1800年代英国物理教科書における“運動の３法則”の形成

塚本，浩司

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
2009-03-25
(Date of Publication)
2020-05-15
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲4623
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1004623

博　士　論　文

1800 年代英国物理教科書における
“運動の３法則” の形成

平成２０年１２月

神戸大学大学院総合人間科学研究科

塚　本　　浩　司

謝辞

この研究のもともとの問題意識は，私の力学教育に関する研究から生じました。本論文は，〈歴史的研究から最終的に力積概念を重視した力学教育の改革を提案する〉という構成になっていますが，実際の問題意識としてはその逆でした。実際のところは，力学教育研究から力積概念の重要性を強く認識するようになり，そこから古典力学の形成過程へと問題意識がつながっていったのです。

序論でも述べていますが，私の立場はあくまでも物理教育研究者であって，歴史研究者のそれではありません。そのような私に物理教育研究および〈物理教育的な問題意識に基づく科学史研究〉の手ほどきをしてくださったのは，板倉聖宣先生（国立教育政策研究所名誉所員，私設板倉研究室室長）です。そもそも本研究のもとになった問題意識も板倉先生から受け継いだものです。学生時代に板倉先生の『物理学入門』（国土社）と出会わなければ，このような研究をまとめることはなかったでしょうし，そもそも物理教育の道に進むこともなかったと思います。板倉聖宣先生にあらためて深く感謝いたします。

本論文の最終稿をまとめるに当たっては，特に舟橋春彦さん（大阪電気通信大学）が，何度もの改訂につきあってその都度チェックしてくださいました。舟橋さんからは初歩的な書き間違いの指摘だけでなく，論旨に関わる貴重な改訂意見をいくつもいただき，それに基づく改訂を行いました。

有賀暢迪さん（京都大学大学院），右近修治さん（横浜桜陽高校）からは，最終稿に近い原稿を読んで貴重なご意見をいただきました。有賀さんからは，力学史研究者の立場から忌憚のないご意見と具体的な改訂案を提案していただきました。また，右近さんからは私が見落としていたスミス&ワイズのトムソン研究書に記載された先行研究の存在を教えていただき，しかも即座に該当部分のコピーを送っていただきました。お二人のご指摘によってこの論文の最終稿の欠陥の多くが修正できたと思っています。

この論文をまとめる最後の 1 年間で研究を検討する場となったのは，中根美知代さん（立教大学）が主催していた「力学史研究会」でした。遠方の大学院に在籍し，しかも修士課程まで科学史の専門教育を受けたことがなかった私にとって，科学史を専門とする人々と議論ができるこの研究会は大変貴重な場でした。特に中根さんからは科学史家の立場から厳しいコメントを何度もいただきましたが，おかげで私の研究を何度も見直すことが出来ました。また，この研究会に参加していた金山浩司さん，中澤聡さん，小山俊士さん，相田紘孝さん（以上東京大学大学院），鹿野和宏さん（早稲田大学大学院）に本論文の草稿を何度も検討していただきました。特に金山さん，相田さんには重要な文献をいくつか教えていただきましたし，中澤さんからも特にヒューウェルの運動法則の解釈について重要なコメントをいくつもいただきました。小山さん，鹿野さんからも参考になるコメントをいただきました。

高橋信夫さん（翻訳家）には，本論文のつたない和訳の一部をチェックしていただきました。ただし，私が相談するのが遅かったため，全部のチェックは間に合いませんでした

ので，本論文に誤訳がある場合はひとえに私のせいであることをお断りしておきます。

松野修さん（鹿児島大学）には，いくつかの文献収集に当たりご協力をいただきました。特に神戸大学国際文化学図書館が移転作業により利用不可だった際には，海外文献の取り寄せにご尽力いただきました。

池田佳代さん（科学館職員）は，文献および資料の整理にご協力いただきました。表面的には本論文に反映できなかった資料もありますが，池田さんが整理に協力してくださったおかげで，研究に専念することが出来ました。

増井淳さん（仮説社），木村妙子さん（三重大学）からは，本論文の原稿を読み感想をいただきました。最終稿をまとめるに当たって，励みになりました。

最終章で言及した物理教育の研究は，板倉聖宣先生，内野正憲さん，梅田洋一さん，加納誠さん，栗原昌広さん，佐藤重範さん，塩野広次さん，根岸明子さん，樋口幸江さん，舟橋春彦さんらとの共同研究，あるいは協力によって行っているものです。また，吹き矢のイラストは松谷美穂子さんが描いてくれました。

私と同じ社会人学生として神戸大学大学院に在籍していた野村恒彦さんには，あまり頻繁に大学に行けない私にかわって大学の事務手続きを代行していただいたり，必要な情報を教えていただいたりしました。また，1800 年代英国における解析学導入について，基本的な知識を教えていただきました。それだけでなく，同じ社会人として私より一足先に学位を取得された野村さんの存在は，私にとって励みとなり鼓舞される存在でもありました。

最後になりましたが，指導教員である神戸大学大学院三浦伸夫教授には感謝の言葉もありません。数年前の私は，物理教育史の研究で修士課程を修了したものの，その大学院には博士課程が設置されていなかったため，受け入れてくれる大学院を模索していました。しかし，〈物理教育と科学史の境界領域〉という，“ニッチのニッチ” ともいえる私の研究テーマを受け入れてくれそうな研究室はなかなか見つからず，修士課程修了後 2 年ほどが経過してしまっていました。先生はそんなおりに，ほとんど面識がなかった私を博士後期課程の社会人学生として受け入れることを快諾してくださいました。

遠方に在住し，研究テーマも先生の専門とは異なる私のような院生の指導はおそらく面倒なものであったと思われます。しかし先生は，私が神戸に直接指導を受けに行くだけでは不足する指導の機会を，電子メールのやりとりや学会出張・東京出張の際に貴重な時間を割くことによって補ってくださいました。当初私が持ち込んだ研究テーマと最終的にまとまった本論文のテーマはかなり異なるものとなってしまいましたが，辛抱強く私の研究におつきあいくださいました。

三浦先生をはじめとした上記の皆様に心よりお礼を申し上げます。

目次

凡例および注記

■「1800 年代」という表記について　本論文の読者として想定しているのは，広く物理教育に関心を持つ人々である。したがって，科学史の専門家だけに通用する用語はできるだけ避けるようにした。そこで逆に科学史の専門家には不要な説明や，不適切と思える表記もあえて採用した。その一例が年代表記である。通常の歴史研究書では 1800 年代は 19 世紀と表記されることが多い。19 世紀が 1800 年代を意味することは一般的な常識の範疇であるとは思われるが，筆者の経験上，一般読者は直感的に 1900 年代と混同することが多い。そこで本論文では，非専門家にもなじめるよう，1800 年代という表記を採用している。

■教科書の定義　日本の一般の読者にとって「教科書」というと，公教育で使用される検定教科書をイメージするかもしれない。しかし，本論文で教科書としているのは，主に大学入門教育で使用されたと考えられる物理学，力学書である。ただし，マクスウェル『物質と運動』のような教科書より幅広い読者を想定したと考えられる本や，『熱の理論』のような専門研究書も場合によっては検討対象としており，その境界は曖昧である。

■引用文について　原典からの引用はすべて訳して示した。その際，邦訳がある場合はなるべく邦訳書から引用したが，場合によっては邦訳書を参考にしながら訳し直した。また，関心を持った読者が確認できるよう，できるだけ章末の注に原文を掲載するようにした。訳文では，原文がイタリックで強調されている部分はゴシック，大文字の部分は下線を引くことによって示した。比例式については，原文で $A : B :: C : D$ のように表記されているものについては，引用文では特にことわりなく $A : B = C : D$ と表記した。

■訳語について　外国語を日本語に訳す際，使用されている単語を完全に一対一で対応させることは困難であるし，また，その時代でその用語の意味する内容が変わっていくこともある。たとえば Dynamics は，トムソンらは〈静力学も含めた力の科学〉を指すものとして使用しているが，それ以前では〈静力学を除いた力と運動の科学〉を指すものとして使用されていた（本文 133 ページ）。この違いを考慮せず，一貫して Dynamics を「動力学」と訳すことはかえって誤解を招く。前者の場合，日本語では「動力学」と訳すのが適当であるし，後者の場合は単に「力学」と訳すのが適当である。

　同じように，本論文で扱う時代の pressure を「圧力」と訳したり，impulse を「力積」と訳すことも同様の誤解を招く。そこで，それぞれの訳語について，内容を考慮した上で適切な訳語を当てることととし，ときには同じ用語で時代や著者によって別の訳語をあてている。同じ単語に別の訳語を当てている場合や，一般的でない訳語を使用している場合は，本文でそのことに触れ説明するようにしている。ちなみに，それらに該当する主な単語は以下の通りである。

pressure　静力

impulse　衝撃，衝撃力，力積
Dynamics　力学 (=Mechanics)，動力学
Kinetics　動力学 (=Dynamics)
moving force　起動力 (=motive force)

その他重要な単語については，わずらわしくない範囲でできるだけ (　) 内に原語を表記した。

■まとめ符〈　〉について　本論文ではまとめ符〈　〉を多用した。欧米語は関係代名詞があるために，文章の係り関係が理解しやすいが，日本語は少し文章が長くなるとその関係がわかりにくくなる。そこで，特に訳文ではまとめ符を多く使用した。本文でも文章を読みやすくするために必要に応じてまとめ符を使用した。

■文献について　文献は，以下に示した略号を使用したものを除いて，章末の注で [著者出版年] のように簡略化して表記し，巻末に文献の詳細を著者名の順（欧語文献はアルファベット順，邦語文献は五十音順）に列記した。著者の刊行年が重複した場合には，刊行年に a,b,c を添付して区別した。*op.cit.* および *ibid.* の使用は避けた。参照した教科書，入門書のほとんどについては付録でさらにくわしい概要を掲載した。

主要文献略号

OED　Edited by John Simpson and Edmund Weiner, *Oxford English Dictionary*, second edition (Clarendon Press, 1989).

DSB　Charles C. Gillispie, editor in chief. *Dictionary of Scientific Biography* (New York, NY: Charles Scribner and Sons, 1970-1980).

序章

古典力学は“ニュートン力学”か？

0.1　本研究の問題設定

0.1.1　古典力学＝“ニュートン力学”か

〈古典力学は，その基本原理がニュートンによって発見され，運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ を含む 3 法則としてまとめられたので“ニュートン力学”と呼ばれる〉というのが，今日の物理教科書の一般的な記述である。現在の日本の高校物理教科書を見るとどの教科書でも，運動の第 2 法則（運動の法則）の数式的表現として運動方程式が記述され，それらを含んだ運動の 3 法則は，ニュートンが著書『自然哲学の数学的諸原理（以下プリンキピア）』(1687) で発表したことになっている[1)]。

これは日本に限らず海外でも同様である。たとえば，米国の大学向け標準的な物理教科書として版を重ねているハリディ＝レズニク『物理学の基礎』第 6 版 (2002) の「力と運動 I」と題する章の冒頭には，「力と加速度の関係に関する研究は，ニュートンが発表したので，ニュートン力学と呼ばれて」いると記述され，ニュートンの第 2 法則の項で，運動方程式 $\vec{F}_{\mathrm{net}} = m\vec{a}$ が記述されている[2)]。また，ドイツの物理入門書『おばかさんでもわかる物理学』(2007) でも，運動方程式 $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ が「ニュートンの法則」(Newtonsche Gesetz) とされているし[3)]，大学向けの教科書『工業力学 3(動力学)』(1983) には，「ニュートンの 3 法則 (1687) によって動力学が創立された」とある[4)]。そしてフランスでも，たとえば『物理学–リセ特別進学クラス向け』(2006) と題する高校程度の教科書には，「ニュートンの法則」と題する章があり，3 法則が記載されていて，第 2 法則は「力学の基本原理」として $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ が記載されている[5)]。

つまり，「力学の基本原理はニュートンが発見し，運動方程式を含む運動の 3 法則として，著書『プリンキピア』に発表した」というのが内外を問わず，現代の一般的な物理教科書・入門書における記述となっている。そこでこのことは，物理を学んだ世界の人々の常識となっているといってもいいだろう。

ところが，そのニュートンの『プリンキピア』(1687)[6)] には，$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ あるいはそれに近い表現は，どこを探しても見つからない。そもそもニュートンの第 2 法則の表現は，

「運動の変化は，及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる力の方向に行われる」となっていて，力 (起動力=motive force) と結びつけられているのは，運動の “変化” であって，加速度に相当する “変化率” ではない。つまり，ニュートンの表現した第 2 法則は，〈力と加速度（変化率）の関係〉ではなく〈力積と運動量変化の関係〉だったと解釈できる。『プリンキピア』はユークリッド流の幾何学的形式で記述されており，代数的な記述はないが，もし代数的に記述するなら $\boldsymbol{I} = \Delta(m\boldsymbol{v})$（$\boldsymbol{I}, m, \boldsymbol{v}$ はそれぞれ力積，質量，速度を示す）を述べたものと解釈できる[7)]。ニュートンは運動の法則を運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ として記述していなかっただけでなく，そもそも彼の第 2 法則は，今日の運動方程式と結びつけるには不完全な表現だったのである。

科学史家トゥルーズデルは 1960 年に発表した論文「理性の時代の合理力学を再発見することに向けたプログラム」[8)]の中で，ニュートンは単純で特殊な問題以外では力学系に関する運動の微分方程式をたてることができたという証拠がないと述べ[9)]，すべての力学問題に適用できる基本方程式としての運動方程式を発見したのは，ニュートンではなくオイラーであるとした[10)]。

それによれば，1750 年にベルリン・アカデミーに提出され 1752 年に発刊された，その名も『力学の新原理の発見』[11)]で，オイラーは運動方程式を力学の基本方程式とした[12)]。「〈力学原理としての運動方程式〉の真の発見者はニュートンではなく，オイラーであった」——トゥルーズデルのその主張は，現在ではほぼ定説とされ，科学史家の間ではある程度共有された知識となっている。

しかし，逆にそれは科学史家以外の世界ではほとんど知られていない——少なくとも，物理教科書にこのことが記載されることはほとんどない。1972 年に，米国物理教師学会 (AAPT—American Association of Physics Teachers) の雑誌『物理教師』(*The Physics Teacher*) でラーマンが，トゥルーズデルの論文から 10 年以上経過しても，依然として物理教科書では運動方程式にオイラーへの言及がないことを嘆いているが[13)]，さらに 30 年以上が経過した現在でも，状況はほとんど変わっていないのである。

そもそも古典力学は，力学原理として運動方程式を発見したらそれで完成，というような単純な歴史をたどったわけではない。現代の科学史研究の成果によれば，ガリレオに端を発した古典力学は，ニュートンを経てライプニッツ，オイラー，ベルヌーイ，ダランベールなど大陸の多くの科学者たちの 100 年ほどにわたる研究活動の結果，ラグランジュで一応の完成を見た[14)]。

しかし，そのようにして古典力学を完成に導いた 1700 年代の科学者たちは誰も，力学の基本原理とニュートン『プリンキピア』を結びつけてはいなかった[15)]。ラグランジュで完成したとされる古典力学は，今日の物理教科書に記載されているような “ニュートン力学” の体系とは，まだ隔たりがあったのである。

0.1.2　古典力学が “ニュートン力学” となったのはいつか

それでは今日我々が学ぶような力学の原理の出発点を “ニュートンの運動の 3 法則” におくようないわゆる “ニュートン力学” の体系が作り出されたのはいつごろで，どのような経緯によるのだろうか。

トゥルーズデルは，ニュートンが力学の基礎を全て発見したとする力学史観は，マッハ『力学』(1883)[16] に由来するものだとしている[17]。そして 1800 年代物理学史の研究者として知られるハーマンも，大陸でないがしろにされていたニュートンの運動法則は，英国のヒューウェル『力学基礎論』(1819),『動力学論』(1823) で主要な位置に置かれ，それがトムソン&テイト『自然哲学論』(1867)，マクスウェル『物質と運動』(1876) に引き継がれたとしている[18]。

現在 “ニュートン力学” とよばれている体系は，出発点が “ニュートンの運動法則” であるだけではなく，エネルギー概念，剛体力学，解析力学までふくめた広範な体系となっているが，たとえばエネルギー保存則の解析的な動力学への統合も，ハーマンによればトムソン&テイト『自然哲学論』(1867) においてなされた[19]。

ヒューウェル，トムソン&テイト，マクスウェルらの本はいずれも教科書，入門書といった性格が強く，新たな発見を報ずる研究書ではない。したがって上記の言が正しいとすれば，我々が今日知るような “ニュートン力学” の体系は，1800 年代に物理教科書や入門書において力学が整理され再構成されていく中で形成されたと考えられる。

つまり，ガリレオ以降ラグランジュに至るまでの，科学研究という文脈の約 100 年に加えて，物理教育・啓蒙という文脈の約 100 年を経て作り出されたものが，今日我々が学ぶ “ニュートン力学” の体系なのである。

前者の 100 年に関しては，トゥルーズデルをはじめとする科学史家たちの研究によって，かなりのところが明らかにされてきている[20]。しかし，後者の 100 年に関しては，筆者の管見によれば，まだまとまった研究は見あたらない。前者を学説史的な科学史研究としたら，後者は教育・啓蒙史的な科学史研究と言える。科学者によって発見・形成された科学的真理がどのように同時代あるいは後世の人々に伝えられたかという，教育・啓蒙史的な観点からの科学史研究も前者に劣らず重要なのは当然のことである。

そこで本研究は，特に “ニュートン力学” の出発点とされる〈ニュートンの “運動の 3 法則”〉に着目し，〈これを基本原理とする物理教科書の形成過程〉を明らかにしようというものである。

今日，ニュートンの “運動の 3 法則” が力学の基本原理とみなされている理由は，第 2 法則が〈力学問題すべてに適用できる式〉――運動方程式と等価とされているからである。物理教科書の中で，〈力学の基本原理としての運動方程式〉がどのように理解・解釈され，第 2 法則と結びつけられてきたかが明らかになれば，今もなお困難とされている力学入門教育を再構築するための指針ともなりうるに違いない。

0.2　研究の方法

本研究の目的は，ニュートン『プリンキピア』における “ 運動の 3 法則 ” および力の概念が，物理教科書の中で現代的なものに整理されていく過程を明らかにすることによって果たされる。そこでまず，ニュートン『プリンキピア』の当該部分を概観し，次に本研究で主に調査・検討する研究対象の設定について論じる。

0.2.1　ニュートン『プリンキピア』における力概念と “運動の 3 法則”

ニュートン『プリンキピア』[21)]で “運動の 3 法則” は，本文に先立つ「定義」に続く「公理，または運動の法則」と題する章に以下のように記述されている[22)]。

法則 I

すべての物体は，その静止の状態を，あるいは一直線上の一様な運動の状態を，外力によってその状態を変えられないかぎり，そのまま続ける。

法則 II

運動の変化は，及ぼされる起動力 (motive force) に比例し，その力が及ぼされる力の方向に行われる。

法則 III

作用に対し反作用は常に逆向きで相等しいこと。あるいは，二物体の相互の作用は常に相等しく逆向きであること。

このように法則 I は，今日とほぼ同様，慣性の法則として解釈できる（ただし，「慣性」という用語は第 1 法則の中では見られない)。

それに対して法則 II は，運動の変化と起動力の比例という形で表現されているが，この起動力とは，この運動の法則が述べられている章の前の章「定義」の中で，物質量（定義 I)，運動量（定義 II）の後の一連の力に関する定義（定義 III〜定義 VIII）の中で定義された量である。

ニュートンはまず力を「固有力」(vis insita) と「外力」(vis impressa) に分類している。この「固有力」とは，定義 III で「質量の慣性 (inertia) となんらちがうところはない」とされ「慣性力 (vis inertiae) とよぶことができよう」とされていることからわかるように（定義 III）[23)]，今日では物体の慣性として理解される性質のことである。この固有力はさらに「物体が，その現在の状態を保つため，加えられた力にあらがう」はたらきとしての抵抗 (Resistantia) と，「物体が，障害物の抵抗力に容易には屈せず，その障害物の状態を変えようとする」はたらきとしてのインペートゥス (Impetus) の 2 つに分類されている[24)]。

それに対して「外力」は，物体の運動状態を変えるための力として定義されており，それがさらにその起源によって，衝突力，向心力とにわけられている（定義 IV)。これらの

分類を吉仲は以下のような図にまとめている[25]。

$$
\text{力}\begin{cases} \text{固有力（慣性力）}\begin{cases} \text{インペートゥス} \\ \text{抵　抗} \end{cases} \\ \\ \text{外　力} \qquad\qquad \begin{cases} \text{衝突力} \\ \text{向心力} \end{cases} \end{cases}
$$

この向心力は，「中心とするある一点に向かってあらゆる方向から，物体が引きよせられたり，押しやられたり，または何らかの形でそのほうに向かわされるところのもの」と定義されており（定義 V），今日我々が力としている概念に近い。そしてこの向心力の測度として，絶対 (absoluta) 量，加速 (acceleratrix) 量，起動 (motrix) 量が以下のように定義されている[26]。

> **定義 VI**
> 向心力の絶対量とは，力の原因がそれを中心からまわりの領域中に伝える効果の大小に比例する，向心力の測度である。
>
> **定義 VII**
> 向心力の加速量とは，この力が与えられた時間内に生ずる速度に比例する，向心力の測度である。
>
> **定義 VIII**
> 求心力の起動量とは，（この力が）与えられた時間内に生ずる運動に比例する，向心力の測度である。

これらの量が「簡単のために，起動力 (vis motrix)，加速力 (vis accleratrix)，絶対力 (ves absoluta) と呼ぶ」とされている[27]。このうち，絶対力は，そもそもどのように測定されるかが明確ではなく，結局『プリンキピア』の論述にはほとんど登場せず，加速力と起動力が力の測定量として使用される[28]。

法則 II は，この起動力と運動の変化が結びつけられたものとなっている。すでに述べたように，この法則 II の表現で起動力と結びつけられているのは，運動の変化であるので，ここでの起動力は，力積に相当する量と考えられる。

そして，この法則 II の解説で以下のように，運動と同じ向きに力が加えられた場合，斜めに加えられた場合についての合成について以下のように述べている[29]。

> この運動は〔常にそれを生ずる力と同じ方向に向けられるから〕，物体がその前から動いていたとすると，その運動に向きが一致するときには加えられ，逆向きなら減ぜられ，斜めのときには斜めに加えられ，それと両者の向きに従って合成される。

そしてさらに，系 I および系 II で力の合成と分解の法則が述べられている。

また，この「系」でニュートンが大部分を費やしているのが法則 III に関する部分であるが，その中で図のようなつり下げた 2 つのおもりの衝突実験で衝突前後のおもりの衝突直前と直後の速度をそれぞれ求め，「逆方向に生ぜられる運動の変化は相等しいことが，したがって，作用と反作用とは常に相等しいことが，見いだされ」ているとされている[30]。つまり，ここでの作用と反作用はむしろ運動量に相当する概念であり，現代のように，静力学的な〈力と反力の法則〉となってはいない[31]。

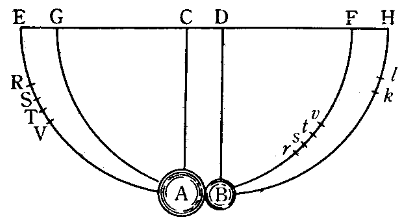


図 1　『プリンキピア』の衝突実験

0.2.2　研究対象の設定

1800 年代の大陸（フランス）でのニュートンの扱い

1700 年代は力学は研究の対象だったが，1800 年代になると，力学は教育の対象となり，力学に入門する学生や一般人のための教科書，啓蒙書が書かれはじめる。

大陸のフランスでは，1700 年代末に理工科学校（エコール・ポリテクニク）が創設 (1794 年設立の公共事業中央学校が 1795 年に名称変更）され，技術者養成教育として科学教育が制度化される。モンジュ，ラクロア，ポアソン（理工科学校(ポリテクニク)1798 年入学），アンペール，コーシー（1805 年入学），ナビエ（1802 年入学），アラゴ（1803 年入学），ゲイ＝リュサック (1797 年入学）などのフランスを代表する優れた数学者，科学者たちがここで教鞭を執り，しかもその多くが卒業生であった[32]。

この理工科学校で 1800 年代初頭 (1802-1914) に力学の講義を担当したポアソン (Simeon Dénis Poisson, 1781-1840) が著した教科書が『力学論』（初版 1811 年，第 2 版 1835 年）である。この本は，英国エジンバラ大学でも力学の教科書として使用され[33]，1842 年には英訳もされるなど[34]，英国の力学教育にも大きな影響を及ぼした。しかしこの本では，初版，第 2 版ともに力学の基本法則の発見者としてニュートンへの言及はない。また，1808 年理工科学校入学生で，1851 年から 1860 年まで理工科学校で力学を教えたブランジェが著した『力学教程』(1847)[35]や，やはり理工科学校卒業生で，工業中央学校（サントラル）で力学を教えたコリオリの『固体の力学論と力学効果の計算法』（第 2 版 1844)[36]にも力学の基本法則の部分でニュートンへの言及は見られない。1700 年代と同様，大陸ではニュートンは力学の基本原理の発見者とはみなされていなかったのである。

1700 年代末から 1800 年はじめの英国におけるニュートン崇拝的な力学的世界観

これに対して英国では，科学教育の制度化はおくれるが，1700 年代にはデザギュリエによる自宅やコーヒーハウスにおける公開科学講座や，ファーガソン，マーチンらによる巡回科学講師の科学講座がおこなわれ，1800 年代には王認講習所 (Royal Institution) で一般向けの科学講座がおこなわれるなど，学校教育以外の場での科学教育・啓蒙がさかん

におこなわれた。そして，一般向けの科学啓蒙書・入門書も数多く出版されていた[37)]。そのような英国での力学は，ニュートンの影響が強く見られた。

たとえば，1830 年出版のブリュースター編『エジンバラ・エンサイクロペディア』[38)]の Dynamics の項には「運動の法則，力が作用する場合の一般法則」と題した節があり，運動の 3 法則が記載されているが[39)]，そこには，

> 物体が運動するときに従う一般的な 3 法則がある。この法則は物体の種類や力の種類を問わない。つまり〈風に運ばれる粒子〉から，〈最初の一撃の結果としての天体の回転〉に至るまでこの法則にしたがう。
>
> これらの法則は，機械論哲学のすべての宝物を解き放つ鍵である。偉大なるニュートンによって，これらの法則と幾何学のたいまつの助けによって自然の迷宮探検の案内がおこなわれた。

と書かれていて[40)]，自然界のすべての力と運動の関係を解き明かす基本法則を，ニュートンの発見した運動の 3 法則に帰している。

1833 年に出版された『オクスフォード・エンサイクロペディア』の力学 (Mechanics) の項にも，「運動の法則」(Laws of Motion) と題した節があって，そこには『プリンキピア』とほぼ同等の 3 法則が記述されている。そしてそこには，「エマーソンの力学に関する論考が，我が国ではもっともすぐれたものであった」との記述がある[41)]。

その「エマーソンの力学に関する論考」とは，1754 年に初版が刊行され，1830 年頃まで版を重ねる[42)]エマーソン『力学の原理』[43)]である。この本の前書きには，「ニュートン哲学もまた，力学に基づいており，世界で唯一の正しい哲学となっている」[44)]と書かれており，ニュートン哲学を，〈他の（それ以前の）哲学のように，いずれ新しい哲学によって乗り越えられていくものとは一線を画する普遍的・絶対的な哲学〉としている[45)]。そしてまた，力学の恩恵下にあるものを，〈自然学だけではなく，建築物，軍事技術などの工学的技術，果ては一般の職人や楽器演奏にいたるまで，身の回りのすべて〉としている[46)]。

この『力学の原理』の本文では，冒頭の定義 (Definition)，公準 (Postulata) のあとに 20 の公理 (Axiom) があり，その最初の 3 つの公理は，

1. すべての物体は静止していようが一直線上を一様に運動していようが，外力によって無理に変えられない限り，その状態を保存する。
2. 運動の変更，すなわちある物体に生じるあるいは消滅する運動は，与えた力に比例し，その力が与えられた直線上に起こる。
3. 2 つの物体間の作用と反作用は等しく，反対向きである。

となっていて[47)]，運動の 3 法則に相当する内容となっている。

このように当時の英国全体がニュートン崇拝的な空気に包まれており，しかもニュートンの力学に沿った世界観が流布していたことが当時の百科事典，力学書の記述からうかがえる[48)]

1800 年代英国ケンブリッジの力学教科書

この 1700 年代から 1800 年代にかけての英国における科学教育，科学研究の主流は主にケンブリッジであった。王政復古の後，オックスフォードは正統神学やアリストテレス流の学問研究にいっそう固執していったが，政治的にも宗教的にもより自由主義的であったケンブリッジはベーコン流の論理学やニュートン流の数学を好意を持って迎えた[49)]。

また，ケンブリッジの数学卒業優等試験（トライポス）では，1820 年ころから大陸の解析学が導入されたが[50)]，その内容には，物理学と結びついた応用問題が多く出題された[51)]。その結果，ケンブリッジからはすぐれた物理学者が輩出され，1800 年代後半の英国の物理学教授職のほぼ半数がトライポス上位者（ラングラー）で占められるようになった[52)]。

ハーマンが，〈ニュートンの運動法則を力学の中心に据えるのに貢献した〉とするヒューウェル，トムソン，テイト，マクスウェルら 4 人はともにケンブリッジ出身者であり，そのうちヒューウェルとマクスウェルはケンブリッジで教鞭も執っている。

