多く使えば良いと考えたのである。研究の途中で y は、どのような形の数でも良いことがわかったので、それ以後は、 y の形にはこだわらずに計算した。

例 2. 数 999999999^{41} を計算すると、次の Figure 2 を得る。生徒たちは0と9が多いことに気がつき、理由を考え始めたがわからなかった。宮寺にも理由はわからなかった。

```
999999995900000008199999989340
000010126999992506020004496387
997751806000955482449649656435
112109940768405380327898654918
237992364352401527136567725114
307744669084155195702112640575
533732982691289371930871062804
466267017978873594151584480439
692255330034322748924759847281
762007635921013450803159461967
887890059203503435649904451755
002248193999955036120000749397
999989873000000106599999999180
0000000409999999999
```

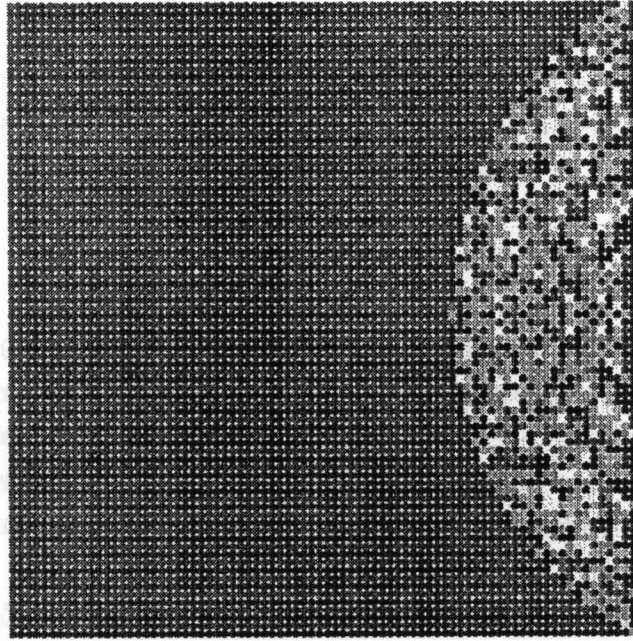
… Figure (2)

上の数の中に、0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 がそれぞれ何回出現したかを調べた。このようなことは Mathematica では簡単にできる。すると、0 は 72 回、9 は 82 回出現するが、他の数の出現数は比較的少ないことがわかった。

これ以後生徒たちは数字をいろいろ変えながら実験した。そのような実験を繰り返しているうちに、半年ほど経過した頃に、次のような数を発見した。

例 3.

数 999^{13} を計算すると次のようになる。



… Figure (6)

この図形はカラーにすれば、とても美しいものである。ここでは残念ながら白黒でしか表現できないが、[19]はOnline雑誌なので、見ていただきたい。また、この図形はアニメーションにすると非常に美しくなる。オンライン雑誌の[25]を見ていただきたい。

実は、数を色に置き換えるということは、この研究の初期から行ってきた。 $x = 99999 \dots 99$ と y に対して x^y において、 $x = 99999 \dots 99$ を大きくし、 y を小さくしながら、 x^y の大きさを一定に保つと、数 0,9 が増えていく。その様子を見るために、数字を色に置き換えた。そして、いろんな形を観察しているうちに、Figure (3) を偶然発見し、それを数字の直して研究したのである。

注意 このようにして $99999 \dots 99^n$ の形をした数が作る図形の構造を見つけるという試みは終わった。答えがわかってみると、それほど難しいとは思えないが、 $99999 \dots 99^n$ と $(a+b)^n$ が全く同じ数学的構造を持っていたということは驚きであった。細かい証明は、数学的な技術を持っている教師の助力が必要であったが、数字が持つ構造の本質を見抜く直感力は学生の方が優れており、アイデアに富んでいた。

数学の研究においては、実用的な計算に較べて遥かに大きな桁数が必要になる。このことは、計算機代数を作る人たちに分かっていたいただきたいことである。工学の先端研究に必要な桁数よりも、高校生が数学の研究に必要な桁数の方が大きいのである。ここで高校生が研究に使ったのは、9000 桁以上の数である。市販されている計算機代数でも、1000 桁を越えることができない


```

a = 11;
b = IntegerDigits[yya];
bb = Length[b];
cc = IntegerPart[bb/(s)] - 1;
Print[bb];
Print[cc];
Show[Graphics[Evaluate[
Table[Table[{Hue[Part[b, (y + (s) * x)]/8.5], Disk[{y, -x}, 0.6]},
{y, 1, s}], {x, 0, cc}]], AspectRatio -> Automatic,
Background -> RGBColor[0, 0, 0]]

```

上記のような実践結果によって、高校生による研究活動が充分可能である確信を得た。我々は、この活動を発展させ、それらをさらに展開する活動を行った。

第2章 高校生による数学研究の 発展

この章では、前章において示した、高校生による研究を発展させた事例を示す。前章での研究が順調に成果を生み、そして海外の雑誌に掲載されたことは、高校生達に大きな影響を与えた。研究に参加する高校生が増え、生徒も自信を持って活動するようになった。努力すれば成果が出るという自信は非常に大きい。これは、学校教育における多くの活動に共通するものである。受験でも伝統校の生徒は自信を持って取り組むし、クラブ活動でも実績を持っている場合は、生徒達は自信を持って練習に取り組む。

高校生による数学研究を行うためには、取り組む生徒が、研究は成果を生むということを信じる必要がある。しかしこれは簡単なことではない。今年の1月に、研究メンバーの松井と山内が、広中平祐氏創設の数理の翼セミナーに招待されて、研究発表を行った。そこで彼らはセミナーに出席している生徒達に、研究への参加を呼びかけた。出席している生徒達の大半は、数学的な力が優れた者で、数学オリンピックなどに出ている者もいたが、自分達には無理だろうという反応しか得られなかった。

このことから分かるように、高校生による数学研究は、ある程度の水準の研究を生むまでが問題である。

今年の8月にも、数理の翼セミナーに松井が参加して、今回は研究指導をするという試みを行う。

2.1 から 2.10 において紹介する研究は、私達の研究の中で最も大きな成果をあげたものである。多くの定理と公式を発見し、海外の雑誌に掲載され、カナダのサイエンスフェアで1位になったものである。2.11 以降の研究は、ある程度完成して、雑誌などにも掲載されているが、まだ未完成のものである。これからの発展が期待できる。

2.1 パスカルの三角形の拡張

生徒たちがどのようにしてパスカルの三角形を見つけたかのついて述べる。

宮寺が数学の授業でロシアルーレットの確率を教えた。教えた問題は次のようなものだった。

例 6. 2 人の人がロシアルーレットを行う。使うピストルは 6 連発の回転式で、シリンダーには 2 発の銃弾が入っている。2 人が交互に銃を手にとって、自分に向かった発射する。プレーの途中ではシリンダーに手を触れないと仮定するとき、先手の人死ぬ可能性を求めよ。

解. A と B の 2 人がプレーする。A が 1 回目に死ぬ率は $\frac{2}{6}$ 。A が生き残ると、次は 2 回目のプレーで B が銃を手にする。もし B が生き残ると、3 回目のプレーで A が銃を取る。1 回目に A が生き残る率は $\frac{4}{6}$ 、そのとき、2 回目に B が生き残る率は $\frac{3}{5}$ 。そして、そのとき 3 回目に A が死ぬ率は $\frac{2}{4}$ 。したがって、3 回目に A が死ぬ確率は、これらの積を作ることによって求めることができるので、 $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$ 。同じように、5 回目に A が死ぬ率は $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}$ 。この 3 つの和が A が死ぬ率であり、 $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3}{5}$ となる。

この問題は、やさしい。しかしこれを解いたあと、宮寺は生徒たちにシリンダーの数や弾丸の数を変えてみたら面白いかもしれないと言った。しかし、彼は何かはっきりとした見通しを持っていたわけではない。生徒たちは例 6 の方法を使いながら、プレーヤーの人数は 2 人のままで、シリンダーの数と実弾の数をどんどん増やして計算した。ただし、このときにはまだ計算機は使っていなかった。

これ以後の説明をわかりやすくするために 1 つの関数を定義する。実際には、この関数を使い始めたのは、研究がかなり進んでからである。

銃が n 個のシリンダーを持ち、 m 個の実弾が入っているとす。 p 人のプレーヤーがゲームに参加するとき、 v 番目のプレーヤーが死ぬ率を $F(p, n, m, v)$ とする。生徒たちは、 $F(p, n, m, v)$ を $p = 2, n = 1, 2, \dots, 6, m = 1, 2, \dots, n, v = 1$ について計算した。このとき、生徒たちは手で計算していた。そのとき、生徒の 1 人であった坂口が確率 $F(p, n, m, v)$ を三角形に並べた。なぜこのような並べ方をしたのかというと、二つの変数 n, m の増え方を考えると、この形が一番自然だったからである。

Figure(8)

$$\begin{array}{c}
 F(2, 1, 1, 1) \\
 F(2, 2, 1, 1), F(2, 2, 2, 1) \\
 F(2, 3, 1, 1), F(2, 3, 2, 1), F(2, 3, 3, 1) \\
 F(2, 4, 1, 1), F(2, 4, 2, 1), F(2, 4, 3, 1), F(2, 4, 4, 1) \\
 F(2, 5, 1, 1), F(2, 5, 2, 1), F(2, 5, 3, 1), F(2, 5, 4, 1), F(2, 5, 5, 1)
 \end{array}$$

Figure (8) の見方を説明する。 $F(2, 4, 2, 1)$ は、 $p = 2, n = 4, m = 2$ かつ $v = 1$ であるときの、死亡確率である。

それから、坂口は各 $F(p, n, m, v)$ の値を計算した。すると、次の数字の作る三角形ができた。

Figure(9)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}
 \end{array}$$

例えば、 $F(2, 4, 2, 1)$ の値は、 $\frac{3}{4}$ であって、4 段目の 2 番目の数字である。

この Figure 9 を見た生徒たちは、何かの法則があるように思ったが、良く分からなかった。坂口は、家に帰って、一人で考えて、次の日に Figure 9 から新しい数字の三角形を作ってきた。これが Figure 10 である。

Figure(10)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}
 \end{array}$$

Figure 9 と Figure 10 は数学的には同値である。例えば、Figure 9 において、4 段目の最初の数は $\frac{1}{2}$ であるが、Figure 10 において、同じ位置にあるのは、 $\frac{2}{4}$ で、数として同じものである。

Figure10 においてパターンは明白である。各分数の分母と分子がそれぞれ、パスカルの三角形と同じパターンを持っている。

このパターンについて説明するために、Figure 4 を使う。活字が太字になっているところをみていただきたい。4 段目の 2 番目と 3 番目の分数は $\frac{4}{6}$ と $\frac{3}{4}$ である。5 段目の 3 番目の数は $\frac{7}{10}$ 。分子はそれぞれ、3, 4, 7 で、 $3 + 4 = 7$ を満たしている。分母はそれぞれ、6, 4, 10 で、 $6 + 4 = 10$ を満たしている。

この法則の発見のときは、教師も生徒も本当に感動した。そして、時間順序では、すべての私たちの研究の中でこれが最初の発見であった。そして、

10年以上に渡って、このテーマで新しい事実何回も発見しているのであるから、非常に重要な出来事であったと言える。

Figure(11)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}
 \end{array}$$

この法則を発見してから、生徒たちは計算機代数システムをつかって研究し始めた。計算機代数システムは分数のまま計算できるので、このロシアンルーレットの数学的理論を研究するには適していた。

このようにして、2人でプレーするゲームによって作られる三角形が発見されてから、10年以上の間理論の発展はなかった。

しかし峰松と橋場諭が研究チームに参加したとき、一応先輩たちが見つけた結果として、2人でのゲームを紹介した。すると、二人がほぼ同時にプレーヤーに人数を増やすことを提案した。

宮寺は、2人の場合の理論がきれいな、パスカルの三角形のようなものを生んだが、人数の多い場合には、たぶんうまくいかないだろうと考えた。しかし、一応試みることになり、計算してみた。すると、人数が多い場合にも、同じ法則が成立することを発見した。

このとき、峰松は大学1年生で、高校時代に宮寺と研究した経験を持っていた。橋場は、高校2年生で、初めて研究に参加したばかりであった。

人数が多い場合のゲームについての研究はすぐに結果を生み、宮寺、峰松、橋場によって、奈良で開催された International Conference on Application of computer algebra [15] で発表された。

ここで、ロシアンルーレットを数学的にきちんと定義しておく。

定義 1. まず自然数 p, n, m を固定する。プレイヤー $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ が、テーブルの周りに座っている。ゲームはプレイヤー θ_1 から始まる。手渡しによって、銃が順番に回っていく。銃は n のシリンダーを持ち、最初に m 個の弾丸が入っている。各プレイヤーは銃を手にとると、シリンダーには手を触れずに、自分に向かって引き金を引く。弾が出れば、その人が敗者となり、ゲームは終わる。

ロシアンルーレットを数学的に扱うということについては、抵抗のある人もいるだろう。実際私たちの発見は数学雑誌 Archimedes' Laboratory[12] で紹介されたが、青少年向けの雑誌なので、ロシアンルーレットという話題はふさわしくないということになり、魔法の木の実という日本昔話を峰松が創作し、掲載してもらった。Archimedes' Laboratory はよく知られた On line 雑誌であるから、興味のある人は、読んでみていただきたい。

ロシアンルーレットというテーマに抵抗を感じる人は、定義 2 の問題として扱うことができる。定義 1 と定義 2 の問題は、数学的に同値である。

定義 2. まず自然数 p, n, m を固定する。プレイヤー $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ が、テーブルの周りに座っている。ゲームはプレイヤー θ_1 から始まる。手渡しによって、番号札の入った箱が順番に回っていく。箱に入っている番号は、1 から n までである。プレイヤーは、回ってきた箱から札を引くが、そのときプレイヤーは札の番号を見ることは出来ないで、ランダムに引くことになる。なお、箱から一度取り出された札は、箱に戻されることはない。取り出した札の数 x が $x \leq m$ を満たせば、引いたプレイヤーは敗者となり、ゲームは終わる。

この記事では、定義 1 と定義 2 の両方の定義を同時に使う。数学的には同値である。

2.2 パスカルの的な三角形の数学的構造

$R(n, m, y)$ を、 y 回目のプレーでゲームが終わる確率とする。

補題3. $y \leq n - m + 1$ を満たす自然数 n, m, y に対して次の式が成立つ。

$$R(n, m, y) = \left(\prod_{k=0}^{y-2} \frac{n - (m + k)}{n - k} \right) \times \frac{m}{n - (y - 1)} = \frac{n - y C_{m-1}}{n C_m}. \quad (1)$$

証明. ゲームが y 回で終わるためには、プレイヤーたちは 1 番目プレーから $(y - 1)$ 番目まで負けずにプレーする必要がある。1 番目から、 $(y - 1)$ 番目まで誰も負けない確率は $\frac{n-m}{n}, \frac{n-(m+1)}{n-1}, \dots, \frac{n-(m+y-2)}{n-(y-2)}$ であり、 y 番目のプレーで誰かが負ける可能性は $\frac{m}{n-(y-1)}$ である。

したがって、(1) が成立する。

ここで floor 関数について説明する。実数 x に対して、 $\lfloor x \rfloor$ は、 x を超えない最大に整数とする。

定理 3. $F(p, n, m, v) = \sum_{z=0}^{t-1} R(n, m, v + pz)$, ただし $t = \lfloor \frac{n-m+p-v+1}{p} \rfloor$.

証明. 行われるプレーの数は、明らかに、最大で $n-m+1$ である. v 番目のプレーヤーは v 番目, $v+p$ 番目, $v+2p$ 番目, \dots , $v+(t-1)p$ 番目のプレーをする. ここで, t は $v+(t-1)p \leq n-m+1$ を満たす最大の自然数であり, $t = \lfloor (n-m+p-v+1)/p \rfloor$ となる.

従って、補題 3 により、

$$F(p, n, m, v) = \sum_{z=0}^{t-1} R(n, m, v + pz) = \sum_{z=0}^{t-1} \frac{n-v-pz}{n} C_{m-1}.$$

定義 3.

$U(p, n, m, v) = \sum_{z=0}^{t-1} \frac{n-v-pz}{n} C_{m-1}$ と定義する. ただし, $t = \lfloor \frac{n-m+p-v+1}{p} \rfloor$ である.

ここで, $v > n$ である場合と, $n = m$ かつ $v > 1$ である場合は $U(p, n, m, v) = 0$ と決める.

補題 4.

$$(1) U(p, n, 1, v) = \lfloor \frac{n-v}{p} \rfloor + 1$$

$$(2) U(1, n, m, 1) = {}_n C_m$$

$$(3) U(p, n, n, 1) = 1$$

$$(4) v > 1 \text{ なら, } U(p, n, n, v) = 0$$

$$(5) v > n \text{ なら } U(p, n, m, v) = 0$$

証明. (1) もし $m = 1$ であるとする, 定義 3 により $U(p, n, 1, v) =$

$$\sum_{z=0}^{t-1} \frac{n-v-pz}{n} C_0$$

$$= t = \lfloor \frac{n+p-v}{p} \rfloor = \lfloor \frac{n-v}{p} \rfloor + 1.$$

$$(2) U(1, n, m, 1) = \sum_{z=0}^{n-m} \frac{n-1-z}{n} C_{m-1} = {}_n C_m.$$

$$(3) U(p, n, n, 1) = \sum_{z=0}^0 \frac{n-1-z}{n-1} C_{n-1} = {}_{n-1} C_{n-1} = 1$$

この数 $U(p, n, m, v)$ はこの記事全体で大切である. 定理 3 と 定義 3 により、

$$F(p, n, m, v) = \frac{U(p, n, m, v)}{{}_n C_m}.$$

(4) と (5) は、定義 3 からすぐに出る.

$F(p, n, m, v)$ の分子である $U(p, n, m, v)$ を定義して使い始めたのは、実際には全体の理論ができてからである. 研究が進むにつれて、 $U(p, n, m, v)$ だけを取り出して研究することが多くなってきた.

これから、 $U(p, n, m, v)$ が ${}_n C_m$ に良く似た性質を持つことを証明する. そのために、良く知られた公式 ${}_r C_{m-1} + {}_r C_m = {}_{r+1} C_m$ を $U(p, n, m, v)$ の各項毎に使う.

定理 4. $U(p, n, m, v) + U(p, n, m + 1, v) = U(p, n + 1, m + 1, v)$.

証明. 定義 3 により、

$$U(p, n, m, v) = \sum_{z=0}^{t_1-1} n-v-pz C_{m-1}, \quad (2)$$

$$U(p, n, m + 1, v) = \sum_{z=0}^{t_2-1} n-v-pz C_m \quad (3)$$

かつ

$$U(p, n + 1, m + 1, v) = \sum_{z=0}^{t_3-1} n+1-v-pz C_m, \quad (4)$$

となる. ただし、

$$t_1 = \lfloor (n - m + p - v + 1)/p \rfloor, \quad (5)$$

$$t_2 = \lfloor (n - (m + 1) + p - v + 1)/p \rfloor \quad (6)$$

かつ

$$t_3 = \lfloor (n + 1 - (m + 1) + p - v + 1)/p \rfloor \quad (7)$$

となる. 明らかに、 $t_2 \leq t_1 = t_3$ となる. 従って $z = 0, 1, \dots, t_2$ に対して次の式が成立する.

$$n-v-pz C_{m-1} + n-v-pz C_m = n+1-v-pz C_m \quad (8)$$

(5) と (6) により、 $t_1 = t_2$ または $t_1 = t_2 + 1$ となる.

(a) まず $t_1 = t_2$ であるとすると、(2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) により

$$U(p, n, m, v) + U(p, n, m + 1, v) = U(p, n + 1, m + 1, v).$$

(b) 次に $t_1 = t_2 + 1$ とすると、証明すべきことは (2) の t_1 番目の項が (4) の t_1 番目の項に等しいということである. 何故なら、(3) は t_1 番目の項は存在しないからである.

$t_1 = t_2 + 1$ であるから、 $n - m + p - v + 1$ は p の倍数であることがわかる. 従って、

$$n - m + p - v + 1 = pt_1 \text{ となる.}$$

このことから、

$$n - v - p(t_1 - 1) = m - 1$$

かつ

$n + 1 - v - p(t_3 - 1) = m$ である。
 これらのことから、次のようになる。

$$\begin{cases} n-v-p(t_1-1)C_{m-1} = m-1C_{m-1} = 1 \\ n+1-v-p(t_3-1)C_m = mC_m = 1. \end{cases} \quad (9)$$

(2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) により、 $U(p, n, m, v) + U(p, n, m + 1, v) = U(p, n + 1, m + 1, v)$.

注意. 定理 4 は既に、 $p = 2$ の場合については宮寺、坂口、増田 citeaaaaaffff で証明されている。

定理 2 により、 $U(p, n, m, v)$ はパスカルの三角形に良く似た性質を持つ。このことから、 $F(p, n, m, v) = \frac{U(p, n, m, v)}{{}_n C_m}$ は分母と分子がそれぞれパスカルの三角形に似た性質を持つ。

補題 4(2) と、定理 4 により $U(p, n, m, v)$ は ${}_n C_m$ の一般化と考えることができる。

2.3 一定確率を持つゲーム

定義 1 と 2 のゲームで出現する確率の中には、 $\log_e 2$ や π などの、超越数を極限として持つものが出現する。この興味深い事実について報告する。

そのために、定義 1, 2 とは少し違ったゲームを考える。このゲームと定義 1, 2 のゲームとの関係は重要である。

定義 4. 定義 1, 2 のゲームにおいて、ルールを一箇所だけ変える。それは、箱から一度取り出された札を、箱に戻すことである。この新しいゲームにおいて、 v 番目のプレイヤーが敗者になる確率を $F2(p, n, m, v)$ とし、このゲームが y 回目のプレーで終わる確率を $R(n, m, y)$ とする。

このゲームはロシアルーレットでは、各自がプレーする前にシリンダーをランダムに回転させることに対応する。これについては、既に多くの人が研究している。

補題 5. $R2(n, m, y) = \left(\frac{n-m}{n}\right)^{y-1} \frac{m}{n}$

これは、 $R2(n, m, y)$ の定理からすぐに出る。

定理 5. (a) $1 \leq m < n$ であれば以下の式が成立する.

$$\begin{aligned} F2(p, n, m, v) &= \sum_{z=0}^{\infty} R2(n, m, v + pz) \\ &= \left(\frac{n-m}{n}\right)^{v-1} \times \frac{m}{n} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{n-m}{n}\right)^p}. \end{aligned} \quad (10)$$

(b) $m = v$ であれば

$$F2(p, n, m, v) = \begin{cases} 1 & (m = n \text{ かつ } v = 1 \text{ とすると}) \\ 0 & (m = n \text{ かつ } v > 1 \text{ とすると}). \end{cases} \quad (11)$$

証明. まず、 $1 \leq m < n$ と仮定する. v 番目のプレイヤーは v 番目, $v+p$ 番目, $v+2p$ 番目, ... にプレーする. したがって補題 5 により、(10) を得る. もし、 $m = n$ なら、1 番目のプレイヤーは敗北する. 従って、 $v = 1$ あるいは $v > 1$ のときに、 $F2(p, n, m, v) = 1$ あるいは 0 となり (11) を得る.

次に定義 1,2,3 のゲームを数学的に較べる.

補題 6. K を任意の正数とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|R2(n, m, y) - R(n, m, y)|; y \leq \min(K, n-m+1), m \leq n\} = 0.$$

証明. 明らかに $|\frac{n-(m+k)}{n-k}|, |\frac{m}{n-(y-1)}|, |\frac{n-m}{n}|, |\frac{m}{n}| \leq 1$ であり、従って、補題 3 と補題 5 により

$$\begin{aligned} &|R(n, m, y) - R2(n, m, y)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{y-2} \left(\left| \frac{n-(m+k)}{n-k} - \frac{n-m}{n} \right| \right) + \left| \frac{m}{n-(y-1)} - \frac{m}{n} \right|, \end{aligned}$$

この式は $n \rightarrow \infty$ であるときに、0 に収束する.

since $y \leq \min(K, n-m+1)$ and $m \leq n$.

定理 6. プレーヤーの数 p 、順番 v を固定する. ただし $v \leq p$ とする. また、 G と H は正数で、 $0 < H < G < 1$ を満たすとする. このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|F2(p, n, m, v) - F(p, n, m, v)|; G > \frac{m}{n} > H\} = 0$$

証明. 補題 3、補題 5 と $\frac{m}{n} > H$ により、

$$R(n, m, v + pz), R2(n, m, v + pz) < \left(\frac{n-m}{n}\right)^{v+pz-1} < (1-H)^{v+pz-1},$$

となり、これにより任意の小さな数に対して ϵ 自然数 q を選んで、 q は ϵ と H に依存し、

$$|F(p, n, m, v) - \sum_{z=0}^q R(n, m, v + pz)| < \epsilon. \quad (12)$$

かつ

$$|F2(p, n, m, v) - \sum_{z=0}^q R2(n, m, v + pz)| < \epsilon. \quad (13)$$

となる。次に

$$K = v + pq. \quad (14)$$

とする。

もし $G > \frac{m}{n}$ とすると、 $(n - m) > n(1 - G)$ となる。

従って、十分大きな自然数 n に対して、

$$K \leq n - m + 1$$

となる。

(15)

(14) と (15) により、補題 4 を使うことができ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|R2(n, m, y) - R(n, m, y)|; y = v, \dots, v + pq, G > \frac{m}{n} > H\} = 0$$

となる。

(16)

従って、(12), (13), (16) により、

$$|F2(p, n, m, v) - F(p, n, m, v)| < 2\epsilon$$

が、十分大きな自然数 n と、 $G > \frac{m}{n} > H$ を満たす自然数 m に対して成立つ。 ϵ は任意の小さな正数であるから、証明を終えることができる。

定理 6 の結論は直感的には明らかであるように思えるが、実際に証明することはやや難しい。

2.4 ゲームの極限確率と、現れる興味深い数

定義 1 のロシアルーレットを考えていた。そのとき、増田が次のような質問をした。

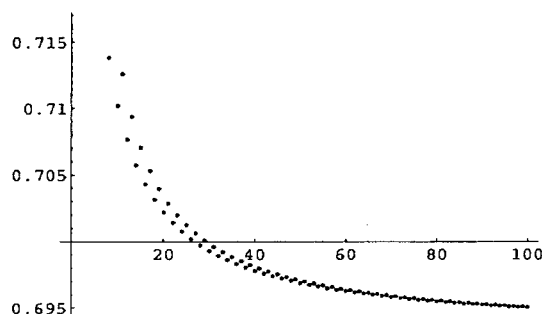
「もし目の前に銃がいくつかの銃があり、シリンダーの数はそれぞれわかっている。しかし何発の実弾が入っているかわからない。この場合どの銃を選んだら有利になるか？」

この質問を聞いた宮寺が、生徒たちと共に Mathematica を使っているような計算をしてみた。シリンダーの数 n が分かっている、実弾の数 m が、 $1, 2, 3, \dots, n$ の可能性を持っている。この実弾の数がそれぞれ同じ確率で起きると仮定すると、確率は

$$\frac{F(p, n, 1, v) + F(p, n, 2, v) + \dots + F(p, n, n, v)}{n}$$

この値を $E(p, n, v)$ と書くことにする。

いろんな n の値に対して、 $E(p, n, v)$ を計算してみたが、特に面白い法則は見つからなかった。しかし、そのままいろんな計算をしている時に、 n をどんどん大きくしながら、 $E(p, n, v)$ の値を調べることを試みた。そして、Mathematica により次のようなグラフができた。



このグラフを見て、宮寺と高校生たちは n を限りなく大きくするときの極限が存在することを予想した。

ただ、この極限値の計算は難しく、高校生の手に負えなかった。宮寺が級数の知識を使って、求めてみると、 $\log_e 2$ になった。このことは [7] において数

学の定理として、発表し、[9]において計算機代数システムを使った高校生の研究として発表した。

宮寺が初めに作った証明は非常に複雑であったが、高校の数学の範囲である区分求積法を使うことによって、かなり分かりやすくなった。しかも、プレイヤーの数 p が一般の自然数である場合について、証明することができた。以下ではその方法で説明する。

以下において、 n はシリンダーの数とし、弾丸の数は 1 から n まで一様に分布していると仮定する。すなわち、 $P(m = k) = \frac{1}{n}$ が $1 \leq k \leq n$ を満たす任意の自然数 k に対して成立つ。

カードのゲームとしては、自然数 p, n, m のうち、自然数 p, n , だけを固定し、自然数 m はプレイヤーには知らされておらず、1 から n までを同じ確率で取り得ることだけがわかっているとすればよい。

このように仮定すると、定義 1,2 によるゲームの場合の確率は、 $E(p, n, v) = \frac{F(p, n, 1, v) + F(p, n, 2, v) + \dots + F(p, n, n, v)}{n}$ となり、定義 3 によるゲームの場合の確率は、 $E2(p, n, v) = \frac{F2(p, n, 1, v) + F2(p, n, 2, v) + \dots + F2(p, n, n, v)}{n}$ となる。

定理 7.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(p, n, v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E2(p, n, v) \\ &= \int_0^1 \frac{x(1-x)^{v-1}}{1-(1-x)^p} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+kp)(v+kp+1)} \end{aligned}$$

証明. 定理 5 により、

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} E2(p, n, v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F2(p, n, 1, v) + F2(p, n, 2, v) + \dots + F2(p, n, n, v)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{v-1} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{m}{n}\right)^p} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{x(1-x)^{v-1}}{1-(1-x)^p} dx \end{aligned}$$

x を $1-x$ で置き換えると、

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{(1-x)x^{v-1}}{1-x^p} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} (1-x)x^{v-1}(1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\cdots) dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1-\epsilon} (1-x)x^{v-1+kp} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (1-x)x^{v-1+kp} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+kp)(v+kp+1)}.
 \end{aligned}$$

次に $\lim_{n \rightarrow \infty} E(p, n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} E2(p, n, v)$ を証明する.

