



Algorithms in Rings of Differential Operators with Coefficients in Local Rings

中山, 洋将

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2008-03-25

(Date of Publication)

2012-02-15

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲4163

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1004163>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



氏 名 中山 洋将
博士の専攻分野の名称 博士（理学）
学 位 記 番 号 博い第 362 号
学位授与の 要 件 学位規則第 5 条第 1 項該当
学位授与の 日 付 平成 20 年 3 月 25 日

【 学位論文題目 】

Algorithms in Rings of Differential Operators with Coefficients in Local Rings（局所環を係数に持つ微分作用素のなす環におけるアルゴリズム）

審 査 委 員

主 査 教 授 高山 信毅
教 授 野呂 正行
教 授 福山 克司

(中山 洋将, NO.1)

D -加群における計算アルゴリズムは、主に多項式係数の微分作用素環 D におけるグレブナ基底計算が用いられる。この論文では、原点で定義される有理関数を係数にもつ微分作用素のなす環 D_{alg} におけるグレブナ基底計算をもとに、 D -加群の計算における新たなアルゴリズムを作った。特に local b 関数の計算を中心に述べる。

● 第1章 local b 関数の計算アルゴリズム 1 (総当たり法)

代数解析において重要な式として、 b 関数 (Bernstein-Sato 多項式) がある。多項式係数微分作用素環 D におけるグレブナ基底を用いて、global b 関数、local b 関数を計算するアルゴリズムが知られている (Oaku 1997)。またそれを改良した global b 関数を計算する高速なアルゴリズムがある (Noro 2002)。

ここでは、原点で定義される有理関数を係数に持つ微分作用素のなす環 D_{alg} におけるグレブナ基底理論 (Granger, Oaku, Takayama 2004) を使い、local b 関数を計算するアルゴリズムについて述べる。また、holonomic ideal に対して定義される generic local b 関数に関しても、同様の方法で計算できることを述べている。

● 第2章 local b 関数の計算アルゴリズム 2 (近似割り算を用いた方法)

形式べき級数を係数にもつ微分作用素のなす環 \hat{D} において割り算定理がある (Castro 1984)。これは割る元、割られる元が多項式であっても、一般に無限回の簡約操作を必要とするものであり、計算機で実行できるアルゴリズムではない。そこで、近似な商、余り (ある次数までは正しい結果を返す) しか得られないが有限回で終了する割り算を作った (\hat{D} の近似割り算アルゴリズム)。これを用いた local b 関数を計算するアルゴリズムについて述べる。入力する多項式によっては、この方法のほうが既存のアルゴリズムより高速に計算できる。

● 第3章 零化イデアルの計算アルゴリズム

ここでは、多項式 f のべきの零化イデアル

$$\text{Ann}_{D_{alg}[s]} f^s = \{P(s) \in D_{alg}[s] \mid P(s)f^s = 0\}$$

の生成元を、 D_{alg} におけるグレブナ基底計算を使い計算するアルゴリズムについて述べる。

多項式係数微分作用素環 D におけるグレブナ基底計算を使って、零化イデアル $\text{Ann}_D f^s$ を計算するアルゴリズムが知られている (Oaku 1997)。これと同様の方法で $\text{Ann}_{D_{alg}[s]} f^s$ を計算することができる。実は、 $\text{Ann}_{D_{alg}[s]} f^s$ は $\text{Ann}_D f^s$ の生成元で生成されるが、今回の新たなアルゴリズムを使った方が高速に計算できる場合がある。

(中山 洋将, NO.2)

● 第4章 Interactive user interface for computer algebra

1,2,3 章で取り扱った微分作用素環における Mora の割り算アルゴリズムやそれを使った Buchberger アルゴリズムは、計算が困難になることが多い。それらアルゴリズムの効率化する方法は、あまり良く知られていない。アルゴリズムの改良のためには、計算過程を観察してどのようなことが起きているのかを把握する必要がある。そこで、計算過程を視覚化し、計算手順を簡単に操作できるようなシステムを作った。これを “interactive user interface for computer algebra” と呼ぶ。現時点では、割り算アルゴリズムと Buchberger アルゴリズムについてのシステムを実装している。その実装方法とシステムの使い方を説明し、発見できた興味深い計算例について述べている。

● 第5章 Some mathematical results and questions

関口次郎氏は、論文 “Saito Singularities in 3 Dimensions and Exceptional Root Systems” において、ある 17 個の擬斉次多項式について研究した。また、この 17 個の多項式について b 関数の因子を与えた。ここでは、いままで説明してきたグレブナ基底を用いた b 関数の計算法から、これら 17 個の多項式について b 関数の完全な形を求めた。

また関口氏の提示した問題として次のようなものがある。 f を多項式とし、 R を f の b 関数の根の集合とする。次の事実はよく知られている。 $\alpha \notin R + \mathbb{Z}_{>0}$ について、

$$\text{Ann}_{D[s]} f^s|_{s \rightarrow \alpha} = \text{Ann}_D f^\alpha$$

ここで、

$$\text{Ann}_{D[s]} f^s|_{s \rightarrow \alpha} = \{P(\alpha) \in D \mid P(s) \in \text{Ann}_{D[s]} f^s\}$$

$$\text{Ann}_D f^\alpha = \{P \in D \mid Pf^\alpha = 0\}$$

である。

では、 $\alpha \in R + \mathbb{Z}_{>0}$ において、

$$\text{Ann}_{D[s]} f^s|_{s \rightarrow \alpha} \subsetneq \text{Ann}_D f^\alpha$$