これらのことを考え合わせると，“ニュートンの運動の 3 法則” を力学の基本法則とする教科書は，大陸の数学者たちによって解析的に整備された古典力学が，1800 年代に英国に導入される際に，もともと英国に根付いていた “ニュートン崇拝的な力学観” と結びつくことによってなされたと考えられ，それは主にケンブリッジを中心に行われたのではないかと考えられる。

したがって，本研究では主に英国ケンブリッジで使用された 1800 年代の主要な物理教科書の内容・変遷を調査・検討することとする。

0.3　時代区分と構成の概要

0.3.1　時代区分

1800 年代の英国ケンブリッジにおける物理教育において大きな時代の区切りとなるのは，大陸流解析学の導入前後である。解析学の導入は主にケンブリッジを中心におこなわれたが，それはトライポスに解析学が導入されることが大きな役割を果たした。そしてそれによって，大陸流の解析的に整備された力学が英国の物理教科書に必然的に導入されるようになり，それまでのニュートン的幾何学的な物理教科書が大きく変わって行く。

この解析学を導入するのに大きな役割を果たしたのが，ウィリアム・ヒューウェルである。ヒューウェルはまた，1800 年代前半に自ら大陸解析学を導入した力学教科書を執筆し，それがケンブリッジの標準的な力学教科書ともなる。そこでまず，このヒューウェルによる力学書『力学の基礎』初版 (1819) 出版以前と以後を最初の時代区分とする。

ヒューウェルは『力学の基礎』以外にも多くの力学教科書を執筆するが，一貫して独特の形式を持った “運動の 3 法則” を採用し，同時代の他の物理教科書に影響を与えた。このヒューウェル流の “運動の 3 法則” に対して，ニュートン的な “運動の 3 法則” に回帰

し，加速力などの力学概念の混乱を整理した現代的な力学教科書が登場したのは 1850 年頃のことである。したがって，ヒューウェル『力学の基礎』出版以前 (-1819) を第 I 期とするなら，第 II 期はこの 1850 年まででであり，第 III 期がこの 1850 年から有名な教科書トムソン&テイト『自然哲学論』が登場する 1867 年ころまでとなる。第 IV 期はトムソン&テイト『自然哲学論』登場以降とし，現代の物理教科書まで検討する。

0.3.2　構成の概要

上記時代区分で便宜上名付けた，第 I 期〜第 IV 期が，本論文の第 1〜4 章の各章に対応することとなる。

第 1 章ではまず，ヒューウェル以前，解析的な力学が導入される以前の英国の代表的な力学教科書の 2 冊を検討し，運動の法則及び力学の基本方程式がどのように表現され，扱われていたかを示し，当時の英国力学教育の状況を論述する。

第 2 章では，ヒューウェルによる力学教科書での運動法則および運動方程式の記述について論じる。ヒューウェルは，運動の 3 法則を力学原理として位置づける際に，ニュートンによる 3 法則をそのまま持ってくるのではなく，彼流の哲学で 3 法則の書き換えを行った。それは今日我々が目にする運動の 3 法則とは異なったものであった。この章ではその書き換えを分析し，彼がなぜそのような改革を行ったかについて論じる。また，ヒューウェルは一貫して独特の 3 法則を採用したが，初期の運動法則と後期の運動法則ではその表現や解説の仕方が異なっている。ヒューウェルの運動法則の変遷も追い，なぜそのような記述をしたのかも併せて論じていく。

第 3 章では，今日我々が見るような形式の “運動の 3 法則” を採用し，しかも運動方程式と関連づけた “先駆的な”2 つの力学教科書，サンデマン『質点の運動論』，ラン『運動論』の存在を示す。今日の力学教科書の原型としてよく引き合いに出されるのは，トムソン&テイト『自然哲学論』(1867) である。しかし，トムソン&テイト以前に，“運動の 3 法則” を今日の教科書とほぼ同様な位置づけにおいてき，運動方程式とも関連づけていたサンデマンおよびランの力学教科書について言及されることはなかった。この章では，この教科書の特殊性と当時における先進性をあきらかにし，彼らがなぜそのような教科書を執筆したのかも併せて論じる。

第 4 章では，トムソン&テイト『自然哲学論』およびマクスウェル『物質と運動』によって，ニュートンの運動法則が力学の中心に据えられ，第 2 法則が運動方程式とむすびつけられた教科書がどのように登場したかを論じる。そしてまた，マクスウェルによる力積概念の提唱とそれをもとにした運動方程式の書き換えを検討し，その意図とそれらの継承と断絶について論じる。

0.4　先行研究および本研究の意義

0.4.1　先行研究の検討

伝統的な科学史研究では，ガリレオ，ニュートンなど，新発見をした科学者あるいは，新発見を生み出した制度や社会に関する研究がさかんにおこなわれてきたが，これまで科学教育・啓蒙に関する科学史研究はそう多くは見られなかった。

そのような科学教育史，科学啓蒙史といった研究としては，日本語では，吉田忠が論文「18 世紀オランダにおける科学の大衆化と蘭学」[53)]で，オランダを中心とした公開講座について論じているほか，川島慶子によるシャトレー夫人『物理学教程』(1740) の研究[54)]，川崎勝によるキャンブルの著書に関する研究[55)]などがある。また，板倉聖宣，永田英治による科学啓蒙，科学教育に関するまとまった著書がある[56)]。

海外では，ミルバーンによる巡回科学講師に関する著書[57)]，ターナーの科学実験器具に関する歴史的研究[58)]や，また近年になって，このような科学啓蒙に関する研究も徐々にさかんになってきていて，ライトマン『ヴィクトリア朝の科学の大衆化』(2007)[59)]によれば，伝統的なエリート科学者に注目し彼らの普及活動を分析するという従来の手法に加えて，啓蒙家の活動や科学書の出版事情，図書館や講堂，サロンにおける普及活動などを問題にする研究も 1990 年頃から活発に行われるようになってきている。

物理教科書や科学啓蒙書に関する研究としては，スタフォードによる 1700 年代の科学・数学啓蒙書の図版に注目して当時の啓蒙書の図版を多数おさめた労作[60)]や，板倉による 17〜19 世紀の教科書・啓蒙書を系統的・網羅的に調査した報告[61)]，田中・植松による教科書における物理用語の調査[62)]があるが，本研究のような「物理教科書における “ニュートン力学” の形成」を主題とする先行研究は発見できなかった。

1800 年代の運動法則に言及した研究としては，ハーマンおよびスミス&ワイズによるものがある。ハーマンによれば，〈大陸で力学の基本原理とむすびつけられていなかったニュートンの運動法則〉は，ヒューウェル，トムソン&テイト，マクスウェルらによって主要な位置に置かれ[63)]，エネルギー保存則も，トムソン&テイトおよびマクスウェルによって動力学全体を包摂する基本原理として位置づけられたとされている[64)]。

スミス&ワイズによるケルビン（W. トムソン）の伝記的研究書では，トムソン&テイト『自然哲学論』に 1 章が割かれている。そこでは，フランスの著者たち—ラグランジュ，ポアソンらは，力学原理とニュートンの運動法則を関連づけていなかったのに対して，ヒューウェルを中心としたケンブリッジの著者たちは，ニュートンの “運動の 3 法則” を力学の基本原理として復活させたことが述べられている。そして，ヒューウェルが〈先験的かつ必然的な原理〉としていた “運動の 3 法則” を，トムソン&テイトが，〈観察と実験によって導かれる公理〉として真の意味で復活させ，さらに〈仕事とエネルギーを力学原理の中心に取り入れて再構成したこと〉が述べられている[65)]。

これら 2 つが，本研究の直接的な先行研究と考えられる。

これら先行研究のさらに詳しい内容と本研究との関係は，各論で言及する。

0.4.2　研究の意義

本研究の方法論にたいして，予想される批判がある。それは，「このように当時の社会的文脈から切り離して教科書のみを読み込むだけでは，単なる事項の羅列，紹介に過ぎなくなるのではないか。それでは歴史的研究とは言えないのではないか」というものである。それにたいして，あらかじめ反論を述べておく。

筆者の立場はあくまでも歴史研究者ではなく，物理教育の実践者であり研究者である。本研究をまとめあげた動機は，現代の物理教育への還元である。本論文でこれから論じる「1800 年代物理教科書における〈力と運動に関する諸概念の混乱〉」は，現代の物理教育の現場において入門者に頻繁に見られる混乱でもあり，社会的文脈とは独立に，これらの諸概念を学ぶ上で認識上起こりうる混乱である。

「1800 年代物理教科書における〈力と運動に関する諸概念の混乱〉」が収束していくことになる過程を見ることは，現代でもなお困難とされる力学入門教育の改革に示唆を与えるものと考えている。そして，そのような目的のためにはむしろ社会的文脈を切り離した方が都合がよいと考えている。その上で，それぞれの物理教科書を読み込み，なぜ力概念や運動の法則がそのように解釈され，そのように記述されたのかを，その本の構成，他の部分の記述，年代的に前後する他の文献との比較などから論述を加えている。はじめの章では多少紹介的記述に見える部分も，以降の章における概念との比較のためであり，論文全体としては〈単なる紹介〉にはなっていないはずである。

とはいえ，もちろんこれらの物理教科書の構成や記述には，社会的制約による影響ももちろんあったに違いない。それらについて論じるのは，現在の筆者の能力に余る問題であったのも，また事実である。それらについては，ぜひ今後の研究によって解明されることを期待したいと思う。

なお，本研究がどのように現代の物理教育に役立てられるうるかは，本論文の終章で具体的に論じる。

注

1) たとえば，筆者の勤務先で採用されている高校物理教科書の「運動の法則」と題する節と，その直後の「運動の 3 法則」と題する節を引用すると以下の通りである。[中村 2007], p.69.

> **●運動の法則**力と質量，加速度の間には，次の関係が成り立つ。
> **力を受けている物体は，その力の向きに加速度を生じる。その加速度の大きさは力の大きさに比例し，物体の質量に反比例する。**これを**運動の法則（運動の第 2 法則）**という。質量 m の物体が力 F を受けているときに物体に生じる加速度を a，比例定数を k とすれば，運動の法則は次のように表される。
>
> $$a = k\frac{F}{m} \qquad \cdots\cdots(35)$$
>
> （中略）
>
> **●運動方程式**　質量 m，加速度 a，力 F の単位に，それぞれ〔kg〕，〔m/s^2〕〔N〕を使って，式 (35) は次のように表される。
>
> $$ma = F \qquad \cdots\cdots(36)$$
>
> この式を**運動方程式**という。
>
> （中略）
>
> **●運動の 3 法則**　慣性の法則，運動の法則，作用・反作用の法則をあわせて**ニュートンの運動の 3 法則**という。これらの法則は，物理学者アイザック・ニュートンが，1687 年，著書「自然哲学の数学的諸原理（プリンキピア）」にまとめたもので，力学の基本となる法則である。

この運動の法則とニュートンの関係についての記述は，「（ニュートンが）発見した」（三省堂），「（ニュートンによって）見いだされた」（数研出版）「（ニュートンは）示した」（啓林館）「（ニュートンは）呼んだ」(東京書籍）「（ニュートンが）まとめた」（第一学習社）... など，まちまちである。しかし，〈ニュートンが力学の基本原理を発見し 3 法則にまとめた〉というのが，現代の物理教育を受けた人々の一般的な認識であろう。

2) [ハリデイ他 2002], p.61.

その部分は以下の通り。

> 力とその力が引き起こす加速度との関係は，アイザック・ニュートン (Issac Newton, 1642-1727) によって初めて理解された。力と加速度の関係に関する研究は，ニュートンが発表したので，**ニュートン力学**と呼ばれており，この章の主題である。本章では運動に関するニュートン力学の 3 つの基本法則に焦点をあてていく。

とあり，その章の中の「ニュートンの第 2 法則」と題する節では，以下のように記述されている。

> これまでに議論してきた全ての定義，実験，観測を以下のすっきりとした文章にまとめることができる。
> **ニュートンの第 2 法則：**物体に作用する合力は，物体の質量と物体の加速度の積に等しい。
> 式で表すと次のようになる；
>
> $$\vec{F}_{\rm net} = m\vec{a} \quad \text{(ニュートンの第 2 法則)}$$

3) [Holzner 2007], p.80.

4) [Gross 1983], p.36., 原文：Ihre Begründung fand die Kinetik durch die drei Newtonschen Grundgesetze(1687).

5) [Séverine 2006], p.9.

6) [Newton 1687].

[7] このことは，これまで多くの科学史家などによって指摘されているが，おそらくもっとも最初にそのことを述べたのはマクスウェルである。[Maxwell 1876], p.32., 科学史家による指摘は [Fobes 1963], p.232.,[Dugas 1958], p289., [山本 1997], p.12. など。もっとも,『プリンキピア』の他の部分では motive force を力と解釈できるところもある。たとえば山本は上記の文献で,「ただし Newton は,『プリンキピア』において「力」を $\boldsymbol{F}\Delta t$ ではなく $\boldsymbol{F}$ そのものを指す意味に使っている箇所もあり，用語の使用法が一貫しているわけではない」と指摘している。

[8] [Truesdell 1960].

[9] [Truesdell 1960], p.9.

[10] [Truesdell 1960], p.23.

[11] [Euler 1750].

[12] [Truesdell 1960], pp.22-23., もっとも，オイラーの記述した運動方程式は，$2Mddx = Pdt^2$ あるいは $\dfrac{2ddx}{dt^2} = \dfrac{X}{M}$ といった形式であって，現在我々が使用しているものとは若干異なったものとなっている。オイラーの運動方程式の導出法と変遷については，[伊藤 2006] に詳しい。

[13] [Raman 1972], p.137.

[14] 古典力学の形成史については，[山本 1997] にくわしい。

[15] [山本 1997], p.166.,[Harman 1998], p.25.

[16] [Mach 1883]

[17] [Truesdell 1960], pp.5-6.

[18] [Harman 1998], p.25.

[19] [ハーマン 1991], p.76.

[20] この約 100 年に関する科学史研究の成果については，[山本 1997] にかなり詳しくまとめられている。この本で山本は，この分野の代表的な研究者として Truesdell のほかに Aiton, Fraser, Hankins らをあげている。[山本 1997], ix.

[21] 『プリンキピア』の邦訳はいくつかあるが，科学史家である河辺氏の訳 [河辺 1971a] を基本的には参照し，訳文もそれに倣った。また英訳は 1700 年代のモット訳 [Motte 1729] を基本的には参照し，必要に応じてコーエンによる新訳 [Cohen 1999] を参考にした。

[22] [河辺 1971a], pp.72-73., 英訳は以下の通り ([Motte 1729], p.13.)。

Law I

Every body cotinues in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.

Law II

The change of motion is proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line inwhich that force is impressed.

Law III

To every action there is always opposed an equal reaction: or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

[23] [河辺 1971a], p.60.

[24] [河辺 1971a], p.61.

[25] [吉仲 1982], p.136. この図に限らず，本節の議論は吉仲の解説を下敷きにしている。ただし訳語については，本論文では河辺の訳語を採用している。したがって，この図も，吉仲の図に河辺の訳語をあてはめている。

[26] [河辺 1971a], p.63. 英訳はそれぞれ，以下の通り。[Motte 1729], p.4.

> DEFINITION VII
> The accelerative quantity of a centripetal force is the measure of the same, proportional to the velocity which it generates in a given time.
> DEFINITION VIII
> The motive quantity of a centripetal force is the measure of the same, proportional to the motion which it generates in a given time.

[27] [河辺 1971a], p.63.

[28] [吉仲 1982], p.139.

[29] [河辺 1971a], p.73.

[30] [河辺 1971a], p.82.

[31] 板倉は，もともとのニュートンの第 3 法則の作用・反作用は広い意味をもっていたにもかかわらず，現代の第 3 法則は〈力と反力〉に限定されていることを指摘し，現代の力学教育ではむしろ「力と反力の法則」と表現した方が適切であることを主張している。[板倉 1974], pp.155-157.

[32] [堀内 1997], pp.177-179.

[33] [Wilson 1985], p23.

[34] [Laplace 1814].

[35] [Belanger 1847].

[36] [Colioris 1844].

[37] [板倉 2000].

[38] [Blewster 1830].

[39] ただし，第 2 法則は力と加速度の法則ではなく，以下のようにいくつかの力に関する法則 (Law of several Forces) となっている。このように運動の法則がニュートンのものとは異なって書かれている理由については，本論文の後の章で論じる。

> 第 2 法則は，力が，他のいくつかの力と同時に物体に作用する，あるいはすでに運動している物体に作用するときに起こることに関する法則であり，そこで，〈いくつかの力に関する法則〉(the *Law of Several Forces*) とも呼ばれる。(p.287)
> 原文：
> The second law describes what will happen when the body, impelled by any force, is at the same time acted on by several other forces, or has been previously put in motion, and therefore may be called the *Law of Several Forces.*

[40] [Blewster 1830], pp.286-287.

原文：

There are three general rules which a body obeys in its motion, whatever be the kind of body or the kind of force that impels it ; whether it be a particle of dust driven by the wind, or a planet revolving in consequence of an original impulse through the celestial spaces.
These rules are the key that unlocks all the treasures of mechanical philosophy: they form the guide, which, assisted by the torch of geometry, conducted the great Newton through all the labyrinths of nature.

41) [Haris 1833], p.453.

原文：
Emerson's treatises of mechanics have been justly valued in our country

42) 1758 年第 2 版，1769 年，1800 年第 5 版，1811 年第 6 版，1825 年，1836 年新版

43) [Emerson 1758].

44) [Emerson 1758], iii.,

原文：
Upon mechanics is also founded the Newtonian, *or only true philosophy in the world.*

45) その部分を引用すると以下の通りである ([Emerson 1758], iv-v.)。

〈ニュートン哲学も，いずれそれ以前の他の哲学と同様，古くなり時代遅れになってしまい，何か新しい体系に受け継がれていき，のりこえられていくだろう〉という，無学な異論を唱える者がある。しかし，この異論は非常にあさはかである。というのは，ニュートン以前のどんな哲学者も彼のとったような方法をとらなかったからである。一方彼らの体系は仮説，うぬぼれ，虚構，推測，空想にすぎず，ものごとの本質にねざさない自己満足によって創案されたにすぎないのである。
原文：
It has been ignorantly objected by some, that the Newtonian philosophy, like all others before it, will grew old out of date, and be succeeded by some new system, which will then be as much cry'd up as this new. But this objection is very fondly made. For never philosopher before Newton ever took the method that he did. For whilst their systems are nothing but hypothesis, conceits, fictions, conjectures, and romances, invented at pleasure, and without any foundation in the nature of things.

（中略）

そこで，明確にわかることは，ニュートン哲学は，強固な土台の上に築かれていて，堅牢で少しも揺るがないということである。そしてひとたびその真理性が証明されれば，その真理性は永遠であり，それが真理でなくなるときはすべての自然法則が完全に壊滅するときだけである。したがって新しい哲学について語るなどと言うのは単なる冗談に過ぎない。その基礎は強固である。ニュートン哲学は実際，改良され，さらに進歩していくだろうが，それが打ち壊されることは決してありえない。ベルヌーイ，ライプニッツ，グリーン，バークレイ，ハッチンソン，その他の努力もそれを変えることはできない。そしてフランス人たち自身も最終的にはデカルトの体系をすてさりそれを受け入れることになるだろう。
原文：
Hence it evidently follows, that the Newtonian philosophy, being thus built upon this solid foundation, must stand firm and unshaken ; and being once proved to be true, it must eternally remain true, until the utter subversion of all the laws of nature. It is therefore a mere joke to talk of a new philosophy. The foundation is now firmly laid: the Newtonian philosophy may indeed be improved, and further advanced ; but it can never be overthrown: notwithstanding the efforts of all the Bernoulli's, the Leibnitz's, the Green's, the Berkley's, the Hutchinson's, &c. And even the French themselves have at last adopted it, and given up the Cartesian scheme.

46) その部分を引用すると以下の通り ([Emerson 1758], iii.)。

建築術，航海術，農業，軍事技術はその発明も利用もこの技術によっているしすべてのはたらく機械，戦争の機械，船，橋，粉ひき器，変わった屋根とアーチ，威厳のある劇場，支柱，宙づりの天井桟敷，その他壮大な建築物などすべてが力学によっている。（中略）建築術，航海術，農業，軍事技術はこの技術の想像と応用によっているし，空気，水，風，ひもなどの人工的な動きは何でも，楽器の演奏法や，水道のはたらきとしてこの技術に負っているのである。このような重要な科学なしには，我々は，パンを食べることもでいないし，乾燥したベッドに寝ることもままならない。
力学によって我々は動物の各部の運動を理解でき，神経，筋肉，骨，関節，血管の働きを理解できるようになる。これらの働きは非常に明確で，動物の身体が力学機械にすぎないことがわかる。しかし，この力学の一部である解剖学は，それ自身がひとつの目的である。全ての天体の運動，周期，時間，回転もまた力学の上に成りたっている。力学なしには，将軍は戦争に行けないし，町を包囲することもできないし，防御を固めることもできない。みすぼらしい職人は力学的にはたらくべきで，さまなければ全く仕事をしない方がましである。そこで，王から靴職人にいたるまで，全ての人々がこの技術の恩恵をうけているのである。
原文：
To the art of mechanics is owing all sorts of instruments to work with, all engines of war, ships, bridges, mills, curious roofs and arches, stately theatres, columns, pendent galleries, and all other grand works in building.

Architecture, navigation, husbandry, and military affairs owe their invention and use to this art. And whatever hath artificial motion by air, water, wind, or cords ; as all manner of musical instruments, water-works, &c. This is a science of such importance, that without in we could hardly eat our bread, or lie dry in our beds.
By mechanics we come to understand the motions of the parts of an animal body; the use of the nerves, muscles, bones, joints, and vessels. All which have been made so plain, as proves an animal body to be nothing but mechanical engine. But this part of mechanics, called anatomy, is a subject of itself. Upon mechanics are also founded the motions of all celestial bodies, their periods, times, and revolutions. Without mechanics, a general cannnot go to war, nor besige a town, or fortify a place. And the meanest artificer must work mechanically, or not work at all. So that all persons whatever are indebted to this art, from the king down to the cobler.

47) [Emerson 1758], p.3.

原文:
1. Every body perseveres in its present state, whether of rest, or moving uniformly in a right line, till it is compelled to change that state by some external force.
2. The alteration of motion, or the motion generated or destroyed in any body, is proportional to the force applied, and is made in the direction of that right line in which the force acts.
3. The action and re-action between two bodies are equal, and in contrary directions.

ちなみに，残りの公理も引用しておく ([Emerson 1758], p.3-4.)。

4. 物体全体の運動はすべての部分の運動の合計である。
5. ある場所におけるすべての物体の重さは，それが含む物質の量に比例し，体積，形状，種類によらない。2 倍の物質は 2 倍重く，3 倍の物質は 3 倍重い，以下同じ。
6. すべての慣性力 (vis inertias) はその物質量に比例する。
7. すべての物体はできるだけ低い場所に下降しようとする。
8. 重い物体を支えるものは何であれ，その重さのすべてに耐える。
9.2 つの等しい力が互いに反対方向に働くとき，一方はもう一方の作用を打ち消す。
10. 物体が反対方向の 2 つの力の作用を受けるとき，その差だけの力を大きい方の向きに受けるのと同じである。
11. 物体がつりあいにあるとき，同じ直線上にある反対方向の力は等しく，互いに打ち消しあう。
12. ある一定の時間にある力が生じさせた〈運動の量〉と等量の〈運動の量〉は，同じ力が逆方向に働くことによって打ち消す。
13. 活力 (active force) は，活力 (active force) は，大きい抵抗より小さい抵抗に先にあるいは容易に打ち勝つ。

14. もしあるおもりがなんらかのパワーにより引くか押されるかすれば，それはその線上のすべての点を押すか引くかする。そしてそれはその直線上のどの点に力が作用しても同じ事である。
15. 2つの物体が同じ方向に運動しているとき，どの直線上でもその相対運動は同じであり，一方が静止していて，その差の分だけもう一方が近づいてくるか，あるいは後退する。もしくは反対方向に運動しているときは，その2つの合計だけ近づくまたは後退する。
16. 物体がロープに引かれる場合，力の方向は物体に近接したロープの一部にかかる力の方向と同じ方向である。
17. 何らかの力が物体を動かすか支えるためにロープによって働くとき，ロープのすべての中間部分はその方向と逆向きに等しく膨張している。
18. いくつかの滑車にロープがかけられているとき，そのすべての部分は等しく伸びている。
19. 力を支点にささえられていないてこや梁に与えるとき，もう一方の端がその長さの方向に力で押されるか作用する。
20. 液体の部分はそれにかかる圧力が最小になるように身を任せ，後退する。
原文：
1. Every body perseveres in its present state, whether of rest, or moving uniformly in a right line, till it is compelled to change that state by some external force.
2. The alteration of motion, or the motion generated or destroyed in any body, is proportional to the force applied, and is made in the direction of that right line in which the force acts.
3. The action and re-action between two bodies are equal, and in contrary directions.
4. The motion of the whole body is made up of the sum of the motions of all the parts.
5. The weights of all bodies in the same place, are proportional to the quantities of matter they contain, without any regard to their bulk, figure, or kind. For twice the matter will be twice as heavy, and thrice the matter thrice as heavy; and so on.
6. The vis inertias of all bodies is proportional to the quantity of matter.
7. Every body will descend to the lowest place it can get to.
8. Whatever sustains a heavy body, bears all the weight of it.
9. Two equal forces acting against one another in contrary directions, destroy one another's effects.
10. If a body is acted on with two forces in contrary directions, it is the same thing as if it were only acted on with the difference of these forces, in direction of the greater.
11. If a body is kept in equilibrio, the contrary forces, in any one line of direction, are equal, and destroy one another.
12. Whatever quantity of motion any force generates in a given time, the same quantity of motion with an equal force destroy in the same time, acting in a contrary direction.
13. Any active force will sooner or more easily overcome a lesser resistance than a greater.
14. If a weight be drawn or pushed by any power, it pushes or draws all points of the line of direction equally. And it is the same thing, whatever point of that line the force is applied to.
15. If two bodies be moving the same way, in any right line their relative motion will be the same, as if one body stood still, and the other approached, or receded from it with the difference of their motions; or with the sum of their motions, if they move contrary ways.
16. If a body is drawn or urged by a rope, the direction of that force is the same as the direction of that part of the rope next adjoining to the body.
17. If any force is applied to move or sustain a body, by means of a rope, all the intermediate parts of the rope are equally distended, and that in contrary directions.
18. If a running rope go freely over several pullies, all the parts of it are equally stretched.
19. If any forces be applied against one end of a free lever or beam, the other end will thrust or act with a force, in direction of its length.
20. The parts of a fluid will yield, and recede towards that part where it is least pressed.

48) 板倉はニュートン主義を「〈ニュートン力学の力学的な見方に沿った世界観〉とでもいうことができる」とし，ニュートンの光学研究，クーロンによる電気力・磁気力の研究などを「ニュートン主義の見事な成果」としているが，このエマーソンの主張はまさにそのような“ニュートン主義”を表現していると言える([板倉 2000], pp.165-166.)。ただし長尾によれば，ニュートン主義には単一的で明確な定義はなく，「複数，しかも多数のニュートン主義が存在」し，ニュートン個人の周辺の支持者によるものから，後に大陸

で成立した大陸型自然神学を継承するニュートン主義や，スコットランドでのニュートン主義の変種など様々に分類され，「「主義」の根幹に関わるような根本的な定義のレヴェルで見解の対立が見られた」とある([長尾 2001], pp.22-29.)。

49) [グリーン 1994], p281.

50) [Wilson 1985], p.15.

51) [Becher 1980], pp.23-24.

52) [Harman 1985a], p.1.

53) [吉田 1982].

54) [川島 1987].

55) [川崎 1990].

56) [板倉 2000],[永田 2004].

57) [Millburn 1976].,[Millburn 1988].

58) [Truner 1990].

59) [Lightman 2007].

60) [Stafford 1994].

61) [板倉 1992].

62) [田中 2008].

63) [Harman 1998], p.25.

64) [Harman 1982], pp.70-71., 邦訳 [ハーマン 1991], p.78.

65) [Smith and Wise 1989], pp.348-395.