$0 \leq F(p, n, m, v), F2(p, n, m, v) \leq 1$ であるから、任意の小さい正数 ϵ に対して、

$$0 \leq \frac{\sum \{F(p, n, m, v); (1-\epsilon)n > m > \epsilon n\}}{n} - \frac{\sum_{m=1}^n F(p, n, m, v)}{n} \leq 2\epsilon \quad (17)$$

かつ

$$0 \leq \frac{\sum \{F2(p, n, m, v); (1-\epsilon)n > m > \epsilon n\}}{n} - \frac{\sum_{m=1}^n F2(p, n, m, v)}{n} \leq 2\epsilon. \quad (18)$$

定理 6 により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|F2(p, n, m, v) - F(p, n, m, v)|; (1-\epsilon)n > m > \epsilon n\} = 0. \quad (19)$$

ϵ は任意の小さな正数であるから、(17), (18), (19) により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(p, n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} E2(p, n, v).$$

補題 7. $L(p, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+kp)(v+kp+1)}$ とおくと、 $L(2, 1) = \log_e 2$, $L(3, 1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, $L(3, 2) = \frac{1}{2} \log_e 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ かつ $L(3, 3) = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{1}{2} \log_e 3$.

これらは、公式集に掲載されているものであるから、証明は略する。

例 7. (a) 定理 7 と補題 7 により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(2, n, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} E2(2, n, 1) = L(2, 1) = \log_e 2$.

(b) 定理 7 と補題 7 により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(3, n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} E2(3, n, v)$ において、 v に 1, 2, 3 を代入すると、 $L(3, 1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, $L(3, 2) = \frac{1}{2} \log_e 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$, $L(3, 3) = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{1}{2} \log_e 3$ を得る. (a) では $\log_e 2$ という値を得て、においては、 π を得る. このような数が出現するという事は興味深い!

2.5 2人のゲームに現れるきれいな法則.

2人のゲームの場合には、特有のきれいな法則がある.

私たちの発見した三角形を数学の授業で、40人の生徒に見せた.すると、その中の浦川と森本がすぐに法則を発見した.

以下の三角形は $F(p, n, m, v)$ を $p = 2, n = 1, 2, \dots, 6, m = 1, 2, \dots, n$ 、 $v = 1$ として作ったものである. 以下の Figure (12), (13), (14) を見て欲しい. 太字になっている3つの分数において、両端の分数の平均が真ん中の分数になる.

例 8.

Figure(12)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{\mathbf{3}}{4}, \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{\mathbf{7}}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{3}{6}, \frac{9}{15}, \frac{\mathbf{13}}{20}, \frac{11}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{4}{7}, \frac{12}{21}, \frac{22}{35}, \frac{24}{35}, \frac{16}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}
 \end{array} \tag{2.1}$$

Figure(13)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{6}, \frac{9}{15}, \frac{13}{20}, \frac{11}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
 \frac{4}{7}, \frac{12}{21}, \frac{22}{35}, \frac{24}{35}, \frac{16}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}
 \end{array} \tag{2.2}$$

Figure(14)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{6}, \frac{9}{15}, \frac{13}{20}, \frac{11}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
 \frac{4}{7}, \frac{12}{21}, \frac{22}{35}, \frac{24}{35}, \frac{16}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}
 \end{array}$$

以上の法則は、一般に成立し、以下の3つの定理として証明することができた。これらの定理は、初めは Mathematica の持っている、文字 n に関する級数の和を求める機能を使って証明された。その後で、人の力によって証明した。

次の定理は Figure(12) で書かれている法則を一般的に証明したものである。

定理 8. $F(2, 2n, 3, 1) + F(2, 2n + 2, 3, 1) = 2F(2, 2n + 1, 3, 1)$.

証明.

$$\begin{aligned}
 F(2, 2n, 3, 1) &= \frac{{}^{2n-1}C_2 + {}^{2n-3}C_2 + {}^{2n-5}C_2 + \dots}{{}^{2n}C_3} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-2k+1)(2n-2k)}{2} \right) / \left(\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} \right) \\
 &= 3 \sum_{k=1}^{n-1} (2n^2 - n(4k-1) + k(2k-1)) / (n(2n-1)(2n-2)) \\
 &= 3 \sum_{k=1}^{n-1} ((2n^2 + n) - (4n+1)k + 2k^2) / (n(2n-1)(2n-2)) \\
 &= \frac{4n+1}{8n-4}.
 \end{aligned}$$

ここで $n+1$ を n の代わりに使うと,

$$\begin{aligned}
F(2, 2n+2, 3, 1) &= \frac{4n+5}{8n+4}. \\
F(2, 2n+1, 3, 1) &= \frac{2nC_2 + 2n-2C_2 + 2n-4C_2 + \dots}{2n+1C_3} \\
&= 3 \sum_{k=1}^n (2n-2k+2)(2n-2k+1)/(2n+1)2n(2n-1) \\
&= 3 \sum_{k=1}^n ((4n^2+6n+2) - (8n+6)k + 4k^2)/(2n+1)(2n-1)2n \\
&= \frac{4n^2+3n-1}{8n^2-2}.
\end{aligned}$$

従って、

$$F(2, 2n, 3, 1) + F(2, 2n+2, 3, 1) = 2F(2, 2n+1, 3, 1).$$

次の定理は Figure(13) で書かれている法則を一般的に証明したものである.

定理 9. $F(2, 2n+1, 2, 1) + F(2, 2n+1, 4, 1) = 2F(2, 2n+1, 3, 1)$.

証明.

$$\begin{aligned}
F(2, 2n+1, 2, 1) &= \frac{2nC_1 + 2n-2C_1 + 2n-4C_1 + \dots}{2n+1C_2} \\
&= \frac{2n + (2n-2) + \dots + 2}{2n+1C_2} = (2 \sum_{k=1}^n (2n-2k+2))/((2n+1)2n) \\
&= \frac{n+1}{2n+1}. \\
F(2, 2n+1, 4, 1) &= \frac{2nC_3 + 2n-2C_3 + 2n-4C_3 + \dots}{2n+1C_4} \\
&= \frac{4 \sum_{k=1}^n (2n-2k+2)(2n-2k+1)(2n-2k)}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)} \\
&\quad \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2k+2)(2n-2k+1)(2n-2k) \\
&= (24n^2+24n+4)(\frac{1}{2}n(n-1)) + (8n^3+12n^2+4n)(n-1) \\
&= -2n^2+2n^4.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
F(2, 2n+1, 4, 1) &= \frac{4(-2n^2+2n^4)}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)} \\
&= \frac{2n(1+n)}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

定理 8 の証明の中ですでに $F(2, 2n + 1, 3, 1)$ を計算し、

定理 9 の証明の中ですでに $F(2, 2n + 1, 2, 1)$, $F(2, 2n + 1, 4, 1)$ を計算している
ので、これらを代入すると

$$\begin{aligned} & F(2, 2n + 1, 3, 1) \\ &= \frac{4n^2 + 3n - 1}{8n^2 - 2} \\ & F(2, 2n + 1, 4, 1) + F(2, 2n + 1, 2, 1) = \frac{2n(1+n)}{4n^2 - 1} + \frac{n+1}{2n+1} \\ &= \frac{(4n-1)(2n+1)(n+1)}{(4n^2-1)(2n+1)} = \frac{(4n-1)(n+1)}{4n^2-1} = 2F(2, 2n+1, 3, 1). \end{aligned}$$

従って、

$$F(2, 2n, 3, 1) + F(2, 2n + 2, 3, 1) = 2F(2, 2n + 1, 3, 1).$$

次の定理は Figure(3) で書かれている法則を一般的に証明したものである。

定理 10. $F(2, 2n, 2, 1) + F(2, 2n + 2, 4, 1) = 2F(2, 2n + 1, 3, 1)$.

証明.

$$\begin{aligned} F(2, 2n, 2, 1) &= \frac{2^{n-1}C_1 + 2^{n-3}C_1 + 2^{n-5}C_1 + \dots}{2^n C_2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (2n - 2k + 1) / (2n(2n - 1)) \\ &= \sum_{k=1}^n (2n - 2k + 1) / (n(2n - 1)) \\ &= \sum_{k=1}^n (2n - 2k + 1) = 2n^2 - 2\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right) + n \\ &= n^2. \end{aligned}$$

従って、

$$F(2, 2n, 2, 1) = \frac{n^2}{n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$

定理 8 の証明ですでに計算したことにより、

$$\begin{aligned}
F(2, 2n+1, 3, 1) &= \frac{4n^2 + 3n - 1}{2(2n-1)(2n+1)} \\
F(2, 2n+2, 4, 1) &= \frac{{}^{2n+1}C_3 + {}^{2n-1}C_3 + {}^{2n-3}C_3 + \cdots}{{}^{2n+2}C_4} \\
&= \frac{4 \sum_{k=1}^n ((2n-2k+3)(2n-2k+2)(2n-2k+1))}{{}^{2n+2}C_4} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n ((2n-2k+3)(2n-2k+2)(2n-2k+1))}{{}^{2n+2}C_4} \\
&= \sum_{k=1}^n (-8k^3 + (24n+24)k^2 \\
&\quad + k(-22 - 48n - 24n^2) + 6 + 22n + 24n^2 + 8n^3) \\
&= -8\left(\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right) + (24n+24)\left(\frac{1}{6}n(1+n)(1+2n)\right) + \\
&\quad \left(\frac{1}{2}n(1+n)\right)(-22 - 48n - 24n^2) + n(6 + 22n + 24n^2 + 8n^3) \\
&= n(2n^2 + 2n - 1)(n+1). \\
F(2, 2n+2, 4, 1) &= \frac{4n(2n^2 + 2n - 1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)} \\
&= \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n+1)(2n-1)} \\
F(2, 2n, 2, 1) + F(2, 2n+2, 4, 1) - 2F(2, 2n+1, 3, 1) \\
&= \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n+1)(2n-1)} + \frac{n}{2n-1} - 2\frac{4n^2 + 3n - 1}{2(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{(2n^2 + 2n - 1) + n(2n+1) - (4n^2 + 3n - 1)}{(2n-1)(2n+1)} = 0.
\end{aligned}$$

注意. 私たちの研究全般において言えることであるが、高校生の中には非常に優れた数的直観力を持っている者が多くいて、データを見せるとその中にある数字同士の関係や、法則を即座に見抜くことが多い。宮寺は選択科目の数学では、このような研究をテーマにしているが、通常の授業でも、雑談として研究結果を話すことがある。あくまで雑談なので、5分くらいしか使わないのだが、その短時間に法則の発見が行われたことも、度々ある。数的直感力と云えば、高名なラマヌジャンを思い出す人も多いだろう。しかし、高校生と共に研究してきた宮寺は、若い人々の中には、小さなラマヌジャンが多く存在しているのではないかと思っている。しかし、数学や科学の厳密な訓練を続けていくうちに、そのような直観力を使わずにいると、やがて失ってしまうのではないだろうか。

Open problems. 上のきれいな法則はすべて、人数が 2 人の場合のゲームから作られている。では、人数がもっと多くなると、どんな法則が成立する

のだろうか。この問題はそれほど難しくないと思われるが、まだ研究していない。

2.6 パスカルのような三角形と、それから作られるシュルピンスキーのようなガスケット。

パスカルの三角形に似た数のリストを研究し始めてから、しばらくして松井が非常に面白いことを発見した。彼は、数字の列を見ながら、偶数と奇数に分けて、ふとした思いつきから、それらを違った色で塗った。彼は、シュルピンスキーのガスケットについては、何も知らなかったが、自力で再発見し、しかも拡張することになった。この経過について紹介する。

まず、三角形のリストをもう一度見ていただきたい。

Figure(15)

```
1
1,2
1,2,1
2,3,3,1
2,5,6,4,1
2,7,11,10,5,1
3,9,18,21,15,6,1
```

上の三角形を見ていた松井は、各数字を2で割ったあまりを作ってみた。すると、次のような三角形ができた。

Figure(16)

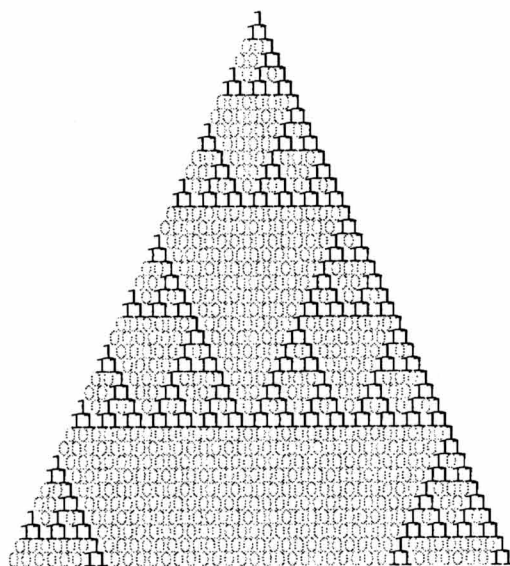
```
1
1,0
1,0,1
0,1,1,1
0,1,0,0,1
0,1,1,0,1,1
1,1,0,1,1,0,1
```

松井は、初めは黒板にチョークで書いていたが、数式処理システムを使って書くことを宮寺が教えた。それから彼は、ゲームに参加するプレイヤーの人数、割る数を変化させていろんな図形を作った。

ここでは、2で割る場合と3で割る場合だけを扱い、人数は2人から6人まで考える。

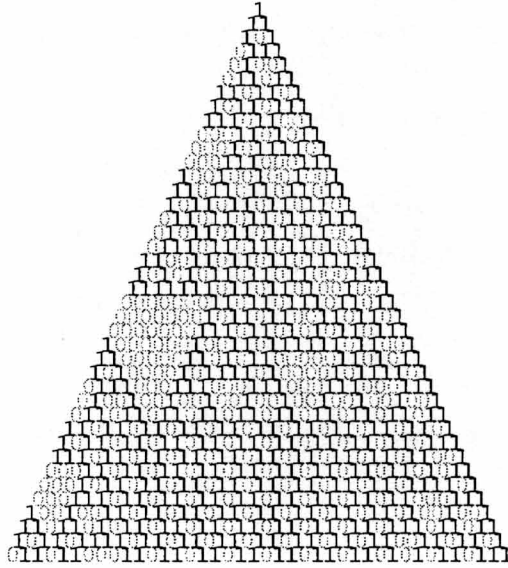
例 9. ここでは、2で割ったあまりを作って、1と0を違った色で塗った三角形を扱う。すると、次のように、シュルピンスキー・ガasketに近いものができた。

下の図形は、2人のゲームからできるガasketである。



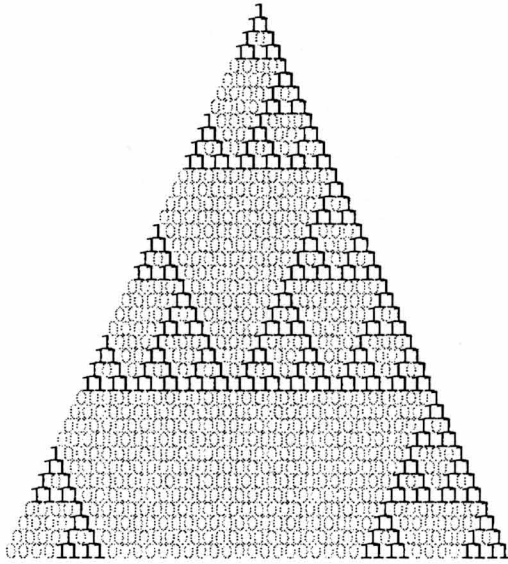
Figure(17)

下の図形は、3人のゲームからできるガasketである。



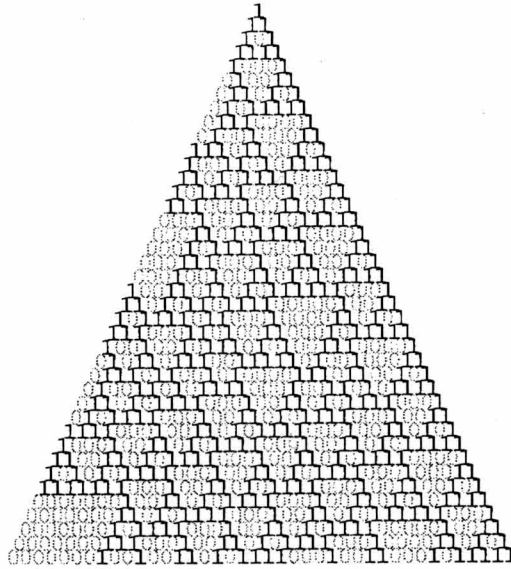
Figure(18)

下の図形は、4人のゲームからできるガスケットである。



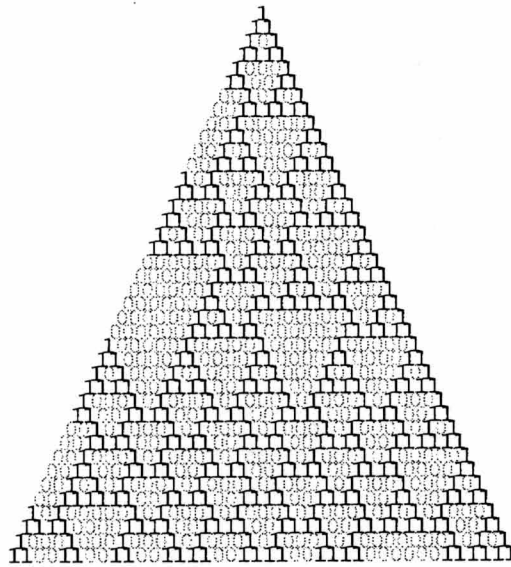
Figure(19)

下の図形は、5人のゲームからできるガスケットである。



Figure(20)

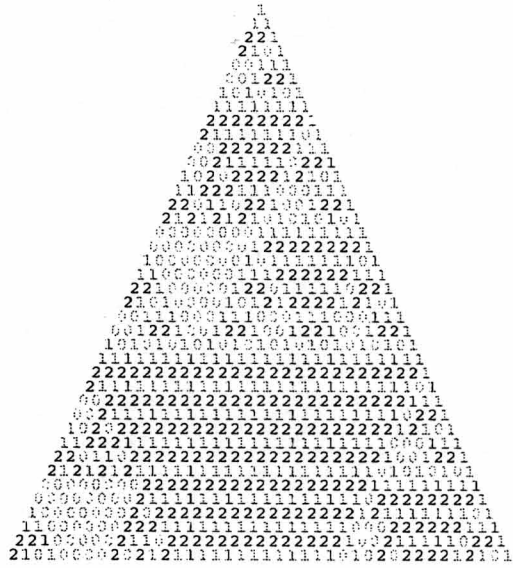
下の図形は、6人のゲームからできるバスケットである。



Figure(21)

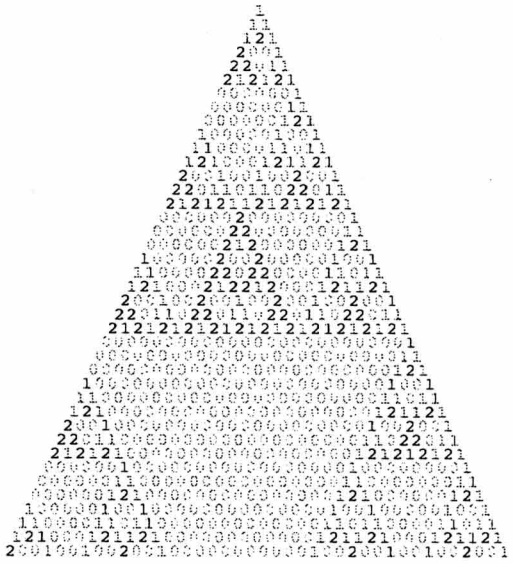
例 10. 松井は、各数字を3で割ったあまりを作って、それから、2と1と0を違った色で塗ることを考えた. すると、上とは少し違った、シュルピンスキー・バスケットに近いものができた.

下の図形は、2人のゲームからできるバスケットである.



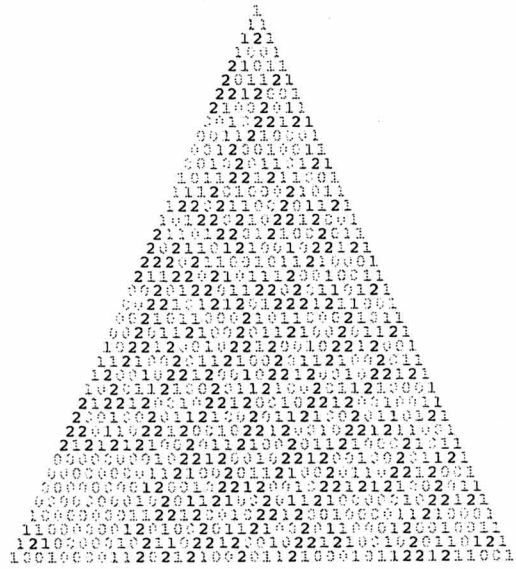
Figure(22)

下の図形は、3人のゲームからできるバスケットである。



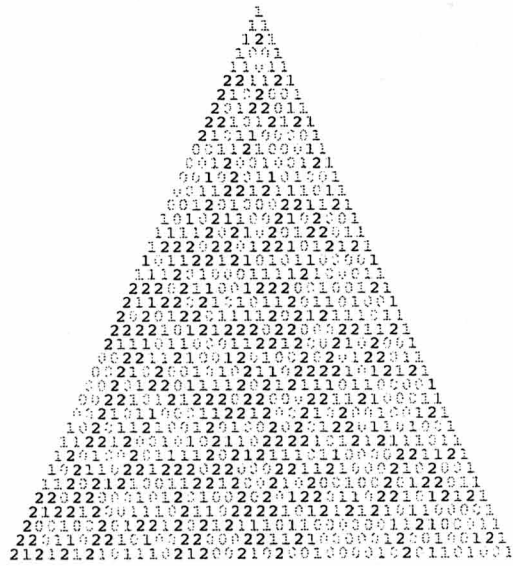
Figure(23)

下の図形は、4人のゲームからできるバスケットである。



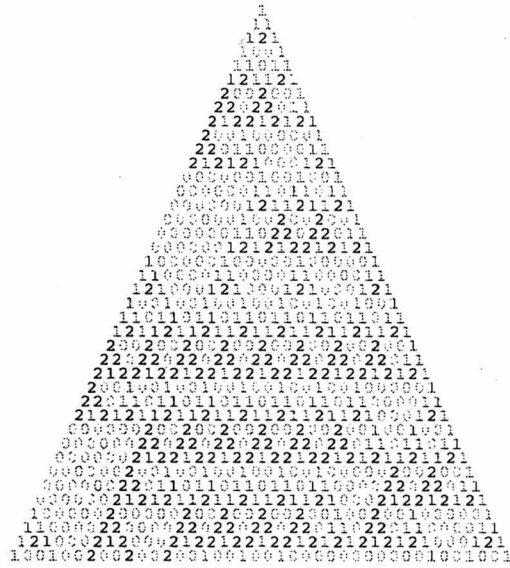
Figure(24)

下の図形は、5人のゲームからできるバスケットである。



Figure(25)

下の図形は、6人のゲームからできるバスケットである。



Figure(26)

この研究は [24] に掲載されている。注意。ここで紹介した図形は、割る数を一定にしておいて、プレイヤーの数を増やしていくと、きれいなアニメーションができる。

Open problems.

高校生たちは、いろんな図形を作って、数学で遊んだ。割る数をいろいろ変えてみて、図形を調べてみるのも楽しいだろう。

また、セラーオートマトンのように、考えて数学的な予想を立てて、証明してみることも可能ではないかと考える。ある周期で相似形が出てくるように思えるが、それを証明することは可能だろうか。例えば、ある図形では、特定の段に、すべて1が並んでいる。これは、限りなく繰り返すのだろうか。また、別の図形では、特定の段に、2,1,2,1,... というパターンが出る。このことも限りなく繰り返すのだろうか。

このような予想を立てるのは簡単だが、証明することがどの程度難しいかについては、また取り組んでいないのでわからない。

これらの図形は、色を適当に選ぶことによって、かなり美しい絵を作ることができる。中川, 松井, 山内によって、いろんな色を使う試みが行われており、きれいな絵が生まれている。特に、中川は色彩感覚に優れているため、独創的な絵を作っている。このようにして絵を作ること、関連した研究と考えるとよいと思う。

2.7 パスカルのな三角形から作られる数列 1

パスカルのな三角形については、ごく最近新しい結果が出た。もう一度三角形を見ていただきたい。これは2人のゲームの場合である。

例11.

Figure(27)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{6}, \frac{9}{15}, \frac{13}{20}, \frac{11}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
 \frac{4}{7}, \frac{12}{21}, \frac{22}{35}, \frac{24}{35}, \frac{16}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}
 \end{array}$$

この分数のリストを高校の新入生である井上、橋場、中川、松井、表具が見たとき、まず井上がこの分数のリストの分子だけを取り出して考え始めた。

そして、他の生徒も同じように分子に興味を持ち始めた。それまでは、確率を表す分数として研究していたので、宮寺にとっては意外な方向であった。宮寺と、彼と研究してきたこれまでの生徒も、分数がパスカルのな性質を持つことを重視してきた。そのために、分子だけを扱うという発想が全くできなかった。

例12.

