Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-12-05

Knotted surfaces in 3- space with simple fold projections

高橋，祐貴

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2009-03-25
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲4510
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1004510

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。

氏　　名　　　　　　　　高橋　祐貴

博士の専攻分野の名称　　博士（理学）

学 位 記 番 号　　　　博い第 4510 号

学位授与の 要 件　　　学位規則第 5 条第 1 項該当

学位授与の 日 付　　　平成 21 年 3 月 25 日

【 学位論文題目 】

Knotted surfaces in 3- space with simple fold projections （単純折り目射影を持つ 3 次元空間内の非自明な曲面）

審 査 委 員

主 査　教 授　中西　康剛
　　　　教 授　福山　克司
　　　　教 授　ラスマン　ウェイン
　　　　准教授　佐藤　進

第 1 章 Introduction について

3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内に埋め込まれた滑らかな閉曲面 F が unknotted であるとは, $\mathbf{R}^3$ を 1 点コンパクト化して得られる S^3 について $S^3 \setminus F$ の連結成分の閉包がそれぞれ handlebody と同相であるときをいう. また unknotted でないとき, knotted であると呼ぶ. F が 2-sphere と同相であるとき, F は unknotted であることが知られている. この研究では射影 $p: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を用いて, $\mathbf{R}^3$ 内に埋め込まれた閉曲面が unknotted であるための十分条件を考察する.

$p: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を射影とし, F を $\mathbf{R}^3$ 内に滑らかに埋め込まれた向き付け可能で連結な閉曲面とする. 制限写像 $p|_F$ は generic map とする. つまり, $p|_F$ は以下の条件 (1), (2), (3) を満たしている.

(1) $p|_F$ の特異点集合 $S = S(p|_F)$ は fold singularities と cusp singularities のみで構成されている.

(2) S は F 内に埋め込まれた circles の disjoint union になっている.

(3) $p|_S$ における多重点は transverse double points のみであり, その逆像上に cusp singularity は存在しない.

条件 (3) の transverse double point を *crossing point* と呼び, cusp singularity の像を *cusp point* と呼ぶ. また, crossing point も cusp point も含まない $p(S)$ の連結成分を fold circle と呼び, $p(S)$ が fold circles のみで構成されるとき, p を simple fold projection と呼ぶ.

$\mathbf{R}^3$ 内に埋め込まれた閉曲面 F が simple fold projection を持つとき, unknotted であるための十分条件が 2 つ得られる. 1 つ目は F が torus と同相であるとき, つまり種数が 1 のときである (Theorem 1.1). 2 つ目は $p(S)$ の innermost fold circles 以外の fold circles が同心円状になっているときである (Theorem 1.2). 一方で閉曲面 F が simple fold projection を持っていても F が unknotted であるとは限らない. 実際, simple fold projection を持つ knotted な閉曲面が存在する (Theorem 1.3).

第 2 章 Proof of Theorem 1.1 について

この章では $\mathbf{R}^3$ 内に埋め込まれた滑らかな torus T が simple fold projection を持つとき, T は unknotted であることを証明する.

$p|_T$ の特異点集合を S で表す. $p(S)$ の各 fold circles が x-軸に関して線対称であり, T も xz-平面に関して面対称であると仮定してよい. このとき, T を xz-平面で切断すると, 2 つの annulus と同相な曲面が得られる. 従って, xz-平面と T の共通部分は 2 つの circles であることがわかり, その 2 つの circles を c_1, c_2 とする.

この c_1, c_2 は T 内で essential であり, 少なくとも一方は T と境界でしか交わらないような xz-平面内の disk D_1 を張る. また T と境界でしか交わらず, その境界が ∂D_1 と 1 点でしか交わらない disk D_2 をとれる. このとき, $(T; \partial D_1, \partial D_2)$ は S^3 の Heegaard diagram になる. 従って, T は unknotted である.

第 3 章 Proof of Theorem 1.2 について

F を simple fold projection p を持つ $\mathbf{R}^3$ 内に埋め込まれた閉曲面とし, $p|_F$ の特異点集合を S とする. この章では $p(S)$ の innermost fold circle 以外の fold circles が同心円状になっているとき, F が unknotted であることを証明する.

$p(S)$ 内の cusp point も crossing point も含まない arc を *fold arc* と呼ぶ. 第 1 節では fold arcs に labels と orientations を定義する.

fold arc α 上の点 x に対し, $p^{-1}(x) \cap F$ は有限個の点になる. その中で fold singularity より高い点の個数を a, 低い点の個数を b とする. この非負整数のペア (a, b) を α の label と呼ぶ.

x の近傍に含まれる点 y, z がそれぞれ α を挟んで反対側にあるとする. $p^{-1}(y) \cap F$ に含まれる点の個数が $p^{-1}(z) \cap F$ に含まれる点の個数より多いとき, α の normal vector を x から y に付ける. この normal vector の付け方を α の orientation と呼ぶ. label と orientation は α 上の点 x の取り方によらない. labels と orientations の付いた $p(S)$ から, 閉曲面 F が $\mathbf{R}^3$ の ambient isotopy の範囲内で一意的に復元できる.

隣り合った fold arcs の labels はある関係式を満たす. 同様に cusp point に繋がった 2 本の fold arcs や, crossing point に繋がった 4 本の fold arcs の labels もある関係式を満たす.