第 1 章

大陸解析学導入以前の英国力学教科書

1.1　はじめに

本章では，1700 年代末から 1800 年代初頭にかけて，英国に大陸流解析学が導入される以前の時代を代表する力学教科書 2 冊について，運動法則，基本方程式の扱いを中心に論じる。

1800 年代はじめころまで，ケンブリッジで標準的教科書だったのが，ウッド『力学の原理』である。1.2 節では，このウッド『力学の原理』の内容を検討する。まず 1.2.1 節でこの本の全体的な構成と力の概念，運動法則に関する記述を紹介する。1.2.2 節前半では，前節で紹介したウッドの力概念，運動の法則を主に『プリンキピア』との比較に基づいて論ずる。ウッドによる運動の 3 法則はニュートン『プリンキピア』と一見似た表記になってはいるが，第 2 法則と第 3 法則はニュートンのものとは実質的に異なるものとなっている。この節の後半では，ウッドが力学の基本方程式としていたのはどのような式だったかを論じ，それを使って力学問題がどのように解かれていたかを論じる。ウッドの基本方程式は，今日の運動方程式に比べると一般性に乏しいものであり，運動の法則ともむすびつけられていなかった。

ウッド『力学の原理』は，当時解析的な問題を扱う際に使用されていたニュートンの流率法は，使用されていなかった。そこで，この時代の流率法の力学問題への扱いおよび，当時の力学の解析的な基本方程式がどのような形態だったかを明らかにしておくことは，この後大陸流解析学導入期を論じるのに役立つ。

そこで，1.3 節では，同時代に版を重ね普及していたと考えられ，流率法を使用していたグレゴリー『力学論』における運動法則および力学の基本方程式について論じる。まずグレゴリーと同様，1.3.1 節でこの本の構成及び力概念，運動法則の記述を紹介し，1.3.2 節で運動の法則と基本方程式との関係，そして基本方程式がどのように表記され，それがどのように力学問題に適用されていたのかを論じる。グレゴリーは等速度運動，等加速度運動，一般的な変化運動それぞれに対して別個の方程式を使用して力学問題を解いてい

た。そのそれぞれの適用例をこの節後半では現代的な解法と比較しながら検討する。その上で当時の力学問題がどのように流率法によって解かれていたかを明らかにする。

最後の 1.4 節では，同時代の他の力学書について概観する。

1.2　ウッド『力学の原理』

1.2.1　1800 年代初頭のケンブリッジ標準力学教科書

『オックスフォード・エンサイクロペディア』(1833) で，〈エマーソン『力学の原理』(1754 年初版) を引き継いで標準的な物理教科書になった〉とされているのが[1]，1796 年に初版が出版されたウッド『力学の原理』である[2]。

この本が 1800 年代はじめのケンブリッジにおいて標準的教科書であったことは，ベッヒャーの論文「ウィリアム・ヒューウェルとケンブリッジの数学」にも記述されており[3]，また，1796 年から 1830 年まで，30 年以上にわたり 8 つの版を重ねたという事実からも，この時代の英国でかなり普及した力学教科書であったことは間違いない[4]。

本文 211 ページの八つ折り本であって，著者の肩書きはケンブリッジ，セントジョンズカレッジのフェロー (Fellow of St. John's College, Camridge.) となっている。

全般を通じて幾何学的な図が多用されており，数式も比を用いた表現が主体で解析的な表現はない。全 9 章からなっており[5]，第 I 章「物質と運動」は，16 ページ中 14 ページが「定義」(Definition) で占められている。ここで「物質」(Matter)，「延長」(Extension)，「形状」(Figure) などの定義とともに，運動 (motion)，速度 (velocity)，距離 (space)，力 (Force) などが定義されていて，等速運動の場合の移動距離 S と時間 T と速度 V の関係式 $S \propto TV$ や運動量の定義式 $M \propto QV$（Q は物質量 (quantity of matter)，M は運動量 (momentum)）などが表現されている。

ここで力はまず，〈静止あるいは等速直線運動している物体〉の運動変化をもたらすものとして定義されている。さらに，その作用が瞬間的なもの，連続的なものについて，それぞれ〈衝撃的 (impulsive) な力〉，〈一様な (constant) あるいは連続的な (continued) 力〉として分類されている。〈衝撃的な力〉は，作用時間が小さすぎて測定不可能なため，それが生み出す効果全体で測るとされ，〈連続的な力〉は “等しい時間に生み出す効果で測定される” とされている[6]。

この〈力が生み出す効果〉について，その測定量が速度によるか運動量によるかによって，以下のように分類されている[7]。

> (21.) **加速力**は，物体の物質量によらず，ある決められた時間に一様に生成された**速度**で測定される。
>
> (中略)
>
> (22.) **起動力**は，ある決められた時間に一様に生成された**運動量**によって測定される。

定義に続く第 I 章最後の 2 ページは〈慣性の測度〉(Measure of the Inertia) と題されており，〈物体の慣性が重さに比例することから，物質量は慣性によって測定されること〉が述べられている。

第 II 章が「運動の法則」となっている。運動の 3 法則が次のように表現されている。

第 1 法則[8)]——

> 物体が外力の作用を受けない限り，静止しているときは静止し続け，運動しているときは一直線上を一様に運動し続けようとする。

第 2 法則[9)]——

> 物体に生じる運動，あるいは運動の変化は，与えられた力に比例し，その力が作用する力の方向に引き起こされる。

第 3 法則[10)]——

> 作用と反作用は大きさが等しく反対の方向である。

1.2.2　運動の 3 法則と基本方程式

『プリンキピア』の〈運動の 3 法則〉との相違点

冒頭でまず「定義」が記述され，次に「運動の法則」が記述されるその構成，加速力，起動力といった概念などは，ニュートン『プリンキピア』との類似点が見られ，その影響がうかがえる。

ただしニュートン『プリンキピア』では，第 2 法則で〈運動変化に比例する量〉は「起動力」という用語が使用されているのに対して，ウッドは「与えられた力」という表現を用いている。つまり，ニュートンの第 2 法則の記述は $I \propto \Delta mv$ と解釈できるのに対して，ウッドのそれは $F \propto a$ と解釈できる表現となっている。ウッドの第 2 法則からは質量の因子が抜けていることになる。

ウッドは第 2 法則を，次のような 2 つのケースに分類して解説している。

- 力の効果は，その物体の持っている運動状態にはよらない
- 力の大きさが増減したとき，その効果は力の大きさの増減の割合と比例する

前者については，自由落下運動，鉛直投げ上げ（投げ下ろし）運動，斜方投射運動といった重力による運動が例としてあげられて解説されている。物体が静止状態にあっても，落下中や投げ上げ（投げ下ろし）などによって運動状態にあっても，あるいは斜方投射のように重力の作用する方向と異なる方向に運動していても，重力による鉛直方向の運動変化に違いはない。この事実を，「力の生み出す効果は，物体がそのとき持っている運動状態によらない」ことの根拠としている。

これはいわば “力と運動の合成法則” とでもいうべきものであり，現代の物理教科書で

は，“ガリレオの相対性原理”—〈等速運動している物体系に成り立つ力学法則は，静止状態の物体系に成り立つ力学法則と等価である〉とする原理—で説明され，第 1 法則から導かれる帰結とされるのが普通であるが，ウッドはこのように第 2 法則の一部としている。それは，『プリンキピア』の第 2 法則の解説と系で合成法則がくわしく論じられていた影響だと考えられる（本論文 5 ページ)。

また後者の〈力とその効果の比例関係〉については，斜面上を滑り落ちる物体を例に挙げて解説している。斜面の長さと高さの比が 2:1 の斜面を滑り落ちる場合，物体が受ける重力は $\frac{1}{2}$ になる。このとき，物体の速度変化の割合もまた，自由落下の場合の $\frac{1}{2}$ になる。この事実から，力の大きさが減少する割合と，力の効果が現象する割合は等しい。現代的にいいかえれば，力の大きさと加速度の大きさとの比例関係である。

このようにウッドの第 2 法則では，〈力と運動の合成〉に重点が置かれ，比例定数としての〈慣性質量〉は除外されている。ここで除外された慣性質量は第 3 法則で以下のように導入されている[11)]。

> **作用**については，我々はここでは起動力 (moving force) として理解する。定義 (22 項) によればこの起動力は，単位時間に生じる運動量で測定される。そして作用と反作用が，この意味で等しいか等しくないかは，実験によるしかない。

このようにウッドは “作用” を単位時間の運動量変化で測る “起動力” として解釈しているので，以下のような衝突実験を作用・反作用の法則を証明する実験として位置づけている。2 つの糸につり下げられた木の円筒を用意し，一方の円筒からは針が突き出ている。一方を引き上げて静止した円筒に衝突させると，衝突後は一体化して運動する。両者の質量が等しければ，衝突後一体化した円筒の速度は，ぶつかる前の円筒の速度の半分になる。静止している円筒の質量が 2 倍なら，衝突後の速度と衝突前の速度比は 2:3 になる。なぜなら，衝突後の物体の質量は 3 倍となるから，衝突後の運動量を質量 3 ×速度 2 とすると，それに等しい衝突前の運動量は，質量 2 ×速度 3 となるからである。

つまり，ウッドは実質作用・反作用を運動量保存則として解釈することにより，ここで〈慣性質量〉を導入しているのである。ウッドがここで，衝突実験や運動量を持ち出しているのも，おそらくニュートンが『プリンキピア』の運動法則の解説で衝突実験をもちだして運動量で第 3 法則を説明している影響ではないかと思われる（本論文 6 ページ）。

基本方程式の導出と位置づけ

上記第 II 章「運動の法則」には，運動方程式のような力学の基本方程式は記述されていない。しかも，次の第 III 章「運動の合成と分解」，第 IV 章「力学的なパワーについて」(滑車やてこの法則)，第 V 章「重心について」までは静力学的な内容に限られており，第 VI 章「衝突について」も現象論的な衝突の法則に関する記述となっているので，運動方程式の出番はない。

動力学的な内容については，第 VII 章「一定の力によって加速あるいは減速される物体の直線運動」(On The Rectilinear Motions of Bodies Accelerated or Retarded by Uniform

Forces) からはじまり，その冒頭で，動力学に関する基本式が導出されている。その命題 LII「第 227 項 物体が直線上を一定の力で推進されるとき，生じる速度はその運動時間に比例する」[12] の注釈には「この命題と次の命題では，我々は**力**を**加速力**として理解し，質量については明示的に述べられないかぎり考慮しない」とあり[13]，先の第 2 法則と同様，力は，質量を考慮に入れない加速力とされている。

本文は，以下のように記述されている[14]。

> 加速力はある時間に一様に生成する速度で測定され (21 項)，仮定より力は変化しない。そこで速度の増加が等しければ，それを生じさせる時間は常に等しい (20 項)。そして運動の第 1 法則より，物体は生じた速度増加を保持するので，もし，時間 t で，速度 a が生じれば，時間 mt では，速度 ma が生じる。すなわち，速度の生成は時間に比例する（『代数学』193 項)。

ここで参照されている 21 項とは，本論文 20 ページで引用した加速力の定義である。20 項は，力が〈運動の変化を引き起こす要因〉として定義されている[15]。ここでは力が一定という前提から，生じる速度増加つまり加速度は一様となり，「生じる速度 $\propto$ 時間」 の比例関係が導かれているのである。

興味深いのは，ここで根拠とされているのが第 2 法則ではなく，第 1 法則と〈加速力と力の定義〉だということである。次の命題 LIII，228 項「一直線上を様々な一定の力によって推進されるとき，ある時間に生じる速度は力と時間の両者に比例する」と題する項で，この 227 項が数式化されている[16]。

> F および f を力，T および t をそれが作用する時間，V および v を生じる速度とし，x を力 f が時間 T 作用することによって生じる速度とするとき，
>
> $$V : x = F : f \qquad (21\ 項);$$
> $$x : v = T : t \qquad (227\ 項);$$
>
> 合成して，$V : v = FT : ft$;　すなわち，生じる速度は力と時間の両者に比例する（『代数学』195 項)。

つまり，21 項の速度と力の比例関係 $V \propto F$ と，227 項の速度と時間の比例関係 $V \propto T$ より，これらを組み合わせて，$V \propto FT$ の関係が導かれている（ちなみに，これらの引用で『代数学』とあるのは，ウッドの別の著書『代数学の基礎』の事である。対応する項に，関係する代数の公式が参照されている[17]）。

上記の式 $V \propto FT$ は今日でいえば，力積と運動量の関係式 $\Delta mv = F\Delta t$ (m は質量) から，質量の因子を除いて比例の式にしたものであり，運動方程式とほぼ等価な式と言える。

基本方程式の力学問題への適用例

形式が運動方程式に似ているからといって，それが基本方程式と考えられていたとは限らない。その使用法を見なければならない。

この式を導出した少し後の例題でウッドは，式 $V \propto FT$ から斜面上の運動を論じている。その例題とは，命題 LXI.249 項「重力に対する〈斜面上で物体の運動を加速あるいは減速する力〉は，〈斜面の長さに対するその高さ〉に比例する」[18)] の中にある，斜面を転がり落ちる物体についての問題である[19)] 。

> 253. 系 4　斜面を物体が転がり落ちるとき，T 秒で生じる速度 V は，1 秒あたり $\dfrac{H}{L} \times 2mT$ フィートずつ一様に増加する。ただし $m = 16\frac{1}{12}$ である。

ここで H は斜面の高さ，L は斜面の長さ，定数 $m = 16\frac{1}{12}$ フィートはメートル法に換算すると約 4.9m，つまり 1 秒間に物体が落下する距離である。したがって重力加速度は $2m$ に相当する。これに対して斜面上の落下速度を V とし，重力を 1 とおくと，重力の斜面方向成分は $\dfrac{H}{L}$ となり，斜面上の落下時間を T とおけば，$V \propto FT$ より

自由落下速度：斜面上の降下速度

＝重力×落下時間：重力の斜面方向成分×斜面上の降下時間

が成り立つので，

$$2m : V = 1 \times 1 : \frac{H}{L} \times T$$

これより，

$$V = \frac{H}{L} \times 2mT$$

ちなみに，$\dfrac{H}{L}$ は，斜面の角度を θ とすれば $\sin\theta$ であるから，$2m$ を重力加速度 g に置き換えれば上式は，

$$V = g \sin\theta \cdot T$$

と書き直せて，今日の物理教科書の例題でもよく見かける式となる。このように，式 $V \propto FT$ は，この例題では今日の運動方程式と同じような使われ方をしている。

またウッドは，この $V \propto FT$ に，距離 S と速度 v，時間 T の関係式 $S \propto TV$(239 項) をあてはめることによって $S \propto FT^2$ (241 項) および $V^2 \propto FS$ を導いている (243 項)[20)]。この $V^2 \propto FS$ の式は，今日の物理教科書における仕事と運動エネルギーの関係式 $Fs = \dfrac{1}{2}mv^2$ から出発している。

ウッドは命題 LXII.256 項「斜面全体を滑り落ちる物体が得る速度は斜面の高さの平方根に比例する」[21)] では，この $V^2 \propto FS$ によって証明している。

このような例題における使われ方を見ても，ウッドの本では，$V \propto FT$ および，それから派生した $V^2 \propto FS$ が，力と運動を論ずる際の基本式と位置づけられていたと言える。

ただし，今日の物理教科書での運動方程式は微分方程式の形で書かれているのに対して，ウッドの本では，ほとんどが比例式であり，微分方程式は記述されていない。この式を導出した後の章は，「第 VIII 章 物体の振動」，「第 IX 章 投射」の 2 章のみであって（章末注 44 ページ参照），いずれも重力による運動しか論じられていない。つまり，一定の力の作用による運動だけなので，微分方程式ではなく，比の式だけでも充分だったのである。それにくわえて，『プリンキピア』では，ニュートン自身が発見した微分方程式（流率方程式）が使用されていなかった[22)]という事実も影響しているのではないかと思われる。

いずれにしても，ウッドが基本方程式として位置づけていた式は，質量の因子がかけているという点でも不十分なものであったし，運動の法則とも明確に関連づけられてはいなかったのである。

1.3　グレゴリー『力学論』

1.3.1　流率法による解析的力学教科書

ウッド『力学の原理』は，一定の力による運動しか扱っていなかったこともあり，力学に関する数式は比によるものだけで，解析的な扱いについてはまったく記述されていなかった。しかしこの時代の英国は大陸流解析学が導入される以前だったとはいえ，ニュートンが創始し自ら流率法 (methodus fluxionum) と名付けた微分積分学が普及していたはずである[23)]。

そのような流率法を用いて書かれた力学教科書の代表的なものが，グレゴリー『力学論』(1815) である。このグレゴリー『力学論』が，当時の英国を代表する力学教科書であったことは，『エジンバラ・エンサイクロペディア』(1830) の「動力学 (Dynamics)」の項の末尾に，〈読者が参照すべき文献〉として，ラグランジュ『解析力学』，ダランベール『動力学』とともにその名があげられていることからもわかる[24)]。

また，ギリスピー編『科学者人名大辞典 (全 16 巻 + 補 2 巻)』(*DSB*) では，オリンサス・グレゴリーの経歴が，「独学で数学及び科学を学び，チャールズ・ハットンに認められてウーリッチ王立軍事アカデミーの数学教師になり後に教授となった人物」と記述されているが，そこではこの『力学論』が「英国で出版された純粋および応用力学に関する出版物のうち，もっとも完成度が高いものの 1 つ」と書かれている[25)]。

この本は，初版が 1806 年に発行され，第 2 版 (1807)，第 3 版 (1815)，第 4 版 (1826) と版を重ねているが，今回は第 3 版を参照した[26)]。全 2 巻からなり，第 1 巻「静力学，動力学，静水力学，水力学，空気力学の理論」[27)]，第 2 巻「〈機械装置の性質，構造，簡略化〉，〈ひもおよび，速く動くもの他，の摩擦と剛性〉，そして〈多くの風変わりで有用な機械装置の説明〉に関する所見」[28)]となっている。

本研究で問題にしている動力学の基礎的な主に第 1 巻の内容が相当している[29)]。この

第 1 巻は,「第 I 書 静力学」と「第 II 書 動力学」の 2 部構成になっているが，運動の法則は,「第 II 書 動力学」ではなく「第 I 書 静力学」の第 I 章「公理すなわち運動の法則」(Axioms, or Laws of Motion and Rest) に次のように記述されている[30]。

I．全ての物体は，なんらかの力学的な力の作用によって変化が引き起こされない限り，静止の状態を続けるか直線上を等速運動し続ける。

II．静止あるいは運動する物体に引き起こされる変化は，与えられた力の方向におこり，その力の大きさに比例する。

III．反作用は，作用と常に大きさが同じで反対向きである。言い換えれば，二つの物体の相互作用は常に大きさが同じで，反対方向を向いている。

力の定義については,「第 I 書 静力学」,「第 II 書 動力学」の双方で冒頭におかれた「定義と注釈」で与えられている。まず,「第 I 書 静力学」で与えられている定義は以下の通りである[31]。

> 17. **力**(*force*) あるいは**パワー**(*power*) は，力学的には，静止しているか運動しているかにかかわらず，物体の運動状態を変化させる原因である。

「第 II 書 動力学」では，この静力学での力の定義が次のように拡張されている[32]。

> 212. **力**は，我々の定義 (17 項）によれば，物体の状態を変化させる原因である。すなわち，それは物体を運動させるあるいは運動させようとする。我々がこれまで見たように，力はその効果以外に知るすべはない。したがって，その効果によってのみ，われわれは力をはかることができる。今，力の効果が物体のすべての質点にある速度を与えている。したがって，すべての物体の部分が（ここで考えるように）ある速度を得ているとき，運動の原因の効果は速度を運動する原子の数にかけたもので測定することができる。すなわち，速度に質量をかけたもので測定することができる。したがって，**力は質量がわかっている物体に与える速度と，その質量とに比例する**。

つまり，静力学での力の定義は単に運動状態の変化と変化の原因であるのに対して，動力学では質量に関する拡張が行われている。

1.3.2　運動の 3 法則と基本方程式

力概念と運動の 3 法則

このようにまず，定義が最初に置かれ，それから運動の法則が冒頭で記述される構成は，ウッド『力学の原理』もとっていた構成で，ニュートン『プリンキピア』がとっていた構成と同じである。運動の法則はその性格上，動力学の章で記述すべきのように思えるが，力学の基本原理とみなされていたので，このように，一番最初の章におかれていたの

だと思われる。

その証拠にこの第 1 章「公理すなわち運動と静止の法則」は，以下の書き出しではじまっている[33]。

> 21. 力学の原理が数学的研究の一分野となるためには，それが扱う量が，それ自身あるいはその作用として測定可能でなければならない。しかしまた，そのような一般原理を提示するためには，その正しさが議論の余地がないくらい明らかでなければならず，学生がその研究をするときにはなくてはならないものとならねばならない。そのような一般原理はアイザック・ニュートン卿が『プリンキピア』ではじめて明確に提示した。そのときからそれらは力学公理となり，一般に運動の法則として受け入れられた。それらは実際には，幾何学と哲学の間を取り持つ命題であり，これらを通じて力学は自然学 (physics) の数学的分野となった。

このように，〈ニュートンが力学の基本原理を運動の法則という形ではじめて明確に示し，それによって力学という分野が確立した〉と宣言され，力学の出発点であることがまず最初に確認されている。

ところで，グレゴリーの “運動の法則” や “力の定義” には，加速力，起動力という用語は使用されていない。

グレゴリーは第 2 法則について「17 項で考えたような，〈力を単に運動の原因，あるいは運動変化の原因と見なす定義〉とほとんど同じ命題と考えることができる」と述べ[34]，静力学での力の定義を引き合いに出しているが，すでに見たように，この静力学での力の定義には，運動の変化とのみかかれていて質量に関する記述はない。かといって，ウッドのように第 3 法則で慣性質量を導入しているかと言えばそうではない。

結局，この運動の法則の章で質量について書かれているのは，最後の 27 項で「これらの公理は，自由な空間での，相互の質点の作用，あるいはすべての質量が一点に集中すると見なされる場合に，直ちに関連する」として，軸の周りの運動などの運動，つまり剛体力学への関連を述べた部分だけである。しかしここでは簡単に触れられているのみで，その詳しい記述は「動力学でより詳しく述べられる」と，動力学の章にゆだねられている。

また，力の測定量についても，静力学の力の定義の解説では，「それが生み出す効果によって測定できる」とのみ書かれ[35]，それ以上，力の測定についての具体的な定義は書かれていない。一方動力学の方ではどうかというと，力は〈それが生み出すことができる運動量〉ではかると定義され[36]，式 $\mathrm{F} \propto \mathrm{BV}$ が導出されているのである[37]（B は質量，F は起動力 moving force，V は速度を示す）。

等速運動の基本方程式

この「第 II 書 動力学」での力の定義式 $\mathrm{F} \propto \mathrm{BV}$ が，第 I 章「等速および変化する運動」の「第 I 節 等速運動」で速さ V，距離 S，時間 T の関係式 $\mathrm{S} \propto \mathrm{TV}$ とあわせて適用され，一連の関係式が次のように導出されている (Q は運動量を示す)[38]。

$$\mathrm{F} \propto \mathrm{Q} \propto \mathrm{BV} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{T}}.$$
$$\mathrm{Q} \propto \mathrm{F} \propto \mathrm{BV} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{T}}.$$
$$\mathrm{B} \propto \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{FT}}{\mathrm{S}} \propto \frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{S}}.$$
$$\mathrm{T} \propto \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{F}} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{Q}}.$$
$$\mathrm{S} \propto \mathrm{TV} \propto \frac{\mathrm{TF}}{\mathrm{B}} \propto \frac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{B}}.$$
$$\mathrm{V} \propto \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{T}} \propto \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{B}} \propto \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{B}}.$$

これらは等速運動に関する関係式とされているので，今日の理解では慣性の法則より $F = 0$ となるはずである。ところが，$\mathrm{F} \propto \mathrm{Q} \propto \mathrm{BV}$ などとなっていて，F は 0 とはなっていない。これはなぜかというと，「力は瞬間的すなわち衝撃的なものと考え」という断り書きがされていて，力 F が衝撃力と想定されていることによる。当時は，固い物体同士の衝突のようなときに生じる衝撃力 (impulsive force) は，一瞬（時間=0）で速度を生み出すと考えられ，衝撃力の大きさは，それが生み出す全運動量で測定されると考えられていた。つまり衝撃力は，今日では力積に相当する量で測られていたのである。そこで，この $\mathrm{F} \propto \mathrm{BV}$ は，ある一定の運動量 BV と，それに相当する衝撃力（力積）F とを結びつけた式となっているのである。

一様に変化する運動の基本方程式

これに対して次の「第 II 節 一様に変化する運動」では，グレゴリーは基本式を $\mathrm{S} \propto \mathrm{TV}, \mathrm{Q} \propto \mathrm{BV}, \mathrm{Q} \propto \mathrm{FT}$ とおいている。前者の 2 式は〈時間，距離，速度の関係式〉および〈運動量の定義式〉であり，等速運動のときに用いていた式と同じである。第 3 式では，等速運動のときは $\mathrm{F} \propto \mathrm{Q}$ となっていたのに対して，時間の項がはいっている。この等加速度運動の場合は，それを生み出す力として，衝撃力のかわりに「一定に作用する力」(the force acting constantly upon it) つまり，連続的な力が想定されているためである。この基本式を元にグレゴリーは関係式の一覧を以下のように記述している[39)]。

$$\mathrm{B} \propto \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{FT}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{S}} \propto \frac{\mathrm{FT}^2}{\mathrm{S}} \propto \frac{\mathrm{FT}^3}{\mathrm{QS}} \propto \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{FS}} \propto \frac{\mathrm{Q}^3}{\mathrm{FTV}} \propto \frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{V}^2}.$$

$$\mathrm{Q} \propto \mathrm{BV} \propto \mathrm{FT} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{T}} \propto \frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{FT}^2\mathrm{V}}{\mathrm{S}} \propto \sqrt{\mathrm{BFS}} \propto \sqrt{\mathrm{BFTV}}.$$

$$\mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{T}} \propto \frac{\mathrm{BV}}{\mathrm{T}} \propto \frac{\mathrm{QV}}{\mathrm{S}} \propto \frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{T}^2\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{BTV}} \propto \frac{\mathrm{BV}^2}{\mathrm{S}} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{T}^2}.$$

$$\mathrm{V} \propto \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{T}} \propto \frac{\mathrm{FT}}{\mathrm{B}} \propto \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{B}} \propto \frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{FT}^2} \propto \frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{Q}} \propto \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{BFT}} \propto \sqrt{\frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{B}}} \propto \sqrt{\frac{\mathrm{F}^2\mathrm{ST}}{\mathrm{Q}^2}}.$$

$$\mathrm{S} \propto \mathrm{TV} \propto \frac{\mathrm{FT}^2}{\mathrm{B}} \propto \frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{B}} \propto \frac{\mathrm{FT}^2\mathrm{V}}{\mathrm{Q}} \propto \frac{\mathrm{QV}}{\mathrm{F}} \propto \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{BF}} \propto \frac{\mathrm{Q}^2\mathrm{V}}{\mathrm{F}^2\mathrm{T}} \propto \frac{\mathrm{BV}^2}{\mathrm{F}}.$$

$$\mathrm{T} \propto \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{V}} \propto \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{F}} \propto \frac{\mathrm{BV}}{\mathrm{F}} \propto \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{Q}} \propto \sqrt{\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{F}}} \propto \sqrt{\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{FV}}} \propto \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{BVF}}.$$

これに続いてグレゴリーは,

> いくつかの量の値あるいは〈同種の固定値との関係〉が決められているとき，それらは一般定理から除外されるだろう。すなわち，もし物体 (body) が力と比例するなら，$\mathrm{S} \propto \mathrm{TV} \propto \mathrm{FT}^2 \propto \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{F}^*}$ を得る。 ただし $\mathrm{F}^* = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{B}}$ である。

と記述している[40)]。この F^* とは，力から質量の因子を除いた「加速力」である。冒頭の「定義」のところでは，この「加速力」は定義されていなかったが，グレゴリーはここで加速力の定義を与えているのである[41)]。

なぜここで質量を打ち消した加速力 F^* をあえて導入したかというと，当時の力学問題のほとんどは重力による運動を想定したからではないかと思われる。力学はそもそも，ガリレオの自由落下の研究から出発した。その自由落下の運動方程式は以下のように書くことができる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \tag{1.1}$$

左辺の質量 m は慣性質量であり，右辺の m は重力質量であるが，この 2 つは一致（あるいは比例）しているために，以下のように書き直せる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{1.2}$$

このように，重力による運動の場合，質量の因子が打ち消されてしまう。グレゴリーが書いている「物体 (body) が力と比例するなら」というのは，「(慣性）質量が 2 倍，3 倍になるとき，それに比例して〈はたらく力〉も 2 倍，3 倍になるならば」と言い換えることが出来る。つまり，慣性質量と重力質量が比例していることにより，重力の作用による運動は，質量を考慮しない加速力 F^* で運動を論じても差し支えなくなることになる。

〈一様に変化する運動の基本方程式〉の力学問題への適用例

ここでグレゴリーは，落下運動のような重力が直接作用する問題の場合だけでなく，右図のような，斜面上の物体をつないだ場合の運動に関する問題についても，加速力を用いて解いている[42)]。

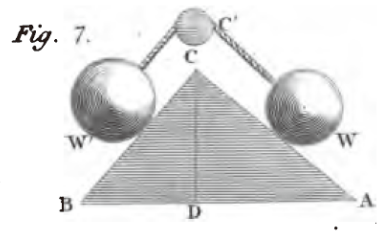


図 1.1　図版 VI 第 7 図

まずこれを現代的に解くと以下のようになる。

斜面 AC の水平面となす角を e, 斜面 BC の水平面となす角を e', W の質量を w, W' の質量を w', 両者を結ぶひもの張力を T, 物体が右向きに運動する加速度を α とすると，2 つの物体の運動方程式は以下のようになる。

$$w\alpha = wg\sin e - T$$
$$w'\alpha = T - w'g\sin e'$$

T を消去して α について解くと，

$$\alpha = \frac{w\sin e - w'\sin e'}{w + w'}g$$

となり，これらの物体は，上記の加速度で右向きに運動する。

これにたいして，グレゴリーはまず，時刻 $t + \dot{t}$ における W と W' に加えられる速度を，以下のように記述している[43)]（ここでは，分かりやすくするために $\dot{t}$ を Δt, $\dot{v}$ を Δv とおきかえている）。

$$W \;\ldots\ldots\quad v + g\sin e\cdot\Delta t \begin{cases} v + \Delta v \;\ldots\ldots\; \text{C から A への事実上の速度 (effective velocity)} \\ g\sin e\cdot\Delta t - \Delta v \;\ldots\ldots\; \text{消滅させられた速度 (velocity destroyed)} \end{cases}$$

$$W'\ldots\ldots -v + g\sin e'\cdot\Delta t \begin{cases} -v - \Delta v \;\ldots\ldots\; \text{C から B への事実上の速度} \\ \Delta v + g\sin e'\cdot\Delta t \;\ldots\ldots\; \text{消滅させられた速度} \end{cases}$$