Figure(28)

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1,1 \\
 2,2,1 \\
 2,4,3,1 \\
 3,6,7,4,1 \\
 3,9,13,11,5,1 \\
 4,12,22,24,16,6,1
 \end{array}$$

この三角形の数字において、 n 段目の左から m 番目の数は $U(2, n, m, 1)$ である。

良く知られているパスカルの三角形と比べると、異なる点は、左端にある数が、上から順番に $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$ となっていることである。

この数字の三角形を見て、まず井上が数を斜め左下に次々に足していくと、斜め右下に和が出現することを見つけた。

例えば、Figure (28) において、 $1 + 3 + 7 + 13 = 24$ である。このような性質はパスカルの三角形も持っている。

このようなことに興味を持った生徒が種々の方法で数を足すことを試みるようになった。

次に3人のプレーヤーの場合を考えると、次のパスカルの三角形が作られる。

このリストにおいて、 n 段目の左から m 番目の数は $U(3, n, m, 1)$ である。

例13.

Figure(29)

```

      1
     1,1
    1,2,1
   2,3,3,1
  2,5,6,4,1
 2,7,11,10,5,1
3,9,18,21,15,6,1

```

同じように、 p 人のプレーヤーのゲームで作られる三角形について考えることができる。 n 段目の左から m 番目の数は $U(p, n, m, v)$ となる。

こうやって出来た三角形に対して、橋場友秀、表具、中川が水平に足すということを始めた。

例 14. Figure (28) の場合なら、 $1, 1+1=2, 2+2+1=5, 2+4+3+1=10, 3+6+7+4+1=21, \dots$ となり、
 $1, 2, 5, 10, 21, \dots$ という数列ができる..

Figure (29) の場合なら、 $1, 1+1=2, 1+2+1=4, 2+3+3+1=9, 2+5+6+4+1=18, \dots$ となり、
 $1, 2, 4, 9, 18, \dots$ という数列ができる。

これらの数列の特徴は、2倍するという操作に、一定周期で1を足すという操作が加わることである。

ここで、例 12 を参考にして、一般的に数列 $A_{p,v}(n)$ を次のように定義する。

定義 5. 任意の自然数 n, p に対して、 $A_{p,v}(n) = \sum_{k=1}^n U(p, n, k)$.

以下の補題と定理によって、三角形の数字を水平に足してできる数列が、2倍する操作と、一定周期に1を足す操作を加えてできることを証明する。これは例14で示したことの一般化である。

これからの議論のために、いくつかの $U(p, n, m, v)$ の性質を用意する。

補題 8.

$$(1) U(p, n+1, m, v+1) = U(p, n, m, v).$$

(2)

$$U(p, n+1, 1, v) = \begin{cases} U(p, n, 1, v) + 1 & (n-v+1 = 0 \pmod{p} \text{ ならば}) \\ U(p, n, 1, v) & (n-v+1 \neq 0 \pmod{p} \text{ ならば}) \end{cases}$$

証明. これらは $U(p, n, m, v)$ の定義から直接導かれる。

補題 9.

$$A_{p,v}(n+1) = \begin{cases} 2A_{p,v}(n) + 1 & (n-v+1 = 0 \pmod{p} \text{ ならば}) & (1) \\ 2A_{p,v}(n) & (n-v+1 \neq 0 \pmod{p} \text{ ならば}) & (2) \end{cases}$$

証明. 補題 4(2) により、 $U(p, n+1, n+1, v) = U(p, n, n, v)$ となり、定理 4 と補題 8 により、 $A_{p,v}(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} U(p, n+1, k, v) = U(p, n+1, 1, v) +$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^n U(p, n+1, k, v) + U(p, n+1, n+1, v) \\ &= U(p, n+1, 1, v) + \sum_{k=2}^n (U(p, n, k-1, v) + U(p, n, k, v)) + U(p, n, n, v) \\ &= U(p, n+1, 1, v) + \sum_{k=1}^n U(p, n, k, v) + \sum_{k=2}^n U(p, n, k, v) \\ &= \sum_{k=1}^n U(p, n, k, v) + \sum_{k=2}^n U(p, n, k, v) + \\ & \begin{cases} U(p, n, 1, v) + 1 & (n-v+1 = 0 \pmod{p} \text{ ならば}) \\ U(p, n, 1, v) & (n-v+1 \neq 0 \pmod{p} \text{ ならば}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2A_{p,v}(n) + 1 & (n-v+1 = 0 \pmod{p} \text{ ならば}) \\ 2A_{p,v}(n) & (n-v+1 \neq 0 \pmod{p} \text{ ならば}) \end{cases} \end{aligned}$$

このように定義すると、次の定理が成立する。ここで、自然数 p, q に対して、 $\text{Mod}[q, p]$ は、 q を p で割ったときの余りを意味する。

$$\text{定理 11. } A_{p,v}(n) = \frac{2^{n+p-v} - 2^{\text{mod}(n-v,p)}}{2^p - 1} \quad (1).$$

証明. 数学的帰納法を使って証明する. $n = 1$ の場合は,

$$A_{p,v}(1) = U(p, 1, 1, v) = \begin{cases} 1 & (v = 1 \text{ の場合}) \\ 0 & (v \neq 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$= \frac{2^{1+p-v} - 2^{\text{mod}(1-v, p)}}{2^p - 1},$$

ここで、次の式を使っている.

$$\text{mod}(1-v, p) = \begin{cases} 0 & (v = 1 \text{ の場合}) \\ 1+p-v & (v \neq 1 \text{ の場合}) \end{cases}.$$

次に (1) を $n = k$ の場合に仮定し、それを $n = k + 1$ の場合に証明する.

もし、 $\text{mod}(k+1-v, p) < p-1$ であれば、

$$\text{mod}(k+2-v, p) = \text{Mod}(k+1-v, p) + 1 < p. \quad (2)$$

(2) と補題 9(2) により、

$$A_{p,v}(k+1) = 2A_{p,v}(k) = 2\left(\frac{2^{k+p-v} - 2^{\text{mod}(k-v, p)}}{2^p - 1}\right) = \frac{2^{(k+1)+p-v} - 2^{\text{mod}(k-v+1, p)}}{2^p - 1} \dots (3)$$

もし、 $\text{mod}(k-v, p) = p-1$ であれば、

$$\text{mod}(k+1-v, p) = \text{mod}(k-v, p) + 1 = 0. \quad (4)$$

したがって (4) と補題 9 (1) により、

$$A_{p,v}(k+1) = 2A_{p,v}(k) + 1 = \frac{2^{k+1+p-v} - 2^{\text{mod}(k-v, p)+1} + 2^p - 1}{2^p - 1}$$

$$= \frac{2^{k+1+p-v} - 1}{2^p - 1} = \frac{2^{k+1+p-v} - 2^{\text{mod}(k+1-v, p)}}{2^p - 1}. \quad (5)$$

(4) と (5) により、(1) for $n = k + 1$ の場合に (1) を示すことができたので、証明を終えることができる.

この定理 11 は、高校の新入生であった中川と松井によって証明された. 宮寺の助言はあったが、文字 p, n, v などに具体的な数を代入して証明しておいて、それを一般化することによって証明した.

彼らはまだ数学の証明については慣れていなかったが、自分たちで発見した事実を証明するときには、自分の持っている以上の力を発揮できるように、文字 n, m, p などを使って一般的に証明することができた.

ただし、式を簡単にするために $\text{mod}()$ を使うことは、宮寺が教えた.

数学教育では、生徒が証明を嫌うということがよく話題になる. しかし、私たちの研究を見ていると、通常の授業の中では数学の証明を嫌うような生徒であっても、自分が発見したことを証明することには、情熱を傾けることが何度も見られた.

そもそも証明の必要性は、新しく発見したことを自分と他の人たちに対して確立するためのものである. 自分たちが初めて発見したことを、証明したいと考えることは、とても自然なことであろう. これは数学教育で証明を教えるときに、活用できることではないだろうか. たとえ発見でなく再発見でも本人には大切な経験であり、見つけたことを自力で証明することは楽しい経験になり得るだろう.

例 15. 定義 5 で導入された数列 $A_{p,v}(n)$ は、 $p = 2, 3, 4, 6$ の場合は既に、数列百科事典である "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" において他の人々によって登録されている。

$p = 5$ の場合については、[23] において、A119610 として著者たちによって登録されている。また、 p が 7 以上の場合については、著者たちの方法によって、一般的な p に対して、数列が定義され、これらは未登録な数列となる。したがって、高校生によって新しい数列が発見されたと言える。

2.8 数列 $A_{p,v}(n)$ の確率論的意味について

高校生たちが数列 $A_{p,v}(n)$ について面白い事実を見つけたので、宮寺は $A_{p,v}(n)$ の組み合わせ論的な意味を探していた。

三角形の数字を水平に足すことによって面白い法則が出たのだが、それは単なる数字遊びなのか。あるいは何か数学的な意味があるのかと考えた。

きれいな法則には、何か意味があるに違いないと考えているうちに、宮寺は重要なことを思いついた。それは次のことである。

定義 5 により、 $A_{p,v}(n) = \sum_{k=1}^n U(p, n, m, v)$ であるが、これは v 番目のプレイヤーが定義 1, 2 のゲームで負ける場合の数を、 m の値 $1, 2, \dots, n$ について足したものになっている。

m の値が確定していない場合は、既にゲームの極限確率を考えたときに扱っている。そこで考えたことと、比べていく。

例 16. 2 人がプレーするとして、 $n = 6$ とする。 m はわかっていなくて、1 から 6 までの値をとる可能性がある。このとき、先手のプレイヤーが負ける率を計算するには、2 つの考え方があ

(1) $P(m = k) = \frac{1}{6}$ とする。すなわち m はわかっていなくて、1 から 6 までの値を同じ確率でとる。

この定義の場合は、先手のプレイヤーが負ける確率は既に、計算したとおりで、

$$E(2, 6, 1, 1) = F(2, 6, 1, 1) \times \frac{1}{6} + \dots + F(2, 6, 6, 1) \times \frac{1}{6}.$$

(2) m はわかっていないので、1 から 6 までの値をとる可能性がある。

箱に m 枚のカードを入れる方法は、

$${}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5 + {}_6C_6 = 2^6 - 1 \text{ 通りある.}$$

先手のプレイヤーが負けるのは、

$$U(2, 6, 1, 1) + U(2, 6, 2, 1) + U(2, 6, 3, 1) + U(1, 6, 4, 1) + U(1, 6, 5, 1) + U(1, 6, 6, 1)$$

通りである。

$2^6 - 1$ 通りの入れ方の1つ1つが、すべて同じ確率を持つとすると、先手のプレイヤーが負ける確率は

$$\frac{U(2,6,1,1)+U(2,6,2,1)+U(2,6,3,1)+U(1,6,4,1)+U(1,6,5,1)+U(1,6,6,1)}{{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6} = \frac{A_{2,1}(6)}{2^6-1}. \text{ となる.}$$

(2)の方法は、 m がわかっていない場合の確率の、新しい計算方法となる。重要なことはこの確率の分子が、高校生たちが始めた、数字を水平に足すことに対応することである。

このことにより、水平に数字を足すということが組み合わせ論的に意味を持つことになった。

一般的に、 p 人、 n 枚、(あるいは、ロシアンルーレットならシリンダー数)、 v 番目の場合を定義する。

m 枚のカードを n 枚のカードに含ませるやり方は
 $nC_1 + nC_2 + nC_3 + \dots + nC_n = 2^n - 1$ 通りあり、
 v 番目のプレイヤーが負けるのは、
 $U(p, n, 1, v) + U(p, n, 2, v) + U(p, n, 3, v) + \dots + U(p, n, n, v)$ 通りあり、
 その1つ1つが同じ確率であるときの、プレイヤーの負ける確率を $E3(p, n, v)$ とすると、

$$E3(p, n, v) = \frac{U(p, n, 1, v) + U(p, n, 2, v) + U(p, n, 3, v) + \dots + U(p, n, n, v)}{{}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n} = \frac{A_{p,v}(n)}{2^n - 1}.$$

定理 12. $n \equiv 0 \pmod{p}$ とすると、 $E3(p, n, 1) = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1}$

証明. $n \equiv 0 \pmod{p}$ とすると、 $A_{p,1}(n) = \frac{2^{n+p-1} - 2^{\text{mod}(n-1,p)}}{2^p - 1}$

$$= \frac{2^{n+p-1} - 2^{p-1}}{2^p - 1} = \frac{(2^n - 1)2^{p-1}}{2^p - 1}.$$

$$E3(p, n, 1) = \frac{A_{p,1}(n)}{2^n - 1} = \frac{(2^n - 1)2^{p-1}}{2^p - 1} / (2^n - 1) = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1}.$$

例 17. $p = 3, v = 1$ とすると、 $n \equiv 0 \pmod{3}$ ならば、 $E3(p, n, 1) = \frac{4}{7}$ となる。これは、非常に簡単な数になる!

注意. $E(p, n, 1)$ の場合は、極限をとった場合だけ簡単な値が出てきた。ここで定義した確率と比べてみると、違いが面白い。

2.9 パスカルの三角形から作られる数列 2

パスカルの三角形に似た数字のリストを、水平に足すことによって面白い結果を得ることができたので、宮寺は、他にも面白いことができないかと考えた。

宮寺自身は、数学の研究の経験があるのだが、研究において、アイデアを出すことが一番難しかった。しかし、生徒たちと一緒に研究しているうちに、ふとうまいアイデアが出るというような経験を何度もするようになった。

ある意味では、生徒との研究によって、宮寺の発想力自体が豊かになってきたと言えるのかもしれない。

研究に参加した高校1年生は知らなかったが、パスカルの三角形に現れる数字を斜めに足すことによってフィボナッチ数列が作られる。宮寺は、そのことを知っていたので、Figure (5) などの三角形の数のリストにおいて、数字を斜めに足すことを行なった。このような操作によって、次のような数列が作られた。

例 18. Figure (28) の場合ならば、

1, 1, 2+1=3, 2+2=4, 3+4+1=8, 3+6+3=12, 4+9+7+1=21, ...

となり、

1,1,3,4,8,12,21,... という数列が得られる。Figure (29) の場合ならば、

1, 1, 1+1=2, 2+2=4, 2+3+1=6, 2+5+3=10, 3+7+6+1=17,...

となり、

1,1,2,4,6,10,17,... という数列が得られる。

これらの数列は、2項の和が次の項に等しくなる場合と、2項の和に1を足す場合が組み合わされたもので、フィボナッチ数列に似ている。

例 18 を一般化して、数列 $B_p(n)$ を次のように定義する。ここで、正の数 x に対して、 $\text{Floor}[x]$ は、 x の小数部分を切り捨ててできる整数を表す。

$$B_{p,v}(n) = \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-1)/2]} U(p, n-k, k+1, v).$$

例 19. $\text{Floor}[(5-1)/2] = 2$ であるから、 $B_{2,1}(5) = \sum_{k=0}^2 U(2, 5-k, k+1, 1) = 3 + 4 + 1 = 8$ となる。ここで足しているのは太字になっている数である。

Figure (30)

1
1, 1
2, 2, 1
2, 4, 3, 1
3, 6, 7, 4, 1
3, 9, 13, 11, 5, 1
4, 12, 22, 24, 16, 6, 1

ここで、補題と定理が続くが、それらは、例 18 で見たような性質が一般的に

成立つことを示すためである。

補題 10. $v > 1$ とする.

(1) $n \geq v$ に対して、 $B_{p,v}(n) = B_{p,v-1}(n-1)$.

(2) $n < v$ に対して、 $B_{p,v}(n) = 0$.

証明. (1) まず、 n が偶数であると仮定する. $t = \text{Floor}[(n-1)/2] = \text{Floor}[(n-2)/2] = (n-2)/2$ であるから、

$$B_{p,v}(n) = U(p, n, 1, v) + U(p, n-1, 2, v) + U(p, n-2, 3, v) + \dots + U(p, n-t, t+1, v)$$

かつ

$$B_{p,v-1}(n-1) = U(p, n-1, 1, v-1) + U(p, n-2, 2, v-1) + U(p, n-3, 3, v-1) + \dots + U(p, n-t-1, t+1, v-1) \text{ となる.}$$

したがって、

補題 8 により、 $B_{p,v}(n) = B_{p,v-1}(n-1)$.

次に、 n を奇数と仮定する.

$t = \text{Floor}[(n-1)/2] = \text{Floor}[(n-2)/2] + 1 = (n-1)/2$ であるから、

$$B_{p,v}(n) = U(p, n, 1, v) + U(p, n-1, 2, v) + U(p, n-2, 3, v) + \dots + U(p, n-t, t+1, v)$$

かつ

$$B_{p,v-1}(n-1) = U(p, n-1, 1, v-1) + U(p, n-2, 2, v-1) + U(p, n-3, 3, v-1) + \dots + U(p, n-t, t, v-1).$$

ここで、補題 8 により $k = 1, 2, \dots, t$ に対して、 $B_{p,v}(n)$ の第 k 項と、 $B_{p,v-1}(n-1)$ の第 k 項が等しい.

$B_{p,v}(n)$ の第 $t+1$ 項については、

$$U(p, n-t, t+1, v) = U(p, t+1, t+1, v) = 0 \text{ となるので、}$$

$B_{p,v}(n) = B_{p,v-1}(n-1)$ となる.

(2) $n < v$ ならば、補題 4 と $B_{p,v}(n)$ の定義により、 $B_{p,v}(n) = 0$.

補題 11. $\text{Floor}[\frac{n-v}{p}] - \text{Floor}[\frac{n-v-1}{p}] = \text{Floor}[\frac{(p-\text{mod}[n-v,p])}{p}]$

証明.

ある数 k に対して、 $n-v = pk$ と仮定すると、 $\text{Floor}[\frac{n-v}{p}] = k$ と $\text{Floor}[\frac{n-v-1}{p}] = k-1$ と $\text{Floor}[\frac{(p-\text{mod}[n-v,p])}{p}] = 1$ が成立ち、証明が終わる.

$p(k-1) < n-v < pk$ と仮定すると、 $\text{Floor}[\frac{n-v}{p}] = k-1$ と $\text{Floor}[\frac{n-v-1}{p}] = k-1$ と $\text{Floor}[\frac{(p-\text{mod}[n-v,p])}{p}] = 0$ がなりたち、証明が終わる.

定理 13. $B_{p,v}(n) = B_{p,v}(n-1) + B_{p,v}(n-2) + \text{Floor}[\frac{(p-\text{mod}[n-v,p])}{p}]$

証明. n が偶数であると仮定する. $B_{p,v}(n) = \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-1)/2]} U(p, n-k, k+1, v) = U(p, n, 1, v) + U(p, n-1, 2, v) + U(p, n-2, 3, v) + \dots + U(p, n-t, t+1, v),$

ここで $t = (n - 2)/2$.

$$\begin{aligned} B_{p,v}(n-1) &= \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-2)/2]} U(p, n-1-k, k+1, v) \\ &= U(p, n-1, 1, v) + U(p, n-2, 2, v) + U(p, n-3, 3, v) + \dots + U(p, n-1-t, t+1, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{p,v}(n-2) &= \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-3)/2]} U(p, n-1-k, k+1, v) \\ &= U(p, n-2, 1, v) + U(p, n-3, 2, v) + U(p, n-4, 3, v) + \dots + U(p, n-1-t, t, v). \end{aligned}$$

定理 4 により、

$$U(p, n-k, k+1, v) = U(p, n-1-k, k+1, v) + U(p, n-1-k, k, v) \text{ が } k = 1, 2, \dots, t \text{ に対して成立つ.}$$

したがって、 $B_{p,v}(n)$ の右辺の第 2 項から第 $t+1$ 項までの和は、 $B_{p,v}(n-1)$ の右辺の第 2 項から第 $t+1$ 項と、 $B_{p,v}(n-2)$ の第 1 項から第 t 項までを全て足した和に等しい。あとは、 $B_{p,v}(n)$ と $B_{p,v}(n-1)$ のそれぞれの第 1 項を比べればよい。

$$\text{補題 4 により、 } U(p, n, 1, v) = \text{Floor}[\frac{n-v}{p}] + 1 \text{ かつ } U(p, n-1, 1, v) = \text{Floor}[\frac{n-v-1}{p}] + 1$$

となり、したがって補題 11 により

$$\begin{aligned} &U(p, n, 1, v) - U(p, n-1, 1, v) \\ &= \text{Floor}[\frac{n-v}{p}] - \text{Floor}[\frac{n-v-1}{p}]. \\ &= \text{Floor}[\frac{(p - \text{mod}[n-v, p])}{p}] \text{ であるから、証明を終えることができる.} \end{aligned}$$

n が奇数であると仮定する。

$$\begin{aligned} B_{p,v}(n) &= \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-1)/2]} U(p, n-k, k+1, v) \\ &= U(p, n, 1, v) + U(p, n-1, 2, v) + U(p, n-2, 3, v) + \dots + U(p, n-t+1, t, v) + \\ &U(p, n-t, t+1, v), \text{ ここで } t = (n-1)/2 \text{ である.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{p,v}(n-1) &= \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-2)/2]} U(p, n-1-k, k+1, v) \\ &= U(p, n-1, 1, v) + U(p, n-2, 2, v) + U(p, n-3, 3, v) + \dots + U(p, n-t, t, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{p,v}(n-2) &= \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-3)/2]} U(p, n-1-k, k+1, v) \\ &= U(p, n-2, 1, v) + U(p, n-3, 2, v) + \dots + U(p, n-t, t-1, v) + \\ &U(p, n-1-t, t, v). \end{aligned}$$

定理 4 により、 $U(p, n-k, k+1, v) = U(p, n-1-k, k+1, v) + U(p, n-1-k, k, v)$ が $k = 1, 2, \dots, t-1$ に対して成立つ。

したがって、 $B_{p,v}(n)$ の右辺の第 2 項から第 t 項までの和は、 $B_{p,v}(n-1)$ の右辺の第 2 項から第 t 項と、 $B_{p,v}(n-2)$ の第 1 項から第 $t-1$ 項までを全て足した和に等しい。あとは、 $B_{p,v}(n)$ の第 1 項、第 $t+1$ 項と $B_{p,v}(n-1)$ の第 1 項と $B_{p,v}(n-2)$ の第 t 項を比べればよい。

$$\text{補題 4 により、 } U(p, n, 1, v) = \text{Floor}[\frac{n-v}{p}] + 1, U(p, n-1, 1, v) = \text{Floor}[\frac{n-v-1}{p}] + 1$$

かつ $U(p, n-1-t, t, v) = U(p, n-t, t+1, v)$.

あとは、補題 11 を使って、 n が偶数である場合と同様にすればよい。

定理 14. $B_{p,v}(m) = B_{p,v}(m-1) + B_{p,v}(m-2) + B_{p,v}(m-p) - B_{p,v}(m-p-1) - B_{p,v}(m-p-2)$ が $1 \leq p < m-2$ を満たす任意の自然数 m, p に対して成立つ。

証明. 定理 12 を $n = m$ と $n = m-p$ に対して使うことによって、この定理を証明することができる。

2.10 $B_{p,v}(n)$ をフィボナッチ数列 $F(n)$ で表すこと.

補題 10 により、 $\{B_{p,v}(n), n = 1, 2, \dots\}$ は $v \leq p$ を満たすような、 v の異なる値に対しても、最初の連続する項を無視すれば、本質的には同じである。したがって、これ以降は、 $v = 1$ の場合のみについて、 $B_{p,v}(n)$ を研究する。書き方を簡単にするために、 $B_{p,1}(n)$ を $B_p(n)$ で表す。

例 20. フィボナッチ数列 $F(n)$ とフィボナッチ数列に似た数列 $B_p(n)$ を比べてみる。

(1) $F(n)$

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610}

(2) $p = 2$ のときの、 $B_p(n)$

{1, 1, 3, 4, 8, 12, 21, 33, 55, 88, 144, 232, 377, 609, 987}

(3) $p = 3$ のときの、 $B_p(n)$

{1, 1, 2, 4, 6, 10, 17, 27, 44, 72, 116, 188, 305, 493, 798}

(4) $p = 4$ のときの、 $B_p(n)$

1, 1, 2, 3, 6, 9, 15, 24, 40, 64, 104, 168, 273, 441, 714

数列 $B_2(n)$ と数列 $B_3(n)$ が、フィボナッチ数列とどのような関係を持っているかについては、既に研究されており次のような公式が発見されている。

$B_2(n)$ の公式.

n を自然数とするとき、

$$B_2(2n-1) = F(2n) \text{ かつ } B_2(2n) = F(2n+1) - 1.$$

$B_3(n)$ の公式.

n を自然数とするとき、

$$2B_3(3n-2) = F(3n), 2B_3(3n-1)+1 = F(3n+1), 2B_3(3n)+1 = F(3n+2).$$

しかし、よく見るとこの2つの公式は誰が見てもすぐにわかるようなものである。ところが、 $B_p(n)$ において、 p が4以上である場合は殆ど何も知られていなかった。

私たちは、数列 $B_4(n)$ とフィボナッチ数列の関係を見つけることを次の目標にした。

ここで、 $B_4(n)$ の性質を書き出しておく。

また、 $B_5(n)$ についても研究するので、 $B_5(n)$ の性質も書き出しておく。

補題 12. 数列 $B_4(n)$ は次の式を満たす。

$$B_4(1) = B_4(2) = 1 \quad \text{かつ、}$$

$n \geq 3$ に対して、

$$B_4(n) = B_4(n-1) + B_4(n-2) + \begin{cases} 1 & (n \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき}) \\ 0 & (n \not\equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき}). \end{cases}$$

補題 12. $B_5(1) = B_5(2) = 1$ かつ、

$$B_5(n) = B_5(n-1) + B_5(n-2) + \begin{cases} 1 & (n \equiv 1 \pmod{5}) \\ 0 & (n \not\equiv 1 \pmod{5}) \end{cases}.$$

証明は定理 13 から明らか。

証明は定理 13 により明らかである。

この数列 B_4 は、

$\{1, 1, 2, 3, 6, 9, 15, 24, 40, 64, 104, 168, 273, 441, 714, 1155, 1870, 3025, 4895, 7920, \dots\}$
となる。

この数列に対して、普通のフィボナッチ数列 $F(n)$ は、

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots\}$ となる。

この2つの数列を並べて印刷し、有志の生徒 30 人に配り、この2つの数列の関係を探してもらった。しかし、3週間以上を経ても、発見は何もなかった。

宮寺は、公式の発見は無理かもしれないと考え始めていた。数列 $B_2(n)$ と数列 $B_3(n)$ についてのみ公式があって、 p が 4 以上 $B_p(n)$ において、発見されていなかったから、チャンスだと考えたのだが、既にいろんな人が試みているはずだから、公式は存在しないかもしれない。あるいは、存在しても発見が非常に困難であるかもしれない。

そう考えた宮寺は、まだ諦めずに探していた松井に、中止するように言った。しかし彼は探し続けて、一週間後にある事実気がついた。

それは、 $B_4(2) = 1, B_4(6) = 9, B_4(10) = 64, B_4(14) = 441 \dots$ というふう
に、 $4n+2$ 番目の項が平方数になるということである。

そして、これらの項の平方根をとると、 $1, 3, 8, 21, \dots$ となり、これはフィボナッチ数列 $F(n)$ の偶数項である。

こうして、松井によって、 $B_4(4n+2) = F(2n+2)^2$ という公式が発見された。宮寺はこの公式の発見を非常に喜んだ。なぜなら、 $B_4(n)$ の性質を考えると、 $4n+2$ 項を表すことができたなら、他の項も表すことができるからである。

こうして、宮寺が次のような公式にまとめた。

$$\begin{aligned} B_4(4n+2) &= F(2n+2)^2 \\ B_4(4n+3) &= \frac{F(2n+4)^2 - 2F(2n+2)^2 - 1}{3} \\ B_4(4n+4) &= \frac{F(2n+4)^2 + F(2n+2)^2 - 1}{3} \\ B_4(4n+5) &= \frac{2F(2n+4)^2 - F(2n+2)^2 + 1}{3} \end{aligned}$$

発見の翌日の授業で、松井の公式を紹介した。宮寺はこれで公式の発見は終わったと考えていた。ところが、生徒たちは松井の発見に刺激されたようで、5分も立たないうちに、斉田、川田、桜間によって別の公式が提出された。

この3人が見つけた公式は、松井の公式をヒントにしているから、松井の貢献が一番大きいと言えるだろう。しかし、松井自身も一つの公式を見つけたとき、それで終わったと考えていたのである。宮寺が発見が終わった話しているときに、自分の目で公式を探した3人の貢献は大きい。

松井は、約一ヶ月考えたのだが、少し考えては、しばらく放っておくという方法を使った。これは、数学で研究するときに、数学者がよく使うやり方である。

このような経験を続けて、成果を得るということは素晴らしい。

結局、4人の公式を合わせると、次の定理ができる。この定理15の方が、宮寺のまとめた公式よりもはるかに美しい。あとで説明するように、定理からは次の不思議な公式が生まれる。

この定理と公式は、フィボナッチ数列の研究専門誌 *Fibonacci Quarterly* に [17] として、掲載が決まっている。

定理 15. 数列 $B_4(n)$ とフィボナッチ数列 $F(n)$ の間には、次の公式が成立する.

$$B_4(4n) = F(2n)F(2n+2) = F(2n+1)^2 - 1 \quad (\text{a})$$

$$B_4(4n+1) = F(2n+1)F(2n+2) \quad (\text{b})$$

$$B_4(4n+2) = F(2n+2)^2 \quad (\text{c})$$

$$B_4(4n+3) = F(2n+2)F(2n+3) \quad (\text{d})$$

証明. ここでフィボナッチ数列の理論においてよく知られている次の公式を使う.

$$F(n+1)F(n-1) - F(n)^2 = (-1)^n. \quad (1)$$

定理の (a) の後半の

$F(2n)F(2n+2) = F(2n+1)^2 - 1$ は (1) からすぐに出る.