第 2 節では $p(S)$ に対する local moves を定義する. ある条件を満たしてい

るときに fold circle を移動させる local moves を circle move と呼ぶ. 例えば innermost fold circle を fold arc を越して反対側に移動させる. または同心円状になっている 2 つの fold circle を入れ替えたり, 取り除く. 有限回の circle moves で $p(S_1)$ と $p(S_2)$ がうつり合うとき, F_1 と F_2 は $\mathbf{R}^3$ で ambient isotopic である.

またある条件を満たしているときに innermost fold circle を取り除く local moves を S-moves と呼ぶ. 有限回の S-moves によって $p(S_2)$ が $p(S_1)$ から得られるとすると, F_2 と unknotted surface の連結和は F_1 と ambient isotopic である. 特に F_2 が unknotted であるとき, F_1 も unknotted である.

第 3 節では $p(S)$ の innermost fold circle 以外の fold circles が同心円状になっているとき, F が unknotted であることを証明する. この証明は circle moves と S-moves を用いた fold circles の個数に関する帰納法による.

第 4 章 Proof of Theorem 1.3 について

任意の $g \geq 2$ に対して, simple fold projection を持つ種数 g の knotted な閉曲面が存在することを証明する.

$g = 2$ のときは次のようにして構成する. まず, 内側に 2 つの tori T_1, T_2 を持つ 2-sphere S を用意する. T_1 と S を T_2 の穴の中を通るように handle で繋ぐ. 同様に T_2 と S を T_1 の穴の中を通るように handle で繋ぐ. このようにしてできあがる閉曲面 F は simple fold projection を持つ. F の補空間の一方の連結成分は基本群が自由群ではないので handlebody と同相ではない. 従って F は knotted である.

$g > 2$ のときは, 上記の F と種数 $g - 2$ の unknotted な閉曲面との連結和をとればよい.

（別紙 1）　　　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	高橋 祐貴		
論文題目	Knotted surfaces in 3-space with simple fold projections（単純折り目射影を持つ 3 次元空間内の非自明な曲面）		
審査委員	区分	職名	氏名
	主査	教授	中西　康剛　印
	副査	教授	福山　克司　印
	副査	教授	ラスマン ウェイン　印
	副査	准教授	佐藤　進　印
	副査		印

要　旨

本研究は 3 次元空間内の閉曲面に関するものであり、自明であるための十分条件を与えている。また、非自明な閉曲面の興味深い例を具体的に構成している。

3 次元ユークリッド空間内の閉曲面 F は、一点コンパクト化により、3 次元球面 S^3 内の閉曲面 F と見なせる。$S^3 \setminus F$ の 2 つの連結成分がそれぞれ open handlebody と同相であるときに、F は自明であるという。自明でないときに、非自明であるという。閉曲面 F が滑らかな 2 次元球面である場合には、自明であることがよく知られている。また、向き付け不可能な閉曲面は 3 次元空間には埋め込めないので、研究対象は正の種数を持つ向き付け可能な閉曲面に絞られる。

高橋祐貴君の論文は、正の種数を持つ向き付け可能で連結な滑らかな閉曲面が自明であるための十分条件を論じたものである。

第一章において、主結果を与えている。また、主結果を述べるために必要な定義と論文の構成について簡潔に述べている。単純折り目射影を持つ曲面に対象を絞っているが、なお、このように豊かな構造があることは興味深いものがある。

Theorem 1.1: 単純折り目射影を持つトーラスは自明である。

Theorem 1.2: 単純折り目射影を持つ曲面の特異点の射影が、innermost なものを除き、同心円状であれば、与えられた曲面は自明である。

Theorem 1.3: 種数が 2 以上であれば、単純折り目射影を持つ非自明な曲面が存在する。

第二章において、Theorem 1.1 の証明を与えている。証明において、トーラス上の閉曲線の cancelling pair を幾何的に選びだす具体的なアルゴリズムを与えている。単純折り目射影を持たない場合には、例えば、結び目の管状近傍の境界

氏 名	高橋 祐貴

をとることにより、非自明な曲面が存在することがわかる。このこととの対比で、単純折り目射影を持つ曲面を考えることは、研究上興味深いと思われる。

以下の章では、単純折り目射影を持つ種数 2 以上の曲面を扱う。

第三章において、Theorem 1.2 の証明を与えている。証明において、特異点の射影図が互いに交わらないいくつかの円周の和集合であることを用いている。ひとつひとつの円周に label, orientation を与えることにより、もとの曲面が復元できる。このことを用いると、空間内の曲面の議論が平面におけるいくつかの円周の配置の議論に帰着される。円周の個数に関する帰納法により、曲面の自明性が証明される。

第四章において、Theorem 1.3 の証明を与えている。種数が 2 以上であるような単純折り目射影を持つ非自明な曲面の具体的な構成が与えられている。非自明性の証明には補空間の基本群が用いられている。Fox の自由微分により計算される Alexander 多項式が非自明であることにより証明される。種数が 2 の例は、こうした曲面の中でもっとも簡単な例になっている。

本研究により、単純折り目射影を持つ曲面に関して新しい知見が得られている。また、今後の研究にも応用されるだろう新しい手法が開発されている。

本研究は、3 次元空間内の正の種数を持つ向き付け可能で連結な滑らかな閉曲面について、それが自明であるための十分条件を研究したものであり、3 次元空間内の曲面について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者の 高橋 祐貴は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。