W および W' が斜面を時刻 t の時速度 v で右に運動しているとき，それぞれが重力の作用により時刻 $t + \Delta t$ に持つであろう速度は，ひもによる束縛がなければ，$v + g\sin e\cdot\Delta t, -v + g\sin e'\cdot\Delta t$ (ただし W' の速度は左向きが正) である。しかし，実際は両者がひもに結ばれていることにより，W および W' はそれぞれ，Δv だけ速度が追加あるいは減少させられるので，それぞれの速度は $v + \Delta v$ および $-v - \Delta v$ となる。これが「事実上の速度 (effective velocity)」である。そこで，その差 $g\sin e\cdot\Delta t - \Delta v$ および $\Delta v + g\sin e'\cdot\Delta t$ が束縛力によって「消滅させられた速度」(velocity destroyed) ということになる。

ひもによる束縛力によって，この速度変化（速度の消滅）が引き起こされた。そこで，外力と力による効果の釣り合い（ダランベールの原理）を考慮すると

$$wg \sin e \cdot \Delta t - w\Delta v = w' g \sin e' \cdot \Delta t + w' \Delta v$$

が成り立つ。これを解くと，

$$\text{(I.) ......}\phi = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{w \sin e - w' \sin e'}{w + w'} g.$$

を得る。これをグレゴリーは，事実上の加速力 (effective accelerating force) と呼んでいる。つまり，この加速力 ϕ が，重力による加速力 g の変わりに実際に物体に作用している加速力と考えるのである。これを先の式の F* に相当するものとすれば，速度 v と位置の変化 s も，

$$\text{(II.)......}v = \frac{w \sin e - w' \sin e'}{w + w'} gt.$$

$$\text{(III.)......}s = \frac{w \sin e - w' \sin e'}{w + w'} \cdot \frac{1}{2} gt^2.$$

と求めることが出来る。

重力による落下運動などの場合，質量の因子が消去されてしまうため，運動方程式からは質量の因子が消去されてしまい，加速力といった質量を考慮に入れない量を力の測定量としても特に問題はなかった。この斜面の問題のような場合も「事実上の加速力」として，重力を実質上の加速力におきかえる手順を踏むことによって，重力と同じような扱いをする工夫をしていたことがこの解法から分かる。

一般的な変化運動の基本方程式

第 III 節では，「一般的な変化運動」，つまり力が一定でない運動について論じられている。この 2 つめの項，「 232.命題 **変化運動に適用する基本方程式の導出**」[44]で，グレゴリーは一般化した基本方程式，今日の $F = m\dfrac{dv}{dt}$ に相当する式を導出している。

これまでの等速運動, 等加速度運動でグレゴリーは速度, 距離, 時間の関係式を S $\propto$ TV といったように，微分を使用しない比の式で表現していたが，ここでは変化する力を扱っているために，微分法（流率法）を用いて，

$$\text{(I.)} \cdots v = \frac{\dot{s}}{\dot{t}} \text{ あるいは } \dot{s} = v\dot{t}$$

と表現している[45]

同じように，加速力を与える式も，

$$\text{(II.)} \cdots \phi = \frac{\dot{v}}{\dot{t}} \text{ あるいは } \dot{v} = \phi\dot{t}$$

という形で与えている[46)]。これらを現代的な式に書き直せば式 (I) は，$v = \dfrac{ds}{dt}$ ，式 (II) は，$\phi = \dfrac{dv}{dt}$ である。(II) は，たんなる加速度の定義式にも思えるが，ϕ を加速力として，力の測定量としていたことを考慮すると，これが今日の運動方程式 $F = m\dfrac{dv}{dt}$ に相当する式とみなせる。そしてこれらをもとに次のように第 3 の式が導出される。以下に引用する[47)]。

> 上記の 2 つの式はたやすく第 3 の式を与え，しばしば便利に使われる。式 $\dot{s} = v\dot{t}$ より，式 $\dot{t} = \dfrac{\dot{s}}{v}$ を導くことができる。この $\dot{t}$ の値を式 $\dot{v} = \phi\dot{t}$ に代入することにより，容易に次式を得る。
>
> $$\text{(III.)}\cdots\phi\dot{s} = v\dot{v},\ \text{あるいは}\ \phi = \frac{v\dot{v}}{\dot{s}}$$
>
> 同じ式についてもう一度考えると，$\dot{v} = \phi\dot{t}$ と $v\dot{t} = \dot{s}$ より，積 $v\dot{t}\dot{v} = \phi\dot{t}\dot{s}$ を得る。$\dot{t}$ を消去して，$v\dot{v} = \phi\dot{s}$ が残る。しかし，$v\dot{v} = \frac{1}{2}(vv)^{\cdot}$ なので，その結果，
>
> $$\text{(IV.)}\quad \phi\dot{s} = \frac{1}{2}(vv)^{\cdot}$$
>
> を得る。

上記を現代的に記述しなおすと，以下のようになる。
式 (II) $\phi = \dfrac{dv}{dt}$ に，式 (I) の左辺と右辺を入れ替えた式 $\dfrac{ds}{dt} = v$ をかければ，

$$\phi\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{dt}$$

変形すれば，$\phi = v\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dt}{ds}$ であるから，dt を消去して，

$$\phi = v\frac{dv}{ds}$$

となる。上記 2 式が式 (III) である。この前者の式を変形すると，

$$\phi\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$$

これが式 (IV.) に相当する。この両辺に質量 m を かけて t で積分し，加速力 ϕ に質量 m をかけた $F = m\phi$ におきかえれば，

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

となって，仕事と運動エネルギーの式となる[48)]。

現代でも，力学的エネルギーの関係式は力学現象を解くのに非常に便利に使われる。それは，力学的エネルギーの式には時間の項がなく，位置だけから物体の速度などを容易に計算できるからである。実際に落下運動や放物運動などを測定する場合には，時間を測定

するより，落下距離や飛距離を測定する方がはるかに容易である。ストップウォッチなど無かった当時ならなおさらであろう。そこで，上記の引用で第 3 式について「しばしば便利に使われる」としていたのだと考えられる。

次に加速度の向きと符号についてが記述された後[49)]，2 階微分の運動方程式 $F = m\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ に相当する式が次のように導かれている[50)]。

式 $\dot{s} = v\dot{t}$ あるいは $v = \dfrac{\dot{s}}{\dot{t}}$ の流率は $\dot{v} = \left(\dfrac{\dot{s}}{\dot{t}}\right)^{\cdot}$ である。$\dot{v}$ の値に式 $\phi\dot{t} = \pm\dot{v}$ を代入すれば，この式は

$$(\mathrm{V.})\cdots\phi\dot{t} = \pm\left(\frac{\dot{s}}{\dot{t}}\right)^{\cdot}$$

となる。

そして，$\dot{t}$ が変化するときは，この式を使用しなければならないが，通常はそうであるように $\dot{t}$ を一定とすれば，　$\phi\dot{t} = \pm\dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}}$ なので，次式を得る。

$$(\mathrm{VI.})\cdots\phi\dot{t}^2 = \pm\ddot{s},\ \text{あるいは}\ \phi = \frac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$$

これも現代的な解法に置き換えれば，次のようになる。
$v = \dfrac{ds}{dt}$ を t で微分して，

$$\frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt}$$

となる。この左辺は式 (II) より $\dfrac{dv}{dt} = \phi$ なので，

$$\phi = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

これが第 (VI) 式に相当する。ϕ は加速力を用いているために，質量の因子がないが，この節の題名が「変化運動に適用する基本方程式の導出」としていることからも，この式 $\phi = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$ をグレゴリーは，力が変化する運動についての基本方程式としていたと考えられる。

〈一般的な変化運動の基本方程式〉の力学問題への適用例

次のような例題でグレゴリーは，この式 $\phi = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$ をもとに微分方程式をたてることから出発している[51]。

> 質点すなわち非常に小さな球が A 点にあり (図版 XI. 第 7 図)，2 つの力がはたらいている。1 つは A から B に一定に変化する動きで動かそうとする力である。もう一方は反対方向の A から D に戻そうとする力であり，それは，点 B からの距離に反比例した加速力 (accelerating force) を与えるような反発力 (repulsive power) である。

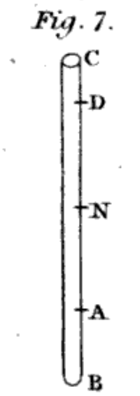


図 1.2　図版 XI 第 7 図

この問題に対するグレゴリーの解法は以下の通りである。まず，AB=a, t 秒後の移動距離 AN= s，距離に反比例する加速力の比例定数を m とおくと，A から D への反発力は $\dfrac{m}{a+s}$ とあらわすことができる。A から B の方向にはたらく一定の加速力を g とおけば，この質点にはたらく加速力は $\dfrac{m}{a+s} - g$。これを，式 (232.VI)$\phi = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$ の ϕ に当てはめて，

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{t}^2} = \frac{m}{a+s} - g.$$

この微分方程式をグレゴリーは以下のように解いている[52]。

> この式の流率を得るために，$\dot{s}$ をかけると，$\dfrac{\dot{s}}{\dot{t}} \times \left(\dfrac{\dot{s}}{\dot{t}}\right)^{\cdot} = v\dot{v} = \dfrac{m\dot{s}}{a+s} - g\dot{s}$ となり，よく知られた公式により，$\frac{1}{2}v^2 = m\mathrm{H}\cdot\mathrm{L}\cdot(a+s) - gs + \mathrm{C}$ ここで，A 点で $v = 0$, $s = 0$ の条件を入れれば， $\mathrm{C} = \text{-}m\mathrm{H}\cdot\mathrm{L}\cdot a$ を得る。そこで，
>
> $$v = \pm\sqrt{(2m\mathrm{H}\cdot\mathrm{L}\cdot\frac{a+s}{a} - 2gs)}.$$
>
> この式は運動物体が距離 s 動いたときの速度を決定するものである。

このように，式 $\phi = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$ に，物体にはたらく加速力 ϕ を代入し，その微分方程式を解くという手順は，現代の運動方程式をたてて運動を論ずる手法と同じである。

ただし，グレゴリーは加速力概念を使用しているので，この方程式には質量の因子がない。そこでこの問題を，現代的に質量まで含めた運動方程式をたてて解くと以下のようになる。

質量を M とし，位置 B からの距離を $x(= a+s)$，距離に反比例する力の比例定数を $k(= mM)$ として運動方程式をたてると，

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x} - Mg \tag{1.3}$$

この両辺に $\dfrac{dx}{dt}$ をかけると，

$$M\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x}\frac{dx}{dt} - Mg\frac{dx}{dt}$$

ここで，$v = \dfrac{dx}{dt}$ とおき，$\dfrac{d}{dt}v^2 = \dfrac{dv}{dt}\dfrac{d}{dv}v^2 = 2v\dfrac{dv}{dt} = 2\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}$ の関係式によって左辺を書き換え，両辺に dt をかけると，

$$\frac{1}{2}M\frac{d}{dt}(v^2)dt = \frac{k}{x}dx - Mgdx$$

t で積分すると，

$$\frac{1}{2}Mv^2 = k\log x - Mgx + \mathrm{C} \qquad (\mathrm{C}\ は積分定数)$$

初期条件 $x = a$ で $v = 0$ より，$\mathrm{C} = Mga - k\log a$ だから，

$$\frac{1}{2}Mv^2 = k\log\frac{x}{a} - Mg(x-a) \tag{1.4}$$

これを v について解くと，

$$v = \pm\sqrt{\frac{2k}{M}\log\left(\frac{x}{a}\right) - 2g(x-a)} \tag{1.5}$$

これに $k = mM$, $x = a + s$ を代入すると，引用と同じ結果を得る。

$$v = \pm\sqrt{2m\log\left(\frac{a+s}{a}\right) - 2gs} \tag{1.6}$$

ちなみに引用文中の式に表記されていた記号 $\mathrm{H}\cdot\mathrm{L}$ は，log に対応していると考えられる。この解法は，現代ではいわゆる「エネルギー積分」といわれているものである。

グレゴリーの解法も，基本方程式（運動方程式）から出発し，速度 v と 移動距離 s との関係式を導き出している。その意味では，併記した現代的な解法とほぼ変わりない。そのような意味では，この方程式は今日の運動方程式と同じ位置づけを与えられているともみなせる。しかし，グレゴリーはこの式を「変化運動の主要な方程式」(the chief formulæ in variable motions) と呼んでおり，「変化運動の」ということわりをつけている。すでにみたように，等速運動には等速運動の，加速度一定の運動には，それに適用する基本方程式をあげている。そういった意味では，現代のように，すべての場合に適用できる一般的な運動方程式をまず提出し，その特殊な場合が等速運動，加速度運動とする，といったやりかたとは異なっている。逆に言えば，この「基礎方程式」にそこまでの一般性を見いだしていないとみなすことができる。

ところで，今解いた問題は具体的にどのような現象に適用できるかをグレゴリーは以下のように述べている[53)]。

> 今解いた問題は，以下に述べるような場合に適用できる。ピストンのような重い物体を，シリンダーつまり〈ぴったりと密着していて先端 D のみが開いた垂直な管 BD〉に無理に入れて，その管の AB 部分は〈圧縮弾性流体あるいは膨張性の気体〉で満たされていたとする。そのとき，管との摩擦は無視するとすれば，すぐにわかるのは，このピストンは重力の作用に支配されて一定の加速力 g で下降し，圧縮しようとするということである。そして同時に，弾性流体から反発力を受ける。しかしこの液体は圧縮から解放されるにつれて，つまりピストンが末端 B から離れるにつれて，弾性を失う。そこで，可動性のピストンの管の底からの距離に反比例して，加速力は変化する。

このように，現実の現象ではたいてい，「一定の加速力」とは重力に対応する。そこで，1.3.2 節（29 ページ）で述べたように，質量に関しては考慮する必要が無くなってしまい，力を「加速度を生み出す原因」としてとらえて「加速力」として考えても問題なかったのである。しかし，今回引用した問題の場合，厳密には不都合が生じる。というのは，式 (1.5) と式 (1.6) を見比べると分かるように，グレゴリーの解では質量 M は反発力の比例定数 m に含まれてしまっている。したがって，この場合では，生じる速度に対する慣性質量の影響が見えなくなってしまっているのである。生じる速度に慣性質量による影響がなくなるのは，$k = mM$ の関係式が示すように，距離に反比例する反発力が質点の質量に比例する場合に限られる。

しかし，当時はこういった重力以外の力が作用する場合に，（慣性）質量の値が解に含まれなくなってしまうということは，それほど大きな問題ではなかったのかもしれない。というのは，この問題の例としてグレゴリーがあげている以下の現象をみるとわかる[54)]。

> この種の問題の実例として，銃や大砲で火薬の点火によって打ち出されたボールのようなたぐいがある。これは瞬間的に大量の気体流体を発生し，その反発力は気体がおさめられている空間に反比例する。ここで我々はボールの重さを無視する。なぜなら，銃口までの速度にたいして重さはほとんど影響しないし，銃が水平なら影響はまったくなくなるからである。そこで，$g = 0$ とするか，最初から加速力 $=\dfrac{m}{a+s}$ として計算すると，
>
> $$v = \sqrt{\left(2m\mathrm{H} \cdot \mathrm{L} \cdot \frac{a+s}{a}\right)}$$
>
> を得る。

当時，実際に力学を適用する問題はこのような砲術の研究などが主だったので，弾丸の重さはほとんど計算に影響しなかったと考えられる。なぜなら，上記の式に $k = mM$, $x = a + s$ を代入すると，

$$v = \sqrt{\frac{2k}{M} \log\left(\frac{x}{a}\right)}$$

となるが，火薬の爆発による推進力の比例定数を意味する k の値は質量 M の値に対して莫大に大きいので，慣性質量の影響はほとんど無視できる。そこで，運動方程式に質量の因子がなくても，ほとんど実用には問題がなかったのだと考えられるからである。

剛体力学への適用例

次に，剛体の取り扱いを見るために，第 4 章の剛体棒の回転に関する問題を取り上げる[55]。

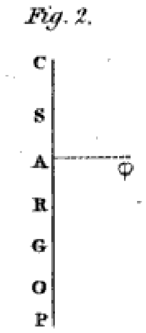


図 1.3 図版 XIV 第 2 図

> 801. 命題 **物体が軸の周りを回転するとき，その物体を構成する質点はその慣性により，それぞれの点への運動の伝達に，それ自身の質量と回転軸の距離の二乗に比例する力で抵抗する。**
>
> 力 ϕ を任意の点 A に与え，回転中心 C からある距離の質点 p, p', p'' の系に回転運動を生じさせる（図版 XIV 第 2 図）。〈中心から PC の距離にある質点 p が回転するときにもつ慣性〉が，点 P をはなれて点 A に集中したときに，慣性によって同等の運動に対する抵抗を生じるような物質量を A で表す。今，点 A にある力 ϕ が，(ϕA と CA が垂直になる方向に) はたらくとき，点 A を動かす作用に対する点 P での動かす作用はてこの法則より，その距離に反比例，すなわち PC に対する AC に比例する。そしてもしこれらの物体が同じ角速度で運動するなら，これらの軸からの距離は (300 項により)，ある一定の時間に描く距離に比例し，起動力 (moving force) は，描く距離に反比例する。

この問題は，慣性概念，モーメント，慣性モーメントなどの概念が入り組んでいるので，できるだけ当時の考え方に沿って問題の道筋を追い，それを最後に現代の概念に照らし合わせる。

点 C を回転中心とする剛体棒がある。この剛体棒の点 A にはたらく力 ϕ による回転モーメントと釣り合うモーメントを P 点に働いて生じさせる力を R とすると，$\phi \cdot \mathrm{AC} = R \cdot \mathrm{PC}$ が成り立つ。つまりこれが，引用文にある「点 A を動かす作用に対する点 P での動かす作用はてこの法則より，その距離に反比例，すなわち PC に対する AC に比例する」の意味である。次に，この棒の角速度を ω とすれば，点 A の速度を v_A，点 P の速度を v_P とおけば，$v_A = \mathrm{AC} \cdot \omega, v_P = \mathrm{PC} \cdot \omega$ だから，

$$v_A : v_P = \mathrm{AC} : \mathrm{PC} \tag{1.7}$$

が成り立つ。したがって，「軸からの距離はある一定の時間に描く距離に比例する」。また，先ほどの $\phi a = Rl$ の関係式より，

$$\phi : R = \mathrm{PC} : \mathrm{AC} \tag{1.8}$$

となり，$\phi : R =$ 〈点 P の描く距離〉:〈点 A の描く距離〉であるので，それぞれの点に作用する力は，「描く距離に反比例する」。

そしてその続きは以下のように書かれている[56)]。

> ここで，228 項での表記を見ると，$\mathrm{F} \propto \dfrac{\mathrm{BV}^2}{\mathrm{S}}$ あるいは $\mathrm{FS} \propto \mathrm{BV}^2$ の関係が成り立っている。そこで，$\mathrm{F} \propto \dfrac{1}{\mathrm{S}}$ ならば $\mathrm{B} \propto \dfrac{1}{\mathrm{V}^2}$ が成り立つ。その結果，物質量は速度の 2 乗に反比例するはずである。すなわち，この場合は，軸からの距離の 2 乗に反比例する。したがって，$\mathrm{A} : p :: \mathrm{PC}^2 : \mathrm{AC}^2$ となり，それによって $\mathrm{A} = \dfrac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2}$ を得る。この式は，距離 PC 離れた質点 p の抵抗は，距離 AS 離れた質量 $\dfrac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2}$ の抵抗と釣り合うということを示している。

228 項とは，本論文 29 ページで引用した一様な変化運動の基本方程式のバリエーション一覧である。そのなかから抜き出したこの $\mathrm{F} \propto \dfrac{\mathrm{BV}^2}{\mathrm{S}}$ あるいは $\mathrm{FS} \propto \mathrm{BV}^2$ という式は，今日なら仕事と運動エネルギーの関係式 $Fs = \dfrac{1}{2}mv^2$ に相当する。ここでグレゴリーは，点 P にある質量 p が，点 A に集中したとみなしたときの仮想的な質量を A として想定している。記号が点の名称と混乱しやすいので，m_P，m_A と置き換えて考えることにする。

ここで，今解こうとしている問題を次のように整理する。長さ l の棒があって，回転端と反対側の末端 P に質量 m_P が集中している。そして，回転端から距離 a 離れた点 A に，棒と垂直な力 ϕ が作用する。 このとき，m_P のかわりに点 A においたときに同じ慣性モーメントの作用を生む質量を m_A ，点 P で棒に垂直に作用したときに，点 A にはたらく ϕ と同じモーメントを生む力を R とする。1 秒間に移動した距離 v_A, v_P について，各点における仕事と運動エネルギーの式をたてると，

$$\phi \cdot v_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \tag{1.9}$$

$$R \cdot v_P = \frac{1}{2} m_P v_P^2 \tag{1.10}$$

この 2 式より，

$$\frac{m_A v_A^2}{m_P v_P^2} = \frac{\phi \cdot v_A}{R \cdot v_P}$$

(1.7) 式，(1.8) 式を使って整理すると，

$$\begin{aligned}\frac{m_A}{m_P} &= \frac{\phi}{R} \cdot \frac{v_A}{v_P} \cdot \frac{v_P^2}{v_A^2} \\ &= \frac{\phi}{R} \cdot \frac{v_P}{v_A} \\ &= \frac{l}{a} \cdot \frac{l}{a} \\ &= \frac{l^2}{a^2}\end{aligned}$$

したがって，

$$m_A = \frac{l^2}{a^2} m_P \tag{1.11}$$

この式に a=AC, l=PC, m_A =A，$m_P = p$ を代入すれば，

$$\mathrm{A} = \frac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2} \tag{1.12}$$

となって，引用文と同じ式になる。次は以下の通り[57]。

> 同様に，距離 P'C 離れた別の質点 p' をとし，対応する同じ点 A に集中する物質量を A' とすれば，同じ距離の p' の抵抗は，距離 AC 離れた点の質量 $\dfrac{p' \cdot \mathrm{P'C}^2}{\mathrm{AC}^2}$ と等しい。 そして，同じことが質点 p'', p''' その他に示せる。その結果，今までのように，記号 $\int$ で全流率，すなわち，別々のすべての抵抗の合計を示すものとすれば，全回転体の抵抗は，$\displaystyle\int \frac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2}$ であらわされることになる。

式 (1.12) は，末端 P についての値だったので，棒全体にわたって積分すれば，この棒全部の質量が点 A に集中したと考えたときの仮想的な慣性質量がもとめられる。この慣性質量のことを，グレゴリーは「全回転体の抵抗」(the resistance of the whole revolving body) と呼んで以下の値を導いている。

$$\int \frac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2} \tag{1.13}$$

今，この「全回転体の抵抗」を M とおいて運動方程式を点 A についてたてると，

$$M \cdot \frac{dv_A}{dt} = \phi \tag{1.14}$$

$M = \displaystyle\int \frac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2}$ だから，

$$\int \frac{p \cdot \mathrm{PC}^2}{\mathrm{AC}^2} \cdot \frac{dv_A}{dt} = \phi \tag{1.15}$$

両辺に AC をかけて変形すると，

$$\int p \cdot \mathrm{PC}^2 \cdot \frac{d}{dt} \frac{v_A}{\mathrm{AC}} = \phi \cdot \mathrm{AC} \tag{1.16}$$

右辺は力 ϕ の回転軸 C に対する力のモーメントなので，それを $\phi \cdot \mathrm{AC} = N$ とおく。また，$\dfrac{v_A}{\mathrm{AC}}$ は，棒の角速度 ω である。したがって，

$$\int p \cdot \mathrm{PC}^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = N \tag{1.17}$$

さらに，

$$I = \int p \cdot \mathrm{PC}^2 \tag{1.18}$$

とおけば,

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = N \tag{1.19}$$

これは，いわゆる「剛体の運動方程式」である。そこで，慣性モーメント I と「全回転体の抵抗」M との対応は,

$$M = \frac{I}{\mathrm{AC}^2} \tag{1.20}$$

となることがわかる。すなわち,「全回転体の抵抗」とは，慣性モーメントを〈力が作用する点の腕の長さ〉の 2 乗で割った商だったことがわかる。

このように，剛体に関する問題でグレゴリーが基本方程式として採用しているのは，1.3.2 節（33 ページ）で述べた一般的な変化運動の基本方程式 $\phi = \frac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$ ではなく，一様な変化運動の基本方程式のバリエーション $\mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{BV}^2}{\mathrm{S}}$ あるいは $\mathrm{FS} \propto \mathrm{BV}^2$ である。このことからも，グレゴリーは，等速運動，等加速度運動，加速度が一様でない運動，といったそれぞれの現象ごとに場合分けして基礎方程式を使い分けていて，すべてに適用できる一般的な基礎方程式に相当するものを導出していないことがわかる。

また，質点力学の問題の場合は，すでに見たように「加速力」の概念を用いて問題を解いていた。ところが，この剛体力学の問題になると，加速力ではなく，質量の因子までいれた起動力，つまり現代と同じ力概念を用いている。これは，剛体のような問題の場合は，質点力学で多く問題になる重力による運動とは違い，質点どうしのかかわり，具体的に言えば各点における慣性モーメントが問題になってくるので，必然的に質点の質量が問題となるからに他ならない[58)]。

1.4　同時代の力学書の記述

1.4.1　1800 年代初頭の他の力学書

本章では，1800 年代初頭にもっとも流通したと考えられる 2 冊の力学書での，運動の法則，力学の基本方程式の扱いについて検討した。この本だけが特殊な例ではないことを示すために，当時流通した他の力学書についてもその記述を簡単に見てみることにする。とは言っても，この時代のすべての本にあたることはもちろん不可能であった。そこで，これで完全な検証ができたとは思わないが，少なくともこの時代の力学書の傾向はつかめると思う。

1. エマーソン『力学の原理』[59)] (1758)
2. マラット『力学の理論および実用入門』[60)] (1810)
3. エンフィールド『自然哲学講座』[61)] (1811)
4. ブリッジ『力学論』[62)] (1814)
5. ファラー『力学の基礎』[63)] (1825)
6. ブレア『自然・実験哲学の初歩』[64)] (1826)

7. ジャクソン『理論力学の基礎』[65] (1827)

このうち，ファラーとマラットによる 2 冊は，米国ニューイングランドのボストン刊行となっている。ファラーの肩書きは，ハーバードの数学および自然哲学教授 (Professon of Mathematics and Natural Philosophy) であり，マラットの肩書きは，ボストンの数学教師 (Teacher of Mathematics, Boston) となっている。また，マラットとブレアの 2 冊は，より初等的な入門書となっている。その他これらの本に関するくわしい書誌と内容については，本論文の「付録」を参照のこと。

1.4.2　運動の法則の記述

ファラー以外の 6 冊には，ニュートン『プリンキピア』とほぼ同等の 3 法則が記述されている。そしてこの 3 法則と力学の基本原理発見の功績をニュートンに帰しているのは，マラット『力学の理論および実用入門』(1810)，エンフィールド『自然哲学講義』(1811)，ジャクソン『理論力学の基礎』(1827) の 3 冊である。

ファラーの本に運動の 3 法則が記述されていなかったのは，米国の出版物であることと，フランスの影響を受けた教科書であったことによる（くわしくは，「付録」184 ページ参照）と考えられる。

また，エマーソン『力学の基礎』(1758) は，法則の部分にはニュートンとの関連は書かれていないが，7 ページで述べたように，前書きでニュートン崇拝的な力学観が明確にうたわれている。このような本は本全体がいわばニュートンの体系を解説した本とも言えるので，運動の法則にあらためてニュートンの名を入れる必要がなかったともいえる。

これらのことから，この 1800 年代初頭 (1830 年ころまで）の英国物理教科書のほとんどにニュートンの運動の 3 法則を記載されており，ニュートンが力学を構築したことも，大多数の本に記載されていたことが推測される。

1.4.3　力学の基本式

力の定義式，あるいは，基本式は，入門書であるブレア以外の 6 冊には記述されている。しかし，ファラー以外は微分方程式にはなっていない。

エマーソン ——

第 1 部（Section I）「運動 **の一般的法則**」に，

$b =$ **運動する物体の物質量**
$f =$ **物体** b **にはたらく衝撃の力**$(force\ of\ impulse)$
$m = b$ **によって生じる運動量あるいは運動の量**
$v = b$ **によって生じる速度**
$s =$ **物体**b **によって描く距離** $t =$ **速度**v **で距離**s **を描く時間**

との定義の元に，$m \propto bv, s \propto tv$, そして $f \propto m$ が導出されている[66]。

マラット　——

m を運動量，b を物体，f を力，v を速度として，$f \propto m \propto bv$, および $v \propto \frac{f}{b}$. が導出されている[67)]。

エンフィールド　——

$\mathrm{V} : v = \mathrm{F} \times \mathrm{T} : f \times t$ といった比の形式で式が導出されている[68)]。

ブリッジ　——

生じる速度全体は**力と時間の両者に**比例する。

との記述のあと，

V :1 秒で重力によって得られた速度 $(2m) = F \times T : 1 \times 1$ の関係式より, $V = 2mFT$ および $T = \dfrac{V}{2mF}$ を得ている[69)]。

ファラー　——

力が変動する場合に運動を決定する式として，

力学の第 1 基礎方程式

$$v = \frac{ds}{dt} \text{すなわち}, ds = vdt$$

と第 2 基礎方程式

$$v = gdt$$

が導かれている (g は加速度を示す) [70)]

ジャクソン　——

V	一定の運動の速度
S	その描く距離
T	運動する時間
Q	物質の量
F	起動力

とおいて，以下の式を導出している[71)]。

$$S = VT = \frac{FT}{Q}$$
$$V = \frac{S}{T} = \frac{F}{Q}$$
$$T = \frac{S}{V}$$
$$F = QV = \frac{QS}{T}$$
$$Q = \frac{F}{V} = \frac{FT}{S}$$

——これらの式は，いずれも今日の運動方程式から見ると不十分な形式である。また，微分方程式で記述されているのは，ファラーのみであった。これはやはり，当時の英国数学が解析的な内容については大陸に比べて劣っていたためだと考えられる。

1.5　おわりに

本章で論じたウッドとグレゴリーの本の目次を比較すると，扱っている項目そのものは似た項目が多いのに，その内容，記述には大きな違いがあることに驚く。ウッドはほとんど比と図形だけで力学を論じているのにたいして，グレゴリーは流率法を多用し解析的に記述している。

グレゴリーは，ウーリッジ王立軍事アカデミーの教官であった。本論文で論じている教科書，力学書の中では唯一，ケンブリッジとは関係がない。ケンブリッジとは無関係なこの本を選んだ理由はまさに，ウッドには使用されていない流率法が多用されていたからである。

グレゴリーの場合，軍事アカデミーの教員という職業柄，砲弾の問題などより実用的な問題を力学で扱う必要があったと思われる。変化運動のところであげた例題の具体例で銃や大砲から発射される砲弾が引き合いに出されていたのがそのいい例である（36 ページ）。そういった問題の場合，必然的に解析的な計算が必要とされたのだろう。それに対してウッドの場合，それほど実用面は考慮されず，斜面上の物体の運動，振動や放物運動を一般論として論じるだけでよかったために，流率法までは必要ではなかったのだと考えられる。

記述法も違い，使用されていた場所も違っていたと思われる対照的なこの 2 冊がいずれもニュートンの運動の 3 法則から出発し，ニュートンを尊重していたというこの事実から，当時英国の力学はニュートンの影響が全土を覆っていたといってもいいだろう。

しかし，これらの本では運動の法則は運動方程式と関連づけられてはいなかった。そもそもこれらの教科書には，“すべての力学問題に適用できる” ような，〈今日の運動方程式に相当する位置づけの式〉は記載されていなかったのである。

注

1) [Haris 1833], p.453.