残りを証明するために、数学的帰納法を使う. まず、(a),(b),(c),(d) が $n = k$ に対して正しいと仮定する.

(c), (d) を $n = k$ の場合に使うと、補題 12 とフィボナッチ数列の性質により、

$$\begin{aligned} & B_4(4k+4) \\ &= B_4(4k+3) + B_4(4k+2) \\ &= F(2k+2)F(2k+3) + F(2k+2)^2 \\ &= F(2n+2)(F(2n+3) + F(2n+2)) = F(2n+2)F(2n+4). \end{aligned}$$

したがって、(a) は $n = k+1$ の場合について証明された.

(a) を $n = k+1$ の場合に使い、(d) を $n = k$ の場合に使うと、補題 12 とフィボナッチ数列の性質により、

$$\begin{aligned} B_4(4k+5) &= B_4(4k+4) + B_4(4k+3) + 1 \\ &= F(2k+2)F(2k+4) + F(2k+2)F(2k+3) + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

(1) を $n = 2k+3$ の場合に使うと、

$$\begin{aligned} (2) &= F(2k+3)F(2k+3) + F(2k+2)F(2k+3) \\ &= (F(2k+3) + F(2k+2))F(2k+3) = F(2k+3)F(2k+4). \end{aligned}$$

したがって (b) は $n = k+1$ の場合について証明された.

(a), (b) を $n = k+1$ の場合に使うと、補題 12 とフィボナッチ数列の性質により、

$$\begin{aligned} & B_4(4k+6) \\ &= B_4(4k+5) + B_4(4k+4) \\ &= F(2k+3)F(2k+4) + F(2k+2)F(2k+4) \\ &= (F(2k+3) + F(2k+2))F(2k+4) = F(2k+4)^2. \end{aligned}$$

したがって (c) は $n = k + 1$ の場合に証明された.

(b), (c) を $n = k + 1$ の場合に使うと、補題 12 とフィボナッチ数列の性質により、

$$\begin{aligned} & B_4(4k + 7) \\ &= B_4(4k + 6) + B_4(4k + 5) \\ &= F(2k + 4)^2 + B_4(2k + 3)F(2k + 4) \\ &= F(2k + 4)(F(2k + 3) + F(2k + 4)) = F(2k + 4)F(2k + 5). \end{aligned}$$

(d) は $n = k + 1$ の場合に証明された. したがって、この定理の証明は終わる.

上の定理から、すぐに次のような美しい関係式ができる. これは不思議な公式である. フィボナッチ数列と、フィボナッチに似た (しかし構造は異なる) 数列において、2 項の比が等しくなるのである.

定理 16.

$$\begin{aligned} \frac{B_4(4n + 1)}{B_4(4n)} &= \frac{F(2n + 1)}{F(2n)} \\ \frac{B_4(4n + 2)}{B_4(4n + 1)} &= \frac{F(2n + 2)}{F(2n + 1)} \\ \frac{B_4(4n + 3)}{B_4(4n + 2)} &= \frac{F(2n + 3)}{F(2n + 2)} \\ \frac{B_4(4n + 4)}{B_4(4n + 3)} &= \frac{F(2n + 4)}{F(2n + 3)} \end{aligned}$$

証明は、定理 15 を使って 2 項の比を作ればよい.

フィボナッチ数列では、隣合う項の比の極限值が黄金比 α となることはよく知られているが、私たちの数列 $B_4(n)$ も同じ性質を持つ.

定理 17.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_4(n + 1)}{B_4(n)} = \alpha$$

証明は、よく知られたフィボナッチ数列の公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n + 1)}{F(n)} = \alpha$$

と、定理 16 からすぐに導かれる.

注意. ここでも高校生の新鮮なアイデアが生きた. また、宮寺が無理だと思っ

て、研究の中止を決めたにも関わらず、松井が興味を持ち続けたことはすばらしい。

宮寺は、自分では法則を見つけることができなかつたが、松井の発見を知ったとき、公式は完成したと考えて、生徒に発表した。しかし、生徒たちはそこで終わらずに、松井の発見にヒントを得て、別の公式を見つけ、結果的に宮寺がまとめた公式よりも良い、定理 15 を作った。

これらの数列は、フィボナッチ数列に似た数列であるが、フィボナッチ数列が持っている性質を共有している場合と、全く違う場合があり、これからの研究の発展が期待できる。何か新しい性質に気がつくと、すぐに数式処理システムで小さなプログラムを作り、計算結果を検討するということが続いている。

松井、桜間、斉田、川田が $B_4(n)$ の公式を見つけてから、松井と山内は $B_5(n)$ の公式を探し始めた。その間に、宮寺は $B_4(n)$ の公式を拡張することを試みた。

$$\text{定理 18. } 11B_5(5n-4) - F(5n+1) - F(5n-4) = 2 \quad \dots(a)$$

$$11B_5(5n-3) - F(5n+2) - F(5n-3) = -3 \quad \dots(b)$$

$$11B_5(5n-2) - F(5n+3) - F(5n-2) = -1 \quad \dots(c)$$

$$11B_5(5n-1) - F(5n+4) - F(5n-1) = -4 \quad \dots(d)$$

$$11B_5(5n) - F(5n+5) - F(5n) = -5 \quad \dots(e).$$

証明. 数学的帰納法を用いて証明する.

$$B_5(n) = 1, 1, 2, 3, 5, 9, 14, 23, 37, 60, \dots$$

かつ、 $F(n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ であるから、次の式が成立する。

$$11B_5(1) - F(6) - F(1) = 2$$

$$11B_5(2) - F(7) - F(2) = -3$$

$$11B_5(3) - F(8) - F(3) = -1$$

$$11B_5(4) - F(9) - F(4) = -4$$

$$11B_5(5) - F(10) - F(5) = -5$$

したがって、(a), (b), (c), (d), (e) は $n = 1$ については正しい。

次に、(a), (b), (c), (d), (e) が $n = k$ の場合に正しいと仮定し、 $n = k + 1$ の場合について証明する。 $n = k$ の場合について、(d) と (e) を使い、補題 12 とフィボナッチ数列の性質を使うと、

$$\begin{aligned} 11B_5(5k+1) &= 11(B_5(5k) + B_5(5k-1) + 1) = (F(5k+5) + F(5k) - 5) \\ &+ (F(5k+4) + F(5k-1) - 4) + 11 \\ &= F(5k+6) + F(5k+1) + 2. \end{aligned}$$

したがって、 $n = k + 1$ の場合に (a) を証明した。

$$\begin{aligned} n = k \text{ の場合に (e) を、 } n = k + 1 \text{ の場合に (a) を使い、補題 12 とフィボナッチ数列の性質を使うと、} \\ 11B_5(5k+2) &= 11(B_5(5k+1) + B_5(5k)) \\ &= (F(5k+6) + F(5k+1) + 2) + (F(5k+5) + F(5k) - 5) \end{aligned}$$

$$= F(5k+7) + F(5k+2) - 3.$$

したがって、 $n = k + 1$ の場合に (b) を証明した。

(c), (d), (e) の場合も同じようすると、次の3つの式を得る。

$$11B_5(5k+3) = 11(B_5(5k+2) + B_5(5k+1)) = (F(5k+7) + F(5k+2) - 3) + (F(5k+6) + F(5k+1) + 2)$$

$$= F(5k+8) + F(5k+3) - 1.$$

$$11B_5(5k+4) = 11(B_5(5k+3) + B_5(5k+2)) = (F(5k+8) + F(5k+3) - 1) + (F(5k+7) + F(5k+2) - 3)$$

$$= F(5k+9) + F(5k+4) - 4.$$

$$11B_5(5k+5) = 11(B_5(5k+4) + B_5(5k+3)) = (F(5k+9) + F(5k+4) - 4) + (F(5k+8) + F(5k+3) - 1)$$

$$= F(5k+10) + F(5k+5) - 5.$$

このようにして、(a), (b), (c), (d), (e) を $n = k + 1$ の場合について証明することができた。

注意 1. $2 = (-4) + (-5) \pmod{11}$, $-3 = -5 + 2 \pmod{11}$, $-1 = 2 + (-3) \pmod{11}$, $-4 = (-3) + (-1) \pmod{11}$ and $-5 = (-1) + (-4) \pmod{11}$ となる。したがって、 $\{2, -3, -1, -4, -5\}$ は $\pmod{11}$ に関してフィボナッチ数列の性質を持つ。

定理 19. $B_5(n+5) - B_5(n) = F(n+5) \dots (f)$

証明. 数学的帰納法を使って証明する。まず、 $n = 1$ の場合は、 $B_5(6) - B_5(1) = 9 - 1 = 8 = F(6)$ であるので、正しい。

次に (f) が $n = k$ の場合も正しいと仮定する。すると、補題 13 の性質により、

$$B_5(k+6) - B_5(k+1) =$$

$$B_5(k+5) + B_5(k+4) + \begin{pmatrix} 1 & (k+6 = 1 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ 0 & (k+6 \neq 1 \pmod{5} \text{ のとき}) \end{pmatrix} - (B_5(k) -$$

$$B_5(k-1) + \begin{pmatrix} 1 & (k+1 = 1 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ 0 & (k+1 \neq 1 \pmod{5} \text{ のとき}) \end{pmatrix})$$

$$= (B_5(k+5) - B_5(k)) + (B_5(k+4) - B_5(k-1)) =$$

$F(k+5) + F(k+4) = F(k+6)$, ただし、ここで $k+6 = k+1 \pmod{5}$ という事実を使っている。

この公式は、榮口と黄が見つけた。見つけるのはそれほど難しくないとと思われるが、このようにいろんな生徒によって、新しい公式が発見されるという事は非常に重要である。

注意. 公式の重要性について少し考える。公式 (a), (b), (c), (d), (e) は (f) よりも重要である。理由は、(a), (b), (c), (d), (e) を使うと、 $F(n)$ を計算するだけで、 $B_5(n)$ の値を求めることができるからである。

松井と山内はもっと一般的に通用する公式を発見した。

この結果を説明するために、私たちはまず、フィボナッチ数列を少し拡張する。

$F(-2) = -1, F(-1) = 1, F(0) = 0$ かつ $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ とする。この数列において、 n が自然数ならば、 $F(n)$ は普通のフィボナッチ数列である。

定理 20. p を偶数とすると、 $B_p(n) = (F(n+p) - F(n) + F(\text{Mod}(n,p) - 2)(F(p-1) - 1) - F(\text{Mod}(n,p) - 1)(F(p-2) + 1)) / (2F(p+1) - F(p) - 2)$

この定理の証明は既に終わっているが、まだまとめるに至っていない。なお、証明は $B_5(n)$ の場合に近い。

定理 15 の結果を拡張することを試みた宮寺は、すぐに完成することができた。

このような拡張も、生徒に任せることは可能であったが、生徒たちが発見する事実があまりに多いので、証明が追いつかない。したがって、宮寺が担当した。

このフィボナッチ数列に似た数列の研究に関しては、一度公式を発見してしまふと、後は数学的帰納法で証明が完成するものが多い。そして手間を書けさえすれば良い。

定理 21.

$B_{2^t}(n)$ と $F(n)$ との間には、次の関係式が成立つ。

$$B_{2^t}(2^t m) = \frac{F(2^{t-1}m + 2^{t-1})F(2^{t-1}m)}{F(2^{t-1})} \dots (1.1)$$

$$B_{2^t}(2^t m + 1) = \frac{F(2^{t-1}m + 2^{t-1})F(2^{t-1}m + 1)}{F(2^{t-1})} \dots (1.2)$$

$$B_{2^t}(2^t m + 2) = \frac{F(2^{t-1}m + 2^{t-1})F(2^{t-1}m + 2)}{F(2^{t-1})} \dots (1.3)$$

.....

$$B_{2^t}(2^t m + 2^t - 1) = \frac{F(2^{t-1}m + 2^{t-1})F(2^{t-1}m + 2^t - 1)}{F(2^{t-1})} \dots (1.2^t - 1)$$

証明は略する。ただし、本質的には定理 15 の証明と同じである。

定理 22.

$B_{2^t}(n)$ と $F(n)$ との間には、次の比例式が成立つ。

$$\frac{B_{2^t}(2^t m + 1)}{B_{2^t}(2^t m)} = \frac{F(2^{t-1} m + 1)}{F(2^{t-1} m)}$$

$$\frac{B_{2^t}(2^t m + 2)}{B_{2^t}(2^t m + 1)} = \frac{F(2^{t-1} m + 2)}{F(2^{t-1} m + 1)}$$

.....

$$\frac{B_{2^t}(2^t m + 2^t - 1)}{B_{2^t}(2^t m + 2^t - 2)} = \frac{F(2^{t-1} m + 1 + 2^t - 1)}{F(2^{t-1} m + 2^t - 2)}$$

この定理 21 と 22 を見ると、定理 15 の公式を見つけたことの重要性がわかる。そして、この定理を発見したから、きれいな比例式である定理 22 まで発展したのである。

Open problems. フィボナッチ数列と、私たちが発見したフィボナッチ数列に似た数列の関係はまだ研究の余地がある。

また、定理 22 は、少し形を変えると、一般の p について、 $B_p(n)$ に当てはまるようである。ただし、比例が等しくなる項とそうでない項が混じっているので、証明が難しいと思われる。私たちの研究方法は、数式処理システムで実験することから始まるので、予想を作ることは容易で、証明すべきことがたくさん残っている場合が多い。

2.11 循環数の平方根の作る数列

ここで紹介する興味深い数列は平方根を使った数遊びから生まれた。近藤、池田がルートの中にいろんなタイプの循環した数を入れて見たところ面白い数が出てくることに気がついた。同じクラスにいた堺谷、広富、尾崎、田中も興味を持ち一緒に調べ、いろいろな例が見つかった。その後、橋場論と峰松によっていろんな場合が見つけた。現在著者たちの研究は続いているが、多くの興味深い例が発見されているが、それらをまとめるような理論は作られていない。したがって、以下においては全て例をあげて説明するという方法をとる。

以下において、分類番号を与えて、登録されていると書いている場合は、Online の数列百科事典 [23] のことを意味する。

$$\sqrt{999999999999999999} = 9\sqrt{12345679012345679}$$

これが最初に発見されたものである。この数列 1,2,3,4,5,6,7,9,0,1,2,3,4,5,6,7,9 は既に発見されていて、“The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” に分類番号 A021085 として収録されている。ここでは、 $\frac{1}{81}$ を小数展開したときに出現する数列として紹介されている。小数展開は次のようになるが、循環数の平方根によって作られる数列と、分数の小数展開から作られる数列が同じものになることは興味深い。

$\frac{1}{81} = 0.012345679012345679012345679\dots$ これ以後は、峰松と橋場諭によってどんどん新しいタイプの数列が見つかった。

$$\begin{aligned} & \sqrt{16161616161616161616161616161616} \\ & = 12\sqrt{1122334455667789001122334455667789} \end{aligned}$$

この数列 1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,9,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,9 は既に発見されていて、“The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” に分類番号 A021895 として収録されている。ここでは、 $\frac{1}{891}$ を小数展開したときに出現する数列として紹介されている。小数展開は次のようになる。

$$\frac{1}{891} = 0.001122334455667789001122334455667789001122\dots$$

上の数列では同じ数が 2 回ずつ出てくるが、3 回ずつ出てくるものを作ることでもできた。

$$\begin{aligned} & \sqrt{256256256256256256256256256256256256256256256256256256256} \\ & = 48\sqrt{111222333444555666777889000111222333444555666777889} \end{aligned}$$

この数列を“The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”で探したが、収録されていなかった。著者たちはこの数列を登録した。分類番号 A113675 となっている。この数列を作り出すような分数も探してみた。上の 2 つの数列の場合から類推して、8991 を見つけるまでにはあまり時間はかからなかった。

$$\frac{1}{8991} = 0.0001112223334445556667778890001112223334446\dots$$

次は少し違ったタイプの数列である。

$$\begin{aligned} & \sqrt{128128128128128128128128128128128128128128128128128128128} \\ & = 24\sqrt{222444666889111333555778000222444666889111333555778} \end{aligned}$$

この数列を“The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”で探したが、収録されていなかった。著者たちはこの数列を登録した。分類番号 A113694 となっている。この数列を作り出すような分数も探してみた。今回は類推することができなかったのもので、数式処理システムを使って探し、次の分数を見つけた。

$$\frac{10}{44955} = 0.000222444666889111333555778000222444666889111\dots$$

$$= 3\sqrt{10203040506070809102030405}$$

沖永と懸田は次のような例を見つけた。

$$\sqrt{1002003002001}$$

$$= 1001001$$

彼らの発想が面白いのは、それまでの我々の研究が循環する数にばかり目を向けていたのに対して、彼らは根号の中に、循環する数ではなく、別の規則性を持つ数を入れ、きれいな規則性を見つけたことである。このように、全く新しい発想が出てくるのが、高校生による研究の面白さである。

Open problems. 根号と規則的な数字を組み合わせて新しい数列を作るとは、まだまだ可能であると思う。これは数字遊びのようなものだが、非常に面白い。

平方根 $\sqrt{\dots}$ による計算によって出現した数列が、常に $\frac{1}{n}$ の形の分数の小数展開として表すことができるかどうかは、未解決な問題である。また、これらの循環する数と、分数との関係もまだ研究中である。これらの問題は、数学的に重要な問題ではないかもしれないが、数式処理システムを使うとき、高校生や大学の初年級の生徒であっても未知の領域に踏み込むことが可能になるという事実は重要である。

2.12 フォアボールだけを待つことで何点取れるだろうか？

ここで扱うのは、高校生が新しい数学的パズルを作ったケースである。数学的な新しい事実の発見ではないが、ここで紹介するような、数理パズルの拡張ならば、多くの高校生にも容易ではないかと考えられる。本当にちょっとした思いつきから、かなり複雑な問題が出来上がった。

数学の授業で、次のような問題を扱った。

問題 ストライクとボールを半々で投げる投手がいる。打者がバットを振らずに待つとすると、フォアボールを得る確率はどのくらいか。

これは田村三郎と藤村幸三郎が [34] で出した問題であるが、この問題を解いたあとで、この問題を基にして新しい問題を作を試みた。すると、志波と姉川がこの問題を改良して、1 イニングの得点や、1 試合の得点の確率を考え始めた。

2 人は、新しい観点を提案したが、それを具体的に問題に直して計算したのは、松井と山内であった。彼らは次の問題を考えた。

問題 1. チーム B の投手がストライクとボールを同じ確率で投げると仮定

する。このとき、打者がバットを振らずに待つとすると、チーム A が一つの試合で 4 点を取る確率を求めよ。

この問題に対して、宮寺は次の問題を提案した。ここで 4 点にしたのは、計算が簡単過ぎず、難しすぎないようにしたのである。

問題 2. チーム B の投手がストライクを一定の確率 x で投げるとする。ただし、 $0 < x < 1$ とする。1 試合における平均得点が 4 点となるには、ストライクになる確率 x はどのような値であれば良いか？

この問題を解くには、次の 2 つの定理を必要とする。

関数 $strike(x)$ をチーム A の打者が三振する確率とする。

定理 23. $strike(x) = x^3 + {}_3C_1x^3(1-x)^1 + {}_4C_2x^3(1-x)^2 + {}_5C_3x^3(1-x)^3$.

証明. 打者が三振するのは、次の 4 つの場合である。

- (1) 3 ストライクノーボールで三振する場合で、確率は x^3 .
- (2) 3 ストライク 1 ボールで三振する場合で、確率は ${}_3C_1x^3(1-x)^1$
- (3) 3 ストライク 2 ボールで三振する場合で、確率は ${}_4C_2x^3(1-x)^2$
- (4) 3 ストライク 3 ボールで三振する場合で、確率は ${}_5C_3x^3(1-x)^3$

以上の確率をすべて足すと、

$$strike(x) = x^3 + {}_3C_1x^3(1-x)^1 + {}_4C_2x^3(1-x)^2 + {}_5C_3x^3(1-x)^3.$$

これ以後チーム A の打者が三振する確率を p とする。

ストライクとボールの確率だけでなく、三振の確率も文字で表しておいた方が計算が楽になるからである。このようにすると、フォアボールを得る確率は、 $1-p$ となる。

関数 $score1(p, m)$ をチーム A が 1 イニングで m 点を得る確率とする。

$$\text{定理 24. } score1(p, m) = \begin{cases} {}_{5+m}C_2p^3(1-p)^{3+m} & (m > 0) \\ \sum_{h=2}^5 {}_hC_2p^3(1-p)^{h-2} & (m = 0) \end{cases}$$

証明.

(1) まず $m > 0$ とする。すなわちチーム A が m 点を得るとする、

フォアボールで得点するのであるから、いわゆる押し出しを m 回行う必要がある。従って、三振を 3 回する前に、フォアボールを $m+3$ 回得る必要がある。

最後の打者は、三振でイニングを終えるはずだから、それまでの $(m+3)+2 = m+5$ 人の打者の中で、2 人が三振する。

組み合わせの数は、 ${}_{5+m}C_2$ 通りある。最後の打者が 3 振する確率を考えると、それぞれの場合について確率は $p^3(1-p)^{3+m}$ であるから、

$$score1(p, m) = {}_{5+m}C_2p^3(1-p)^{3+m} \text{ となる。}$$

(2) 次に $m = 0$ と仮定する。チーム A が無得点で終わるのは、フォアボールが 3 個以下で、3 つの三振をこうむる場合である。

(2-1) フォアボールを全く得ることなしに、3三振する確率は p^3 .

(2-2) フォアボールを1つ得て、3三振する確率は ${}_3C_1 p^3 (1-p)$.

(2-3) フォアボールを2つ得て、3三振する確率は ${}_4C_2 p^3 (1-p)^2$.

(2-4) フォアボールを3つ得て、3三振する確率は ${}_5C_3 p^3 (1-p)^3$.

以上の確率をすべて足して、 ${}_3C_1 = {}_3C_2$ と ${}_5C_3 = {}_5C_2$ を使うと、

$$\text{score1}(p, m) = \sum_{h=2}^5 {}_hC_2 p^3 (1-p)^{h-2} \quad (m=0).$$

さて、問題1を解いてみる.

定理23により、

$$\text{strike}(x) = x^3 + {}_3C_1 x^3 (1-x)^1 + {}_4C_2 x^3 (1-x)^2 + {}_5C_3 x^3 (1-x)^3.$$

問題1においては、 $x = 1/2$ と仮定するので、三振する確率 $p =$

$$\text{strike}(1/2) = 21/32 \text{ となる. これは既に藤村、田村が得た数字である.}$$

この問題では、4点を得る場合なので、4点をどのように得点するかという場合分けが必要である.

まず自然数4の分割を考える. これには次の5通りの方法がある.

$$\{\{4\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}\}$$

これらの5つの方法は、以下の(a),(b),(c),(d),(e)に対応する.

(a) チームAが1イニングに4得点して、他のイニングには0点の場合を考える. この場合は、9イニング毎に9通りある. 従って確率は $9 \text{score1}(p, 0)^8 \text{score1}(p, 4) = 9 \text{score1}(21/32, 0)^8 \text{score1}(21/32, 4) = 0.0203073$.

(b) チームAがあるイニングに3点を得て、別のイニングに1点得て、それ以外では0点の場合で、 ${}_9P_2 = 72$ 通りある. 従って確率は、 $72 \text{score1}(p, 0)^7 \text{score1}(p, 3) \text{score1}(p, 1) = 72 \text{score1}(21/32, 0)^7 \text{score1}(21/32, 3) \text{score1}(21/32, 1) = 0.0244681$.

(c) チームAがある2つのイニングに2点ずつを得て、他のイニングには0点の場合で、 ${}_9C_2 = 36$ 通りある. 従って確率は $36 \text{score1}(p, 0)^7 \text{score1}(p, 2)^2 = 36 \text{score1}(21/32, 0)^7 \text{score1}(21/32, 2)^2 = 0.0128458$.

(d) チームAがある2つのイニングに1点ずつを得て、別のイニングには2点で、それ以外では0点の場合で、 ${}_9C_2 {}_7C_1 = 252$ 通りある. 従って確率は $252 \text{score1}(p, 0)^6 \text{score1}(p, 2) \text{score1}(p, 1)^2 = 252 \text{score1}(21/32, 0)^6 \text{score1}(21/32, 2) \text{score1}(21/32, 1)^2 = 0.0124375$.

(e) チームAがある4つのイニングに1点ずつを得る場合で、 ${}_9C_4 = 126$ 通りある. 従って確率は $126 \text{score1}(p, 0)^5 \text{score1}(p, 1)^4 = 126 \text{score1}(21/32, 0)^5 \text{score1}(21/32, 1)^4 = 0.000860154$.

(a),(b),(c),(d),(e)の確率をすべて足すと、

$$0.0203073 + 0.0244681 + 0.0128458 + 0.0124375 + 0.000860154 = 0.0709189.$$

従って、問題1の解答は0.0709189である.

問題2について考える.