が常に成り立つのかという問題が考えられる。この両辺はアルゴリズムに計算することができる。そこで f が単純特異点を持つような場合に計算を行い、確かにこの包含関係が成り立つことが確認した。ここでは、その計算例を幾つか載せている。

氏名	中山 洋将		
論文 題目	Algorithms in Rings of Differential Operators with Coefficients in Local Rings (局所環を係数にもつ微分作用素のなす環におけるアルゴリズム)		
審査委員	区分	職名	氏名
	主査	教授	高山 信義
	副査	教授	野呂 正行
	副査	教授	福山 克司
	副査		印
	副査		印
要 旨			
<p>本博士論文は、ベキ級数環 $\mathbf{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ や原点での \mathcal{O}_0^{alg} の芽 $\mathcal{O}_0^{alg} = \{f/g \mid f, g \in \mathbf{C}[[x_1, \dots, x_n]], g(0) \neq 0\}$ を係数とする微分作用素環 ($\widehat{\mathcal{D}}_0$ や \mathcal{D}_0^{alg}) でのいろいろなアルゴリズム、とくに局所 b-関数に関連するアルゴリズム、およびそれに関係した話題を集積したものである。</p> <p>多項式を係数とするような微分作用素環は Weyl 代数とも呼ばれ、1990 年代から 2000 年代初めにかけて、Weyl 代数でのグレブナ基底計算を基礎にしたさまざまなアルゴリズムが研究され、きわめて抽象的な形で 1960 年代の終わりから発達してきた D-加群の理論がアルゴリズム的に書き換えられることとなった。中でも特筆すべきは、多項式に対する大域的および局所 b-関数の計算アルゴリズム、さらに一般に holonomic 系に対する特性多項式 (局所的な解の様子をあらわす多項式) の計算アルゴリズム、f^α の満たす微分方程式系の導出、多項式 f による局所化 $\mathbf{C}[x, 1/f]$ の Weyl 代数上の加群としての有限な表示、さらにはその応用として、affine variety $\mathbf{C}^n \setminus V(f)$ の de Rham コホモロジ群の計算アルゴリズムなどである。</p> <p>さて以上のような成果を局所化していく、つまり、上記のような局所環を係数とするような微分作用素環の種々のアルゴリズムを作っていく事は 2000 年代中頃からはじまった新しい研究の流れである。最初の出発点は \mathcal{O}_0^{alg} 係数の微分作用素環での Mora 割り算アルゴリズム (Granger, 大阿久, 高山) とそれを用いたグレブナ基底の計算法である。</p> <p>中山君の博士論文は以下に記すように、この Mora 割り算アルゴリズムを基礎として、局所 b-関数、局所特性多項式、f^α の満たす局所的な微分方程式系の導出など、上記アルゴリズムの局所版を与え、新しい研究の流れに大きく寄与したものである。</p>			

氏名	中山 洋将
<p>また計算代数では、アルゴリズムの研究だけでなく、実装と応用の研究も不可欠である。中山君は上記の研究と同時に、以下に記すように、アルゴリズムアニメーション、対話的な計算の実行のためのユーザインタフェースなどの研究や、上記のアルゴリズムなどによる数学的問題の計算実験などもすすめ、アルゴリズムの理論研究へのフィードバックなども得つつ、総合的な研究を行った。</p> <p>第一章においては、Mora の割り算アルゴリズムの応用として、\mathcal{O}_0^{alg} 係数の微分作用素環でのイデアル所属問題が解けることを利用して、新しい局所 b-関数、局所特性多項式の計算法を与えた。</p> <p>第二章においては、野呂の未定係数法を用いた高速な大域 b-関数の計算法を局所 b-関数の計算法に一般化した。これは冪級数環を係数とする微分作用素環での近似割り算定理-アルゴリズムをもとにしたものであり、あるクラスの多項式に対しては従来の方法より高速な計算アルゴリズムを与えており高く評価されるべきである。</p> <p>第三章においては、f^α を零化する局所的な作用素達の生成元を求める新しいアルゴリズムを与えた。これもあるクラスの多項式に対しては従来の方法より高速な計算アルゴリズムを与えており、高く評価されるべきである。</p> <p>第四章は、グレブナ基底を計算する Buchberger アルゴリズムのアニメーション、Buchberger アルゴリズムの対話的な計算の実行のためのユーザインタフェースの設計と実装の試みである。さらにこの実装が上記微分作用素環でのアルゴリズムの解析と改良に役立つことを示し高く評価されるべきである。</p> <p>第五章においては、上記のアルゴリズムなどによる数学的問題の計算実験などもすすめ、共同研究者と共に斎藤特異点に付随したある多項式族に対する b-関数を決定した。またクライン特異点に対する、f^α を零化する作用素を実験的に計算しある予想を得た。今後の数学的な展開が期待できる。</p> <p>本研究は Weyl 代数で得られているアルゴリズム達を局所化していくという方向を大きく進めたものであり、また特に局所 b-関数の計算アルゴリズムに関して重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者中山 洋将は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。</p>	