先の引用文のすぐ直後に,「しかし，基礎的であったため，ケンブリッジ大学の学生向けに書かれたウッド博士の巧妙で啓発的な論考にとってかわられた」とある。

原文：
but as elementary works, they are superseded by Dr. Wood's neat and luminous treatise, designed for the use of students in the university of Cambridge.

2) [Wood 1812].

3) [Becher 1980], p.15.

4) 1796 年に初版が発行され，第 2 版 (1799)，第 3 版（不明），第 4 版 (1809)，第 5 版 (1812)，第 6 版 (1818)，第 7 版 (1824)，第 8 版 (1830) と版を重ねている。ここでは，1812 年に発行された第 5 版が入手できたのでそれを用いる

5) その目次をあげると以下の通り。

第 I 章「物質と運動」(On Matter and Motion)

第 II 章「運動の法則」(On the Laws of Motion)

第 III 章「運動の合成と分解」(On the Composition and Resolution of Motion)

第 IV 章「機械の力」(On the Mechanical Power)

第 V 章「重心」(On the Center of Gravity)

第 VI 章「物体の衝突」(On the Collision of Bodies)

第 VII 章「加減速運動」(On accelerated and retarded Motion)

第 VIII 章「物体の振動」(On the Oscillation of Bodies)

第 IX 章「投射」(On Projectiles)

6) [Wood 1812], p.15.

7) [Wood 1812], p.16.

原文：
The effects produced by the actions of forces are of two kinds, velocity and momentum ; and thus we have two methods of comparing them, according as we conceive them to be cause of velocity or momentum.
(21.)The *accelerateing force* is measured by the *velocity* uniformly generated in a given time, no regard being had to the quantity of matter moved.
(22.)The *moving force* is measured by the *momentum* uniformly generated in a given time.

8) [Wood 1812], p.19.

原文:
If a body be at rest, it will continue at rest, and if in motion, it will continue to move

uniformly forward in a right line, till it is acted upon by some external force.

9) [Wood 1812], p.25.

原文:
Motion, or change of motion, produced in a body, is proportional to the force impressed, and takes place in the direction in which the force acts.

10) [Wood 1812], p.28.

原文:
Action and reaction are equal, and in opposit directions.

11) [Wood 1812], p.29.

原文:
By *action*, we here understand moving force, which, according to the definition (Art. 22.), is measured by the momentum which is, or would be generated, in a given time ; and to determine whether action and reaction, in this sense of the words, are equal or not, recourse must be had to experiment.

12) [Wood 1812], p.134.

原文:
(227.)*IF a body be impelled in a right line by an uniform force, the velocity communicated to it is proportional to the time of it's motion.*

13) [Wood 1812], p.134.

原文: By *force*, in this and the following Propositions, we understand the *accelerating force*, no regard being paid to the quantity of matter moved, unless it be expressly mentioned.

14) [Wood 1812], p.134.

原文：
The accelerating force is measured by the velocity uniformly generated in a given time (Art. 21.), and in this case, the force is invariable, by the supposition ; therefore, equal increments of velocity are always generated in equal times (Art. 20.) ; and since a body, by the first law of motion, retains the increments of velocity thus communicated to it, if, in the time t, the velocity a be generated, in the time mt the velocity ma is generated; that is, the velocity generated is proportional to the time (*Alg.* Art. 193.).

15) [Wood 1812], p.15.

16) [Wood 1812], p.134.

原文：
(228.) *If bodies be impelled in right lines by different uniform forces, the velocities generated in any times are proportional to the forces and times jointly.*
Let F and f be the forces, T and t the times of their action, V and v the velocities generated ; also, let x be the velocity generated by the force f in the time T; then,

$$V : x :: F : f \quad \text{(Art.21)};$$
$$x : v :: T : t \quad \text{(Art.227)};$$

comp. $V : v :: FT : ft$; that is, the velocities generated are proportional to the forces and times jointly (*Alg.* Art. 195.).

[17] たとえば，195 項には，「定義 3. 1 つの量が他の **2 つの量の両者とともに変化する**とされるとき，最初の量がなんらかの手段で増加するとき，後者の 2 つの積は同じ比で変化する」とある ([Wood 1815], p.104.)。

原文：
(195.) DEF. 3. One quantity is said to *vary as two others jointly*, if, when the former is-changed in any manner, the product of the other two be changed in the same proportion.

[18] [Wood 1812], p.147.

原文：
(249.) *The force which accelerates or retards a body's motion upon an inclined plane, is to the force of gravity, as the height of the plane is to it's length.*

[19] [Wood 1812], pp.148-149.

原文：
(253.) COR.4. If a body fall down an inclined plane, the Velocity V, generated in T'', is such as would carry it uniformly over $\dfrac{H}{L} \times 2mT$ feet in 1"; where $m = 16\frac{1}{12}$.

[20] [Wood 1812], pp.140-141.

[21] [Wood 1812], p.151.,

原文：
(256.) *The velocity which a body acquires in falling down the whole length of an inclined plane, varies as the square root of the perpendicular height of the plane*

[22] [高橋 2003], p.199.)

[23] ニュートンの流率法については [高橋 2003] にくわしい。

[24] [Blewster 1830], p.298.

原文：
On Dynamics, the reader may consult La Grange's *Mechanique Analytique*; D'Alembert's *Dynamique*; Gregory's *Mechanics.*

ちなみに署名は (T.D.) となっている。

[25] グレゴリーの略歴とこの本に関する記述の部分を訳出して引用すると以下の通りである。

GREGORY OLINTHUS GILBERT （1774 年 1 月 29 日イングランドヤックスレイ生；1841 年 2 月 2 日イングランドウリッジ没）
18 世紀から 19 世紀はじめにかけて，独学者や家庭教師によって学習した人々の集団が英国数学のレベルを押し上げたが，グレゴリーもその一人である。学歴がほとんどないにもかかわらず，彼は科学をテーマとした出版物の評判で名声を博した。そして 1803 年にチャールズ・ハットンの支援の下に，ウリッジ王立軍事アカデミーの数学教師となった。そして 1821 年に彼は教授職を継ぎ，1838 年に退職するまでその職にあった。
グレゴリーのもっとも重要な科学上の出版物は，1806 年に出版され少なくとも 4 版を重ねた『力学論』である。独創的に探求するスタイルの出版物に対して，この本は講義風に編集されたものであったが，英国で出版された純粋および応用力学に関する出版物のうち，もっとも完成度が高いものの 1 つだった。この出版物の目的および提示には，現代では工業力学とされる分野の実例となるものだった。その理論的部分では梁のたわみや負荷をかけたアーチの解析のような話題をカバーする一方，記述的な部分では，機械の設計について後半に扱っていた。この本は，〈ウリッジの数学者たちによって促進された応用数学と応用力学の伝統への寄与〉を構成するひとつとなっている。

[26] [Gregory 1815].

[27] Remarks on the nature, construction, and simplification of machinery, on friction, rigidity of cords, first movers, &c., and descriptions of many curious and useful machines

[28] Remarks on the nature, construction, and simplification of machinery, on friction, rigidity of cords, first movers, &c., and descriptions of many curious and useful machines

[29] 目次は以下である。

[Gregory 1815], xxi-xx.

原文：

[30] [Gregory 1815], p.8.

原文：
I . Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a right line, until a change is effected by the agency of some mechanical force.

II. Any change effected in the quiescence or motion of a body is in the direction of the force impressed, and is proportional to it in quantity.

III.Reaction is always equal and contrary to action; or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

31) [Gregory 1815], p.5.,

原文：
17. *Force* or *power*, in a mechanical sense, is that which causes a change in the state of a body, whether that state be rest or motion.

32) [Gregory 1815], p.164.

原文：
212. *Force*, according to our definition (art. 17.), is that which causes a change in the state of a body; or, it is that which either moves or tends to move a body: forces, as we there observed, are no further known to us than by their effects; it is only therefore by the effect any force produces that we can measure it. Now the effect of a force is to give to every material particle of a body a certain velocity: if, therefore, all the parts of a body receive the same velocity (as we suppose here), the effect of the moving cause has for its measure the product of the velocity into the number of molecule moved, or the product of the velocity and mass: *A force therefore is proportional to the velocity which it can impress on a known mass, and that mass conjointly.*

33) *gregory*, p.8.

原文：
21. IN order that the doctrine of Mechanics may be brought within the boundaries of mathematical investigation, it is necessary not only that the quantities it proposes for discussion should be measurable either in themselves or in their effects ; but also that some general principles should be exhibited, the truth of which should be incontrovertible, and to which the student may at all times appeal in the course of his researches. Such general principles were first distinctly proposed by Sir Isaac Newton in his Principia; they have since his time been received as Mechanical Axioms, or, as they are commonly called, Laws of Motion. They are, in reality, intermediate propositions between geometry and philosophy, through which mechanics becomes a mathematical branch of physics, and are as follows:

34) [Gregory 1815], pp.12-13.

原文：
Again with respect to the second axiom, it may almost be considered as an identical proposition, considering force as we do(17.), merely as the cause of motion, or of a change in motion:

35) [Gregory 1815], p.5.

その部分を引用すると以下の通り。

All forces, however various, are measured by the effects they produce in like circumstances; whether the effects be creating, accelerating, retarding, or deflecting motions: the effect of some general and commonly observed force is taken for unity ; and with this any others may be compared, and their proportions represented by numbers or by lines : in this point of view they are considered by the mathematician ;

訳：
すべての力は，それが変化するものであっても，同じ状況でそれが生み出す効果—その効果が力の生成

であろうが，加速であろうが，減速であろうが——によって測定される。〈一般的，普遍的な力による効果〉を 1 単位にとり，これと比べることによって他の力を比較することができる。そしてこの定義は数値あるいは直線で表現される。この見方については，力の効果は数学者たちによって考察される。

36) [Gregory 1815], p.164.,

DEF. *Momentum*, or *Quantity of Motion*, is the rectangle of the mass of a body and its velocity.
Consequently, *forces are measured by the quantities of motion they are capable of producing.*

37) [Gregory 1815], p.164.

原文：
Thus, if F denote the motive or moving force, B the body moved, and V the velocity imparted to it, we have $\mathrm{F} \propto \mathrm{BV}$.

38) [Gregory 1815], p.170.

39) [Gregory 1815], p.179.

40) [Gregory 1815], p.179.

原文：
When any quantities are given, or their relations to some fixed quantities of the same kind known, they are to be left out in the general theorems : thus, if the body be proportional to the force, we shall have $\mathrm{S} \propto \mathrm{TV} \propto \mathrm{FT}^2 \propto \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{F}^*}$, where$\mathrm{F}^* = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{B}}$.

41) グレゴリーは，この第 II 節で以下のように加速力の定義をしている ([Gregory 1815], p.176.)。

DEFS. We call in general any force which acts on a body so as to make it vary its motion an *accelerating force:* when, in equal intervals of time, it acts equably, or the velocity undergoes equal mutations, we call it *a constant or uniform accelerating force*, or *a constant retarding force,* according as it tends to augment or diminish the actual velocity of the moving body.

訳：
定義 物体に作用してその運動を変化させるような力を一般に，**加速力**と呼ぶ。等しい各時間に一様に作用して一様な速度変化を生じさせるような力を**一様な加速力**，あるいは**一様な減速力**と呼ぶ。

42) [Gregory 1815], p.227.

43) [Gregory 1815], p.227.

原文：

$$W \text{ ......} \quad v + g\sin e\dot{t} \begin{cases} v + \dot{v} \text{ ...... effective velocity from C towards A} \\ g\sin e\dot{t} - \dot{v} \text{ ...... velocity destroyed} \end{cases}$$

$$W' \text{......} -v + g\sin e'\dot{t} \begin{cases} -v - \dot{v} \text{ ...... effective velocity from C towards B} \\ \dot{v} + g\sin e'\dot{t} \text{ ...... velocity destroyed} \end{cases}$$

44) [Gregory 1815], p.182.,

原文:
232. PROP. *To find the fundamental equations which apply to variable motions.*

45) [Gregory 1815], p.182.

46) [Gregory 1815], p.183.

47) [Gregory 1815], p.183.

原文：
The two preceding equations readily furnish a third, which may often be advantageously adopted: for, from the equa. $\dot{s} = v\dot{t}$, we deduce $\dot{t} = \dfrac{\dot{s}}{v}$: substituting this value of $\dot{t}$ in the equation $\dot{v} = \phi\dot{t}$, we readily find

$$(\mathrm{III.}) \cdots \phi\dot{s} = v\dot{v}, \text{ or } \phi = \frac{v\dot{v}}{\dot{s}}.$$

Again employing the same equations, since $\dot{v} = \phi\dot{t}$, and $v\dot{t} = \dot{s}$ we have by multiplication $v\dot{t}\dot{v} = \phi\dot{t}\dot{s}$; whence, striking out $\dot{t}$, there remains $v\dot{v} = \phi\dot{s}$. But $v\dot{v} = \frac{1}{2}(\dot{vv})$, consequently,

$$(\mathrm{IV.}) \quad \phi\dot{s} = \frac{1}{2}(vv)^{\cdot}.$$

48) 仕事の概念がコリオリによって定義されるのは，1829 年なので，まだこの時代は仕事の概念はない。

49) [Gregory 1815], p.183.

その部分は以下の通り。

我々が式 $\dot{v} = \phi\dot{t}$ を見いだす推論では，速度が増加すると考えた。したがってもし，速度が減少するとき，その流率は負になる。式 $\dot{v} = \phi\dot{t}$ および $\phi\dot{s} = v\dot{v}$ を起こりうるすべての場合に適合させるためには，両方の符号で書かれるべきである。すなわち，$\pm\dot{v} = \phi\dot{t}$ および $\phi\dot{s} = \pm v\dot{v}$ と書き，加速運動の時は上の符号を，減速運動の時は下の符号を使われるようにする。

原文：
In the reasoning by which we found the equations $\dot{v} = \phi\dot{t}$, we have considered the velocity as increasing. If, therefore, cases arise in which the velocity diminishes, its fluxion will become negative, and the equations $\dot{v} = \phi\dot{t}$, and $\phi\dot{s} = v\dot{v}$, in order to accommodate them to all cases which may arise, must be written with the double sign: viz. $\pm\dot{v} = \phi\dot{t}$, and $\phi\dot{s} = \pm v\dot{v}$, the superior sign obtaining when the motion is accelerated, and the lower one when it is retarded.

50) [Gregory 1815], pp.183-184.

原文：
The equation $\dot{s} = v\dot{t}$, or $v = \dfrac{\dot{s}}{\dot{t}}$, being fluxed gives $\dot{v} = \left(\dfrac{\dot{s}}{\dot{t}}\right)^{\cdot}$: if this value be substituted for $\dot{v}$ in the equation $\phi\dot{t} = \pm\dot{v}$, it will become

$$(\mathrm{V.}) \cdots \phi\dot{t} = \pm\left(\frac{\dot{s}}{\dot{t}}\right)^{\cdot}.$$

And this equation must be employed when $\dot{t}$ is supposed variable : but if we imagine, as it is often right to do, that $\dot{t}$ is constant, we have $\phi\dot{t} = \pm\dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}}$; therefore

$$(\mathrm{VI.}) \cdots \phi\dot{t}^2 = \pm\ddot{s}, \text{ or } \phi = \frac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$$

51) [Gregory 1815], p.187.

原文：
Suppose that a material point, or very small globe, placed at A (fig. 7. pl. XI.) is solicited by two forces; the one tending to make it move from A towards B, with a motion uniformly varied; the other tending, on the contrary, to push it back from A towards D: the circumstances of the motion of the globule are required, on the supposition that the repulsive power impresses upon it an accelerating force varying inversely as the distance from the point B.

[52] [Gregory 1815], p.187.

原文：
To find the fluent of this equation, we must multiply by $\dot{s}$, whence will arise $\frac{\dot{s}}{\dot{t}} \times \left(\frac{\dot{s}}{\dot{t}}\right)^{\cdot} = v\dot{v} = \frac{m\dot{s}}{a+s} - g\dot{s}$; and consequently, by a well-known form, $\frac{1}{2}v^2 = m\mathrm{H} \cdot \mathrm{L} \cdot (a+s) - gs + \mathrm{C}$. Where, since at the point A we have $v = 0$, and $s = 0$, we conclude that $\mathrm{C} = -m\mathrm{H} \cdot \mathrm{L} \cdot a$. Therefore

$$v = \pm\sqrt{(}2m\mathrm{H} \cdot \mathrm{L} \cdot \frac{a+s}{a} - 2gs).$$

This equation determines the velocity that the moving body has when it has run over the space s:

[53] [Gregory 1815], p.188.

原文：
The problem just resolved finds its application in a case which we shall now state: if a heavy body, as a piston, is forced into a cylinder or vertical tube BD, open only at the extremity D, which the piston closely fits, and if the part AB is full of a compressed elastic fluid, or of an expansive vapour; then, not considering the friction of the piston against the sides of the tube, it is obvious that this piston will be subjected to the action of gravity which tends to make it descend and impresses a constant accelerating force g, and at the same time to the repulsive force of the elastic fluid : but this fluid having less spring as it is less compressed, viz. as the piston is farther distant from the extremity B, the accelerating force thence arising varies inversely as the distance of the moveable piston from the bottom of the tube.

[54] [Gregory 1815], p.188.

原文：
We have an example of this species of motion in the balls of guns, and pieces of cannon, driven by the inflammation of the powder: this produces instantaneously a great quantity of an aeriform fluid, of winch the repulsive force is inversely as the space in which it is contained. We here neglect the consideration of the weight of the ball, since it has but little effect upon the velocity up to the mouth of the piece, the weight being nothing in theory when the axis of the piece is horizontal. We therefore make $g = 0$, or, which amounts to the same, we consider at the commencement of the calculation the accelerating force as $= \frac{m}{a+s}$: consequently,

$$v = \sqrt{\left(2m\mathrm{H} \cdot \mathrm{L} \cdot \frac{a+s}{a}\right)}.$$

Making s to equal the distance of the point A from the orifice, this equation gives us the velocity with which the ball issues from the piece.

[55] [Gregory 1815], p.269.

原文：
801. PROP. *If a body revolve about an axis, the particles of which that body is composed resist, by their inertia, the communication of motion to any given point, with forces which are as the particles themselves, and the squares of their distances from the axis of motion jointly.*
Let a force ϕ be applied at any point A (fig. 2. pl. XIV.) in order to communicate motion to a system of particles p, p', p'', &c. revolving at determinate distances round the centre of motion C. Let A be such a quantity of matter as will, if concentrated in A, have the same effect in resisting the communication of motion to that point, by its inertia, when any particle p is removed from the situation P, as that particle would have, revolving at the distance PC. Now the effect of the given force ϕ acting at the point A (in a direction ϕA perpendicular to CA), to move a body at that point, is to its effect to move a body at P, inversely as those

distances ; or as PC to AC, by the nature of the lever: and if these bodies be moved with equal angular velocities, their distances from the axis being then (art. 300.) as the spaces described in a given time, the moving forces are inversely as the spaces described.

[56] [Gregory 1815], p.269.

原文：
But taking for a moment the notation of art. 228. we there have $F \propto \dfrac{BV^2}{S}$, or $FS \propto BV^2$; in which, if $F \propto \frac{1}{S}$, then will $B \propto \frac{1}{V^2}$: consequently, the quantities of matter must be inversely as the squares of the velocities; or, in the present case, inversely as the squares of the distances from the axis; that is, $A : p :: PC^2 : AC^2$; whence we have $A = \dfrac{p \cdot PC^2}{AC^2}$, which indicates that the resistance of the particle p at the distance PC is equivalent to the resistance of the mass $\dfrac{p \cdot PC^2}{AC^2}$, at the distance AS.

[57] [Gregory 1815], pp.269-270.

原文：
In like manner, taking another particle p', at the distance P'C, and a corresponding quantity of matter A' concentrated into the same point A, we shall have the resistance of the particle p' at its distance equal to the resistance of the mass $\dfrac{p' \cdot P'C^2}{AC^2}$ at the distance AC. And the same may be shewn of other particles p'', p''', &c. Consequently, if we use, as hitherto, the character $\int$ to denote the whole fluent, or sum of all the separate resistances, we shall have the resistance of the whole revolving body expressed by $\int \dfrac{p \cdot PC^2}{AC^2}$.

[58] ところで，グレゴリーは，「運動の原因の効果は速度を運動する原子の数 (the number of molecule) ではかる」として，質量を原子の数で定義している。ここにもニュートンの影響が見られる。というのは，この 212 項のひとつ前の 211 項に質量と密度の定義があり，そこでグレゴリーは，密度を「決められた体積における原子の量」とし，「大きさがわかっている任意の物体の質量，すなわち原子の総量を得るには，密度と大きさの積を求めればいい」としている。

引用すると以下の通りである。

[Gregory 1815], pp.163-164.

211. The sum of the material particles of which a body is composed, is what we denote by the word *Mass*. This mass depends on the volume of the body and that which we call *Density*. We have already observed (art. 10.) that density is directly as the quantity of matter, and inversely as the magnitude of the body: but it will not be improper to deduce concisely the general theorem which comprises this relation. To this end it must be considered that as all bodies are penetrated with a great number of void spaces or pores, their quantity of matter is not proportional to their volume; but under the same volume there will be more or less matter as the particles are nearer or further asunder ; and we say that a body has a greater or less density, according as there subsists a greater or less proximity between its moleculæ. Thus we say a body is more *dense* than another when in an equal volume the former contains more matter than the latter: we say, on the contrary, that it is less *dense* or more *rare* (for *density* and *rarity* are reciprocal qualities) when in an equal volume it comprises less matter. The density serves, therefore, to judge of the number of material particles when the volume is known: thus, we may regard the density as representing the number of equal moleculas in a de terminate volume; as when, for example, we say that gold is 19 times denser than water, we wish to be understood that gold contains 19 times the number of particles that water does in the same space.
Since we represent the density as expressing the number of molecule in a determinate volume

which we assume as the *unit of magnitude*; it is obvious that to obtain the mass, or the total number of moleculse, of any body of which the magnitude is known, we must take the rectangle of the density and magnitude.

訳：
211. 物体を構成する物質粒子 (material particles) の合計が，我々が**質量**(*Mass*) という単語で示すものである。この質量は物体の体積と我々が**密度**(*Density*) と呼ぶものによって決まる。我々はすでに密度は物質の量と正比例し，物体の大きさに反比例することを認めた (第 10 項)。しかし，この関係を含んだ一般的定理を簡潔に導くことは不都合ではないだろう。この目的のために，全ての物体は無数の空隙と細孔に貫かれており，その物質の量はその体積によらないと考えねばならない。しかし同じ質量のもとでは，物質の多い少ないは，粒子の離れ具合が近いか遠いかによって決まる。そしてそれを我々は密度が多い，少ないと表現し，それにつれてその原子間の近接が近かったり離れていたりする。そこで我々は，物体がより**密**であるというとき，同じ体積により多くの物質を含むことをいう。それに対して，より**密**でないとか，より**疎**である（**密度**や**希薄さ**というのは相対的な量であるので）というとき，同体積でより少ない物質を含むことをいう。そこで，密度は，体積がわかっているときに，物質粒子の数を判断するのに役立つ。そこで，我々は密度を，決められた体積における同じ原子の数をあらわすものとみなす。たとえば，我々が金は水よりも 19 倍密であるというとき，同じ空間に金は水の 19 倍の粒子を含んでいると理解されたい。
我々は密度を，**大きさの単位**とみなす決められた体積における原子の量を表現するものとしたので，大きさがわかっている任意の物体の質量，すなわち原子の総量を得るには，密度と大きさの積を求めればいいということは明らかである。

実際，当時の物理教科書・入門書どれもこのような質量の定義をしている。たとえばトプリス英訳／ラプラス『解析力学』(1814) のようなフランス由来の専門書でも，

物体の質量は質点の数であり，質量と速度の積は運動の量と呼ばれる。

と，質量を「質点の数」としている ([Laplace 1814], p.70., 原文は 249 ページ)。

そして密度についても，同じページで以下のように記述している ([Laplace 1814], p.70.)

原文：
The density of bodies depends upon the number of material points which are contained in a given volume. In order to have their absolute density, it would be necessary to compare their masses with that of a body without pores ; but as we know no bodies of that description, we can only speak of the relative densities of bodies; that is to say, the ratio of their density to that of a given substance. It is evident that the mass is in the ratio of the magnitude and the density, by naming M the mass of the body, U its magnitude, and D its densily, we shall have generally $M = DU$: an equation in which it should be observed that the quantities M, D, and U express a certain relation to the unities of their Species.

物体の密度はある一定の体積に含まれる質点の数に依存している。その厳密な密度を知るには，質点間の隙間がまったくない物体の質量と比べることが必要である。しかし，実際にはそれは困難であるので，相対的密度しか知ることができない。すなわち，ある物質に対する比として密度を知るしかないのである。質量は大きさと密度の比であることは間違いないので，M を物体の質量と名付け，U をその大きさ，D をその密度とすると，$M = DU$ を得る。この式に含まれる M, D, U は，それぞれの単位量に対する比を示している。

ニュートンも『プリンキピア』冒頭の「定義 1」で，質量を「物質の量とは，その密度と体積の積によって測られる量である」として，密度によって定義している。

密度は現代では，「質量÷体積」で定義される。そこで，密度を用いて質量を定義するこのニュートンの表現は一種の循環論法のように思える。しかしニュートンは原子論的自然観に基づいて密度を〈単位体積あたりの原子の数〉をあらわすより根源的な量として考えていたので，上記のように密度を用いた質量の定義としていた ([板倉 1961].)。グレゴリーは，このニュートンの質量の定義を引き継いでいるのである。

このように，当時の密度概念，質量概念が原子論に深く根ざしていた事実は，力学もまた，原子論的自然観に深く根ざしていたことを証明するものであるといえるだろう。

[59] [Emerson 1758].

[60] [Marrat 1810].

[61] [Enfield 1811].

[62] [Bridge 1814].

[63] [Farrar 1825].

[64] [Blair 1826].

[65] [Jackson 1827].