関数 $score9(p, m)$ は、チーム A が 1 試合 (9 イニング) において、 m 点を得る確率を表す。 $score9(p, m)$ を式で表すとすると、かなり複雑になる。しかし私たちが必要とするのは、 $score9(p, m)$ の平均値である。平均値の性質により $E(score9(p, m)) = 9E(score1(p, m))$ である。したがって問題 2 を解くには、 $score1(p, m)$ の平均値を使えばよい。

定理 25. p を固定するとき $score1(p, m)$ の平均値 $E(score1(p, m))$ は $\frac{3(p-1)^4(1+2p+2p^2)}{p}$ である。

証明.

$$\begin{aligned} E(score1(p, m)) &= \sum_{m=1}^{\infty} m \times score1(p, m) = \sum_{m=1}^{\infty} m_{5+m} C_2 p^3 (1-p)^{3+m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+5)(m+4)}{2} p^3 (1-p)^{3+m} \dots (1) \end{aligned}$$

$\sum_{m=1}^{\infty}$ の計算をやり易くするために、 p を $1-q$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+5)(m+4)}{2} (1-q)^3 q^{3+m} \\ &= q^3 (1-q)^3 \left(\frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^3 q^m}{2} + \frac{9 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^m}{2} + 10 \sum_{m=1}^{\infty} m q^m \right) \\ &= q^3 (1-q)^3 \left(\frac{q+4q^2+q^3}{2(q-1)^4} - \frac{9q(q+1)}{2(q-1)^3} + \frac{10q}{(q-1)^2} \right) \\ &= \frac{3q^4(5-6q+2q^2)}{1-q} \dots (2). \end{aligned}$$

もう一度 q を $1-p$ で置き換えると、

$$(2) = \frac{3(p-1)^4(1+2p+2p^2)}{p} \text{ となる.}$$

なお、このような計算においては Mathematica を使った後で、手計算で証明した。多項式の和、差、積、章などにおいては数式処理システムは信頼できるが、無限級数などにおいては使ったあとで他の方法で確かめるようにしている。

さて、問題 2 を解くことにする。この問題では、 $E(score9(p, m)) = 4$ になるような確率 p を求める。

平均値の性質により、 $E(score9(p, m)) = 9E(score1(p, m)) = 4$ であるから、

$$E(score1(p, m)) = \frac{4}{9} \text{ となる.}$$

定理 25 により、 $E(score1(p, m)) = \frac{3(p-1)^4(1+2p+2p^2)}{p} = \frac{4}{9}$ となる。この方程式は 6 次方程式となるので、代数的には解けない。Mathematica の数値解

法を使って解くと、実数解は $p = 1.40473$ と $p = 0.582619$ である。 $0 < p < 1$ であるから、 $p = 0.582619$ となる。ただし、方程式の数値解法は、ソフトで使われている方法を知らないと、全くのブラックボックスとなってしまう。何をやっているかがわからないので、念のためにこの p の値を代入して、近似解と考えることができることを確かめた。当てはめて、ほぼ正しい答えが出ると、一応納得できる。

次に投手がストライクを投げる確率 x がどんな値を取ればよいかを調べる。すなわち、 $strike(x) = 0.582619$ となる x を求めればよい。定理 1 により、

$$x^3 + 3C_1x^3(1-x)^1 + 4C_2x^3(1-x)^2 + 5C_3x^3(1-x)^3 = 0.582619$$

この方程式も 6 次なので、数値解法を使うと、 $x = 1.35972$ または $x = 0.462019$ となり、 $0 < x < 1$ により、 $x = 0.462019$ となる。従って、投手が確率 $x = 0.462019$ でストライクを投げると、1 試合の平均得点は 4 となる。

振り返ってみて感じることは、パズルを少し変えるだけで、かなり難しい問題になるということ、高校生は新しい問題を作る能力がすぐれているということである。

1 試合での得点が多くなってくると、複雑になるが、Mathematica ならば整数の分割を求める関数を持っている。その関数をうまく使うと、計算はかなり楽になる。

数学においては、拡張するという手法は、一番手っ取り早い研究方法であるが、高校生の場合はパズルを拡張するのは良い研究方法だと思われる。

2.13 高校生 (進んだレベル) に理解できるやり方で円周率を 3000 ケタ以上計算する方法

この問題は河本、森行が宮寺の所へ来て、円周率を自分たちの理解できる方法で計算したみたいと言ったことから始まった。円周率を求めるアルゴリズムはいろいろあるが、高校生が理解できるものはあまりない。多角形で近似していく方法は、理解することは可能だが、角が多くなると計算が非常に複雑になる。

この 2 人は高校 3 年生で、数学のレベルも高かったので、テイラー展開を大学の教科書で勉強して、それを使って、級数によって円周率を求めることにした。テイラー展開については、大学レベルの教科書で自習中心で勉強し、分かりにくい部分は宮寺が説明した。テイラー展開の理論が分かれば、後は繰り返し微分することが必要である。そのためには、Mathematica を使った。計算を数式処理システムに任ずにしても、背景の理論は分かっていると言える。 $\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ を使うことにして、 $\sin^{-1}(x)$ をテイラー展開した。

$$\begin{aligned} & \sin^{-1}(x) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \frac{63x^{11}}{2816} + \frac{231x^{13}}{13312} + \frac{143x^{15}}{10240} + \frac{6435x^{17}}{557056} + \frac{12155x^{19}}{1245184} + 0(x) \end{aligned}$$

上の式に $x = \frac{1}{2}$ を代入すると、3.1415926228706174931... を得る。この値は、円周率として少数第7位まで正しい。この計算のための Mathematica のコマンドは非常に簡単で、次のようになる。ここで、Normal[] という命令をつけることによって、剰余項を省いている。Clear[a, x]; a = Normal[Series[ArcSin[x], x, 0, 20]]; x = 1/2; p = N[a, 100]*6 森行、河本はこのやり方を使って、テイラー展開を 10000 項まで計算し、円周率を 3015 桁まで正しく得た。下の計算を見ると分かるように、Mathematica の関数を使うと、テイラー展開を 10000 項まで求めることも、簡単にできる。

```
Clear[a, x]; a = Normal[ Series[ArcSin[x], x, 0, 10000]]; x = 1/2; p = N[a, 4000]*6
```

正しいかどうかのチェックには、公表されている円周率の値を使った。誤差に関する精密な議論をすれば、公表されている円周率を使わなくても、精度を知ることができるが、ここでは行わなかった。

森行、河本がこの計算をしたのは、6 年以上前であるから、現在の計算機ではもっと多くの桁数を得ることは容易である。ここで説明したことは、新しい数学的事実ではないが、高校生が理解し得る方法で、円周率を求め得るということは、意味のあることだと考える。

2.14 ある累乗反復プロセスの持つ奇妙な性質について。

この研究はまだ雑誌には発表していない。この研究の結果は Mathematica による計算に基づいており、それを別の人々が再計算して確かめることがどうしても必要であるが、まだ実現していないためである。私たちの場合では、Pentium4 の 1.4GHz のノートパソコンを 10 台使って、3 日近くかかった。

雑誌には出ていないものの、興味を持ってくれる人は多くなり、国際的なデータベースにこの研究が引用されている。

この研究の始まりは、2003 年の国際 Mathematica シンポジウムにおいて Robert Cowen 教授から Discovering Mathematics with Mathematica [1] を頂いたことから始まった。教授は、私たちの研究に関心を持ってくれたので、いろいろ話したあとに、教授の著書を頂いたのである。

この中にあった、反復プロセスの問題を高校生に教えた。これは各桁の数字を 3 乗して足すという操作を繰り返していく反復プロセスである。例えば $n = 12$ から始めると、次の数は、 $dcs(12) = 1^3 + 2^3 = 9$ 。その次の数は、 dcs を 2 回作用させて、 $dcs^2(12) = dcs(9) = 9^3 = 729$ 。その次は、3 回作用させて、 $dcs^3(12) = 4dcs^3(9) = dcs(729) = 7^3 + 2^3 + 9^3 = 1080$ となる。これを続けていくのである。

この反復プロセスの概略を教えたあとで、生徒に何か反復プロセスを作ってみるように言った。すると 2 人の生徒が次のような反復プロセスを提案し

た.

定義 6. 反復プロセス dsf を、自然数 n に対して次のように決める.

$dsf(n) = n_1^{n_1} + n_2^{n_2} + n_3^{n_3} \dots + n_m^{n_m}$, ただし $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ は、自然数 n の各位の数である.

すなわち、数字をとり、各ケタの数字をそれぞれの数乗しておいて和を作る.

例 21. $n = 253$ なら、次の数は $dsf(253) = 2^2 + 5^5 + 3^3 = 3156$ となる. 次はこの 3156 から、 $dsf^2(2539) = dsf(3156) = 3^3 + 1^1 + 5^5 + 6^6 = 49809$ となり、 $253 \mapsto 3156 \mapsto 49809 \mapsto \dots$ となる. 0 に対しては、 $0^0 = 1$ と考える. 0 が出てきた場合に、無視するということも可能である. このように決めてもよく似た議論ができるようであるが、研究していない.

例 22. $n = 13$ からはじめて 71 回 dsf を作用させると、次のようになる.

13, 28, 16777220, 2517295, 388250291, 420978083, 421798753, 405848204,
33558331, 16783575, 18477236, 18471246, 17647933, 389114542, 404201375,
827214, 17601024, 870463, 17647699, 776581633, 18520794, 405024635, 53451,
6534, 50064, 50039, 387423643, 17648012, 17647678, 19341414, 387421287,
35201810, 16780376, 18517643, 17650825, 17653671, 1743552, 830081, 33554462,
53476, 873607, 18470986, 421845378, 34381644, 16824695, 404294403, 387421546,
17651084, 17650799, 776537847, 20121452, 3396, 387467199, 793312220, 388244100,
33554978, 405027808, 34381363, 16824237, 17647707, 3341086, 16824184, 33601606,
140025, 3388, 33554486, 16830688, 50424989, 791621836, 405114593, 387427281,
35201810

太字の部分を見ていただきたい. 同じ数 35201810 が、2 回現れている. 従って、このプロセスの定義により、上の数字の列はループになる.

次の定理を証明することは難しくない. ただし、きちんと書くことは簡単ではないかもしれない.

定理 26. $n = 2999999999$ に対しては、 $dsf(n) > n$ であり、 $n \geq 3000000000$ に対しては $dsf(n) < n$ となる.

この定理を次の 5 つの補題によって証明する.

補題 13. $n = 2999999999$ に対して $dsf(n) > n$ となる. 証明. $dsf(n) = 9 \times 9^9 + 2^2 = 3486784405 > n$.

補題 14. 自然数 n が、 $3000000000 \leq n \leq 3999999999$ を満たせば、 $dsf(n) < n$ となる.

証明. $n_1 = 3, n_2, \dots, n_{10}$ を自然数 n の各桁の数のリストとする. (1) このリス

トの中に9がちょうど9回出てくるとする. すると $n = 3999999999$ となり、
 $dsf(n) = dsf(3999999999) = 3^3 + 9 \times 9^9 = 3486784428 < 3999999999 = n$.
 (2) このリストの中に9がちょうど8回出てくるとする. 残りの2つの数は $n_1 = 3$ と、 $m \leq 8$ を満たす数 m である. (α) $m = 0$ なら、 $dsf(n) = 8 \times 9^9 + 3^3 + 0^0 = 3099363940 < 3099999999 \leq n$. (β) もし、 $1 \leq m \leq 8$ なら、
 $dsf(n) = 8 \times 9^9 + 3^3 + m^m \leq 8 \times 9^9 + 3^3 + 8 \cdot 8 = 3116141155 < 3199999999 \leq n$
 となる. (3) このリストの中に9が出てくる回数が8より少ないとする. このとき、 $dsf(n) \leq 3^3 + 7 \times 9^9 + 2 \times 8^8 = 2745497882 < 3000000000 \leq n$.

補題 15. $4000000000 \leq n \leq 9999999999$ を満たす自然数 n に対して、
 $dsf(n) < n$ となる.

証明. $4000000000 \leq n \leq 9999999999$ ならば、 $dsf(n) \leq 10 \times 9^9 = 3874204890 < n$

補題 16. $9999999999 \leq n \leq 99999999999$ を満たす n に対して、 $dsf(n) < n$
 となる.

証明. $9999999999 \leq n \leq 99999999999$ となる n に対しては、 $dsf(n) \leq 11 \times 9^9 = 4261625379 < 9999999999 \leq n$.

補題 17. $100000000000 \leq n$ を満たす n に対しては、 $dsf(n) < n$.

証明. もし、 n_1, n_2, \dots, n_m を n の各桁の数とすると、 $m \geq 11$ で、 $dsf(n) = n_1^{n_1} + n_2^{n_2} + \dots + n_m^{n_m} \leq m \times 9^9$. ここで、 $m \geq 11$ なので、 $m \times 9^9 < 10^{m-1} \leq n$ となる.

定理 27. どんな数字から始めてもやがてループに入る.

証明. 数列 $dsf^m(n), m = 1, 2, \dots$ を考える.

もし、 $dsf^m(n) > 3000000000$ ならば、定理1により、数列 $dsf^{m+k}(n), k = 1, 2, \dots$ は減少していく.

そして $dsf^{m+k}(n) < 3000000000$ となるような自然数 k が存在する.

したがって、 $dsf^m(n) < 3000000000$, となるような m は無限に存在する.

このことから、自然数 v と w が存在し、 $v < w$ を満たし、 $dsf^v(n) = dsf^w(n)$ となる. このことにより、数列 $dsf^m(n), m = 1, 2, \dots$ は必ずループに入ることがわかる.

定理 28. ループは次の8個しかない. ただし不動点も含める.

不動点 = 1, 3435

loop2 = {421845123, 16780890}

loop3 = {16777500, 2520413, 3418}

loop8 = {809265896, 808491852, 437755524, 1657004, 873583, 34381154,

```

16780909,792488396}
loop11={791621579,776537851,19300779,776488094,
422669176,388384265,50381743,17604196,388337603, 34424740,824599}
loop40={793312220,388244100,33554978,405027808
,34381363,16824237,17647707,3341086,16824184,33601606,140025,3388,
33554486,16830688,50424989,791621836,405114593,387427281,35201810,
16780376,18517643,17650825,17653671,1743552,830081,33554462,
53476,873607,18470986,421845378,
34381644,16824695,404294403
,387421546,17651084,17650799,776537847,20121452,3396,387467199}
loop97={1583236420,16827317,18470991,792441996,1163132183,16823961,
404291050,387424134,17601586,17697199,1163955211,387473430,18424896,
421022094,387421016,17647705,2520668,16873662,17740759,389894501,
808398820,454529386,404251154,7025,826673,17694102,388290951,
808398568,454579162,388297455,421805001,16780606,17740730,
2470915,388247419,421799008,792442000,388244555,33564350,53244,3668,
16870555,17656792,389164017,405068190,404247746,1694771,389114489,80839595,
808401689,437799052,776491477,
390761830,405067961,388340728,51155506,59159,774847229,406668854,33698038,
421021659,387470537,19251281,404200841,16777992,777358268,
36074873,18471269,405068166,16920568,404294148,404198735,405024914,
387424389,421799034,775665066,1839961,791664879,793358849,809222388,437752,
3297585,405027529,388250548,50338186,33604269,387514116,17650826,17697202,
389114241,404198251,404201349,387421291,405021541,6770,1693743,388290999}

```

注意. ここで扱った問題の発見はコンピュータの計算によった. ループが存在することについては、数学的に証明したが、ループの種類に関してはコンピュータによる計算によって証明した. このように、問題の発見から証明に至るまで、計算機が非常に重要な役割をしている.

では、このような発見において、計算機代数システムはどのような役割をしたのであろうか.

今回は、文字処理やグラフィックスはあまり必要ではなかった. それよりも、何かアイデアが生まれたとき、すぐにプログラムを作って実験するということが重要であった.

例えば $dsf(n)$ という関数は、次の Mathematica のプログラムによって実現することができる. このプログラムは自然数 n が与えられたとき、 n の各位の数をリストとして取り出し、 $\{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m\}$ とし、それから $n_1^{n_1} + n_2^{n_2} + n_3^{n_3} \dots + n_m^{n_m}$ を作る. したがって、次のように関数として実現できる.

$$dsf[n_] := Block[\{m = n, t\}, t = IntegerDigits[m]; \sum_{k=1}^{Length[t]} Max[1, t[[k]]]]$$
 ループを見つけるためのプログラムも短いものであった。

$$findloop[n_] := Block[\{m = n, u, dat\}, dat = m; m = dsf[m];$$

$$While[!MemberQ[dat, m], dat = Append[dat, m]; m = dsf[m]];$$

$$dat = Append[dat, m];$$

$$u = Flatten[Position[dat, Last[dat]]]; \{n, u[[1]] - 1, Last[dat], u[[2]] - u[[1]]\}$$
 このプログラムも短いものである。次々に出てくる数列を記憶してリストにしておき、リストに既に含まれている数が現れたら、計算を中止するようになっている。

Mathematica にはいろんな便利な関数があるので、リストの作り方や、リストに含まれているかどうかの判定が簡単にできる。

Mathematica には、数を扱うための多くの関数が用意されている。ここでも各位の数と取り出す関数を使っている。このような関数があると、数学の研究には非常に便利である。また、計算において、無制限に大きな桁数の数を使うことができる。このことも重要である。

このような計算は C、Java などの言語でも作ることができるが、上のような理由により、Mathematica を使うとこのように 2 行で計算できる。すぐに計算できたので、短い時間で実験することができ、1 時間以内にはいろんな事実が見つかったのである。

この研究の場合は、短時間で計算できたということが、発見にとって最も重要な要素である。

注意. この研究においても、高校生たちの直感は大きな発揮した。例えば浦川は、長さ 3 のループ

$loop3 = \{16777500, 2520413, 3418\}$

を、15 分ほどで作ってしまった。このようにして、いろんなループが発見された後で、計算機による調べ尽くしが行われた。

注意. この問題に関連して、この反復プロセスをある数で割ってできるプロセスがある。この問題についても、かなり多くの研究結果があり、いくつかのシンポジウムで発表した。この記事には収録していない。

Open problems. 少し定義を変えるといろんな反復プロセスができる。例えば、 $n_1^{n_m} + n_2^{n_m-1} + n_3^{n_m-2} \dots + n_m^{n_1}$ を考えることもできる。

また、ループに入るまでのステップの数には何かの法則があるのだろうか。

2.15 ワールドシリーズと日本シリーズの確率論

ワールドシリーズや日本シリーズを数学的に解析している人は多いが、数学的な理論と実際のデータを注意深く比べている人は少ない。私たちは日本

シリーズとワールドシリーズを数学的に解析し、実際の統計と比べて面白い事実を発見した。

日本シリーズの確率は、独立試行の確率分布に非常に近いが、ワールドシリーズの確率はそうではない。

この事実は、[33]において American Institute of Physics の B. Stein 教授と M. Heil 教授によって、発表されている。しかし、両教授よりも少し前に、私たちがロンドンで開催された Mathematica symposium [9] において発表している。したがって、この意外な事実の最初の発見者は私たちである。両教授の発表と、私たちの発表は同じ年であるが、私たちが1ヶ月ほど早い。もちろん、私たちはこれよりも数年前に発見していたのだが、発表した時点が問題である。

やはり、何かを発見した場合はすぐに発表することが大切である。

さて、どのようにしてこの発見が行われたかについて、解説していく。この発見は2001年に行われているが、ここでは2005年までのデータを使っている。

宮寺は、毎年日本シリーズの時期には、授業で日本シリーズの確率論を考える。ある年も、次の問題を扱った。

例 23. 2つのチーム A, B がある。先に4勝したチームが優勝すると決める。引き分けはないものとして、A, B の力が同じであるとするとき、優勝が決定するまでの試合数を X とする。各試合は互いに独立であるとするとき、 X の確率分布を求めよ。

この例題の答えは次のようになる。(1) 4試合で決まるのは、どちらかのチームの4連勝である。従って、

確率は $2 \times \frac{1}{2}^4 = \frac{1}{8}$ である。

(2) 5試合で決まるのは、どちらかのチームの4勝1敗なので、Aが優勝するとき、初めの4試合のうちでBが1回勝つはずなので、その場合の数は ${}_4C_1$ であり、同じようにBの場合も ${}_4C_1$ である。

確率は $2 \times {}_4C_1 \times \frac{1}{2}^5 = \frac{1}{4}$

(3) 6試合で決まるのは、どちらかのチームの4勝2敗なので、Aが優勝するとき、初めの5試合のうちでBが2回勝つはずなので、その場合の数は ${}_5C_2$ で、Bの場合も同じなので、

確率は $2 \times {}_5C_2 \times \frac{1}{2}^6 = \frac{5}{16}$

(4) 7試合で決まるのは、どちらかのチームの4勝3敗なので、Aが優勝するとき、初めの6試合のうちでBが3回勝つはずなので、その場合の数は ${}_6C_3$ で、Bの場合も同じなので、

確率は $2 \times {}_6C_3 \times \frac{1}{2}^7 = \frac{5}{16}$

確率分布は次のようになる。

回数	4回	5回	6回	7回	平均
確率	$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{5}{16} = 0.3125$	$\frac{5}{16} = 0.3125$	0.5813

… Table (1)

この確率分布を示した後、宮寺は実際の日本シリーズの歴史を調べて得たデータを示した。これは2005年までの56年間の資料である。以下のリストにおいて、数字は日本チャンピオンが決定するまでに要した試合の数である。

6,5,6,6,7,7,6,4,7,4,4,6,6,7,7,5,6,6,6,6,5,5,5,5,
6,4,7,5,7,7,7,6,6,7,7,6,7,6,5,7,4,7,7,7,6,5,5,5,6,5,6,5,4,7,7,4

この資料から分布を作ると次のようになる。

回数	4回	5回	6回	7回	平均
確率	$\frac{7}{56} = 0.125$	$\frac{13}{56} = 0.232$	$\frac{18}{56} = 0.321$	$\frac{18}{56} = 0.321$	5.839

… Table (2)

上のTableを比べると、日本シリーズの統計が、確率論の理論的な値に良く合っていることがわかる。このことを話すと、毎年のように生徒たちは納得するのであるが、ある年に、新谷と竹田がほぼ同時に、次のような質問をした。「メジャーリーグの世界シリーズではどうですか。」

それに対して宮寺は、「たぶんあまり変わらないと思うが、出来たら調べて欲しい」と言い、資料を提出したら、有志の宿題として評価すると言った。

私たちの研究において、授業中に何かを発見したり、家で考えてきた生徒に対しては、宮寺の授業において、有志の宿題として評価されることになっている。

次の日に2人は別々にインターネットを使って資料を調べてきた。2005年までの97年間では、5,6,4,5,7,5,6,7,5,4,5,5,6,6,4,6,7,7,7,4,4,5,6,7,4,5,7,6,6,5,4,4,7,5,5,6,7,7,7,6,5,4,6,7,6,4,7,7,7,6,7,5,7,4,7,7,4,7,7,5,5,7,7,7,5,7,4,6,6,7,6,6,7,5,5,7,7,7,5,4,4,7,6,6,6,6,7,4,4,5,7,7,6,4,4 となる。

ここで使ったのは、1905から2005のデータであるが、1919と1920と1921には違ったルールで行われたので省き、1994には中止になったのでデータは含まれていない。

確率分布にすると、次の Table になる。

回数	4回	5回	6回	7回	平均
確率	$\frac{19}{97} = 0.196$	$\frac{21}{97} = 0.216$	$\frac{22}{97} = 0.227$	$\frac{35}{97} = 0.360$	5.753

… Table (3)

次にもう少し新しいデータだけを集めてみた。1956年から2005年までの49年間では次のようになる。7,7,7,7,6,7,5,7,4,7,7,4,7,7,5,5,7,7,7,5,7,4,6,6,7,6,6,7,5,5,7,7,7,5,4,4,7,6,6,6,6,7,4,4,5,7,7,6,4,4 確率分布にすると、次の Table になる。

回数	4回	5回	6回	7回	平均
確率	$\frac{9}{49} = 0.184$	$\frac{8}{49} = 0.163$	$\frac{10}{49} = 0.204$	$\frac{23}{49} = 0.469$	5.94

… Table (4)

上の Table (1) と Table(3),(4) の違いは大きい。直感的には (4) と (1) の差の方が大きいように見える。もちろん、差の大きさというものは、数学的に定義しないと議論できない。

このような事実を数学的に説明することが次の目標になった。まず初めに考えたことは、2つのチームの強さが等しいという仮定が、日本シリーズでは通用するが、ワールドシリーズでは通用しないのではないかということである。従って、2つのチームの強さが異なる場合を考えた。ただし、それぞれの強さは一定で、対戦は独立試行であると考えた。

例 24. 2つのチーム A,B が対戦し、A が勝つ率を x とする。先に4勝したチームが優勝するとき、優勝決定までに要する試合の数が、4,5,6,7 となる確率を求めよ。

この例題の解答は、先に考えた例題の場合と同じように考えれば得られる。

(1) まず、4試合で決定する確率は、

$$x^4 + (1-x)^4 \text{ となる。}$$

(2) 5試合で決定する確率は、

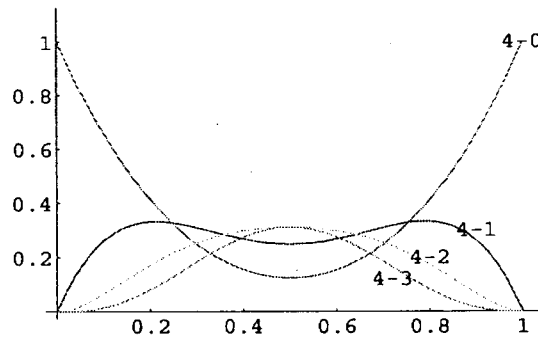
$$4((1-x)x^4 + (1-x)^4x) \text{ となる。}$$

(3) 6試合で決定する確率は、

$$10((1-x)^2x^4 + (1-x)^4x^2) \text{ となる。}$$

(4) 7試合で決定する確率は、 $20((1-x)^3x^4 + (1-x)^4x^3)$ となる。

すると、ゲームの数は次のようになる。



…Figure (30)

このグラフは関西学院高等部の元教諭である千星修三が15年以上前に計算機で作ったものと同じである。千星氏より以前に同じグラフを作った人があるかどうかは知らない。

このグラフを見ると、ワールドシリーズのように、決まるまでの試合数が4とか7である場合がTable(3),(4)のようになることはない。2つのチームの力が接近すると、試合の数が7や6になりやすい。しかしその場合は4になることは少ない。反対に、力が離れていると、試合の数は4になりやすいが、そのときは7になることは少ない。

だから、Table(3),(4)のようになることを説明することはできない。特に、Table(4)のようになることは、あり得るとは思えない。

しかし、あり得ないとか、あり得るという議論には統計学の知識が必要である。特にこの問題の場合は、分布の違いを検定する必要がある。高校生に大学レベルの統計学を教えて、この問題に結論を出すということは可能である。円周率の問題のときにも、大学レベルの数学を教えて、それを使った。

だが、私たちは全く別の方法を使った。それはシュミレーションである。ただし、チームの勝率をどのように決めるかということが問題になる。

この頃に、著名なP.J.Nahinが[28]において、ワールドシリーズの確率論が、同じ勝率を持ったチームの独立試行として考えることができると述べていることを知った。彼の著書は今でもかなり売れている、著名なものだから、多くの人はまだ彼の説を信じているだろう。

とりあえず、同じ勝率を持ったチームの独立試行として、シュミレーションすることにした。

私たちのシュミレーションの方法は、計算機上で、ワールドシリーズのように4つ先勝すれば優勝するというルールで、97年間分の実験を、10000回繰り返した。それぞれの10000回のうちで、実際のワールドシリーズのように、4勝0敗と4勝3敗で勝負が決まる

Table(3)によれば、ワールドシリーズの歴史によれば、97年で、4勝0敗で決まったのは19回、4勝3敗で勝負が決まったのは35回ある。

10000回のシュミレーションで、4勝0敗で決まるのが19回以上となり、

4勝3敗で決まるのが35回以上となったのは、11回にすぎない。これは非常に小さい確率であり、極めて稀な現象と考えることができる。

これは、あり得ない現象と考えてよいだろう。

注意. ここで紹介したのは、野球が好きな生徒がふと思った疑問から、面白い結果が生まれたという事実である。多くの方は、パズルを解いても、それを拡張したりすることはしない。高校生の発想を大切にすれば、新しいパズルを作ることができる。ここでも、Mathematicaのグラフィックスが威力を発揮した。例えば、ここで使ったグラフにしても、千星はプログラミングの知識が十分にあるので可能であったが、そうでない人の場合は簡単ではない。Mathematicaでこのグラフを作るには次のプログラムを使う。ここでプログラムを書くが、Mathematicaのような数式処理システムを使った場合に、どのくらいの行数で出来るかということを知っていただくためである。

```
a = Plot[{4((1 - x)x4 + (1 - x)4x), x4 + (1 - x)4,  
10((1 - x)2x4 + (1 - x)4x2),  
20((1 - x)3x4 + (1 - x)4x3}, {x, 0, 1},  
PlotStyle -> {{GrayLevel[0.2]}, {GrayLevel[0.4]}, {GrayLevel[  
0.8]}, {GrayLevel[0.6]}}];
```

上のプログラムだけで、グラフはほぼ完成する。しかも、グレースケールのepsファイルとして保存することができる。

4つのグラフにそれぞれラベルを付けるには、次のプログラムが必要である。ただし、最後の行は、グラフィックスの位置を調整するためである。

```
Show[{a, Graphics[{Text["4 - 0", {1, 1}], Text["4 - 2", {0.8, 0.2}],  
Text["4 - 3", {0.72, 0.12}], Text["4 - 1", {0.9, 0.3}],  
Text["", {1.01, 1.1}]}]}];
```

2.16 一般ヨセフス問題.