[66] くわしくは本論文 170 ページ

[67] 詳しい記述は，本論文 172 ページ参照

[68] 詳しい記述は，本論文 175 ページ参照

[69] 詳しくは，本論文 178 ページ参照

[70] 詳しくは，本論文 186 ページ参照

[71] 詳しくは，本論文 188 ページ参照

第 2 章

ヒューウェルによる力学教科書の改革

2.1 はじめに

ウィリアム・ヒューウェル (William Whewell,1794-1866) は，18 歳でケンブリッジに入学してから，その生涯をケンブリッジで過ごした人物である。力学に関する数多くの著書の他に，科学哲学，科学史に関する著書も著し，新しい科学用語の命名者としても知られるなど，1800 年代の中頃，英国の科学，科学教育に大きな影響力を持った人物である。彼は，ニュートンの運動の 3 法則を独自の形式に改定し，力学の体系そのものも彼自身の哲学に基づいて再構築しようとした。本章では，このヒューウェルによる運動の 3 法則の改定とその内容，そしてヒューウェルがどのような意図の元にそのような改定を行ったかを論じる。

まず 2.2 節では，先行研究が明らかにしている事実を確認し，2.3 節で，ヒューウェルの初期の著書での運動法則の改定の内容を検討する。そして，なぜヒューウェルがそのような書き換えを行ったのかを論述する。次の 2.4 節では，ヒューウェルによる 1834 年以降の力学体系の再構築とそれに伴う運動法則の表記や位置づけの変更について論述する。

また，2.5 節では，ヒューウェルが第 2 法則から運動方程式を導出していた事実について，その導出過程，力学問題への適用を検討し，明らかにする。最後の 2.6 節では，同時代の力学教科書の運動法則を調査・検討し，〈ヒューウェル流の運動法則〉の他の力学書への影響を見る。

ヒューウェル Whewell, William (1794-1866) 年譜

年	事項	年齢	経歴	ヒューウェル
1780				
1781				
1782				
1783				
1784				
1785				
1786				
1787				
1788				
1789				
1790				
1791				
1792				
1793				
1794		(0)		⑥ 24 大工の棟梁の長男として生まれる。父は跡を継ぐことを望む。
1795				
1796				
1797				
1798				
1799		(5)		
1800				
1801				
1802				
1803				
1804		(10)		
1805				
1806				
1807				
1808				
1809		(15)		
1810				
1811	ポアソン『力学論』（仏）初版			
1812			ケンブリッジ トリニティ カレッジ 学生	ケンブリッジ トリニティ・カレッジ入学
1813				
1814	ラプラス『天体力学』第１巻英訳版	(20)		
1815				
1816				トリニティ・カレッジ卒業，数学卒業試験優等２位 (second wrangler)
1817				トリニティ・カレッジ フェロー
1818			トリニティ カレッジ チューター	トリニティ・カレッジ チューター就任
1819		(25)		修士 (M.A) 授与 『力学の基礎』出版，ウッド『力学』にかわる標準的教科書に (Becher,p.15)。
1820				このころトライポスの改革に関わり，大陸数学の導入をする。(Wilson,p.15)。
1821	ヤング注釈，ラプラス『天体力学』第１巻			
1822				
1823				『動力学論』出版，オイラーおよびフランスの数学を採用 (Becher,p.15) 『力学の基礎』第２版
1824		(30)		
1825	ポンスレ メッツ砲術学校での講義（仏）			英国国教会執事 (deacon) 論文「結晶体の面がなす角度の一般的計算法とそれによる法則」
1826			地球の密度	英国国教会執事 エアリーと地球の密度に関する研究（～ 1828）
1827				
1828			鉱物学教授	鉱物学教授就任，論文「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」 『力学の基礎』第３版　『鉱物の分類と命名法に関する小論』
1829	コリオリ『力学の計算法について』（仏）	(35)		

				ヒューウェル
1830	『エジンバラエンサイクロペディア』		鉱物学教授	1830 年代，ヒューウェルの要請でトライポスに応用数学として物理学が多く取り入れられる 『ドイツの教会の建築学的特徴』 (Bacher pp. 23–24)
1831	③ラン，ウスター州に生まれる			
1832	⑥マクスウェル，エジンバラに生まれる。 アーンショウ『動力学』出版			『力学の最初の原理』,『動力学入門』,『点の自由運動（動力学論新版第 1 巻)』
1833	『オクスフォードエンサイクロペディア』		トリニティカレッジチューター 潮汐に関する研究	『解析的静力学』出版。(Becher) 『力学の基礎』第 4 版　論文「同潮時線地図の一次近似のための小論」
1834		(40)		論文「運動の法則の真理の性質について」発表，『点の運動（動力学論新版第 2 巻)』
1835	ポアソン『力学論』（仏語）第 2 版			
1836				『点の自由運動（動力学入門新版第 1 巻)』（第 3 版） 論文「ヨーロッパおよびアメリカ沿岸広範囲の潮汐に関する 1835 年 6 月の観測結果について」
1837				『帰納的諸科学の歴史』初版　『力学的なユークリッド幾何学』 論文「ヨーロッパの海岸の日中の不均一な波について」
1838			道徳哲学教授	道徳哲学教授
1839		(45)		
1840				『帰納的諸科学の哲学』初版
1841			トリニティ・カレッジ学寮長	トリニティ・カレッジ 学寮長就任・結婚 『エンジニアのための力学』英訳版
1842	ポアソン『力学論』英訳版			ケンブリッジ大学副総長
1843				
1844		(50)		神学博士授与
1845	W. トムソン，ケンブリッジ大学卒業 (second wrangler)			
1846	サンデマン (22?)，ケンブリッジ大学卒業 (fourth wrangler)			
1847	ブランジェ『力学論』（仏語），力積			『力学の基礎』第 5 版
1848				
1849	⑩ラン (18)，ケンブリッジ大学入学	(55)		
1850	サンデマン (26?)『質点の運動論』出版 ⑩マクスウェル (18)，ケンブリッジ大学入学			論文「英国沿岸の様々な場所での継続的な潮汐の観測結果について」
1851	マクスウェル，ピーターハウスから トリニティ・カレッジへ移籍			
1852	テイト，ケンブリッジ大学卒業 (senior wrangler)			
1853	ラン (22)，ケンブリッジ大学卒業 (fourth wrangler)			
1854	マクスウェル (22)，ケンブリッジ大学卒業 (second wrangler)	(60)		
1855				ケンブリッジ大学副総長・妻死去
1856	ラン (25)，修士号授与，司祭， セントジョンズカレッジ サドラー講師			
1857				
1858				
1859	ラン (28)『運動論』出版	(65)		再婚
1860				
1861				
1862				
1863				
1864		(70)		
1865				
1866				⑤死去
1867	トムソン・テイト『自然哲学論』出版			
1868				
1869				
1870	マクスウェル (39)『熱の理論』			
1871				
1872				
1873				
1874				
1875				
1876	マクスウェル (45)『物質と運動』出版			
1877				
1878				
1879	マクスウェル (48) 死去			

2.2 ヒューウェルと力学教育

ウィリアム・ヒューウェルは，18 歳でケンブリッジ大学トリニティ・カレッジに入学して以来，その生涯をトリニティで過ごした人物である。1816 年にケンブリッジ大学を数学卒業試験（トライポス）第 2 位 (second wrangler) で卒業し，翌年トリニティ・カレッジのフェローとなり，その翌年にチューターとなった (1839 年まで)。1828 年から 1832 年までケンブリッジ大学鉱物学教授を勤め，1838 年から 1855 年まで道徳哲学教授，1841 年から 1866 年に 71 歳で亡くなるまでトリニティ・カレッジの学寮長を勤めた。新しい科学用語の命名者として知られ，ファラデーと文通して，イオン（ion）, 陽極 (anode)，陰極（cathode）などの命名に寄与したほか，物理学者（physicist）, 科学者（scientist）といった用語の定義に寄与した[1)]。また，科学哲学者や科学史家としても知られ,『帰納的諸科学の歴史』,『帰納的諸科学の哲学』といった著作がある。

1820 年から 40 年にかけてトライポスの改革に関わり，大陸の解析学の導入に尽力したが[2)]，その改革において，単なる純粋数学として解析学が導入されるのには反対した。1817 年のトライポスにおけるピーコックの〈具体的現象に結びつかない純粋数学的な解析学の出題〉を批判し,〈物理学の問題と結びついた応用数学の問題〉の導入に努めた。具体的には,『プリンキピア』の解析的な扱い，水力学，天体力学，電磁気学，熱学などの出題を行った[3)]。

こうしてトライポスに〈物理学と結びついた応用数学〉がとりいれられるようになった結果として，ケンブリッジ大学からすぐれた物理学者を輩出するようになり，1800 年代後半の英国の物理学教授職のほぼ半数がラングラー（ケンブリッジのトライポス成績優等者の称号）で占められるようになった。実際，トムソン，グリーン，ストークス，マクスウェル，ラーモアといった 1800 年代後半に活躍した名だたる物理学者はみなケンブリッジ大学出身だった[4)]。

また，ヒューウェルがケンブリッジ大学トリニティ・カレッジを卒業した 3 年後，チューターに就任した翌年の 1819 年，26 歳の時に出版した処女作『力学の基礎』(1819)[5)] は，ウッド『力学の原理』にとってかわるケンブリッジの標準的な力学教科書となり，1847 年まで 5 版を重ねた。この本には，オイラーおよびフランス教科書の解析的な数学がとりいれられていたが，それは，このような物理学の問題を通じてケンブリッジに大陸流の解析学を導入しようとする意図がこめられていたからである[6)]。

それ以外にも，同じように大陸流解析学を導入した『動力学論』(1823) 出版，1828 年には論文「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」を発表，1832 年に『力学の最初の原理』,『動力学入門』,『動力学論新版第 1 巻；点の自由運動と万有引力，プリンキピア第 I 部，第 III 部の主要な命題を含む』出版，1834 年『動力学論新版第 2 巻；束縛および抵抗をうけた点の運動と剛体の運動』出版および論文「運動の法則の真理の性質について」発表といったように，ヒューウェルは数多くの力学に関する著作をなした。

当時フランスで代表的だった力学教科書ポアソン『力学論』がそれまでの大陸の科学者

に倣って力学の基本法則とニュートンの法則を結びつけていなかったのに対して，ヒューウェルはこれらの著作の中でニュートンの運動の 3 法則に特別な位置を与えようとした。ヒューウェルによる力学および運動の法則に関する仕事については，グラッタン=ギネス，ハーマン，バッツ，伊藤らによる先行研究がある[7)]。

グラッタン=ギネスによれば，ヒューウェルは，いくつかの力学の著作や，論文「運動の法則の真理の性質について」(1834) などで，ニュートンの運動の法則を動力学の基礎として新たに重要性を見いだし，『力学の基礎』(1819) でニュートンのアプローチにそれまでになかった論述を与えた。そして，論文「フランスの著者たちによって述べられた力学の原理について」(1828) で，フランスの著者たちを批判し，運動量と衝突の法則を融合し，仕事と摩擦について何らかの考察を加えた[8)]。

またバッツは，ヒューウェルが論文「運動の法則の真理の性質について」(1834) で，運動の法則を静力学の原理と同様の先験的，必然的な真理として確立しようとしたことを指摘している[9)]。

ハーマンは，ヒューウェルが「動力学という科学を〈物体の運動を生成あるいは変化させる力についての科学〉ととらえ，力の概念および運動の法則に特別な位置を与えようと」し，ヒューウェルによる「ニュートン版の第 2 法則」が，ホプキンスの 3 人の弟子，トムソン，テイト，マクスウェルらの力学書に影響を与えたとしている[10)]。

これらの先行研究ではいずれも，ヒューウェルがニュートンの運動の法則を重視し，力学に関する著作の中で重要な位置づけを与えたことが指摘されている。しかし，ヒューウェルがニュートンの運動法則を大胆に書き換えたことについてはほとんど言及されていない。たとえばハーマンは，トムソン&テイト『自然哲学論』に〈ニュートンの運動の 3 法則がそのまま記述されている事実〉と「彼（ニュートン）がそれら（運動の法則）を与えてから 2 世紀の間，なんの追加も変更も必要とはされなかった」との記述を引用していて，ヒューウェルの修正については何の言及ない[11)]。

そして，

> 「この問題（訳注：第 2 法則）の数学的解析」は，「要素時間 (δt) における（衝撃）力の効果の計算および，その効果とすでにある運動量との合成の計算」にある。これは，衝撃力と運動量変化の関係を，運動の第 2 法則の解釈とするニュートンを引き継いだものである。

と述べ，ヒューウェルからトムソン&テイト，マクスウェルに引き継がれる流れの中で運動方程式がニュートンの第 2 法則と結びつけられたことをほのめかしているが[12)]，ヒューウェルあるいはトムソン&テイトがどのように運動方程式を記述し，第 2 法則と結びつけたのかは具体的には述べられていない。

それに対して伊藤は，ヒューウェルの『帰納的諸科学の歴史』(1840) から引用しながら，彼の第 2 法則が，運動の合成法則と解釈できることを述べ，それがむしろダランベールによる運動法則の解釈に近いことを指摘している[13)]。そして第 3 法則についても，「第三法則は静力学的力と動力学的力との間の関係を「物質の質量」を媒介として築くもの」

[14] とし，ダランベールと第 3 法則との関連を述べているが，ヒューウェルがなぜそのように運動の法則を書き換えたかまでは述べていない。そして，「19 世紀前半まで，ニュートンの運動法則を力学の基本原理と捉え，ニュートンを力学理論体系の創建者と見なす見方は見いだされてない」としている[15]。また，運動方程式についても，「ニュートンの第二法則を運動方程式と結びつける考えは，18 世紀前半活躍した他の研究者にも見られない」とし，その脚注で「ヒューウェルは，『帰納的諸科学の歴史』(1837) において運動の三法則について述べているが，それらには運動方程式は含まれていなかった」としている[16]。

この件についてもっともくわしい論述が見られ，本章の直接的な先行研究としてあげられるのは，スミス&ワイズによるケルビン（W. トムソン）に関する伝記的研究書のトムソン&テイト『自然哲学論』に関する章である。そこでは『トムソン&テイト』以前の英国の力学に，ヒューウェルが大きな影響を与えたことが述べられている。そして，その独特の運動法則についても論じられている。しかし，本章でこれから論じるようなヒューウェルの運動の 3 法則の初期版から後期版への変遷とその理由や，第 2 法則と運動方程式の関連までは論じられていない。

2.3　ヒューウェルによる運動の 3 法則の改定

2.3.1　処女作『力学の基礎』(1819) における第 3 法則の改定

ヒューウェルは数多くの力学に関する著作を書いたが，その処女作は，1819 年ケンブリッジ大学を卒業した 3 年後，26 歳の時に出版した『力学の基礎』(1819) である。

この本には，運動の 3 法則が次のように記述されている[17]。

運動の第 1 法則 **運動する物体に力が何も働いていないときは，一直線上を等速で運動する。**

運動の第 2 法則 **運動している物体に何らかの力が働いているとき，生じる運動の変化は，力に比例した大きさで力の方向におこる。**

運動の第 3 法則 **静力**(*pressure*) **が物体に運動を生じさせるとき，加速力は静力**(*pressure*) **に比例し，運動する物質量**(*the quantity of matter*) **に反比例する。**

この 3 法則は，ニュートンが『プリンキピア』で述べている 3 法則とも，現代の教科書で我々が目にする 3 法則ともかなり異なったものとなっている。しかし，彼がニュートンをないがしろにしたのではないことは，この『力学の基礎』の序文で，

> 我々は運動のすべての現象を解析し，それを充分説明することができる一般原理を得なければならない。もし我々が実験からそれを収集するなら，それを可能な限り少ない数の個別の法則に集約しなければならない。われわれはニュートンが偉大なる聡明さで選択した 3 法則にそれを見いだすことができる。

と賛辞を呈していることからも分かる[18)]。

そしてこのニュートンへの賛辞の後に，「第 3 法則の変更に関しては，何らかの弁明が必要かも知れない」[19)] と，自らニュートンの運動法則を変更したことを認めている。

このヒューウェルの 3 法則の変更を『プリンキピア』や今日我々が知る“ 運動の 3 法則 ”と比較すると，第 2 法則の慣性質量に関する記述を第 3 法則に移動し，本来の第 3 法則である作用・反作用の法則を除外したものととれ，第 3 法則のみの変更にとどまらないように思われる。

しかし，前章で論じたウッド『力学の原理』での第 2 法則もまた同じように，〈力と運動の合成法則〉および〈力と運動変化の大きさ（加速度）の比例関係〉を述べたものであって，慣性質量への言及はなかった（本論文 21 ページ）。

実際，ヒューウェルは第 2 法則の解説で，

> これ（第 2 法則）はまた，次のように表現できる。何らかの力が〈すでに運動している物体〉にはたらくとき，〈その力が静止物体に生じさせる運動〉と〈それまで物体が持っていた運動〉が，それぞれの平行方向に最大効果を発揮する形で合成される。

と記述し，第 2 法則と合成法則を結びつけている[20)]。

しかも，ウッドの本はヒューウェル以前にケンブリッジで標準的な教科書であり（本論文 20 ページ），ヒューウェルはケンブリッジの学生のとき，この本で学習した可能性が高い。そうでなくても，ヒューウェルが処女作として力学の著書を執筆するに当たって，それまで標準的力学の教科書であったこの本を吟味した可能性は極めて高いといえるだろう。

これらのことから，上記ヒューウェルによる“ 運動の 3 法則 ”は，ウッドによる 3 法則の表現を引き継ぎ，第 3 法則のみを改定したものだったと考えられる。

ヒューウェルによる「第 3 法則の変更に関する弁明」には，以下のように書かれている[21)]。

> いくつかの点から，第 3 法則はこちらのほうが当を得ていることがわかる。というのは，この形式の方がその前の原理との関係をより明確に示しており，釣り合いにおける作用反作用の考察から分離することができる。そしてまた，この形式のほうがより簡潔であり，より多くの様々な場面に適用できる。またここで示したように，その目的は，**起動力，運動量**(*momentum*)，**運動の量**(*quantity of motion*)**，作用，反作用，慣性，インペタス**などの新しい定義なしに理解することができる。これらの用語の導入はどうしても必要なものとは限らないが，時には便利である。しかしこれらの用語が，慣れ親しんだ物体の量を表し，運動の数学的法則を示してきた場合は，しばしば混乱をもちこんできた。たとえばこの法則が，〈作用と反作用〉あるいは〈運動の量の増減〉が等しい，と表現されるとき，一見するだけでその主張が簡潔に理解されるということは決してなく，作用と運動の場当たり的な定

> 義によって，理解されたかのようにされるだけなのである。

ウッドは第 3 法則で，“作用” を “起動力”(moving force) とし，それを〈単位時間に生じる運動量〉と定義することによって，作用・反作用の法則を実質，運動量保存則におきかえていた。そうすることによって，結果的に第 3 法則で慣性質量の概念を導入していた（本論文 22 ページ)。ヒューウェルはこの第 3 法則をさらに書き換え，第 3 法則から作用・反作用の法則を「分離」し，起動力や運動量，慣性といった用語の「新しい定義」も除外することによって，簡潔な表現を目指したのである。

2.3.2　ヒューウェルによる第 3 法則の意味

pressure とは何を意味しているか

ところで，この第 3 法則の表現でヒューウェルは，力を意味する単語として force のかわりに pressure を使用している。今日では pressure は圧力と訳され，〈単位面積あたりの力〉として定義されるが，彼はこの『力学の基礎』初版で force を，「運動あるいは運動変化の原因」と定義し[22)]，それを物体を押したり引いたりすることによって伝わる力—pressure, 衝突による力—impact，万有引力や磁力など遠隔作用の力—attraction の 3 種に分類している[23)]。

$$\text{力 (force)}\begin{cases}\text{押し引きの力 (pressure)}\\ \text{衝突の力 (impact)}\\ \text{遠隔作用の力 (attraction)}\end{cases}$$

この 3 種の力についてヒューウェルはこの『力学の基礎』初版の第 3 法則に関する解説で，滑車の両側に等しいおもりをつりあわせて，一方におもりを追加した場合の運動，いわゆるアトウッドの器械による実験によってこの法則の正しさを実験的に論じた後[24)]，衝突力 (impact) による場合は，pressure が極端に短い時間に作用する場合であるとし[25)]，また遠隔作用力 (attraction) による力も磁力を例にして，これもまた結局 pressure に還元できるとしている[26)]。

したがって，ヒューウェルは結局すべての力は〈押し引きの力〉=pressure に還元できると考えていることになり，彼の第 3 法則の表現はその pressure による動力学的効果を述べたものと解釈できる。これについて，1840 年の著書『帰納的諸科学の哲学』の「運動の第 3 法則」の解説では次のような主張がなされている[27)]。

> 我々は加速力の定義によって，力が運動を生み出す場合における力の測定法を得た。それ以前に静力学の原理を述べた中で，力すなわち静力の測定法を，それが釣り合いを生み出す場合について定義した。しかし，このような〈力に関する 2 つの側面〉は密接に関連しており，そのつながりを定める規則が必要となる。我々は重い石を支えるのと同じ筋肉の作用によって，それに運動を与えることも出来る。そこで次のような疑問が生じる。その運動は，石を支える作用に対してどれくらいの

比率でどのように決まるのか？この疑問に対する答えは第 3 法則に含まれている。

つまり，pressure とは，重力との釣り合いによって測定された〈静力学的な力の測定量〉をさし，彼の第 3 法則は，〈静力学的な力の測定量〉=pressure と〈動力学的な力の測定量〉=加速力との関係を述べたものと解釈することができる。

実際，ヒューウェルに倣って第 3 法則を記述したと思われるアーンショウ『動力学』第 3 版 (1844) やプラット『力学哲学の数学的原理とその応用』第 2 版 (1842) では，pressure が〈静力学的に測定された力〉として定義されている[28]。

そこで本論文では pressure の訳語について，あまり一般的ではない〈静力〉という用語をあてている。

慣性質量と重力質量

ヒューウェルはこの静力を P，物質量を Q，加速力を f とおくことにより，第 3 法則を $f \propto \dfrac{P}{Q}$ ないし $P \propto Qf$ といった数式的表現に書き換えている[29]。その上で，物体が自由落下する場合は，その重さ (weight) は運動を生じさせる静力に比例し，同時に動かされる質量 (mass) とも比例することを述べている。ちなみにヒューウェルはこの本の冒頭で，質量 (mass) を物質量 (Qnantity of Matter) とともに「物体を作り上げる単位物質の数」として定義している[30]。

そこで，自由落下の場合，重力による静力 P は重さに比例し，その重さは質量=物質量 Q に比例する。つまり P は Q に比例する。加速力は $\dfrac{P}{Q}$ に比例するから，重力による加速度は $\dfrac{Q}{Q}(=1)$ に比例する（すなわち一定値をとる)。もし重力加速度を g とすれば，比例関係 $1 : g = \dfrac{P}{Q} : f$ が成り立つので，$f = \dfrac{Pg}{Q}$ が導かれる。またもしここで，重力加速度 g を 1 とし，加速力を F とすれば，この式は $F = \dfrac{P}{Q}$ とも書ける。

ヒューウェルは Pg，すなわち〈物体の重さ×加速力〉を起動力 (Moving Force) としてここで定義し，Q を〈物体の動かされる重さ〉とし，〈運動に対する抵抗〉，すなわち慣性 (Inertia) ともみなせることを述べている。そして慣性を「加速力を表現する分数の分母」，起動力を「その分子」とみなせるとし，第 3 法則の帰結として「慣性は質量すなわち重さに比例する」と述べている[31]。

つまり，ヒューウェルによる第 3 法則の帰結として，静力と加速力の比例定数である物質量（慣性質量）が重さ（重力質量）と一致していることがここで述べられている。

このことは，1832 年の『動力学入門』の第 3 法則の解説でより明確に次のように述べられている[32]。

> 様々な材質の物体は，同じ慣性 (inertia) を持つときに，同じ物質量を持つとみなせる。材質が異なる場合は，仮に同じ重力で引かれていたとしても，物質量が同じとは限らない。それを決定するのは，定義により，物質の慣性である。
>
> そしてその物体の重さが慣性に比例するなら，その場合はまた，**重さは物質量に**

> **比例する**。このことは観察と実験によってその正しさが証明される。異なる材質で，その大きさも異なる物体が自由落下するとき，同じ時間では，同じ速度で降下する。そしてこれは，振り子を使用することによってより正確な実験をすることができる。

このようにここでは，慣性質量と重力質量が一致することが実験結果によって証明されることが述べられている。つまりこのことは，静力と運動変化を結びつける比例定数（物質量）が，物質の重さ＝重力という，慣性とは違った側面からも与えることができることを示している。そしてこれこそが，この第 3 法則が本質的に意味するところであった。

つまり，ヒューウェルの第 3 法則は，〈静力学的な力〉＝静力と，〈動力学的な力〉＝加速力とを結びつける比例定数を物質量＝慣性として定義し，それが，物質の重さ＝重力と一致することを述べた規則であったということができる。

2.3.3 なぜ第 2 法則と第 3 法則を統合しなかったか

論文「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」

ヒューウェル『力学の基礎』初版での運動の第 2 法則は，力と運動の合成法則であり，第 3 法則は力と加速力，質量の 3 者の関係を述べたものであった。今日の運動の第 2 法則は，このヒューウェルの第 2，第 3 法則を統合したものと言える。1874 年の時点でトドハンターも同様のことを述べていることを考えると，1800 年代末にはこの統合はおこなわれた。

実際，ヒューウェルの第 2，第 3 法則はいずれも力と運動変化の法則であるから，両者をまとめて 1 つにしてもそう不自然ではないように思える。なぜヒューウェルは第 2 法則と第 3 法則を独立させて記述したのだろうか。

ヒューウェルは，『力学の基礎』初版を出版したおよそ 10 年後，34 歳でケンブリッジ大学鉱物学教授に就任した 1828 年に，論文「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」[33)]を『エジンバラ科学雑誌』に発表している。この論文でヒューウェルは，フランスの著者たち（ポアソンとラプラス）が運動の法則を 2 つにしている事実を述べ，それらを批判して運動の法則を 3 つにすることの優位性を説いている[34)]。ヒューウェルによれば，フランスの著者らによる運動の法則は以下の 2 つである[35)]。

> **第 1, 慣性の法則,** 力 (force) が作用しない物体は永久に一定の速度で運動する。
> **第 2,** 生じる速度は力 (force) に比例する。

フランスの著者たちによる第 2 法則は，ヒューウェルによる第 2，第 3 法則を統合したものと解釈でき，現代の物理教科書における〈運動の第 2 法則〉の解釈にほぼ一致する。ヒューウェルも以下のように述べている[36)]。

> そこで問題は今，〈第 2 法則が第 3 法則を含むか？〉という問題になる。そしてそれこそまさに，外国の著者たちが暗に主張し，証明したかのようにふるまってい

る問題である。

ここでヒューウェルが「外国の著者たち」による証明の例としてあげている問題が，図のように〈AB 方向に速度 BC で運動している物体〉に，B 点で BD 方向に力を受けた場合に物体がする運動である。

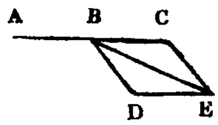


図 2.1　合成法則の図

もし，合成法則が成り立てばこの物体は中間の BE 方向に進む。ヒューウェルがフランスの著者たちによる証明として紹介している記述を引用する[37)]。

> 〈B 点にあり，**速度**BC で運動している物体〉は，あたかも〈BC によって表される**力**〉がその瞬間作用したのと**同じ状態**である。しかしこの場合，BC と BD で表される 2 つの力が物体に作用し，力の静力学的な合成により，BC と BD の合成である単独の力 BE が作用したと考えられる。したがって，速度は力に比例するので，物体は BE であらわされる速度で BE にそって運動するだろう。

つまり，速度 BC をいったん〈その運動を生じさせることができる力〉BC に変換し，その力 BC と〈作用する力〉BD との合力を BE として求める。その合力 BE が物体に生じさせる速度 BE が，速度 BC と力 BD の合成の結果生じる運動だというわけである。ここで〈速度（運動）に対応する力〉として想定されているのは，瞬間的にはたらく力（衝撃力）である。

> この場合我々は，速度は〈時間についていっさい考慮しない力〉によるものとして見なしている。したがって，力は瞬間的あるいは衝撃的であることは明らかである。

つまり，グレゴリーが等速運動での基本方程式を述べるときに用いていたのと同じ，時間の項を用いない衝撃力に相当するものとなっている（本論文 28 ページ）。これは今日では力積に相当する量であり，力とは違う次元を持つ。このことについてヒューウェルは，次のように考察している[38)]。

> これらの証明について注意深い考察から，次のことが明らかである。**第 1 に**，任意の力は**瞬間的な**力によって生み出される**だろう**とみなされていること。**第 2 に**，このことは力は速度と**比例する**という実験から証明されたと言うこと。**第 3 に**物体を，〈速度を持つ〉とみなすか，あるいは〈その速度を生み出す力が作用している〉とみなすかを，任意の瞬間について好き勝手に決めることができると言うこと。そして**第 4 に**，これらの瞬間的な力はまた，静力学の法則によって合成できるとみなされているということである。

そして，それに対する反論として，以下の 3 つをあげている。

I.　どんなに瞬間的に見える力でもそれは単に時間が非常に小さいだけであって，一瞬

で速度を生み出すような力は自然には存在しない

II.　仮にそのような力が存在すると認めたとしても，そのようにして変換した力が静力学的な力の合成法則に従うとは必ずしも限らない

III.　これらの力が同時に作用する場合と，順次に作用した場合で同じ合成法則が成り立つとは限らない

このヒューウェルの批判は，つまるところ最初の I. に集約されるだろう。ニュートンも時間の項がない衝撃力を想定しており，連続的な力は衝撃力が絶えず働く力と考えていた。そのような衝撃力と連続力の混乱がこの時代まで続いており，ヒューウェルの時代になってようやく衝撃力も，単に作用時間が短い“力”として統一的に理解できるようになった。ヒューウェルは，当時の力と衝撃力に関する混乱を指摘し，力と運動の合成法則としての第 2 法則の独立性を主張したのである。

続けてヒューウェルは以下のように述べている[39)]。

> 科学的な論理の厳密さに関心をもつ人々にとっては，この問題は重要である。この問題は実際のところ，ニュートンの**3 つの**法則を得るために必要なかぎりの帰納と一般化の過程を経た上で，さらにもう一歩進めて，これらの法則の**1 つ**を**もう 1 つ**に含めていいかという問題となる。つまりそれは，第 3 法則が第 2 法則の特殊な場合と考えられるかどうかという問題である。これまでの考察から，そのような依存は反証されたように思える。
>
> フランスの著者たちがそのような結合を確立しようと試みたやり方は，両者を**力は速度に比例する**という原理に含めようとすることだった。