宮寺が、授業で生徒たちにヨセフス問題を教えて、それを基にして新しいヨセフス問題を考えるようにアドバイスした。

まず伝統的なヨセフス問題について考える。

ヨセフス問題は、1世紀の有名な歴史家であるヨセフスに由来している。彼はユダヤとローマの戦争に従軍したが、伝承によれば、彼は部下である41人のユダヤの戦士と共に、ローマ軍に追われて洞窟に逃げ込み、周りを囲まれてしまった。彼の部下は降伏することを拒み、死ぬことを選んだ。その方法は、皆が円の形に並び、ある1人から始めて、3番めごとの人を殺していくということだった。そして、最後に残った人は自らの手で死ぬことになった。

ヨセフスは死にたくなかったので、最後まで残る場所を計算して、そこに並び、生き残った。その後彼はローマに降伏し、彼を捕らえた軍団長がローマ皇帝になるという予言をし、やがてその予言が実現するに至って、彼はローマ皇帝に庇護された歴史家として活躍し、彼の書物は歴史に残った。

宮寺はヨセフスの問題を教えるとき、このようなエピソードを話す。それは、生徒が問題に興味を持つかどうかということが非常に大切であるからだ。

宮寺が授業でヨセフス問題を取り上げて、生徒に新しいヨセフス問題を作ることを求めたとき、ルールとしては、2人毎に殺すというやり方にした。3人毎に殺すというやり方では、かなり複雑になることを宮寺が知っていたからである。

このとき、まず下田が新しいルールを提案した。しかし、宮寺は即座には、その重要性がわからず、Mathematicaのプログラムを作らずに、放置していた。

このことは、典型的な教師のミスだと思う。生徒の提案の中には、一見するとつまらないと思えるが、実験してみると、面白いということが多くある。今では、宮寺は生徒の提案に対しては、慎重に対処するようになっている。

それから3年後に宮寺は同じことを授業で話し、何人かが提案した。それらの提案をMathematicaのプログラムにしてみた。そして、ヨセフス問題のルールを新しくすることが非常に面白いことに気がついた。

宮寺は、下田の提案を再び考えると同時に、研究を始めた。そして、ヨセフス問題の研究に、峰松と橋場諭が参加した。

ここでは、峰松と橋場諭の提案による、新しいヨセフス問題を考える。ただし、彼らが提案したものを、一般化したものである。その一般化の過程で、数式処理システムの力が非常に役に立った。一般式を作り、それをMathematicaで検証し、もし計算が合わないと、また一般式を変えるという方法をとった。この方法を使うと、高校生でも公式を作ることができる。

一旦得られた公式の証明は、数学的帰納法だけで十分であったが、かなり複雑になったために、宮寺が担当した。

なお、下田の提案はかなり面白い結果を生むことがわかっているが、理論的にはかなり複雑になることがわかり、現在研究中である。

しかしその結果をさらに一般化することができた。ただし、3人ごとに殺すというルールはかなり複雑になるため、宮寺は生徒たちに2人ごとのルールを使うように勧めた。

では、生徒たちが考えた新しいヨセフス問題を定義する。ただし、殺すという設定は良くないので、取り除くということにする。ここで紹介するのは、[20]に掲載された結果を拡張したものである。

私たちの研究した一般ヨセフス問題には、2通りの定義が考えられる。

定義7. (1) u と n は自然数とする. ただし, $n \geq 2$ とする. $u \times n$ 人の人が円形に並んでいる. 彼らを, 1 番から $u \times n$ 番までの番号で表す.

これから, 人を取り除いていく.

人々を取り除かれて, 残りが 1 人になったとき, プロセスは停止する. 最後に残る 1 人のポジションを求めるのが目的である.

ただし, 人を取り除くプロセスは u 個あり, 同時に進行する. 1 つ目のプロセスは, 1 人目から始めて, 2 番目, 4 番目, ... の人を取り残す. 2 番目のプロセスは $n+1$ 番目の人から始めて, $n+2$ 番目, $n+4$ 番目, ... の人を取り除いていく. 3 番目のプロセスは $2n+1$ 番目の人から始めて, ... u 番目のプロセスは $(u-1)n+1$ 番目の人から始める.

ただし, u 個のプロセスは, 同時進行だが, 重なる場合には, 優先順位があり, 1 番目のプロセスが始めに人を取り除き, 次は 2 番目のプロセスが人を取り除く. この優先順位は, 最後まで変わらない.

(2) 人数が u 人であるとする. この場合, プロセスの数と人数が同じなので, 特別なことが起こる.

これは初めからこの人数である場合もあるし, 人々を取り除いて, この人数になることもある. 1 番目のプロセスは, 1 番目の人から始めて, 2 番目を取り除く. 2 番目のプロセスは, 2 目から始める. 2 番目は既に取り除かれていて, 存在しない. しかし, いないはずの 2 番目から始めて, 3 番目を取り除く. 同じように, 既におらずの 3 番目から始めて, 4 番目を取り除く. このようにしていくと, 最後に $u-1$ 番目のプロセスが u 番目の人を取り除き, 残るのは 1 番目の人である.

定義8. (1) は, 定義7と同じとする.

(2) 人数が u 人であるとする. これは初めからこの人数である場合もあるし, 人数を取り除いて, この人数になることもある. 1 番目のプロセスは, 1 番目の人から始めて, 2 番目を取り除く. 2 番目のプロセスは, 2 番目から始めるが, 2 番目は既に取り除かれていて, 存在しない. したがって, 2 番目のプロセスは無視して, 3 番目のプロセスを, 3 番目から始めて, 4 番目を取り除く. 4 番目のプロセスは, 4 番目がないので, 無視して, 5 番目のプロセスを, 5 番目から始めて 6 番目を取り除く. こうやって, 最後に 1 人が残る. ただし, 何番目の人が残るかは, u によって決まる.

私たちが考える問題を, 一般ヨセフス問題とよび, $J_u(u \times n)$ は, u times n 人いるときの, 生き残る人のポジションを表す.

注意. このヨセフス問題について考えるときには、 u をプロセスの数、すなわち同時に殺される人の数とする.

$u = 1$ の場合、どちらの定義でも、伝統的なヨセフス問題と同じになる. この伝統的なヨセフス問題は、[2] で扱われている.

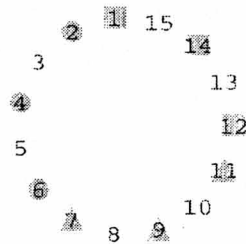
私たちは、[20] においては、定義 8 を使ったが、ここでは定義 7 を採用する. 理由としては、一般化した場合の公式がきれいになるからである.

ヨセフス問題の実際例をあげる.

例 25. 15 人が参加して、同時に 3 人ずつ取り除いていく. すなわち、定義 1 において、 $u = 3, n = 5$ の場合である. 1 番目のプロセスは、1 人目から始めて、2 人目、4 人目、... と続ける. 次に 2 つ目のプロセスは 6 人目から始めて、7 人目、9 人目、... と続ける. 3 つ目のプロセスは 11 人目から始めて、12 人目、14 人目、... と続ける.

このようにするとき、何人目が残るだろうか.

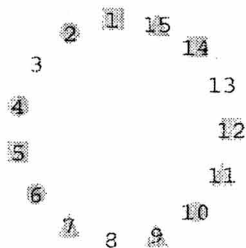
9 人が取り除かれたとき、6 人が残る. Figure (31) を見て欲しい. 円によって囲まれた数は、1 番目のプロセスで取り除かれた人たちである. 三角によって囲まれた数は、2 つ目のプロセスで取り除かれた人たちで、四角によって囲まれた数は、3 つ目のプロセスで取り除かれた人たちである.



.....Figure (31)

次に 1 番目のプロセスは 8 番目を残して、10 番目を取り除く. 同じようにして、15 番目と 5 番目を取り除かれる. こうして、3 人だけが残る. Figure(32)

を見て欲しい. 私たちは定義 7 を使うので、3 番目と 8 番目を取り除かれて、13 番目が残る. したがって、 $J_3(15) = 13$.



.....Figure (32)

2.17 一般ヨセフス問題の持つ再帰関係.

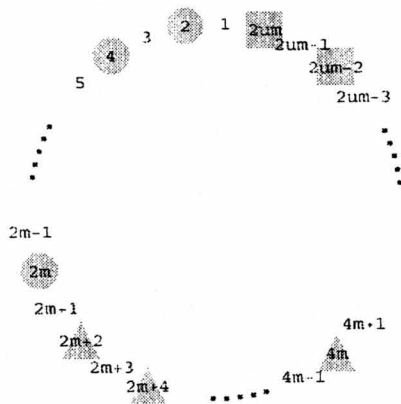
私たちが考えているヨセフス問題の変形は、きれいな再帰関係を持つ。この再帰関係は、[2]で扱われている関係式の拡張となっている。

定理 28. 自然数 u と m に対して、 $J_u(2um)$ は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} 2J_u(um) + 2m - 1 & (1 \leq J_u(um) \leq (u-1)m), \quad (1) \\ 2J_u(um) - 2(u-1)m - 1 & ((u-1)m + 1 \leq J_u(um) \leq um). \quad (2) \end{cases}$$

証明 $2um$ 人が参加するとする。これは、定義7では、 $n = 2m$ の場合である。人を取り除くのは、 u 個のプロセスによる。1 番目, 2 番目, 3 番目 \dots , u 番目のプロセスは、1 番目, $(2m+1)$ 番目, $(4m+1)$ 番目, $(6m+1)$ 番目, \dots , $(2(u-1)m+1)$ 番目から始まり、2 番目, \dots $(2m+2)$ 番目, \dots $(4m+2)$ 番目, \dots $(6m+2)$ 番目, \dots , $(2(u-1)m+2)$ 番目, \dots の人を取り除いていく。こうやって、各プロセスが m 人ずつ取り除いて、計 um 人を取り除いたとき、 um 人が残る。Figure 33 を見て欲しい。

円によって囲まれた数は、1 番目のプロセスで取り除かれた人たちである。三角によって囲まれた数は、2 番目のプロセスで取り除かれた人たちで、四角によって囲まれた数は、 u 番目のプロセスで取り除かれた人たちである。



.....Figure (33)

次の段階では、取り除くプロセスは、 $(2m+1)$ 番目, $(4m+1)$ 番目, $(6m+1)$ 番目, \dots , $(2(u-1)m+1)$ 番目, 1 番目の人から始まる。

今度は、 $(2m+1)$ 番目の人から始まるのが、1 番優先する 1 番目のプロセスである。

$J_u(2um)$ の値を求めるために、 $J_u(um)$ の値を使う。

$J_u(um) = 1, 2, 3, \dots, (u-1)m$ ならば、 $J_u(2um) = 2m+1, 2m+3, 2m+5, \dots, 2um-1$ である。

したがって、 $J_u(2um)$ を、 $J_u(2um)$ で表すと、

$1 \leq J_u(um) \leq (u-1)m$ であるなら、 $J_u(um) = 2J_u(um) + 2m - 1$ である。

$J_u(um) = (u-1)m + 1, (u-1)m + 2, (u-1)m + 3, \dots, um$ ならば、
 $J_u(2um) = 1, 3, 5, \dots, 2m-1$ である。

したがって、 $J_u(2um)$ を、 $J_u(2um)$ で表すと、
 $(u-1)m < J_u(um) \leq um$ ならば、 $2J_u(um) - 2(u-1)m - 1$ である。

定理 29. 自然数 u と m に対して、 $J_u(2um + u)$ の値は、

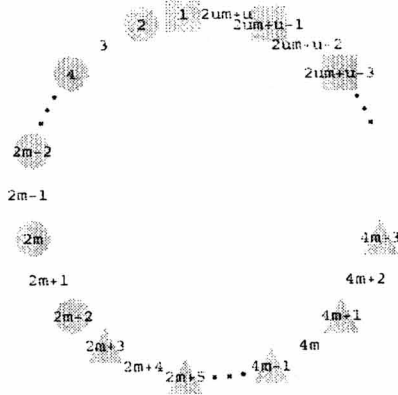
$$\left\{ \begin{array}{ll} 2J_u(um) + 2m + 2 & (1 \leq J_u(um) \leq m) & (1) \\ 2J_u(um) + 2m + 3 & (m < J_u(um) \leq 2m) & (2) \\ 2J_u(um) + 2m + 4 & (2m < J_u(um) \leq 3m) & (3) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ 2J_u(um) + 2m + (u-1) & ((u-3)m < J_u(um) \leq (u-2)m) & (u-2) \\ 2J_u(um) + 2m + u & ((u-2)m < J_u(um) \leq (u-1)m) & (u-1) \\ 2J_u(um) - 2(u-1)m + 1 & ((u-1)m < J_u(um) \leq um) & (u) \end{array} \right.$$

証明 定義1において、 $n = 2m + 1$ の場合である。 $(2um + u)$ 人が参加すると
 する。人々を取り除くプロセスは、 u 個ある。1番目, 2番目, 3番目, \dots , u 番
 目のプロセスは、1番目, $(2m + 2)$ 番目, $(4m + 3)$ 番目, $(6m + 4)$ 番目, \dots ,
 $(2(u-1)m + u)$ 番目の人から始まり、2番目, \dots , $(2m + 3)$ 番目, \dots , $(4m + 4)$
 番目, \dots , $(6m + 5)$ 番目, \dots , $(2(u-1)m + u + 1)$ 番目, \dots の人を取り除いて
 いく。各プロセスが、 $m + 1$ 人ずつ取り除き、計 $u(m + 1)$ 人が取り除かれた
 とき、 um 人が残っている。

Figure34 を見て欲しい。円によって囲まれた数は、1番目のプロセスで取
 り除かれた人たちである。三角によって囲まれた数は、2番目のプロセスで
 取り除かれた人たちで、四角によって囲まれた数は、 u 番目のプロセスで取
 り除かれた人たちである。

定理 28 の場合と異なっている点に注意してほしい。
 まず、 u 番目のプロセスが $m + 1$ 番目に取り除くのは、1番目の人である。
 また、 um 人が残っている段階で、取り除かれた人の番号と残っている人
 の番号が交互に並ぶことはない。例えば、 $2m + 2$ 番目と、 $2m + 3$ 番目の人
 は、共に取り除かれる。

したがって、次の段階に入ると、残っている人たちの番号が複雑な並び方
 をしているため、扱うことが難しくなる。



.....Figure (34)

残り um 人で、再び取り除くプロセスを再開する。取り除くプロセスは $(2m+4)$ 番目, $(4m+5)$ 番目, $(6m+6)$ 番目, \dots , $(2(u-1)m+u+2)$ 番目, 3 番目の人から始まる。

$(2m+4)$ 番目の人から始まるのが、1 番優先される、1 番目のプロセスである。 $J_u(2um+u)$ の値を計算するために、 $J_u(um)$ の値を使う。

$J_u(um) = 1, 2, 3, \dots, m$ ならば、 $J_u(2um+u) = 2m+4, 2m+6, 2m+8, \dots, 4m+2$ となる。

したがって、 $J_u(2um+u)$ を、 $J_u(2um)$ で表すと、

$1 \leq J_u(um) \leq m$ なら、 $J_u(um+u) = 2J_u(um) + 2m + 2$ である。

$J_u(um) = m+1, m+2, \dots, 2m$ ならば、 $J_u(2um+u) = 4m+5, 4m+7, 4m+9, \dots, 6m+3$ である。

したがって、 $J_u(2um+u)$ を、 $J_u(2um)$ で表すと、

$m < J_u(um) \leq 2m$ ならば、 $J_u(2um+u) = 2J_u(um) + 2m + 3$ である。

同じことを $p \leq u-2$ を満たす自然数 p について考えることができる。

$J_u(um) = pm+1, pm+2, \dots, pm+m$ ならば、 $J_u(2um+u) = 2(p+1)m+p+4, 2(p+1)m+p+6, \dots, 2(p+2)m+p+2$ である。

したがって、 $J_u(2um+u)$ を、 $J_u(2um)$ で表すと、

$pm < J_u(um) \leq (p+1)m$ であれば、 $J_u(2um+u) = 2J_u(um) + 2m + p + 2$ となる。

$J_u(um) \geq (u-1)m+1$ であれば、状況は違う。

$J_u(um) = (u-1)m+1, (u-1)m+2, \dots, um$ であれば、 $J_u(2um+u) = 3, 5, \dots, 2m+1$ となる。

したがって、 $J_u(2um+u)$ を、 $J_u(2um)$ で表すと、

$(u-1)m < J_u(um) \leq um$ ならば、 $J_u(2um+u) = 2J_u(um) - 2(u-1)m + 1$ である。

関数 $\text{Ceiling}[]$ を使うと、上の結果を簡略することができる。関数 $\text{Ceiling}[x]$ は、 x 以上であるような整数のうちで、最小のものである。

定理30. 自然数 u と m に対して、 $J_u(2um + u)$ の値は、

$$\begin{cases} 2J_u(um) + 2m + \text{Ceiling}\left[\frac{J_u(um)}{m}\right] + 1 & (J_u(um) \leq (u-1)m), \\ 2J_u(um) - 2(u-1)m + 1 & ((u-1)m < J_u(um)). \end{cases}$$

証明. $J_u(um) \leq (u-1)m$ である場合だけを証明すればよい。このときある自然数 p があって、 $p \leq u-2$ かつ $pm < J_u(um) \leq (p+1)m$ となる。すると、定理 29 により、 $J_u(2um + u) = 2J_u(um) + 2m + p + 2$ 。 $p < \frac{J_u(um)}{m} \leq p+1$ であるから、 $\text{Ceiling}\left[\frac{J_u(um)}{m}\right] = p+1$ 。したがって、 $J_u(2um + u) = 2J_u(um) + 2m + \text{Ceiling}\left[\frac{J_u(um)}{m}\right] + 1$ となる。

一般ヨセフス関数 $J_u(n)$ は次のエレガントな closed form を持つ。

定理 31. 自然数 u と、非負正数 s, h に対して、

- (1) $J_u(u(2^{uh} + s)) = 2s + 1 \quad (s < 2^{uh}),$
- (2) $J_u(u(2^{uh+1} + s)) = 1 \times 2^{uh+1} + 3s + 1 \quad (s < 2^{uh+1}),$
- (3) $J_u(u(2^{uh+2} + s)) = 2 \times 2^{uh+2} + 4s + 1 \quad (s < 2^{uh+2}),$
-
- $(u-1) J_u(u(2^{uh+u-2} + s)) = (u-2)2^{uh+u-2} + us + 1 \quad (s < 2^{uh+u-2}),$
- (u) $J_u(u(2^{uh+u-1} + s)) = (u-1)2^{uh+u-1} + (u+1)s + 1$
 $(s < 2^{uh+u-1}) .$

この定理の結論の式について説明しておく。カッコの中は場合分けになっているのであるが、その事実が一見するとわかり難い。例をあげてみる。

$x = u(2^{uh+u-2} + s) \quad (s < 2^{uh+u-2})$ とすると、

x は、 $u2^{uh+u-2} \leq x < u2^{uh+u-1}$ を満たす。

$x = u(2^{uh+u-1} + s) \quad (s < 2^{uh+u-1})$ とすると、

x は、 $u2^{uh+u-1} \leq x < u2^{uh+u}$ を満たす。

上の2つの x の範囲を比べてみると、重複していない。この例からわかるように、定理 31 の結論は、 x の範囲を重複しないようにわけて述べてある。

証明. 数学的帰納法を使って証明する。 $h = k$ について、(1), (2), ..., (u) を仮定して、

$h = k + 1$ について、(1), (2), ..., (u) を証明すればよい。

しかし、そのために少し特殊な方法を使う。

まず、 $h = k + 1$ について、(1) を示し、

$h = k + 1$ について、(p) が示されたと仮定して、

$h = k + 1$ について、(p+1) を示す。

こうやって、 p を 1 から $u - 1$ まで動かすと、証明が完成する。

[1] まず $h = k$ に対してこの定理の (u) を仮定して、 $h = k + 1$ の場合に、この定理の (1) を証明する。

そのために、1 つの式を用意する。

$$s \text{ を、} s < 2^{uk+u-1}, \quad (\text{a})$$

を満たす非負正数とすると、仮定によりこの定理の (u) を使うことによって

$$J_u(u(2^{uk+u-1} + s)) = (u - 1)2^{uk+u-1} + (u + 1)s + 1.$$

となり、

$$\begin{aligned} & J_u(u(2^{uk+u-1} + s)) - (u - 1)(2^{uk+u-1} + s) \\ &= (u - 1) 2^{uk+u-1} + (u + 1)s + 1 - (u - 1)(2^{uk+u-1} + s) \\ &= 2s + 1 > 0. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

上の (b) を使って、 $h = k + 1$ の場合に、(1) を証明する。そのために、

$$t \text{ を、} t < 2^{u(k+1)}. \quad (\text{c})$$

を満たす自然数として、

$J_u(u(2^{u(k+1)} + t)) = 2t + 1$ を証明する。

[1.1] まず t が偶数であると仮定する。すると、ある非負整数 s があって、 $t = 2s$ を満たす。(c) により、整数 s は (a) を満たし、したがって、(b) が成り立つ。 $m = 2^{uk+u-1} + s$ とおくと、(b) により、

$$J_u(uv) - (u - 1)m = 2s + 1 > 0 \quad (\text{d})$$

となるので、定理 28(2) と (d) により、 $J_u(u(2^{u(k+1)} + t)) = J_u(2um)$
 $= 2J_u(um) - 2(u - 1)m - 1 = 2(2s + 1) - 1 = 4s + 1 = 2t + 1$

[1.2]. 次に t が奇数であると仮定する。すると、非負整数 s があって、 $t = 2s + 1$ を満たす。(c) により、整数 s は (a) を満たし、したがって (b) が成り立つ。 $m = 2^{uk+u-1} + s$ とおくと、(b) により、(d) が成り立つ。

したがって、定理 29(u) と、(d) により、

$$\begin{aligned} J_u(u(2^{u(k+1)} + t)) &= J_u(2u(2^{uk+u-1} + s) + u) = J_u(2um + u) = J_u(um) - \\ & 2(u - 1) + 1 \\ &= 2(2s + 1) + 1 = 2t + 1 \end{aligned}$$

(d)により、整数 s は (a) を満たし、したがって (c) により、定理 29 の (u) を $m = 2^{uk+u-1} + s$ の場合に使うことができる。

$$\begin{aligned} & \text{したがって (b) と (c) により、} J_u(u(2^{u(k+1)} + t)) = 2J_u(u(2^{uk+u-1} + s)) - \\ & 2(u-1)(2^{uk+u-1} + s) + 1 \\ & = 2(2s+1) + 1 = 4s+3 = 2t+1. \end{aligned}$$

[2]. p は自然数で、 $1 \leq p < u$ を満たすとする。この定理 (p) が、 $h = k+1$ の場合に正しいと仮定して、

定理の (p+1) を $h = k+1$ の場合に証明する。

s は非負の整数で、

$$s < 2^{u(k+1)+p-1}. \text{ を満たすとする.} \quad (\text{e})$$

仮定により、定理の (p) を、 $h = k+1$ の場合に使うと、

$$\begin{aligned} & J_u(u(2^{u(k+1)+p-1} + s)) \\ & = (p-1)2^{u(k+1)+p-1} + (p+1)s + 1, \end{aligned} \quad (\text{f})$$

したがって、(f) により

$$\begin{aligned} & J_u(u(2^{u(k+1)+p-1} + s)) - (p-1)(2^{u(k+1)+p-1} + s) \\ & = (p-1) \times 2^{u(k+1)+p-1} + (p+1)s + 1 - (p-1)(2^{u(k+1)+p-1} + s) \\ & = 2s + 1 > 0. \end{aligned} \quad (\text{g})$$

(f) と (e) により、

$$\begin{aligned} & J_u(u(2^{u(k+1)+p-1} + s)) - p(2^{u(k+1)+p-1} + s) \\ & = -(2^{u(k+1)+p-1}) + s + 1 \\ & = s - 2^{u(k+1)+p-1} + 1 \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{h})$$

(h) と $p \leq u-1$ により、

$$J_u(u(2^{u(k+1)+p-1} + s)) - (u-1)(2^{u(k+1)+p-1} + s) \leq 0. \quad (\text{i})$$

t は、非負整数で

$$0 \leq t < 2^{u(k+1)+p}. \quad (\text{j})$$

を満たすとする。これから、 $J_u(u(2^{u(k+1)+p} + t)) = p \times 2^{u(k+1)+p} + (p+2)t + 1$ を証明する。

[2.1]. t を偶数であると仮定する。このとき、非負整数 s があって、 $t = 2s$ を満たす。 $m = 2^{u(k+1)+p-1} + s$ とおく。(j) により、この整数 s は (e) を満たし、したがって (i) により、 $J_u(um) - (u-1)m \leq 0$ なので、定理 28 (1) を使うことができる。

したがって 定理 28(1) と (f) により、

$$\begin{aligned}
& J_u(u(2^{u(k+1)+p} + t)) \\
&= J_u(2um) = 2J_u(um) + 2m - 1 \\
&= 2J_u(u(2^{u(k+1)+p-1} + s)) \\
&\quad + 2(2^{u(k+1)+p-1} + s) - 1 \\
&= 2(p-1) \times 2^{u(k+1)+p-1} + 2(p+1)s + 2 + 2(2^{u(k+1)+p-1} + s) - 1 \\
&= 2p \times 2^{u(k+1)+p-1} + (2p+4)s + 1 \\
&= p \times 2^{u(k+1)+p} + (p+2)t + 1
\end{aligned}$$