つまり，力と運動の合成法則はそれ自身独立した法則であって，それを力と加速度の法則の中に含むことができないというのがヒューウェルの見解だった。

この論文の最初でヒューウェルは，真理を物事の性質から導き出された公理から確立された経験的 (contingent) 真理と，実験や観察から証明される必然的 (necessary) 真理にわけ，論理だけで作り上げられる幾何学を必然的な真理の典型とした。その上で彼は静力学 (statics) は幾何学と同様，論理から構築される真理と考えたのに対して，動力学 (dynamics) は現象を観察することでその法則の正しさが検証される性質のものとみなした。そこで，動力学もできるだけ「必然的な」体系に構築し直そうと考えていた[40)]。そこで，1 つの法則に「力と運動の合成」と「力と加速度の比例関係」という 2 つの経験的，実験的法則を入れることに異論があったのである。

第 2，第 3 法則の独立性を示す〈振り子による 2 つの実験〉

このことについては，『動力学入門』(1832) の運動の法則に関する解説の末尾でも，次のように述べられている[41)]。

> いくつかの動力学の書物，特にフランスの著者たちによるものでは，第 2 法則および第 3 法則がともに「力は速度に比例する」という命題に含まれると理解されて

いる。そうなると，この命題は 2 つの異なる意味をもつことになってしまう。この命題が第 3 法則を表すには，〈ある物体に生じる速度は，それを**生じさせる**力に直接比例することになる。「力が速度に比例する」という命題が第 2 法則を表現するためには，物体がもっている速度はそれに比例した力に置き換えられることになり，その力は物体に働く外力と静力学の法則に従って合成されることになる。これらは二つの異なる主張であり，独立した証明を必要とするのである。

第 3 法則はある力が生じさせる運動の総量を決めるものである。第 2 法則はどのようにしてその運動がすでにある運動と合成されるかを示すものである。

運動の**第 2** 法則は, ラプラスによって提案された実験によって証明された。すなわち，同じ振り子の振動は全ての方位について等しい。第 3 法則は振動**時間**は振り子の**長さの二乗根**に比例するという実験から証明される。この法則の一方から他方を互いに導くことはできない。さもなければ，これらの事実の一方が他方に含まれていることになってしまう

この振り子の実験はどちらもトプリスが翻訳したラプラス『解析力学』(『天体力学』第 1 巻の英訳）(1814)[42] に書かれているもので，「同じ振り子の振動は全ての方位について等しい」とは，自転する地球上でどちらの方向に振り子を振動させても，その振動の速さは変わらないという実験のことを指す。つまり，ヒューウェルが第 2 法則の解説で述べている船上での物体の落下実験（本論文 69 ページ）を地球の上におきかえたともいえる実験である[43]。 もう一つの「振動**時間**は振り子の**長さの二乗根**に比例する」というのは，振り子の振動周期は $\sqrt{\frac{l}{g}}$ にのみ比例して，質量 m に依存しない法則のことを指す[44]。振り子の振動周期がおもりの質量によらないのは，重力質量と慣性質量が一致していることによる。したがって，重力による静力学的な力—静力と加速度によってはかられる動力学的な力—加速力が慣性質量を比例定数として結びつけられる。

1828 年の論文「フランスの著者たちが述べている…」では，フランスの著者たちが運動を衝撃力に変換するやり方を批判することによって，第 2 法則の独立性を主張していた。ここでは，第 2 法則と第 3 法則を証明する実験をともに振り子による実験事実として示すことにより，第 2 法則と第 3 法則はそれぞれ異なる 2 つの実験事実によって導かれる法則であるとの考えを示し，これら 2 つの法則の独立性を主張している。

2.4　ヒューウェルによる運動法則のさらなる改定

2.4.1　起動力による第 3 法則の表現

ヒューウェルは 1828 年に発表した論文「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」(1828) や,『動力学入門』(1832) では，運動の第 3 法則の表現に起動力 (moving force) を使用して,「静力と起動力の比例関係」といった表現に変更している。たとえば，論文「フランスの著者たち…」で表記されている第 3 法則は以下の通りである[45]

法則 3　物体に力が運動を生じさせるとき，起動力は静力に比例する。

『力学の基礎』初版では，序文で述べられていたように，運動の法則を導出するに当たってなるべく新しい用語の定義が避けられていた。そこで，第 3 法則を記述するのに起動力といった新しい用語の使用を避け，加速力が使用されていた。しかしその場合，第 3 法則は，〈加速力と静力の比例関係〉および〈加速力と質量との反比例の関係〉という 2 つの関係によって表現されるようにならざるを得ない。それに対して，起動力を用いたこの表現では，新たに，加速力と物質量をかけた量=起動力という量を導入しなければならないかわりに，〈静力と起動力の比例関係〉という 1 つの関係で第 3 法則を表現することができる。

そこでたとえば 1832 年の『動力学入門』では，第 2 法則が導出された後，第 3 法則導出前にまず物質量 (Quantity of Matter) が「ある静力によって引き起こされる運動の小ささ」ではかるものとして慣性 (inertia) とともに定義され[46)]，その上で，起動力が「加速力に物質量をかけたもの」，運動量 (Momentum) が「速度と物質量との積」として定義されている。したがって，起動力はその定義により，必然的にある時間に生み出される運動量に比例することが導かれる[47)]。つまり第 3 法則は，これらの用語の定義をまとめる形で導出されるという構成にこの『動力学入門』ではなっている。

2.4.2　力学法則の幾何学的体系化

公理（一般原理）の設定

このようにヒューウェルは，1819 年の力学書の処女作『力学の基礎』初版で運動法則を改定した後も，運動の法則をはじめとした力学体系の構成を試行錯誤していった。特に 1834 年にケンブリッジ哲学協会雑誌に発表した論文「運動の法則の真理の性質について」[48)]で，ヒューウェルは 1828 年の「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」[49)]で述べていた，真理を必然的 (necessary) 真理と経験的 (empirical) 真理（前論文では contingent という単語を使用していた）にわける考え方を発展させて，力学体系のあり方を考察した。この論文でヒューウェルは，動力学の法則の経験的な側面も認めつつ，力学の体系を必然的真理の典型と見なしていた幾何学の体系に，できるだけ近づけるべく整理し直そうとした。そのためにヒューウェルは，まず一番最初に公理を設定し，そこを出発点とする力学体系を考えた[50)]。

このような意図にもとづく力学の基礎原理に関する体系をより具体化したものが，この論文と同じ年に出版された『束縛および抵抗をうけた点の運動と剛体の運動；動力学論新版第 2 巻』(1834) の本文前に掲載されている「力学の基本原理」(Elementary Principles of Mechanics) である[51)]。2 年前に出版した『点の自由運動；動力学論新版 第 1 巻』[52)]では，運動の法則など力学の基礎概念に関する解説は，すべて『動力学入門』[53)]にゆだねており，その参照ページが書かれていた。それに対して『動力学論新版』の第 2 巻として出版されたこの本では，本文前に約 17 ページの「力学の基本原理」をおき，力学の基本法

則について，あらためて記述している。つまり，力学の基礎概念に関する記述を改定し，論文「運動の法則の真理の性質について」で述べた「運動の法則の幾何学的体系化」を具体化したものが，この「力学の基本原理」といえる。

ヒューウェルはここでまず，上記論文で記述していた 3 つの公理とほぼ同等の「一般原理」(Gnenaral Principles) から出発している[54]。

原理 I . **原因無しには変化はおこらない**

原理 II . **結果はその原因に比例する**

原理 III. **ある物体の他方に対する作用は，大きさが等しく反対方向の反作用とともにおこる。**

そしてこの一般原理の “原因” を “力” におきかえるという形式をとって，運動の 3 法則をそれぞれ以下のように導いている[55]。

運動の第 1 法則 **運動している物体は，力が作用していなければ，一直線上を等速で運動する。**

運動の第 2 法則 **運動している物体に何か力が作用するとき，生じた運動の変化ははたらいた力の方向におこり，変化の大きさは作用した力の大きさに比例する。**

運動の第 3 法則 **静力が運動を生み出すとき，〈事実上の起動力〉**(*the effective moving force*) **は静力に比例する。**

用語や表現に多少の違いはあるが，こうして導出された 3 法則は，前著『動力学入門』における 3 法則とほぼ同等の内容であると考えられる。

「力学の基本原理」における第 2 法則の導出

もともとヒューウェルにとっての第 2 法則は，ウッドから引き継いだ〈運動と力の合成法則〉であった（本論文 61 ページ）。この「力学の基本原理」では，この第 2 法則が，場合（ケース） 1「〈物体が運動する方向〉に力が作用する場合」[56] と，場合（ケース） 2「力が物体の運動する方向に対して横向きあるいは斜めに働く場合」[57] の 2 つに場合分けされて論じられている。場合（ケース） 1 では 1 次元の問題について，〈力によって生じる速度変化が，物体がもともともっていた速度によらないこと〉が述べられ[58]，場合（ケース） 2 でそれが 2 次元に拡張され，〈もとの運動と，力が生み出す運動との合成が，平行四辺形の合成法則によって求められること〉が述べられている。この議論は，根拠が航海中の船上での落下運動の実験に求められているところなど，これまでの著作が踏襲されているが，それが特殊な場合（一次元）から一般化される（二次元）という形式に再構成されている[59]。

さらにそれぞれの場合（ケース） で，大きさが一様な力と大きさが変動する力に場合分けして論じられ，大きさが一様な力で成り立つ法則が，極限の概念を用いることにより大きさが変動する力でも成り立つことが示されるという構造になっている。

- 場合1 運動方向の力
  - 一様な力の場合
  - 変動する力の場合
- 場合2 横向きあるいは斜方向の力
  - 一様な力の場合
  - 変動する力の場合

この論考では，場合 1 の中で，2 つめの一般原理を根拠として，力の測定量が「1 秒間のような**単位時間に生じる，または加える速度**で測定される」として定義され[60]，その上でこの測定量が加速力として定義されている[61]。

2 年前の『動力学入門』では，動力学的な力の定義や力の測定および加速力の定義は，運動の法則の導出前にあらかじめ定義されていた。しかし，この「力学の基礎」では，こういった定義もすべて運動の法則の中に位置づけられている。それはこの「力学の基礎」執筆時のヒューウェルの意図が，力学の体系から経験的な側面をできるだけ排除し，幾何学のような数少ない公理から論理だけで導ける体系に近づけたいということにあったからに他ならない。そこでこのように，力学の基礎概念のすべてが一般原理から導出される形式に再構成されているのである。

「力学の基本原理」における第 3 法則

第 3 法則もまた，場合 1「2 つの物体の相互作用が一直線上になるように系に力が**まっすぐに**作用する場合」[62]と，場合 2「どんなものであれ，力学的な連結を通じて力が作用する場合」[63]の 2 つの場合に場合分けされている。

前著『動力学入門』などで第 3 法則として記述されていた内容は，ほぼこの場合 1 に相当しており，この場合 1 の中で，物質量，慣性，起動力，運動量といった概念がなされている。その定義の内容は，前著とほぼ同じであるが，前著ではあらかじめ第 3 法則を導出する前に定義されていたのに対して，ここではやはり法則の中で定義される形式をとっている。そして前著では定義されていなかった “作用” が，静力の大きさによって定まる量として定義され，〈単位時間における運動量の得失〉が作用・反作用の測定値とされている[64]。

そもそも最初の力学書『力学の基礎』初版 (1819) でヒューウェルは，第 3 法則から静力学的な作用反作用の法則を分離し，起動力，運動量，作用，反作用，慣性…といった用語の新しい定義をできるだけ除外しようとした（本論文 62 ページ）。ところが 15 年の年月を経たこの著作では，様々な試行錯誤の結果，それらをすべて撤回する構成を採用したことになる。そして，第 3 法則における作用・反作用の法則を運動量の得失に還元するこの解釈は，ヒューウェル以前のウッド『力学の原理』の解釈（本論文 22 ページ）に回帰するものでもあった。

次の「場合 2」は，以下のように記述されている[65]。

> 15. **場合**2. どんなものであれ，力学的な連結を通じて力が作用する場合。
>
> 運動している系において，系のそれぞれの部分で得たり失ったりした運動量から

推論される起動力を，この場合，**事実上の起動力**(*effective moving forces*) と呼び，運動を生み出す静力を**与えられた力**(*impressed force*) と呼ぶ。

この**場合**では，事実上の力 (effective forces) は，系の静力学的な特質により，与えられた力 (impressed forces) と同等である。

これは「場合 1」における推論と同様にして証明される。

事実上の力 (effective force)，与えられた力 (impressed force) という聞き慣れない用語が登場している。これについて，この本の第 1 書「抵抗のない空間における動力学論第 2 部」(Book I The Motion of Points in a Non-Resisting space.) の第 2 部運動第二章「いくつかの点の束縛運動」(On the Constrained Motion of Several Points) の第 I 節「一般原理」(General Principle) に関連する記述があるので引用する[66)]。

伝えられた力と事実上の力(*Impressed and Effective Froces*) **の相等性**

154. 系に実際に作用している力を**伝えられた力**(*impressed forces*) と呼び，もしそれらの点が束縛されていないと想定したとき，実際にそれらの点が運動するために働くはずの力を**事実上の力**(*the effective forces*) と呼ぶ。

命題 **任意の 2 点の相互作用が一直線上にあるように結合している点の運動のすべての場合，伝えられた力と事実上の力は静力学的に互いにつりあっている。**

この意味を，一種の束縛運動である等速円運動を例にとって考えよう。等速円運動の場合，伝えられた力つまり「実際に作用している力」(really act upon a system) に該当するのは，向心力である。「これらの点が束縛されていないと想定したとき」(supposing them unconstrained) というのは，「束縛力＝向心力がはたらかないとき」ということではなくて，物体をそこにとどめている〈束縛状態〉がなくなる，と考えられる。つまり，「実際に作用している力」は向心力だけであるので，その力の作用だけで考えると質点は回転中心方向に向かって運動してしまう。そうならないのは，「事実上の力」つまり，この場合は遠心力がはたらいて，静力学的につりあっていると考えられるのである。つまりこれは，ダランベールの原理といわれているものに他ならない[67)]。

実際，この本『動力学論 新版』の第 1 巻として，2 年前の 1832 年に『動力学入門』とともに出版された『点の自由運動』では，冒頭で第 3 法則とダランベールの原理との関係を以下のように記述している[68)]。

第 3 法則は〈点のつりあいを生じさせるために必要な静力学的な力〉と，その運動に作用する動力学的な力との連結を与える。

いくつかの点が同時に動いたり静止するように連結されていて，それらの 1 つが何らかの静力の作用を受けるとき，この全静力は，静力学的な原理によって，多数の点に作用するさまざまな部分的な静力として分解される。そしてこれらの部分的な静力は，〈それらの連結を保ちながらする運動〉に調和し適合していなければならない。この規則は，系の運動の変化を決定するのに適用され，力が系のある一部から別の一部へ，系の連結によって力が返還される場合への第 3 法則の拡張であ

> る。これは一般にダランベールの原理による計算によって導入される。

つまり，質点に関する法則である第3法則をダランベールの原理にもとづいて質点系に拡張したのが，ここでいう「第3法則の拡張」である。したがって，「力学の基本原理」の第3法則場合2は，その拡張を第3法則の中に取り入れたものと考えられる。

2.5　運動方程式の導出とその適用

2.5.1　ヒューウェルにおける力学の基本方程式

『プリンキピア』の命題の解析化

『動力学入門』と同じ年に出版された『点の自由運動と万有引力，プリンキピア第I部，第III部の主要な命題を含む；動力学論 新版第1部』(1832)[69)] は，1823年に出版された『動力学論』初版[70)] の新版第1部という位置づけではあるが，初版とは全く違った新しい内容となっている。

第1部として出版されたこの『点の自由運動』は，そのタイトルにあるように，ニュートン『プリンキピア』第I部と第III部の主要な命題を大陸流の解析学で書き直したものである。

ヒューウェルは序文でこの本の目的を述べているが，そこではまず，「ニュートンの業績を原型のまま学ぶことは英国の数学教育の重荷となってきた」とする大陸流解析学派の人々の意見と「解析学は単に結果を与えるのみで知的な機能を少しも果たさない」とするニュートン信奉者たちの反論を紹介しつつ，自らはそのどちらにも与しないとしている。そのように当時の大陸解析学派とニュートン流率法派の論争に巻き込まれないよう注意深く配慮した上で，あらためて大陸流解析学の優越性を婉曲的に評価し，〈ニュートンの命題を解析的に書き直す〉というこの本の目的を明言している[71)]。実際，この本の目次の最後には，ニュートン『プリンキピア』の各命題と，この本の該当ページとの対応表が載せられている。

このようにニュートン『プリンキピア』の命題を解析的に書き直したこの本の中では，〈運動の法則〉や力学の基本方程式が解析的な数式で記載されている。

運動の法則の数式化

目次によれば，この『点の自由運動』の最初の第1項は，「運動の法則の定義」(Definitions of Laws of Motion) と名付けられている。しかし本文にはそのタイトルは記述されていないし，運動の法則の導出，定義などはすべて『動力学入門』を参照するようになっていて，運動の法則そのものも記述されていない。ただしそのかわりに，速度 v および加速力 f の数学的な定義が，$v = \dfrac{ds}{dt}, f = \dfrac{dv}{dt}$ として記述されている[72)]。

そして「我々は運動の法則によって動力学の問題が式にまとめられる」と述べ，運動の法則をもとに動力学の問題を式にまとめることができることを述べている[73)]。そして運動の第1法則について，「上述した力の定義に暗示されている」として，力の定義式 $f = \dfrac{dv}{dt}$

と結びつけている[74]。本来，力の定義式 $f=\dfrac{dv}{dt}$ と結びつけられるのは第 2 法則のように思える。しかしおそらくここでは，$f=0$ の状態が第 1 法則に相当することをふまえて，「力の定義に暗示されている」と述べているのだと考えられる。

第 2 法則については，「**運動の第 2 法則**は，点の曲線運動の式を得る中で解析的言語に翻訳される（第 19 項)」として，第 19 項が参照されている[75]。その第 19 項とは，「第 II 章 点の曲線運動」(Chap. II. The Curvilinear Motion of a Point) の「命題 **平面上を運動してなんらかの力の作用を受けている物体の運動方程式の導出**」と題された項である[76]。

この項の中でヒューウェルは，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\frac{d^2y}{dt^2}=Y$$

および 3 次元の場合の，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

を導出している（ちなみに X,Y,Z は力の x,y,z 座標成分)。

加速力の概念を用いているために，質量の因子がないが，命題のタイトルに「運動方程式の導出」とあるように，ヒューウェルはこの式を力学の基本方程式としていたと考えられる。その証拠に次の 20 項では「これらの式は力が作用する物体の運動に関する様々な問題を解くことを可能にする」と記述されている[77]。

運動方程式の導出

これらの式は，単に力の定義式 $f=\dfrac{dv}{dt}$ に速度の定義式 $v=\dfrac{ds}{dt}$ をあてはめて $f=\dfrac{d^2s}{dt^2}$ を導き，それを x,y 成分，あるいは x,y,z 成分に分解すれば求められるように思われる。しかし，ヒューウェルはこの式を彼の第 2 法則の解釈，つまり力と運動の合成法則の解析的表現として導き出している。その導出法を，わかりやすく大幅に書き換えた上で以下に紹介する[78]。

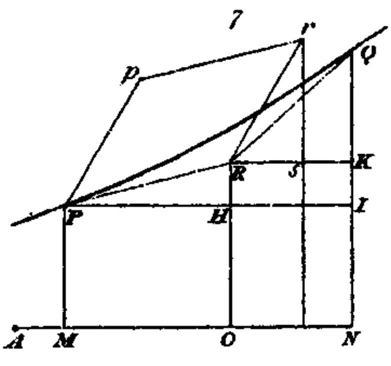


図 2.2　『点の自由運動』第 7 図

今，点 P を出発点として速度 V で等速直線運動している物体が一定の力 P の作用を受けて点 r に到達したとする。このとき第 7 図で，PR を一定の速度 V で h 秒間運動したときに描く距離，Rr を静止物体に一定の力 P が h 秒間作用した際に描く距離とすると，$PR=Vh$ および $Rr=\frac{1}{2}Ph^2$ が成り立つ。

PH, RH は，PR の x, y 成分，Rs, sr は，Rr の x, y 成分であるので，x 軸と速度 V がなす角を θ，x 軸と加速力 P がなす角を α とすると，$PH = Vh\cos\theta, RH = Vh\sin\theta$ および，$Rs = \frac{1}{2}Ph^2\cos\alpha, sr = \frac{1}{2}Ph^2\sin\alpha$ が成り立つ。

一方，変動する力を受けた物体は点 Q に到達したとして，t 秒後の物体の座標 P を時刻 t の関数 $(x(t), y(t))$ で表すとすれば，$t+h$ 秒後の物体の位置 Q は $(x(t+h), y(t+h))$ で表すことができる。したがって，$t=a$ まわりのテイラー展開

$$x(t) = x(a) + \frac{x'(a)}{1!}(t-a) + \frac{x''(a)}{2!}(t-a)^2 + ... + \frac{x^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + ...$$

の t の変わりに $t+h$，a の変わりに t と置き換えれば，

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + \frac{x''(t)}{2!}h^2 ... + \frac{x^{(n)}(t)}{n!}h^n + ...$$

が得られるので，Q の座標 $(x(t+h), y(t+h))$=(AN, NQ) は，

$$\begin{aligned} AN &= x + \frac{dx}{dt}h + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \&\text{c.} \\ NQ &= y + \frac{dy}{dt}h + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \&\text{c.} \end{aligned}$$

である。

時刻 t の座標 $P(x(t), y(t))$=(AM, MP) であるから，$MN = AN - x, IQ = NQ - y$ であり，これと，$PH = Vh\cos\theta, RH = Vh\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned} RK = MN - PH &= \frac{dx}{dt}h + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \&\text{c.} - Vh\cos\theta \\ KQ = IQ - RH &= \frac{dy}{dt}h + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \&\text{c.} - Vh\sin\theta \end{aligned}$$

が得られる。

時間の極限をとると，変動力による到達点 Q は一定の力による到達点 r と一致するので，$RK = Rs, KQ = sr$ より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} - V\cos\theta\right)h + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \&\text{c.} &= \frac{1}{2}Ph^2\cos\alpha \\ \left(\frac{dy}{dt} - V\cos\theta\right)h + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \&\text{c.} &= \frac{1}{2}Ph^2\sin\alpha \end{aligned}$$

左辺と右辺を比べると，

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - V\cos\theta = 0, \qquad &&\frac{dy}{dt} - V\sin\theta = 0, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\alpha, &&\frac{d^2y}{dt^2} = P\sin\alpha \end{aligned}$$

これによって，

$$\frac{dx}{dt} = x \text{ 方向の速度}, \qquad \frac{dy}{dt} = y \text{ 方向の速度},$$
$$\frac{d^2x}{dt} = x \text{ 方向の力}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y \text{ 方向の力},$$

が導かれた。そこで，X, Y を〈ある点に作用する x, y 方向の力〉とすれば，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \text{および } \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

を得ることができる。

現代のように解析的な数学に慣れた立場から考えると，変動する力と一定の力を，その極限で一致させるのは自明であり，このような証明は必要ないように思える。しかし，解析学が導入段階であった当時は，それは自明とは思われず，このような証明が必要だったのだと思われる。

このようにして導かれた方程式は，加速力の概念を用いられているために質量の因子は抜けているが，今日我々が運動方程式とするものとほぼ同じである。しかし，その導出法は，運動と力の合成法則としての第 2 法則に基づいたものであり，現代の運動方程式の導出とはかなり異なった形式である。

2.5.2　運動方程式の力学問題への適用

運動方程式の適用

ヒューウェルはこの 2 年後の 1834 年に，『動力学論新版第 2 巻』として，『束縛および抵抗をうけた点の運動と剛体の運動；動力学論新版第 2 巻』[79] を出版している。この本では，先の『動力学論新版第 1 巻』第 19 項で求めた式を基本方程式として様々な問題に展開している。たとえば，第 I 書 「抵抗のない空間での点の運動」(The Motion of Points in a Non-resisting Space) 第 II 部「点の束縛運動」第 I 章「決められた線上あるいは面上の点の束縛運動」(The Constrained Motion of a Point on a given Line or Surface) では，この第 19 項の式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

から出発して議論を展開している。

このほかにも，随所でこの基本方程式をもとに議論を展開しているが[80]，ここでは，この第 I 書第 II 部第 I 章の第 I 節「平坦な曲線上にある点の運動」(The Motion of a Point on a Plane Curve) の命題「曲線上の物体にある力が作用しているときの速度の決定」(When a body moves on a curve, acted on by given forces, to determine its velocity) で，第 19 項の式からどのように議論を展開しているかを検討し，ヒューウェルがこの式を基本方程式と見なしていた事実を示すことにする。

曲線上の物体にある力が作用しているときの速度の決定

現代から見てわかりにくい部分に補足と書き換えを大幅に行った上で，ヒューウェルによる議論を引用する（原文およびその訳は章末注を参照のこと[81)]）と以下の通りである。

今，曲線 AB 上の点 P にある物体に力 (X, Y) が作用している。このとき，座標の正方向をそれぞれ左向き，下向きとする。斜面からの反作用 R は，斜面の垂線を PK とし，この x, y 成分を PL, PH とすると，$(R\dfrac{PL}{PK}, R\dfrac{PH}{PK})$ と書ける。三角形 PLK と，PT を斜面の接線としてできる三角形 TMP は相似なので，この抗力 R は，$(R\dfrac{MT}{PT}, R\dfrac{MP}{PT})$ とあらわせる。

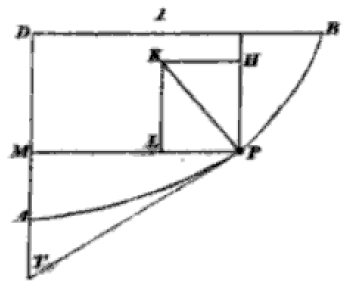


図 2.3　『点の運動』第 1 図

s を $\dfrac{ds}{ds} = \sqrt{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}$ を満たすものとすると，抗力 R の (x, y) 成分は，$(R\dfrac{dx}{ds}, R\dfrac{dy}{ds})$ とあらわせる。

これを第 19 項の運動方程式に当てはめると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + R\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - R\frac{dx}{ds}$$

が成り立つ。

それぞれに $2\dfrac{dx}{dt}$ と $2\dfrac{dy}{dt}$ をかけて両式を加えると，

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 2X\frac{dx}{dt} + 2Y\frac{dy}{dt}$$

を得る。これを t について積分すると，

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2\int\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt}\right)dt = 2(\textstyle\int Xdx + \int Ydy)$$

を得る。

この式には抗力 R が含まれていないので，物体が束縛を受けずに力 (X, Y) のもとに自由に運動するときと同じ式となる。つまり，物体がある力の下に，B から P に運動するとき，どんな軌跡をとろうが，また束縛されようがその速度は等しい。

たとえば物体が，重力のような一定の力の作用を受ける場合，重力の作用する向きに x 軸をとり上方を正とすれば，$X = -g$ であるので，上式右辺は $2\int Xdx = C - 2gx$ となる。積分定数 $C = 2gh$ とおけば，

$$(\text{速度})^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2g(h - x)$$

となる。

ここで $x = h$ のとき，速度 $= 0$ となるので，h は物体が落ち始める高さであることがわかる。そしてまた，速度は x のみに依存するので，物体が垂直線 DM にそって落下しようが，曲線 BP にそって同じ高さに降下しようが，速度は等しいことがわかる。

これは，現代の力学教科書では「力学的エネルギー保存則」や「保存力」の概念として一般化されている結論であり，前章のグレゴリー『力学論』(1815) で検討したのとほぼ同様の議論をおこなっている（本論文 35 ページ）。また，グレゴリーは流率法によって，同様の結論を導いている[82)]。

このようにヒューウェルは，第 (19) 項の式をもとに，物体の運動を論じ，力学的エネルギー保存則に相当する結論を導いていた。このことからも，これらの式を今日の運動方程式と同様，力学の基本方程式と位置づけていたことが分かる。

2.6 1840 年以降の教科書での運動法則

2.6.1 他の力学教科書に見られるヒューウェルの影響

1874 年に出版されたトドハンター『入門者のための力学 第 3 版』[83)]という 16 折り本の小さな本がある。この本には，運動の 3 法則がニュートン『プリンキピア』とほぼ同じ表現で記述されているが[84)]，その章末の注釈では，このニュートン流の 3 法則の表記について，「この（ニュートン流の）方針は一般的に採用されているわけではなく，多くの著者たちはニュートンの第 2 法則を事実上 2 つに分割したものを第 2，第 3 法則と称している」として[85)]，次のような第 2，第 3 法則が記述されている[86)]。

第 2 法則　運動している物体にいくつかの力が作用するとき，それぞれの力は物体が静止しているときに単独で作用するときと同じ速度を与える。

第 3 法則　物体に力が作用するとき，単位時間に生成する運動量は力に比例する。

ヒューウェルのように静力と動力といった区別はしていないものの，この形式は，ヒューウェルによる“運動の 3 法則”による影響だと考えられる[87)]。

また，トドハンターと同じ 1874 年に出版されたパーキンソン『力学の基礎 第 5 版』にも，ヒューウェル流の 3 法則が採用されているが（付録 239 ページ参照），この本の注釈には，もともとのニュートンの 3 法則が記述を併記した上で，「この章で与えた各々の〈運動の法則〉は，本質的には〈ヒューウェル博士が採用し，そののちに英国の著者たちが初等力学に関する書籍に採用したもの〉」と記述されている[88)]。