これにより、 t が偶数の場合については、定理の $(p+1)$ が $h = k+1$ の場合に正しいことを証明した。

[2.2]. 次に t が奇数であると仮定する。このとき、非負整数 s があって $t = 2s + 1$ となる。 $m = 2^{u(k+1)+p-1} + s$ とおく。(j) により、自然数 s は (e) を満たし、(g) と (h) により、 $J_u(um) - (p-1)m > 0$ かつ、 $J_u(um) - pm \leq 0$ なので、定理 2(p) を使うことができる。したがって、定理 2(p) と (f) により

$$\begin{aligned}
& J_u(u(2^{u(k+1)+p} + t)) \\
&= J_u(2um + u) \\
&= J_u(um) + 2m + p + 1 \\
&= 2J_u(u(2^{u(k+1)+p-1} + s)) + 2(2^{u(k+1)+p-1} + s) + p + 1 \\
&= 2((p-1)2^{u(k+1)+p-1} + (p+1)s + 1) + 2(2^{u(k+1)+p-1} + s) + p + 1 \\
&= 2p2^{u(k+1)+p-1} + (p+2)(2s+1) + 1 \\
&= p2^{u(k+1)+p} + (p+2)t + 1.
\end{aligned}$$

t が奇数の場合については、定理の $(p+1)$ が $h = k+1$ の場合に正しいことを証明した。

[1], [2] と数学的帰納法により、この定理の証明は終わる。

定理 31 の結果を簡略化すると、次の定理を得る。この定理は、 $J_u(n)$ の値を実際に計算する場合に有用である。

定理 32. u の倍数である n と、自然数 u に対して、 $t = \text{Floor}[\log_2(\frac{n}{u})]$, $k = \text{Mod}[t, u]$ とおく。ここで、 $\text{Mod}[t, u]$ は t を u で割ったときの余りである。このようにすると、

$$J_u(n) = \frac{(k+2)n}{u} - 2^{t+1} + 1$$

となる。

証明. $n = u(2^{uh+k} + s)$ とおく、ただし $0 \leq s < 2^{uh+k}$. $t = uh + k =$

$\text{Floor}[\log_2(\frac{n}{u})]$ とおくと、 $k = \text{Mod}[t, u]$ かつ $s = \frac{n}{u} - 2^{uh+k}$ である。定理 31 により、 $J_u(n) = J_u(u(2^{uh+k} + s)) = k \times 2^{uh+k} + (k+2)s + 1 = k \times 2^t + (k+2)(\frac{n}{u} - 2^t) + 1 = \frac{(k+2)n}{u} - 2^{t+1} + 1$

注意. 数式処理システムの Mathematica を使って、ヨセフス問題を研究するには、Cowen と Kennedy による、[1] を参考にしていきたい。

2.18 先生の癖の問題

宮寺が授業で、以下の問題を扱った。これは田村三郎と藤村幸三郎が、[34] で出した問題である。

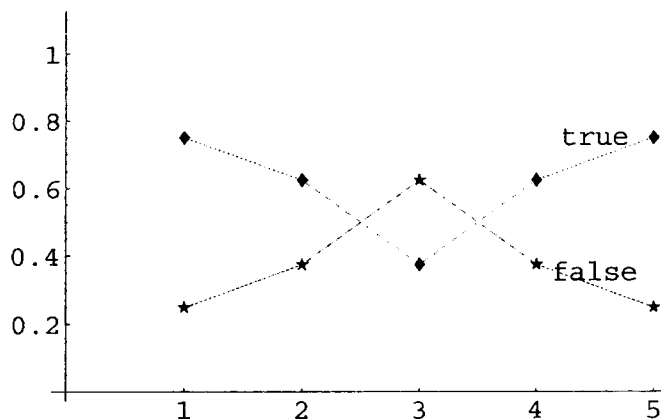
「A 先生のことだけどね、よく $\bigcirc \times$ 式の問題をだすだろう」「そうだな」「ところが先生の癖を研究したやつがいてね。そいつの言うことによるとだが、A 先生は \times より \bigcirc の方が多いような問題を出すんだそうだ」「ほう。それはおもしろいね」「その上、同じ答え (\bigcirc ばかりとか、 \times ばかり) が三つ以上続くこともないそうだ」「ふうん」

例 26. 「5 問出されたとき、正解が全然わからんとしたら、どんな解答をしたら有利だろうかね」

この問題は手で計算してもすぐにてきる。先生の癖を満たす解答をすべて書き出す。ただし、 \bigcirc を数字の 1 で、 \times を数字の 0 で表すと、

$\{\{0, 1, 0, 1, 1\}, \{0, 1, 1, 0, 1\}, \{1, 0, 0, 1, 1\}, \{1, 0, 1, 0, 1\}, \{1, 0, 1, 1, 0\}, \{1, 1, 0, 0, 1\}, \{1, 1, 0, 1, 0\}, \{1, 1, 0, 1, 1\}\}$ となる。

これをグラフにすると次のようになる。



... Figure (35)

これでわかることは、一番良い戦略は、 $\{1, 1, 0, 1, 1\}$ となる。すなわち、3 問目だけを \times にして、あとは \bigcirc にすればよい。

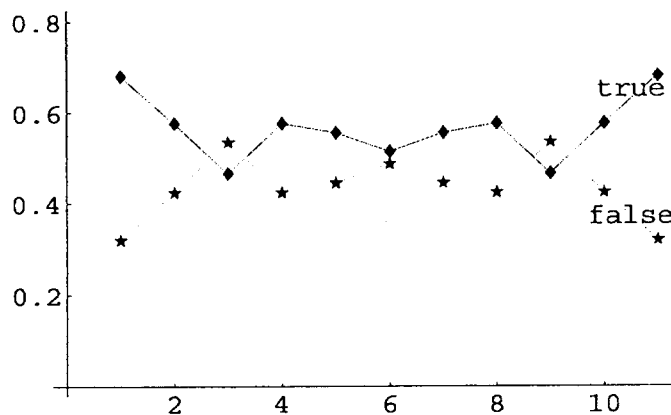
宮寺は以上のことを、教室で黒板で説明した。そして、これも問題の数を増やしてみたら面白いかもしれないというコメントを残して、授業を終えた。しかし、問題の数を6にするだけでも大変なので、宮寺自身はこれまで何年間も同じ問題を教えていたにも関わらず、自分では考えていなかった。

教室にいた山崎直士、湯之上英雄、宮本賢治、藤井毅朗、樋口真之、多田浩之が考えて始めた。ただし、問題点は手で計算することの困難さであった。彼らは Basic でプログラムを作る力があつたので、問題数を増やして実験し、非常に興味深い事実を見つけた。

その後宮寺は同じことを Mathematica で実験し、グラフィックスで表すことによってさらに新しい事実を見つけた。

例 27. 問題が 11 問ある場合はどうなるか。このくらいの量になると、手で計算することは難しい。

これをグラフにすると次のようになる。

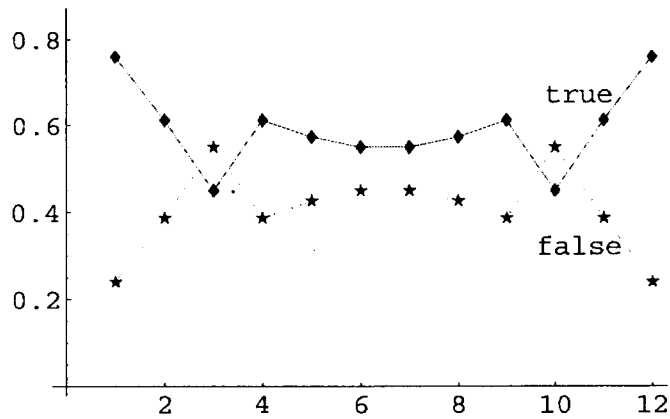


… Figure (36)

したがって、最適な戦略は、

{1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1}

例 28. 問題が 12 問ある場合はどうなるか
これをグラフにすると次のようになる。

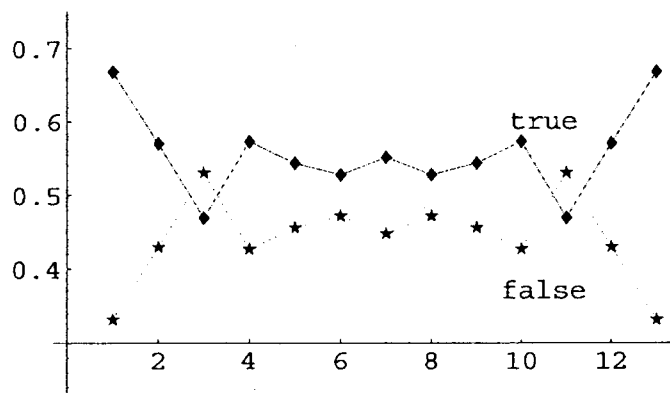


… Figure (34)

したがって、最適な戦略は、

{1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1}

例 29. 問題が 13 問ある場合はどうなるか
これをグラフにすると次のようになる。



… Figure (35)

したがって、最適な戦略は、

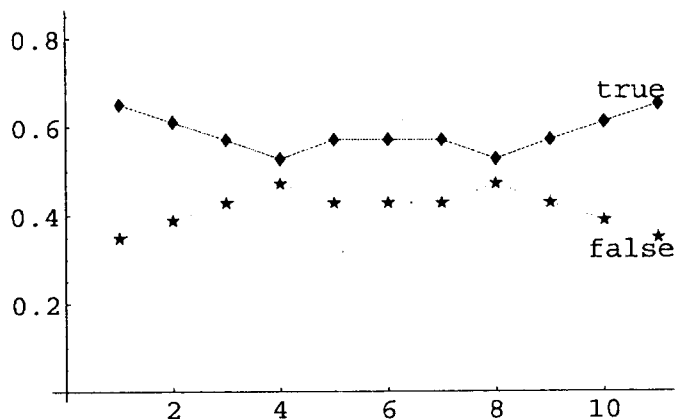
{1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1}

これらの例からわかるように、この先生の癖の問題では、初めから 3 番目と、終わりから 3 番目に×とし、それ以外をすべて○にするのが最適の戦略になる。ただし、この事実を一般的に証明することは非常に困難であった。生徒には難しすぎて、宮寺が 2 週間努力したが、部分的に解決しただけであった。結局大阪大学で離散数学を研究していた河野晋に問題を見せ、彼が 3 週間以上かけて証明した。しかし、証明が非常に長く、40 ページを越えてしまった。ページが多いために、証明はまだどこにも発表していない。

ただし、問題の数を 11 とした場合を、よく知られたパズルサイトの MathPuzzle.com[16] にパズルとして送ったところ、興味を持ってくれて、掲載され、多くの読者から反響があった。

Open problems. 例 先生の癖を一部変更する. ×より○の方が多くはそのままで、同じ答え(○ばかりとか、×ばかり)が4つ以上続くこともない.

この場合は、次のようなグラフになる.



... Figure (36)

したがって、最適な戦略は、

{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}

したがって、最適な戦略はすべてを○にすることである。

このことは、計算機を使った実験では一般的に成立つように思える。しかし、それが正しいかどうかわかっていない。

同じ答が3つ以上続かないという場合に出現する折れ線グラフには、何かの規則性があるように思える。しかし、規則性を見つけるのは難しいかもしれない。

注意. このこと以外でも、数式処理システムを使って、いろんな数学的実験を行っていると、興味深い現象に多く出会う。だが、数学的に証明できるのはその一部でしかない。そうであっても、興味深い現象を目撃して、記録することも、重要なことではないかと考える。それは、実験物理と理論物理の違いと似ているかもしれない。

多くの実験科学は興味深い現象を見つけ、再現することを重視する。もちろんそれに対して理論的に説明しようとする理論科学は重要であるが、説明できない現象でも、興味深いものは重要である。

数式処理システムによって、多くの数学的な実験が可能になった現在では、そのような現象を集めることも重要ではないかと考える。

2.19 $n^{n^{n^{\dots^n}}}$ の1桁目を計算する世界で一番速いアルゴリズム

何か面白いテーマがないかと藤井一彰が宮寺に相談に来た。彼が、宮寺と話しているときに、情報の授業を担当している丹羽時彦が問題を与えてくれた。それは、 $n^{n^{n^{\dots^n}}}$ を計算したときの、1桁目を求めるプログラムを作るというものだった。

宮寺も、この問題に興味を持ち、藤井に考えてみるように薦めた。それ以後、時々藤井は宮寺のところへ来て、計算のアドバイスをもらっていた。

そして、3週間ほど立ったときに、非常に意外な結果を持ってきた。それは、世界で一番早いアルゴリズムと言えるものだった。

$n^{n^{n^{\dots^n}}}$ について考える。ただし、ここでは n を n 回使っている。この数は有名なコンピュータサイエンスの学者である Knuth によって $n \uparrow n$ という記号で表されている数である。この数は $n \geq 4$ であるときには、非常に大きくなることが知られている。例えば $n = 4$ のとき、44 の桁数は約 87.23047×10^{153} である。 n が大きくなるにつれて、この数は増加していき、どのような計算機でも正確には計算できない大きさになる。 $n^{n^{n^{\dots^n}}}$ を正確に計算することは無理なので、多くの人は $nn \pmod{m}$ 、すなわち $n \uparrow n$ をある自然数 m で割った場合の余りを計算することを研究している。この余りを計算するための良いアルゴリズムについては、Ilan Vardi [36] に研究がある。私たちはまず、 $n \uparrow n \pmod{10}$ を計算する良い方法を探した。しかしその途中で、 $n \uparrow n \pmod{10}$ が $n \pmod{20}$ にしか依存しないことを見つけた。この事実を使うと、 $n \uparrow n \pmod{10}$ を計算するためには、 $n \pmod{20}$ 、すなわち n を 20 で割った場合の余りが分かれば良いということになる。これはアルゴリズムとして考えると $n \uparrow n \pmod{10}$ を計算するための世界一速いものだと言える。定理にある表を見て欲しい。

定理 33. $Mod[n, 20]$ と $Mod[n \uparrow \uparrow, 10]$ の対応表。

$Mod[n, 20]$ の値	$Mod[n \uparrow\uparrow, 10]$ の値
0	0
1	1
2	$6(n > 2) 4(n = 2)$
3	7
4	6
5	5
6	6
7	3
8	6
9	9
10	0
11	1
12	6
13	3
14	6
15	5
16	6
17	7
18	6
19	9

証明は略する.

この定理の証明は、藤井には難しかったので、宮寺が担当した。しかし、証明は初等整数論の範囲で、それほど困難なものではない。この研究は International Mathematica syposium 2002[9] において発表した。

例. この定理の使い方について説明する。 $27 \uparrow\uparrow 27 \pmod{10}$ を計算したいとする。27 を 20 で割ると、余りが 7 になる。7 に対して、上の表を使うと 3 を得る。これにより、
 $27 \uparrow\uparrow 27 \pmod{10}$ である。

第3章 活動経過と教育的支援

この章では、高校生がどのように発見したかについての経過の説明を行う。この研究の中で、特にうまくいったのは、ロシアンルーレットの研究である。この研究において、フィボナッチ的な数列の定理を発見した生徒に、研究経過を書かせた。高校生が書いたもので、わかりやすさという点ではまだ改良の余地があると思うが、研究に携わった生徒の生の声として貴重であり、ここに掲載する。

$B_2(n)$ 、 $B_3(n)$ とフィボナッチ数列の関係は既に見つかっていた。しかし、 $B_4(n)$ 、 $B_5(n)$ などの数列についてはなかなか見つからずにいた。その後、約1ヶ月かけて、 $B_4(n)$ については見つけたものの、 $B_5(n)$ 以降でまたしても行き詰ってしまった。しかし、しばらくたった後、次のような過程を経て見つけた。 $B_5(n)$ の数列を、 $5n+1$ 番目、 $5n+2$ 番目、 $5n+3$ 番目、 $5n+4$ 番目、 $5n+5$ 番目 (n は非負整数) というふうに5つのリストに分けると、
{1, 9, 98, 1085, 12031, 133424, 1479693, 16410045, 181990186, 2018302089, 22383313163}
{1, 14, 158, 1755, 19466, 215884, 2394193, 26552010, 294466306, 3265681379, 36216961478}
{2, 23, 256, 2840, 31497, 349308, 3873886, 42962055, 476456492, 5283983468, 58600274641}
{3, 37, 414, 4595, 50963, 565192, 6268079, 69514065, 770922798, 8549664847, 94817236119}
{5, 60, 670, 7435, 82460, 914500, 10141965, 112476120, 1247379290, 13833648315, 153417510760} となる。また、フィボナッチ数列を同様に5つのリストに分けると、{1, 8, 89, 987, 10946, 121393, 1346269, 14930352, 165580141, 1836311903, 20365011074}
{1, 13, 144, 1597, 17711, 196418, 2178309, 24157817, 267914296, 2971215073, 32951280099}
{2, 21, 233, 2584, 28657, 317811, 3524578, 39088169, 433494437, 4807526976, 53316291173}
{3, 34, 377, 4181, 46368, 514229, 5702887, 63245986, 701408733, 7778742049, 86267571272}

{5, 55, 610, 6765, 75025, 832040, 9227465, 102334155, 1134903170, 12586269025, 139583862445}

それぞれの $5n+1$ の場合を比べると

{1, 9, 98, 1085, 12031, 133424, 1479693, 16410045, 181990186, ...} {1, 8, 89, 987, 10946, 121393, 1346269, 14930352, 165580141, ...} となる. このとき、上の数列の 1 番目と下の数列の 2 番目、上の数列の 2 番目と下の数列の 3 番目というふうに、上の数列の m 番目と下の数列の $m+1$ 番目の上二桁を比べると、とてもよく似ている. そこで、上の数列を 10 倍して下の数列と比べると、その差が

{-2, -1, 7, 96, 1083, 12029, 133422, 1479691, 16410043, 181990184, 2018302087, ...}

となる. そこで、この数列と $F_{5(5n+1)}$ の数列を比べると

{1, 9, 98, 1085, 12031, 133424, 1479693, 16410045, 181990186, ...} {-2, -1, 7, 96, 1083, 12029, 133422, 1479691, 16410043, 181990184, 2018302087}

となる. そこで上の数列の n 番目とから下の数列の $n+1$ 番目を引いてみると全て 2 となる. また、これを余り 2 のとき、3 のとき …… とやると、すべて場合で定数が出てきた. これより、 $B_5(n) \times 10 - F(n) - B_5(n-1)$ の計算で定数が出てくることがわかった. 具体的には $B_5(5n-4) - (F(5n+6) - 10B_5(5n+1)) = 2$

$$B_5(5n-3) - (F(5n+7) - 10B_5(5n+2)) = -3$$

$$B_5(5n-2) - (F(5n+8) - 10B_5(5n+3)) = -1$$

$$B_5(5n-1) - (F(5n+9) - 10B_5(5n+4)) = -4$$

$$B_5(5n) - (F(5n+10) - 10B_5(5n+5)) = -5$$

そこで、同じようなことがほかのフィボナッチもどき数列にもあるかを考えてみた. すると、みつかっていた $B_4(n)$ の数列では $4n+1$ 番目 (n は非負整数) の部分を取り出すと

{1, 6, 40, 273, 1870, 12816, 87841, 602070, 4126648, 28284465} また、フィボナッチ数列で同様にすると

{1, 5, 34, 233, 1597, 10946, 75025, 514229, 3524578, 24157817} となる. ここで、下の数列を 5 倍して上の数列のひとつ先の (下の数列の 1 番目なら 5 倍した後上の数列の 2 番目と …) というように比べると

{0, 4, 33, 232, 1596, 10945, 75024, 514228, 3524577, 24157816}

となる. またそれをフィボナッチ数列の $n+1$ 番目と比べると {1, 5, 34, 233, 1597, 10946, 75025, 514229, 3524578, 24157817}

{0, 4, 33, 232, 1596, 10945, 75024, 514228, 3524577, 24157816}

となるが、この二つの数列を比べると下の数列の数とその右上にある数の差がすべて 1 であることがわかった. 同じように $4n+2, 4n+3, 4n$ の場合でもやってみると同じようになることがわかった. さらに同じことを B_6, B_7, B_7, \dots とやっていった. その結果、このような公式がでてきた. B_6 については、

$$F(6n+1) - 16B_6(6n-5) - F(6n-5) = -4$$

$$F(6n+2) - 16B_6(6n-4) - F(6n-4) = 4$$

$$F(6n+3) - 16B_6(6n-3) - F(6n-3) = 0$$

$$F(6n+4) - 16B_6(6n-2) - F(6n-2) = 4$$

$$F(6n+5) - 16B_6(6n-1) - F(6n-1) = 4$$

$$F(6n+6) - 16B_6(6n) - F(6n) = 8$$

B_7 については,

$$29B_7(7n-6) - F(7n+1) - F(7n-6) = 7$$

$$29B_7(7n-5) - F(7n+2) - F(7n-5) = -6$$

$$29B_7(7n-4) - F(7n+3) - F(7n-4) = 1$$

$$29B_7(7n-3) - F(7n+4) - F(7n-3) = -5$$

$$29B_7(7n-2) - F(7n+5) - F(7n-2) = -4$$

$$29B_7(7n-1) - F(7n+6) - F(7n-1) = -9$$

$$29B_7(7n) - F(7n+7) - F(7n) = -13$$

B_8 については,

$$F(8n+1) - 45B_8(8n-7) - F(8n-7) = -12$$

$$F(8n+2) - 45B_8(8n-6) - F(8n-6) = 9$$

$$F(8n+3) - 45B_8(8n-5) - F(8n-5) = -3$$

$$F(8n+4) - 45B_8(8n-4) - F(8n-4) = 6$$

$$F(8n+5) - 45B_8(8n-3) - F(8n-3) = 3$$

$$F(8n+6) - 45B_8(8n-2) - F(8n-2) = 9$$

$$F(8n+7) - 45B_8(8n-1) - F(8n-1) = 12$$

$$F(8n+8) - 45B_8(8n) - F(8n) = 21$$

すると、出てくる定数、フィボナッチもどきの項の係数、フィボナッチもどきの項と符号に規則性があることがわかった。フィボナッチもどきの符号は人数が奇数なら+、偶数なら-になる。係数は人数を m として $m=1,2,3,\dots$ としていくと

1, 1, 4, 5, 11, 16, 29, 45, 76, 121, 199, 320, 521 となる。この数列は1つおきに2足されるフィボナッチもどきである。これは

$2 \times (F(m+1) - 1 + (-1)^{m+1})$ で表せる。この関数を $A(m)$ とする。また、出てくる定数については $n+3$ の定数は $n+1$ の定数と $n+2$ の定数の和であることがわかる。したがって $n+1$ の定数と $n+2$ の定数がわかれば他の定数もわかることになる。 $n+1$ の定数を並べると

-1, 0, 0, -1, 2, -4, 7, -12, 20, -33 これをみると、1の場合を除いて奇数のときは+、偶数のときは-になっていることがわかる。これは

$(F(m-1) - 1) \times (-1)^{m+1}$ で表せる。この数列は常に1足されるフィボナッチもどきである。この関数を $P(m)$ とする。また $n+2$ の場合は

-1, -2, -2, -3, -4, -6, -9, -14, -22, -35 とこれも毎回1足され

るフィボナッチもどきであることがわかる。これは $-F(m-1) - 1$ で表せる。この関数を $Q(m)$ とする。

$n+3$ の定数は $P(m) + Q(m)$ 、 $n+4$ の定数は $P(m) + 2Q(m)$ 、 $2P(m) + 3Q(m)$ …というふうに表せる。

よって $n+k$ の定数であれば

$F(m-2)P(m) + F(m-1)Q(m)$ で表せる。これより m 回ごとに 1 足されるフィボナッチもどき数列の n 番目は、 m が奇数の場合は

$$B_m(n) = (F(n+m) + F(n) + (F(\text{mod}(n,m) - 1)Q(m-1) + F(\text{mod}(n,m) - 2)P(m-1)))/A(m)$$

偶数の場合は

$$B_m(n) = (F(n+m) - (F(\text{mod}(n,m) - 1)Q(m-1) + F(n) + F(\text{mod}(n,m) - 2)P(m-1)))/A(m)$$

となることがわかった。

あとは、ここで使った関数 $P(n)$ 、 $A(n)$ を、 $F(n)$ で表せば、定理 21 が得られる。

この後、教師（著者）がこの公式を、少し改良して、定理 20 とした。

ここで紹介しているもの以外にも、多くの研究成果がある。

ロシアンルーレットについては、ここで紹介したもの以外にも、多くの成果がある。シリンダーの数を一定にするときに、弾丸の数を変えると、負ける率がどのように変化するかという問題がある。これについても、いくつか興味深い事実を見つけている。これについては、未発表である。

二人のプレーヤーがそれぞれ、違った銃を持って参加する場合についても、研究があり、パスカル的な性質が、確率の作る三角形の一部に成立することがわかっている。これについては未発表である。

p 人のプレーヤーが、一人が残るまでプレーする場合に、特定の一人が残る確率を並べると、やはりパスカル的な性質を持つことが証明されている。これについては未発表である。

毒入りチョコレート問題というパズルがある。これは不等式の制限がついた石取りゲームであり、良く知られたパズルサイトの [13] に掲載されている。

毒入りチョコレートの問題は、峰松によるきれいな公式が作られているが、これもまだ未発表である。

裏表パズルの一種を研究し、既に新しい結果を得ている。それは、パズルサイトの [?] に掲載されている。

ナイトパズルに関する研究があり、[26] で掲載された。この雑誌は数学の

美しさを表現する研究を載せることになっている。このナイトパズルは、数学的には中学生や小学生でも理解できるものであるが、とても美しい図形を作ることができる。これは、小学校から高校までの総合学習の教材に使うことができるものである。

フィボナッチ数列をある数で割った場合の剰余についての研究は、築山が始めたもので、峰松との共同研究が [10] で発表された。ただし、これは新しい発見ではなく、高校生による再発見として評価された。

しかしその後、フィボナッチ数列の剰余が作る周期が、不思議なグラフを描くことが瀧本によって発見されている。この事実もまだ未発表である。

また、フィボナッチ数列の剰余の周期と極めて近いことが、フィボナッチ数列に似た数列でも成立することが、松井と山内によって発見されており、興味深い事実が多く見つかっている。ただし、その多くはまだ証明できていない。

松井と山内による研究は順調に進み、その成果はまず [24] に掲載された。この雑誌に掲載された内容をさらに発展させた内容を、[5] として、カナダのサイエンスフェアに提出し、物理数学部門の 1 位を取ることができた。

また、松井は広中平祐の創設した、数理の翼セミナーにおいて、全国から集まった生徒に対して、高校生による数学研究を指導するということで、セミナーに参加することになっている。

また、この高校生達の研究は Mathematica の開発元の Wolfram Research から評価されて、最新版の Mathematica の贈呈を受けた。

第4章 考察

4.1 高校生による研究と伝統的な数学教育の関係

高校生による数学研究は、これまでの数学教育の中にはあまり例がない。しかし、数学以外の自然科学の中では、高校生によるユニークな研究は数多く報告されている。一つには、これらの自然科学では、フィールドワークや、実験など、地道な活動がそのまま研究になるのに対して、数学ではそうでないということがある。しかし、コンピュータと数学用ソフトが高校生にも利用可能になった現在では、数学においても高校生による研究は、十分可能になってきている。

現在世界中では、数多くのサイエンスフェアがあり、多くの自然科学の研究成果が高校生によって報告されている。しかし、これらのサイエンスフェアでも、数学の研究成果が発表されることは殆どない。既に知られている数学的事実を基にして、映像を作ったりするようなタイプの研究発表に限られるようである。

このように、高校生による数学研究が行われていないのは、どのようにやれば良いかが全く知られていないことによる。ここでは、高校生による数学研究について具体的な方法を、伝統的な数学教育と対比しながら考察していきたい。

有名なポリヤ教授は、数学の問題を解く方法について深い研究を残している。それは、数学の問題に出会ったときに、どのように糸口をつかみ、問題を解いていくかという方法論である。では、数学の研究を高校生が行うときの方法論を考えてみる。研究の方法論と、問題を解く場合の方法では、一つの大きな違いがある。それは、問題を解く場合には、かなり広い範囲の問題に対して対応する必要があるのに対して、研究では問題や方法を選ぶことができる。高校生による研究が成功するために、問題や方法を限定することは良い選択である。

従って、高校生による研究を成功させたいと考える人は、まず研究対象を限定すべきである。これまでの、宮寺の経験によれば、離散数学とそれに近い範囲の数学は、高校生による研究の分野として適している。ただし、それ以外にも可能な分野はあるかもしれないが、まだわからない。従って、高校生が研究を始めるのであれば、まず離散数学から始めるのが良いだろう。

では離散数学の中でどのような問題が適しているだろうか。高校生が始め

るとすれば、パズル的な問題が良いと考える。なぜなら、パズル的な問題であれば、高校生が興味を持つことが可能であるからだ。研究を成功させるには、まずテーマに興味を持つことが大切である。「先生の癖」の問題、「フォアボールだけで何点とれるだろうか」などの問題は、パズルの本から考えた問題である。もしパズルの問題を扱うとすれば、気をつけることは2つある。

まず、数学的なセンスの良い問題を扱うことが必要である。そのためには、数学的な素養が豊かな作家の問題を扱う方が良い。パズルの中には、数学的な研究の余地が全くないものもある。私が使った問題では、田村三郎と藤村三郎などによるものは、良い発展性を持っている。他には、ピーター・フランクフル氏や秋山仁のように、離散数学の研究者が問題をパズル風にして紹介しているものも、テーマとして適当である。ただし、気をつけなくてはならないことは、離散数学の中には、パズル風でありながら、既に多くの学者によって研究されて、新しい研究の余地があまりないものもある。数学セミナーの「エレガントな解答をもとむ」や、日経サイエンス(サイエンティフィックアメリカン誌)のパズルコーナーにも、面白い問題がある。

離散的確率論や組み合わせたゲーム理論の中にも、高校生が興味を持って研究できるテーマがある。「パスカル的な三角形の数学的構造」は、もともと離散的な確率論の、「ロシアンルーレットの理論」から始まった。

伝統的なフィボナッチ数列とか、ヨセフス問題のようなものは、既に膨大な研究の蓄積がある。従って、新しい研究は難しいとも考えることができるが、私たちの経験では、新しい事実を発見することができた。それは、高校生の考え方が、普通の研究者とはかなり違うからである。

このような問題を扱うとして、次は何をすれば良いのであろうか。まずすべきことは、高校生に問題を変形させることである。例えば「先生の癖」の問題では、先生が出題する問題は5問であったが、それをもっと増やすことで十分に面白い結果が現れた。ロシアンルーレットでも同じである。数を増やして一般化するというような、簡単な研究方法が十分に通用するのである。これは、専門の数学者が真剣に取り組んだ問題でないということにもよるのであろう。専門の数学者の研究対象になっている場合は、一般化するというようなことはすぐに誰かによって行われてしまう。

少しルールを変えたりすることも面白い結果を生む。ルールを変えることは、高校生にとって難しくはない。むしろ高校の数学教師の方が、面白い変形を作ることに困難を覚えるようである。「フォアボールだけで何点とれるだろうか」の問題では、ヒットでなく得点を考えるとか、1イニングではなく、1試合を考えるとというようなことは生徒にとっては簡単な変形である。

生徒たちの能力のうち、最も優れているのは、数字のリストの中に、何かの法則を見つけることである。教師の目から見ると、何も法則が見えないのに、生徒たちは見つけてしまう。数列の法則を探すとか、組み合わせゲームの勝者を探すとか、後手必勝のパターンを探すなどのテーマは、高校生には適

している。このような範囲で問題を見つけてくれば、成果が出る可能性は大きいだろう。

いったん面白い問題を見つけて研究が始まると、しばらくの間は、高校生に好きなようにやらせてみる必要がある。

時には、指導者から見るとつまらないと思えるようなことを高校生が熱心に研究することもある。しかし、高校生の発想は、指導する者の想像を超えている場合がある。私たちの研究でも、宮寺が理解できないようなことを生徒が行い、宮寺が研究を止めずにいたために、新しい発見が可能であった場合が多い。

だから、高校生の発想の可能性を信じて、しばらくは生徒の好きなようにさせておくことが大切である。また、生徒がふとつぶやいた一言にも注意を払うことが大切である。 $(a+b)^n$ の展開式の形の問題では、生徒の一言の疑問から始まっている。ロシアルーレットの確率論で、実弾の数がわからない場合の問題は、生徒がふとつぶやいた言葉から始まっている。

数式処理システムを使うことも重要な要素である。計算機を使わない研究が高校生にどの程度可能であるかはわからない。また、数式処理システムを使わずに、Basic、C、Java、Pascal などの言語だけでどのくらいの研究ができるかもわからない。しかし、数式処理システムを使うことは高校生の研究にとって非常に有利である。計算の速度は、高校生が研究する数学の分野ではそれほど大切な要素ではない。大切なことは、なるべく早くプログラムを作って、規則性を見つけることや、予想を作ること、そして作った公式を検証することである。そのためには、いろんな数学的関数や操作を既持っている数式処理システムを使うことは研究にとって有効である。

むしろ、数学的な法則を見つけようと思うと、あまりに大きなデータでは難しいことが多いように思う。このようなことを考えると、早くプログラムを作ることが大切であって、コンパイル言語のような速さはなくても良いと言える。

ただし、Mathematica のような数式処理システムは、内部関数はコンパイルされていて速いし、プログラムをコンパイルする機能を持っている。

私たちの研究においては、数式処理システムだからできたような発見も多い。ロシアルーレットの研究では、分数を使えることや、作った数学的公式をそのまま Mathematica の関数として使えたことが研究にとって有効だった。 $(a+b)^n$ や 9999999999^n の研究も計算機代数なしには不可能であった。

循環数の平方根の問題では、数式処理の平方根の扱いがなかったら、思いつかなかった事実を発見している。またグラフィックスに強いことも、シュルピンスキーガスケットに良く似た図形の発見には有効であった。

このようなことを考えると、今から高校生による数学研究を行うとすれば、使いやすい数式処理システムを使えば良いと考える。このことも、この節の最初に述べた、研究対象を限定しても良いということから言える。数式処理

システムを使わないでどこまでやれるかということも、将来の研究テーマであるが、現在に状況で行うとすれば、この方法の有効性ははっきりしている。

また、数学研究の経験を持つ人がいて、アドバイスをすることが必要である。教えている教師自身が研究の経験を持っているならば、環境としては非常に良くなる。私たちの研究の場合は、宮寺が数学の研究者であることが大きな要素になっている。

しかし、常時近くにおいてアドバイスを与えることができなくても、相談できる研究者を持っていたら、高校生の研究は可能だと考える。

高校生を教えている教師が研究経験がなくても、数学研究に関心を持ち、数学者と連絡を取りながら、アドバイスをもらえばよいのである。

数学者の中には、数学教育に深い関心を持つ人は多い。高校生による数学研究が可能であることを知れば、協力しようとする人たちは少なくないと考える。

良い問題を選ぶことは、とても大切である。これは、ある程度研究経験がないと難しいかもしれない。したがって、研究の助言を行う人が必要である。

一度何か面白い事実を発見したら、一般化することが必要なこともあるし、もっと具体的なものにする方が良いこともある。このような判断は、生徒には難しいだろう。研究についてある程度の経験を持った人のアドバイスが必要である。

私たちの場合は、数式処理システムを高校生の研究に導入した最初のチームであるために、幸運に多くの新しい現象を発見した。どのような研究でも起こりうることであるが、次の続く人たちの方が発見はやや難しくなるかもしれない。

そのことを考えると、多くの数学者が参加して、その人たちの持つ専門的知識を活用することによって、多くのテーマを作ることが必要である。

個人的には、カオス、フラクタル、数理生物、結び目理論などの分野でも、専門家の助力があれば良い研究が可能ではないかと考える。

興味深い事実を見つけると、次は数学的な証明が必要になる。証明することは、高校生にとって可能な場合と、そうでない場合がある。ここで紹介した成果でも、ロシアンルーレットの確率がパスカル的な三角形になることは、高校生にとっても証明可能だったし、フィボナッチ数列に似た数列でも、多くの場合が可能であった。特に、フィボナッチでは帰納法を使う場合が多いので、面倒だが高校生にも可能であった。

離散数学の中には、事実を見つけることは簡単でも証明が困難である問題と、事実さえ見つかれば、あとは帰納法で証明できるものもある。帰納法ならば、かなり複雑になっても高校生の手におえることが多い。

私たちの経験では、解析的な証明が必要な、確率の極限などは、高校生には無理だった。

高校生や中学生による研究が本当に可能であるのかという疑問に答えるた

めに、この記事ではこれまでの成果のうち、まとまっているものをできるだけ多く掲載した。しかし、結果が出ているものの、まだまとめていない研究もかなり残っている。

高校生による研究の中でも、新入生が4月に発見した内容もあり、中学生の研究が可能であることは間違いないであろう。

著者自身も、最初はビギナーズブラックではないかと思っていた。しかし研究が進み、どんどん新しい事実が見つかるにつれて、高校生による研究の可能性に自信を持つようになった。

新しい発見が生まれると、それを発表できる場が必要である。

何か面白い結果が出て、証明することができたら、指導者はそれを発表する機会を探す。ただし、日本では高校生から大学教養レベルの数学の新しい結果を発表できる雑誌はほとんどない。

数学セミナーに時々読者の研究ノートの掲載があるが、分量の制限が大きい。私たちの研究では、あの分量にまとめることができたものはない。そのため私たちの研究のほとんどは外国の雑誌に掲載されている。

英語で発表するのであれば、American Mathematical Monthly, Mathematics Magazine, Mathematical Gazette, Fibonacci Quartely, Mathematica in education and research, Visual Mathematics, Archimedes-lab など多くの雑誌がある。

学会発表も、International Mathematica symposium などでは、良い発表の機会が与えられる。日本では、数式処理学会などが良い機会を提供している。

これは高校生に限らないが、自分の発見したことを発表し、評価してもらうという経験は本当に嬉しいことである。自分の名前が雑誌に掲載されることは、生徒たちにとって、非常にうれしいことである。これは専門の数学者も同じであるが、高校生の場合はできるだけ早く掲載されることが次の研究の励みになる。ただし、高校生と共に研究してきて、彼らが思いつくような範囲の数学で、証明の分量が長くなるものに何度も出会った。先生の癖の問題や、ヨセフス問題などでは、証明が40ページを越えるという場合が多かった。数学的な事実としては興味深いのが、非常に重要な数学的問題とは言えない定理の証明を40ページ以上も掲載してくれる雑誌はふつうない。このような場合、発見した事実をどうやって発表すればよいのかはわからない。

そのことを考えると、優れた高校生による研究を掲載するような Online 雑誌のようなものがあれば、非常に大きな貢献をするだろう。Online であれば、ある程度の長さの論文でも掲載することは容易である。

ここでは、高校生たちの研究のうちで結果が出ているものの大半を紹介したが、これ以外にも興味深い結果はいくつかある。また、計算によって作られた予想はかなり多くあり、これからの発展が期待できる。したがって、高校生の研究の可能性は大きい。ここでは、高校生たちの研究のうちで結果が

出ているものの大半を紹介したが、これ以外にも興味深い結果はいくつかある。また、計算によって作られた予想はかなり多くあり、これからの発展が期待できる。したがって、高校生の研究の可能性は大きい。

高機能な数式処理システムを使うことができる環境において、適切な指導を受けることができれば、高校生たちは極めて創造的に成りうる。そして、このような研究は中学生でも可能である。また、さらに高度な数学を知っている大学生ならば、研究することができるテーマはもっと広がるだろう。

しかし、現実の教育を見ていると、中学、高校、大学、大学院を通じて生徒たちが創造的であることは、非常に少ない。宮寺は、これまで大学生や大学院生に数学を教えた経験もあり、自分自身も大学院で研究した。その経験を振り返ると、理工系の研究者を目指す人々は、ひたすら知識と学ぶことのみ時間を使い、そのため創造的なことをする力を養う機会を失っているのではないかと考えられる。

もちろん高度に発達した学問を身につけるには、厳格なトレーニングが必要である。しかし、同時に創造性を育てる教育を受けないといけないと考える。

宮寺自身も、高校生と共に研究することによって、数学の博士論文を書いた10年以上前よりも創造的になったように思う。

伝統的な厳格なトレーニングを否定するのではない。ただ、創造的な勉強によってバランスをとっていく必要がある。

私が提案する教育方法に近いものを、伝統的な数学教育の中に探すとすれば、「発見的学習法」、「活動としての数学」、「探求活動中心の授業」、「オープンアプローチ」、「オープンエンドアプローチ」などをあげることができるだろう。

これらは、多少の違いはあるものの、ほぼ同じ方向性を持っている。それは、「発見」に近い体験をさせること。答が一つではなく、いろいろな答え方が認められること。答だけでなく、途中の活動を重視することなどである。

これらについては多くの研究がある。例えば[29]、[35]などがある。また[27]、[30]では計算機などのテクノロジーを使った数学的探求活動が扱われている。

これらの方法では、既に教師が熟知している内容を生徒に再発見させる。それによって創造力を育てようとする。

それに対して、私の方法は結果的に数学的能力を伸ばすことも目的の一つであるが、「発見」によって新しい事実を見つけるという創造的行為である。

従って、一緒に研究活動を行っている教師も、答えを知らない。

私の方法とこれらの方法を比べると、私の提案する方法は従来の「発見的教育」や「オープンエンドアプローチ」を大きく越えている。普通オープンエンドと言っても、それは建前であって、教師の頭の中には枠組みが既にできているからである。

我々の方法は、オープンエンドであって、どのような形で学習が終結するかは、教師にもわからない。

「創造」するための練習と、本当の創造は大きく違う。本当の創造性を育てるには、実際に創造することに勝る教育方法はないと考える。

高校生の研究を指導することは、高校の教師にとって非常に幸せな経験である。

多くの高校の教師は、たいてい、高校時代には数学が好きで、同じ思いを持って就職したと思われる。しかし、その思いをずっと持ち続けることは簡単でない。

このことに関して、宮寺の経験を少し話してみたい。宮寺自身も、数学が非常に好きだと思って高校に就職した。しかし高校の数学を、何年も繰り返して教えていると、教師自身にとって面白くなってしまふ。難しい入試問題をうまく解くことを教えるのも、数学が苦手な生徒を伸ばすことも、教育的にはやりがいのあることである。

しかし、数学として非常に面白いかという、そうではない場合が多いと思う。

[32]において、佐々木建昭は次のように書いている。

証明が如何に明快であるか!、計算法が如何に強力であるか!、などはあまり教えられていないように思います。しかし、これは無理もないことであろう、と思います。何故なら、高校や中学の先生方自身が数学にそれほど感動を覚えていない、と思うからです。新しい定理を自分で証明しようとして、その難しさに圧倒されつつ、困難辛苦の末、やっと証明して初めて、既にある定理の証明の素晴らしさがよく理解できます。また、どんなに些細なことであれ、新しい概念を生み出そうとして、それが如何に難しいか思い知って初めて、他人のアイデアの素晴らしさに感動します。数学者は日常的にこういうことを行っています。

佐々木教授の結論は、このような状況であるから、数学者が講演などを通じて高校の先生たちに数学の素晴らしさを伝えることが必要だということである。

私は、佐々木教授の言われていることを本当に実現するためには、高校教師が生徒と共に数学を研究してみることが良いと考える。そして研究を試みる高校の教員を数学者が助力することが必要ではないかと考える。

ここでは、高校生たちの研究のうちで結果が出ているものの大半を紹介したが、これ以外にも興味深い結果はいくつかある。また、計算によって作られた予想はかなり多くあり、これからの発展が期待できる。したがって、高校生の研究の可能性は大きい。ここでは、高校生たちの研究のうちで結果が出ているものの大半を紹介したが、これ以外にも興味深い結果はいくつかある。また、計算によって作られた予想はかなり多くあり、これからの発展が期待できる。したがって、高校生の研究の可能性は大きい。

研究によって得た数学的背景と、数学を見る目は高校の数学教師としての指導力を向上させることになる。

何より楽しい経験は、高校生の創造性を目撃することである。

これは、他の教科に比べて、数学の教師が得がたい経験である。

国語の教師ならば、教師が及ばないような詩を書く生徒に出会うことはあるし、芸術でもあり得るし、社会などでも、優れたエッセイを書く生徒はいる。

体育でも、素晴らしい能力の生徒に出会うことができる。そのような生徒を育てる喜びを経験している教師は、かなり多いだろう。

物理、化学、生物などの教科では教師と生徒による研究はかなり行われていて、科学コンテストなどに発表されおり、高校生の優れたアイデアを生かした研究がある。

それに対して、高校の数学教師は普通そのような経験をする機会を持っていない。

しかし、生徒たちの優れた創造性を目撃すると、教師と生徒の距離は小さくなり、しばしば生徒の方が優れているし、それが分かると生徒も自信を持つ。

また、数学の教師を志す学生たちにとっても、高校生との研究は、新しい目標になり得る。実験系の学生に比べて、数学系の学生は、研究者になるチャンスは、はるかに少ない。大学院で数学を研究しながら、高校に就職して、研究を諦めた人たちはかなりの数になるだろう。しかし、高校で生徒と共に研究できるということになれば、素晴らしいチャンスになる。

我々の活動は、近年、世界的に展開されている英才教育の視点からも有効な指導法である。探求的、発見的な学習は、良いセンスを生徒達にもたらし、その結果として、数学英才の発掘も可能である。日本においては、数学英才を発掘する場を数学オリンピックに託していた。しかし、数学オリンピックでの高得点者が、大学進学時に数学を専攻するものが少ないという現実も直視している。数学英才は、数学オリンピックで見出すのではなく、日々の高校の授業において見出すことが大切である。それは、数学教師が生徒の数学的能力を見出す機会を得ると共に、教師自らの指導力向上に対する自己啓発をうながすことも可能となる。

4.2 数式処理システムを道具として用いた数学教育の可能性

ここでは数式処理システムの Mathematica を使った。これらの事実は数式処理システムがなければ発見することができなかったと考える。例えば、次数の大きな二項展開や、何千という桁数の計算は、普通のコンピュータ言語では手軽に扱うことはできない。従って、私たちの行なっている数学教育は、数式処理システムを前提としている点で、ユニークである。

数式処理システムは、コンパイル言語に比べて数値計算の速度が遅い場合があるが、そのことは問題にはならなかった。大規模なシミュレーションならば別だが、著者たちが行なったような数学の研究では、問題を見つけるとできる

だけ早くプログラムを作り、法則性を見つけるために必要なだけのデータを計算機に作らせることが大切である。そのためのデータは、現代の計算機ならば、あまり負担のない程度の大きさである。ただ、早くプログラムを作るためには、数式処理システムが多くの関数や、リスト操作のコマンドを持っていることが必要になる。

数学教育における数式処理システムの利用及びその普及については、以前から提案されてきた。1990年代に提唱された数学教育の情報化において、数式処理システムの利用はその活動の一部であった。それらの研究は、数式処理システムを数学教育における”道具”として、効果的な使用方法を開発し、数学教育の指導法として成果が上がるという予感を持たせるものであった。しかし、数学教育における数式処理システムの利用は、どのような理念の基で進められ、その行き着く先はどのようなことを目的にするのか、といった方向性がはっきりしていなかった。そのため、その利用の試みは、一部の熱心な数学教師の活動にとどまっていた。

これまでの活動を発展させ、”数学教育における数式処理システムを用いた効果的指導法の開発”を継続的に行うためには、それに取り組む必要性を多くの数学教師が共有し、認知科学的研究成果を踏まえたものでなければならない。

数式処理システムは、数学の計算や思考の際、道具として用いることができる。「道具とは、単に人間の衣食住や行動を助ける外在的な道具のみならず、人間が認識したり、伝達を行うことを助ける、例えば言葉のような人間の内にある内在的な「道具」を含んでいる。そして、数学もこのような人間の発明した「道具」の一つとしてみることができる」([3])。数式処理システムは、外在的な道具である。外在的な道具は、内在的な道具の活動を促進し、人間の道具使用全体の効率を促進することができる。

数式処理システムの効果的な利用は、新しい概念を見出す時やそれを理論化する際に重要な役割を演じることになる。数式処理システムは、外在的な道具として、実際に計算する労力を省いたり、手早く数学的作業を行うことを可能にする為に開発された道具である。

現在の数式処理システムは、数式処理という名前ではあるが、記号処理演算を行う範囲を超えて、グラフィックス処理・構造を持ったデータの処理・文章の処理等を行うものになっている。これらの機能を活かすことにより、数式処理システムは、数学を行う強力な道具となった。強力な道具は、使い次第で効果的な道具になる。そして、それを数学教育で活かすためには、紙と鉛筆を道具とする指導法とは異なる（認知科学を踏まえた）新たな指導法が必要である。

我々の研究は、この方法の開発事例である。

数学教育において、数式処理システムの効果的な利用を目指す場合、このような認知科学における「外在的な道具」としての位置付けを明確にし、どの

ような働きをするのかに焦点を当てた研究をしなければならない。ただ単に、その機能を利用した断片的な研究では、数式処理システムを数学教育において効果的に利用するための継続的かつ発展的な研究にはならない。特に、問題のアプローチの仕方に変容をもたらすものとしての「外在的道具」という観点からの考察が重要である。このことが、今後の研究課題である。

関連図書

- [1] R. Cowen and J. Kennedy, *Discovering Mathematics with Mathematica*, Erudition Books, 2001.
- [2] R. Graham, D. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company (1994).
- [3] 近藤洋逸編, 数学の歴史, 毎日新聞社, 1970.
- [4] 松井啓史, 山内俊幸: パスカルのな三角形とフィボナッチ的な数列、数理の翼セミナー
- [5] Hiroshi Matsui, Toshiyuki Yamauchi, Naoki Saida, Tomo Hamada: Pascal like triangles and Fibonacci like sequences, The winner of the first prize, Canada Wide Virtual Science Fair 2007.
- [6] Hiroshi Matsui, Naoki Saita, Kazuki Kawata, Yusuke Sakurama and Ryohei Miyadera: A problem for a Fibonacci like sequence, *Fibonacci Quarterly*, to appear.
- [7] 宮寺良平 坂口宗敏 増田正幸: ロシアンルーレットの数学的理論, 大阪数学雑誌, **26** (1997)
- [8] R. Miyadera, K. Kawamoto and Y. Moriyuki: Theory of Russian roulette, *Proceedings of the Forth International Mathematica Symposium*, 2002
- [9] R. Miyadera, K. Miyabe, D. Kitajima, N. Fujii and K. Fujii: How High School Students Could Present Original Math Research Using Mathematica, *Proceedings of the Fifth International Mathematica Symposium*, 2003
- [10] R. Miyadera, D. Minematsu and K. Tsukiyama: How High School Students Could Present Original Math Research Using Mathematica, *Proceedings of the Sixth International Mathematica Symposium*, 2004

- [11] R. Miyadera and Y. Kotera: Una Bella Curva Che Troviamo in Connessione con lo Sviluppo di, *Archimede*, 2, 2005
- [12] R. Miyadera, S.Hashiba and D.Minematsu: Mathematical Theory of Magic Fruits, -Interesting patterns of fractions- *Archimedes' Laboratory*,2005
- [13] R. Miyadera, The bitter chocolate problem, MathPuzzle.com, 2005
- [14] R. Miyadera, R. Kawazoe, M. Sakaguchi and D. Minematsu, Flip Flop Puzzle -A flat version of Rubik's Cube, *Archimedes' Laboratory*,2005
- [15] R.Miyadera, D.Minematsu and S.Hashiba, 11th International Conference on Application of Computer algebra (2005).
- [16] R. Miyadera, Test taking strategy, MathPuzzle.com,2005
- [17] 宮寺良平, 峰松大介, 橋場諭, 小寺康史, 表具明宏, 松井啓史, 中川裕太, 橋場友秀, 近藤泰司, 池田陽介, 井上貴文: 数式処理システムを利用した高校生や大学初年級の生徒による数学研究, *数式処理通信*, 12(4) (2006)
- [18] R. Miyadera, Yousuke Ikeda and Yasushi Kondo: What's special about this number,2006 *Archimedes' Laboratory*
- [19] R. Miyadera, S.Hashiba and D.Minematsu: $999\cdots 99^n$, *Visual Mathematics Art and Science Electric Journal of ISIS-Symmetry*, 8(2), 2006
- [20] R. Miyadera, S.Hashiba and D.Minematsu: How high school students can discover original ideas of mathematics using Mathematics, *Mathematica in education and research*, 11(3), 2006
- [21] 宮寺良平、峰松大介、松井啓史、斉田直希、川田一輝、櫻間康介、山内俊幸 他: 高校生による数学研究、数式処理と教育、数理解析研究所研究集会 (2006).
- [22] 宮寺良平、峰松大介、松井啓史、橋場友秀、山内俊幸, How high school students could discover original ideas of mathematics using Mathematica, *Mathematica Conference 2006 Tokyo*.
- [23] R. Miyadera, etc: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
- [24] Ryohei Miyadera, Satoshi Hashiba, Hiroshi Matsui, Toshiyuki Yamauchi, etc, Pascal like triangles and Sierpinski like gaskets, *Visual Mathematics Art and Science: Electric Journal of ISIS-Symmetry*, 2007.

- [25] R. Miyadera et al, An animation of numbers $999\cdots 99^n$, MathArt: Electric Journal of ISIS-Symmetry, 2007.
- [26] R. Miyadera et al, Beautiful Design made from Knight Tour , MathArt: Electric Journal of ISIS-Symmetry, 2007.
- [27] 村上温夫・秦正人,「コンピュータ時代の数学教育」, 数学教育とコンピュータ, 聖文社,1989
- [28] P.J.Nahin, Duelling, Idiots and Other Probability Puzzlers, Princeton University Press, 2000.
- [29] 西村圭一, 数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究, 修士論文
- [30] 西村圭一, 探究活動中心の授業に関する一考察-テクノロジーを利用して-, 日本数学教育学会誌, 第 78 巻, 第 9 号,1996
- [31] D. A. Norman, " Cognitive Artifact " , paper presented in the Workshop on Cognitive Theory and Design in Human-Computer Interaction, 1990.
- [32] 佐々木建昭, 高校数学教育における数学者の役割, 日本数学教育学会誌, 第 80 巻, 第 1 号,1998
- [33] B. Stein and M. Heil, Are 7-game World Series more common than expected? Inside Science News Service. American Institute of Physics. October 20, 2003. <http://www.aip.org/isns/reports/2003/080.html>
- [34] 田村三郎, 藤村幸三郎: パズル数学入門, 講談社, (1997)
- [35] 植竹恒男, 発見的学習法-マジソンプロジェクトを中心に-, 東京・近代新書出版社,1969
- [36] Il.Vardi, Computational Recreations in Mathematica Addison-Wesley (1991)