このパーキンソン『力学の基礎』の第 3 版は 1863 年に出ているが[89)]，その第 3 版でも第 5 版と同じ形式で運動の法則は記載されているが，この注釈はない。

また，これ以降の章で論じるサンデマン『質点の運動論』(1850)（本論文 107 ページ参照）や，トムソン&テイト『自然哲学論』(1867)（本論文 134 ページ）でも，当時このような 3 法則が採用されている傾向があることが述べられている。これらのことから考え

て，1850 年代から 1860 年代にはこのヒューウェル流の 3 法則が英国の力学書ではかなり流通していたことがうかがえる。

2.6.2　1840-50 年ころまでの力学教科書

実際，1840 年〜1860 年に出版された力学書でその内容を見ることが出来たものの 18 冊のうち，13 冊でヒューウェルからの影響を見ることが出来た。そのリストは以下の通りである[90)]。

1. デニソン『力学新編』[91)] (1841)
2. プラット『力学哲学の数学的原理』[92)] (1842)
3. ウォールトン『理論力学の原理の実例としての問題集』[93)] (1842)
4. アーンショウ『動力学入門』改訂第 3 版[94)] (1844)
5. ポッター『力学の基礎』[95)] (1846)
6. ハート『力学の基礎』[96)] (1847)
7. ニュート『静力学，動力学，静水力学の基礎』[97)] (1850)
8. フィア『基礎力学』[98)] (1850)
9. ウィルソン『動力学論』[99)] (1850)
10. ウォー『動力学，機械の構造，建築物の安定，材料の強度』[100)] (1851)
11. ベイカー『静力学と動力学の原理と実践』[101)] (1851)
12. ジャクソン『力学の基礎』[102)] (1852)
13. 一般文芸教育協会編（著者不明）『静力学と動力学の基礎』[103)] (1853)
14. テイト『機械哲学の原理』[104)] (1853)
15. ガルブレイス=ホートン『力学のマニュアル』第 2 版改訂版[105)] (1854)
16. スミス『力学の基礎』[106)] (1855)
17. シェリマン『力学の基礎』[107)] (1858)
18. トゥイスデン『実用力学の初等手本』[108)] (1860)

2.6.3　ヒューウェル流の 3 法則を採用しているもの

以下にヒューウェルに影響を受けたと考えられる教科書とその記述内容を引用しながら紹介する。

アーンショウ『動力学入門』(1832) とその後の版 (1844) における改訂

ヒューウェルが 1832 年に出した『動力学入門』と同じ年に出たアーンショウ (1832)『動力学』[109)] は，第 1 章の中の「定義と第 1 原理」(Difinition and First Principles) に続く「慣性の法則」(The Law of Inertia)，「力の合成法則」(The Law of the Composition of Forces) と題した節に，運動に関する法則が記述されているが，「運動の法則」(Laws of

Motion) という表記はない。

ところが，1844 年の改訂第 3 版[110)]では，第 1 章の「定義と第 1 原理」のあとの節が「運動の法則」(THE LAWS OF MOTION) となっており，そこには運動の 3 法則が記述されているが，それはヒューウェル流の 3 法則となっている（付録 198 ページ参照）。1832 年の版になかった運動の法則をあえて 1844 年版でヒューウェル流のものをいれているのは，ヒューウェルの影響であると考えられる。

プラット『力学哲学の数学的原理』(1842)

前書きで，ヒューウェル，ポアソンなどへの謝意を表明し，第 2 法則で運動変化と力の法則，第 3 法則で「力の静力学的測定は，物体の質量と力の動力学的測定との積に正比例する」と述べており，ヒューウェル流の 3 法則を採用している（付録 202 ページ参照）。

ポッター『力学の基礎』(1846)

第 3 法則は〈静力と起動力の比例関係〉となっており，まさにヒューウェル流の 3 法則を採用している（付録 205 ページ参照）。

ハート『力学の基礎』(1847)

公理という形で力学の法則を記述しており，運動の 3 法則を正面切って記述はしていない。しかし，その公理の中でニュートンの運動の 3 法則を引用しつつも，その解釈は第 2 法則を「運動の変化の法則」としていたり，第 3 法則とダランベールの原理と結びつけるなど，ヒューウェルの影響が色濃く見られる（付録 209 ページ参照）。

ニュート『静力学，動力学，静水力学の基礎』(1850)

動力学の第 1 章は「定義と運動の法則」となっており，運動の 3 法則が記述されているが，その第 3 法則は，静力と加速力，質量の関係となっており，ヒューウェルの影響が見られる（付録 212 ページ参照）。

フィア『基礎力学』(1850)

第 3 法則は力と時間あたりの運動量変化の法則であり，ヒューウェル流の 3 法則といえる（付録 213 ページ参照）。

ベイカー『静力学と動力学の原理と実践』(1851)

第 3 法則は静力と生じる運動量変化の法則となっている（付録 220 ページ参照）。

ジャクソン『力学の基礎』(1852)

イントロダクションに運動の 3 法則が記載されているが，その第 2 法則は相対運動に関する法則となっている。ただし第 3 法則は，作用と反作用の法則となっているので，ヒューウェル流のものと完全に一致しているわけではない。力と加速度，質量などに関す

る法則は第 2 部の動力学の中で述べられている（付録 221 ページ参照）。

一般文芸教育協会編（著者不明）『静力学と動力学の基礎』(1853)

ヒューウェル流の 3 法則を記述した後，注解で，ニュートンの 3 法則について言及し，「多くの著者たちが慣例的にこの運動の法則を上記のように 2 つに分割している。そしておそらくその分割は全体的に見て成功している」と述べている（付録 224 ページ参照）。

テイト『機械哲学の原理』(1853)

ヒューウェル流の 3 法則が記載されている（付録 226 ページ参照）。

ガルブレイス=ホートン『力学のマニュアル』第 2 版改訂版 (1854)

ニュートンの運動の 3 法則をラテン語原文とともに引用した後に，「この運動の法則は 3 つの個別な主張を含んでいる。よりわかりやすくするために，我々はそれを分離して示す。第 1 は方向について，第 2 と第 3 は大きさについてである」として，第 1 文から第 3 文 (Statement) という形でヒューウェル流の 3 法則にまとめ直している（付録 227 ページ参照）。

スミス『力学の基礎』(1855)

ジャクソンと同様，第 2 法則は相対運動の法則となっているが，第 3 法則は作用・反作用の法則となっている（付録 229 ページ参照）。

トゥイスデン『実用力学の初等手本』(1860)

ヒューウェル流の 3 法則が採用されている（付録 234 ページ参照）。

2.6.4　ヒューウェル流の 3 法則を採用していないもの

デニソン『力学新編』(1841)

慣性質量を〈物体の持つ抵抗〉としているなど，その理解は今日とはかなり違う記述になっている（付録 196 ページ参照）。

ウォールトン『理論力学の原理の実例としての問題集』(1842)

運動の法則としての表現は見られない（付録 199 ページ参照）。

ウィルソン『動力学論』(1850)

運動の法則は第 1，第 2 法則が記述されており，第 3 法則の記述はない（付録 215 ページ参照）。

ウォー『動力学，機械の構造，建築物の安定，材料の強度』(1851)

第 1，第 2 法則のみで第 3 法則の記述が見られない（付録 219 ページ参照)。

シェリマン『力学の基礎』(1858)

ニュートンの 3 法則を引用しながら，3 法則を解説している。その解釈は現代のものに近い（付録 231 ページ参照)。

2.7　おわりに

ヒューウェルによって変更された運動の 3 法則は，1800 年代の英国の力学教科書・啓蒙書に強い影響をもたらした。その影響は本論文で扱っている大学レベルの入門書だけでなく，一般向けの初等的な入門書にも強い影響をもたらした。

今日からみると，運動の第 2 法則を「力と運動変化の法則」とし，第 3 法則を「静力と起動力の比例法則」するこのヒューウェルの 3 法則はかなり奇異に見えるが，実はそれ以前のウッドも第 2 法則は「力と運動変化の法則」としてほぼ記述していた。そしてまた，ニュートン自身も『プリンキピア』の第 2 法則の解説では，力の合成法則を詳しく説明していたのである。そしてまた，第 3 法則で質量を導入するという展開はウッドがすでにおこなっていた。つまりヒューウェルは，このウッドの構成を発展させたと言える。そもそもニュートンも第 3 法則の解説では衝突をひきあいに詳しく論じている。むしろ，今日の作用・反作用の法則を力と反力の法則として静力学的な法則のみに解釈する考え方のほうが，本来とはかなり違う第 3 法則の解釈といえる。

さらにヒューウェルは，〈第 2 法則の解析的言語への翻訳〉として，運動方程式を記述していた。この式は，加速力概念を用いていたため，質量の因子が欠けてはいたが，すべての質点力学の問題に適用できる式として導出されていた。そのような意味では，ヒューウェルによってはじめて運動方程式が運動法則と関連づけられたと言える。

注

[1] 主に *DSB* の Whewell の項と，[Becher 1980]. によった。

[2] [Wilson 1985], p.15.

[3] [Becher 1980], pp.23-24.

[4] [Harman 1985a], p.1.

[5] [Whewell 1819].

[6] [Becher 1980], p.15.

[7] [Grattan-Guiness 1985], pp.99-100.,[Harman 1985b], p.222, [Butts 1965].，[伊藤 2000]. など。

[8] [Grattan-Guiness 1985], pp.101-102.

[9] [Butts 1965].

[10] [Harman 1998], p.25.

[11] [Harman 1988], p.85.

[12] [Harman 1998], p.25.

[13] [伊藤 2000], pp.64-65.

[14] [伊藤 2000], p.64.

[15] [伊藤 2000], p.69.

[16] [伊藤 2006], p.169.

[17] [Whewell 1819], p.202., p.269., p.273.

原文：
FIRST LAW OF MOTION. *A body in motion, not acted on by any force, will move on in a straight line, and with a uniform velocity.*

SECOND LAW OF MOTION. *When any force acts upon a body in motion, the change of motion which it produces is in the direction and proportional to the magnitude of the force which it acts.*

THIRD LAW OF MOTION. *When pressure communicates motion to a body, the accelerating force is directly as the pressure and inversely as the quantity of matter moved.*

[18] [Whewell 1819], ix.

原文：
We have to analyse all the phenomena of motion, and to obtain such general principles as shall be sufficient to account for them. If, when we have collected these from experiment, we reduce them to the smallest possible number of distinct laws, we shall find that they are those three which Newton, with his wonderful sagacity, has selected.

[19] [Whewell 1819], ix.

原文:
Perhaps some apology is necessary for an alteration in the enunciation of the Third Law of Motion.

[20] [Whewell 1819], p.269.

原文:
This may also be thus expressed. When any force is exerted upon a body already in motion, the motion which the force would produce in a body at rest, is compounded with the previous motion, in such a way, that both produce their full effects parallel to their own directions.

[21] [Whewell 1819], ix-x.

原文:
It appeared advisable on several accounts; because the form in which it is here given shews more clearly its relation to preceding principles ; because it separates it from the consideration of Action and Reaction in equilibrium; because it is the more simple form of the proposition; and because it is that form in which we have most frequently occasion to apply it. As it is here presented, its meaning is seen without any new definition, of *moving force, momentum, quantity of motion, action, reaction, inertia, impetus*, &c. The introduction of such terms as these is not absolutely necessary, though it may often be convenient; but it has frequently led to confusion, when these words, appearing to express familiar qualities of bodies, have been made to imply mathematical laws of motion. When for instance it was asserted that Action and Reaction, or that the Quantities of Motion gained and lost, were equal; it was not at first sight perceived that the proposition was not by any means in its simplest shape, and was made to appear so only by arbitrary definitions of Action and of Motion.

[22] [Whewell 1819], p.7., 原文：Force is generally concieved as the cause of motion, or of change of motion.

[23] [Whewell 1819], pp.8-9.

[24] [Whewell 1819], p.274.

[25] [Whewell 1819], p.276.

[26] [Whewell 1847], p.3.

その部分の原文と訳は以下の通り。

原文：
6. We conceive force as necessarily acting *on* matter, but not as necessarily residing in matter and acting by means of matter. The pressure or the fall of a heavy body is conceived as produced by the force of gravity, this force not residing in any material vehicle, or operating on the body by material contact ; but being an immaterial influence,—a mere attraction. And in like manner any other attraction, as that of a magnet on iron, is conceived as an immaterial influence, producing in the body pressure or motion, as material pressure or impulse might do.

我々は力 (force) を，必ず物質**に**はたらくものと考えるが，必ずしも物質に内在していたり，物質を媒介としてはたらくものとは考えない。重い物体の pressure つまり落下は，重力 (the force of gravity) によって生じたと考えられ，この力 (force) は物質的な媒介者に内在するものではないし，物質的な接触によって作用するものでもなく，非物質的な影響—単なる引力によるものである。そして同じように，たとえば鉄に対する磁石のような他の引力も，非物質的な影響であり，物質的な (material) pressure や衝撃力 (impulse) がそうであるように，物体に pressure あるいは運動を引き起こす。

27) [Whewell 1840], p.231.

原文:
We have, in the definition of Accelerating Force, a measure of Forces, so far as they are concerned in producing motion. We had before, in speaking of the principles of statics, defined the measure of Forces or Pressures, so far as they are employed in producing equilibrium. But these two aspects of Force are closely connected; and we require a law which shall lay down the rule of their connexion. By the same kind of muscular exertion by which we can support a heavy stone, we can also put it in motion. The question then occurs, how is the rate and manner of its motion determined ? The answer to this question is contained in the Third Law of Motion,

28) [Earnshaw 1844], p.12.,[Pratt 1842], p.3. 付録 198，202 ページ。ヒューウェルによる第 3 法則が静力学的な力と動力学的な力を結びつけたものであることは伊藤やスミス&ワイズも指摘している。特にスミス&ワイズは，アーンショウ，プラットにも言及している。[伊藤 2000], p.64.,[Smith and Wise 1989]., p.375.

29) [Whewell 1819], p.279.

30) [Whewell 1819], p.5.

原文：
The *Mass* or *Quantity of Matter*, similarly, means the number of times a certain unit of matter must be repeated to make up the body.

31) [Whewell 1819], pp.280-281.

原文:
Since the law is known according to which the accelerating force varies, if we know its magnitude in one case we know it in all. But in the case in which a body falls freely by gravity its whole weight is employed in producing motion, and its weight is also the mass moved. Hence, by the third law of motion, its accelerating force is as $\frac{Q}{Q}$ or 1. But in this case the accelerating force is the whole force of gravity, which we may represent by g, the velocity generated in 1". Hence for any other case, we have this proportion,

$$1 : g :: P : f; \ \therefore f = \frac{Pg}{Q}.$$

If we represent the accelerating force of gravity not by g, but by 1, we shall have, if F be any accelerating force,

$$F = \frac{P}{Q}.$$

In the fraction $\frac{Pg}{Q}$ which expresses the accelerating force, the numerator Pg is the product of P, the weight or pressure which produces motion, by g the accelerating force, (in this case gravity,) which acts upon it. This *product of accelerating force by the veeight on which it acts is called Moving Force.* The denominator Q is the whole weight moved ; (including P when the motion is produced by a weight;) and may be considered as representing the resistance to the communication of motion; in which sense it is called Inertia. The Inertia in general may be considered as *the denominator of the fraction which represents the accelerating force and. whose numerator is the moving force.* Hence it appears, by the third law of motion, that the Inertia is as the mass, or the weight. This is applicable to those cases only in which all the parts of the mass moved have the same velocity; and when of course we may consider it as a point in motion: in other cases the resistance to motion is at a mechanical advantage or disadvantage, and the inertia of the whole is to be calculated by methods which may be explained hereafter.

32) [Whewell 1832a], p.28.

原文：
Bodies of different materials are supposed to have the same quantity of matter when they have the same inertia. And if the weight of such bodies be proportional to the inertia, in this case also, *the weight is proportional to the quantity of matter.*
This is proved to be true by observation and experiment. Bodies of different materials, as well as of different magnitudes, falling freely, descend with the same velocity in the same time. And in this case also more accurate experiments may be made by means of pendulums.

33) [Whewell 1828].

34) [Whewell 1828], p.29.

この論文の中でヒューウェルは，「混乱と誤った推論を避けるために，静力学への適用を完全に排除する」(In stating the three laws of motion for the puropse of this comparison, we must, in order to avoid confusion and false reasoning, reject entirely their apprication to statics.) との断り書きを記した上で，自らが改定した 3 法則の表現を〈英国流の 3 法則〉として記述している。

法則 1　力が働いていない物体は一直線上を等速で運動する。
法則 2　運動している物体に何らかの力が作用するとき，生じる運動の**変化**の方向は力の方向で，その大きさは力の大きさに比例する。
法則 3　物体に力が運動を生じさせるとき，起動力は静力に比例する。

原文：
Law1. Abody in motion, not acted upon by any force, will move on in a straight line with a uniform velocity.
Law2. When any force acts upon a body in motion, the *change* of motion which it produces is in the direction, and proportional to the magnitude, of the force which acts.
Law3. When pressure communicates motion to a body, the moving force is as the pressure.

35) [Whewell 1828], p.29.

原文：
First, The law of inertia, that a body not acted upon by any force would go on for ever with a uniform velocity.
Second, That the velocity communicated is proportional to the force.

36) [Whewell 1828], p.30.

原文：
The question, therefore, now becomes, whether the second law of motion be included in the third? and this is what the foreign writers alluded to, assert, and pretend to prove.

37) [Whewell 1828], p.30.

原文：
Let a body be moving in a direction AB with any velocity BC. At the point B let it be acted upon by any force in the direction BD. It will describe an intermediate line BE *by the second law of motion.* But this intermediate direction is also deducted from the principle that the *velocity is proportional to the force*, in this manner.
The body being at B, and moving with the *velocity* BC, is in *the same condition* as if it were at that instant acted upon by a *force* which is represented by BC. But in that case it would be acted upon by two forces represented by BC and BC, and hence, by the statical compositon of forces, it might be considered as acted upon by a single force BE, the resultant of BC and BD. Hence, since the velocity is proportional to the force, the body will move in BE with a velocity represented by BE.

38) [Whewell 1828], p.31.

原文：
It will appear from a careful consideration of these proofs, that, first, it is taken for granted that any velocity *may* be produced by an *instantaneous* force: That *2d,* it is proved from experiment that this force is *as* the velocity: That *3d,* it is taken granted that we may, at our choice, at any instant, consider the body either as possessing the velocity, or as acted upon by the force which would produce it: And that *4th,* it is also taken for granted that these instantaneous force acting together may be compounded according to the laws of statics.

39) [Whewell 1828], p.35.

原文：
To those who feel an interest in the strictness of scientific logic the question will not appear unimportant. It is in fact the question, whether, after carrying the process of induction and generalization as far as is requisite, in order to obtain the *three* laws of Newton, we can carry it one step farther, and include *one* of these laws in *the other*. It is the question, whether the third law of motion be capable of being considered as a particular case of the second. The preceding considerations seem to disprove such a dependence.
The manner in which the French writers have tried to establish such a connection has been by including both in the principle that *force is as velocity*

40) [Butts 1965]. など

41) [Whewell 1832a], pp.34-35.

原文:
In some treatise on Dynamics, and especially in French writers, the second and Third Law are both understood to be included in the Proposition that “the force is as the velocity.” This Proposition is then taken in two different senses. In order that it may express the third Law, it means that the velocity directly communicated to a given body is as the pressure which *communicates* it. In order that the proposition, that “the force is as the velocity,” may express the second Law, it means that the velocity which a body has may be *replaced* by a force proportinal to it, and that this force, and the extaneous forces which act on the body, may be compounded according to the laws of statics. These are two different assertions, and requier separate proofs.
The third Law determines what is the amount of the motion which a given force will produce: the second Law determines in what manner this motion will be compounded with a previously existing motion.
The second Law of motion is proved by the experiment suggested by Laplace; namely, by the fact that the oscillations of the same pendulum are equally quick in all aximuths. The third Law is proved by experiments which shew that time of oscillation is proportional to the square root of the length of the pendulum. One of these laws cannot be deduced from the other, except one of these facts can be shewn to be implied in the other.

42) [Laplace 1814].

43) [Laplace 1814], pp.28-30.

44) [Laplace 1814], pp.61-62.

45) [Whewell 1828], p.29.

また,『動力学入門』では第 3 法則は以下のように記述されている。

[Whewell 1832a], p.25.

原文：
When pressure communicates motion directly (that is, in the direction of the pressure,) *the*

moving force is as the pressure.

静力(*pressure*) **がまっすぐに**（つまり力の方向に）**運動を生じさせる場合，起動力**(*moving force*) **は静力**(*pressure*) **に比例する**

46) [Whewell 1832a], p.24.

原文：

Measure of The Quantity of Matter

Bodies are considered as having the *same* quantity of matter when they produce, by their matter, the same mechanical effects. The effect which is more peculiarly taken as the measure of this quanitity, is the resistance to motion, pressure. The quantity of matter is supposed to be greater, exactly in proportion as the velocity, or accelerating force, resulting from a given pressure upon the body, is smaller.
The resistence to motion measured as above is called the *inertia*. Hence the quantity of matter is the same when the inertia is same.

訳：

物質量の尺度

同じ力学効果によって同じ力学効果が生まれるような場合，その物体は**同じ**物質量を持っているとみなす。物質量の尺度となる特有なこの効果は，運動にたいする抵抗，より正確に言えば，ある静力によって引きおこされる運動の小ささである。物質量が大きくなるにしたがって，物体に働く静力によって生じる速度すなわち加速力は，正比例して小さくなる。
上記のようにして測定される運動への抵抗を**慣性**(*inertia*) と呼ぶ。したがって，物質量は慣性が同じなら等しい。

47) [Whewell 1832a], p.25.

原文：

Moving Force is measured by the Accelerating Force multiplied into the Quantity of Matter.
COR. 1. The moving force is as the accelerating force multiplied into the quantity of matter, and the accelerating force is as the velocity communicated in a given time. Hence the product of the velocity in a given time into the quantity of matter will be as the moving force.
COR. 2. The procuct of the velocity and quantity of matter is called the *Momentum :* Hence the momentum communicated in a given time is as the moving force.

訳：

起動力の尺度

起動力は，加速力に物質量をかけたもので測定される。
系 1　起動力 (moving force) は加速力に物質量をかけたものに比例する。そして加速力は定められた時間に引き起こされた速度に比例する。そこで，ある時間での速度と物質量の積は起動力に比例する。
系 2　速度と物質量の積を**運動量**(*Momentum*) と呼ぶ。したがって定められた時間に生み出される運動量は起動力に比例する。

48) [Wewell 1834b].

49) [Whewell 1828].

50) その公理は，以下のように記述されている。

[Wewell 1834b], p.574., p.575., p.576.

原文：

AXIOM.I. —*Every change is produced by a cause.*

AXIOM.II. —*Causes are measured by their effects.*

AXIOM.III. —*Action is always accompanied by an equal and opposite Reaction.*

公理 I. **すべての変化は原因によって生じる**

公理 II. **原因はその結果で測られる**

公理 III. **作用はつねに等しく反対方向の反作用をともなう**

この公理は〈変化とその原因〉，つまり一般的な因果律について述べたものである。この公理の "原因" にあたる部分に "力" を適用することによって運動の法則が導き出されることになる。

51) [Whewell 1834a], ix-xv.

52) [Whewell 1832b].

53) [Whewell 1832a].

54) [Whewell 1834a], ix.-x.

原文：
PRINCIPLE I. *No change can take place without a cause.*

PRINCIPLE II. *Effects are proportional to their causes.*

PRINCIPLE III. *The action of one body upon another is accompanied by an equal and opposite reaction.*

55) [Whewell 1834a], xi-xii., xii., xiiv.

原文：
FIRST LAW OF MOTION. *A body in motion, not acted upon by any force, will move in a straight line with a uniform velocity.*

SECOND LAW OF MOTION. *When any force acts upon a body in motion, the change of motion which is produced is in the direction and proportional to the magnitude of the force which acts.*

THIRD LAW OF MOTION. *When pressure produces motion, the effective moving force is as the pressure.*

56) [Whewell 1834a]., xii.

原文：
Case l. When the force acts in the direction in which the body is always moving.

57) [Whewell 1834a], xiii.

原文：
12. *Case 2.* When the force acts transversely or obliquely to the direction in which the body is moving.

58) [Whewell 1834a], xii.

原文：
A uniform force, acting in the direction in which a body is moving, is found to produce the same increase of velocity *in a given time,* whether the body be moving quick or slow, or if it begin to move from rest. Therefore the effect of a uniform force in this case is independent of the rest or motion of the body.

〈一様な力〉が，運動している物体に対してその方向に作用するとき，生じる速度増加は，**ある決まった一定時間**では等しくなり，それは，その運動が速いとか遅いとか，あるいは，静止からの運動だとかいうことは関係ない。そこで，〈一様な力〉の作用はこの場合，物体の静止や運動とは独立している。

59) [Whewell 1834a], xiii.

原文：
When a uniform force acts upon a body already moving, in a direction transverse or oblique to the direction of the motion, it produces the effect of compounding with the motion which the body already possesses, a velocity equal and parallel to that which the same force would produce in a body at rest. This appears by observation; for instance, in bodies falling or thrown in a ship which is under way.

一様な力が，すでに運動している物体に，運動の横方向あるいは斜め方向に働くとき，それが合成の結果として生じさせる運動は，物体がすでに持っている運動と，〈その力が静止している物体に引き起こすであろう速度〉あるいは〈それに平行な速度〉との合成である。このことはたとえば，航海中の船上で物体を落下させたときの観察によってわかる。

60) [Whewell 1834a], xiii.

原文：
Hence the magnitude of a uniform force is measured by the *velocity which if generates or adds in a unit of time,* as one second ; in pursuance of the second General Principle.

61) [Whewell 1834a], xiii.

原文：
The magnitude or quantity of a uniform force, and of a variable force, measured in the manner just stated, is the accelerating quantity of the force, and is usually called simply *the Accelerating Force.*

訳：
今述べた方法によって測定する〈一様な力〉および〈大きさが変動する力〉の大きさ，すなわち量は，力の**加速量**であり，一般には単に**加速力**と呼ばれる。

62) [Whewell 1834a], xiv.

原文：
Case 1. When force acts upon a system *directly*, so that the mutual action of two bodies is in the line which joins them.

63) [Whewell 1834a], xv.

原文：
15. *Case* 2. When force acts upon a system by means of any mechanical connexion whatever.

64) 以下に，場合(ケース)1 の内容と訳を引用しておく（[Whewell 1834a], xiv-xv.）。

原文：
Case 1. When force acts upon a system *directly*, so that the mutual action of two bodies is in the line which joins them.
When a force acts on any system, so long as the pressure is the same, the magnitude of the Action, as shewn by the motion produced, is the same also : for force considered as pressure is identical with force considered as the cause of motion.
Two equal pressures, acting for the same time, will put two equal bodies in motion with equal velocities; and these pressures, acting together, make a pressure twice as great as either of them ; therefore the action is twice as great. Therefore, the velocity produced in a given time

by any force, being given, the amount of *action* is proportional to the quantity of matter moved.
Inertia is the quantity of matter of a body, thus measured by the pressure requisite to communicate to it a given velocity in a given time.
14. The *Momentum* of a body is the product of the numbers which represent its quantity of matter and its velocity.
It appears by observation that, in the direct mutual action of bodies, the momentum gained by the body acted on, and that lost by the acting body *in the same time,* are equal.
For instance, if A impinge upon B directly, or if A communicate motion to B by the continuous action of its weight, B's momentum is greater than it would have been in the same time, if B had not been connected with A, and A's momentum is less than it would have been in the same time, by exactly the same quantity.
Hence, *momentum gained and lost in n unit of time* may be taken as the measure of *action* and *reaction*, in pursuance of the third General Principle.
The *motive quantity* of the force which bodies exert on one another, as measured by the momentum generated in a given time, is called *Moving Force* ; and it appears, by what has been said, that this moving force may be taken as the measure of that *Action* which is identical with pressure.

訳：
場合1. 2 つの物体の相互作用が一直線上になるように，系に力が**直接**作用する場合。
力がなんらかの系に作用するとき，静力が等しければ，〈生じる運動によって示される作用の大きさ〉もまた等しい。というのは，〈静力として判断される力〉は，〈運動の原因として判断される力〉と全く同じだからである。
同じ時間に働く二つの等しい静力は，二つの等しい物体に等しい速度を与える。そして，これらの静力が一緒に働けば，それぞれの二倍の静力になる。そこで，作用は 2 倍の大きさになる。したがって，〈一定の時間内にある力によって生じる速度〉がわかっていれば，その**作用**の大きさは，〈動かされる物体の物質量〉に比例する。
慣性(*Inertia*) は物体の物質量であり，このように一定の時間にある速度を生じさせるのに必要な静力で測定される。
14. 物体の**運動量**(*Momentum*) とは，〈物質量を表す数〉と速度との積である。
観察に基づいた明らかな事実によれば，物体の直接的な相互作用では，作用されることによって物体が得る運動量と，**同じ時間に**作用することによって物体が失う運動量とは等しい。
たとえば，もし A が B に直接衝突するとき，あるいは A がその重さの連続的な作用によって B に運動を伝えるとき，B の運動量は〈同じ時間に持っていたであろう運動量〉より大きくなり，B が A と結合していなければ，A の運動量は全く同じ量だけ減少するだろう。
したがって第 3 の 一般原理 によって，**単位時間に得られた，あるいは失った運動量**を，**作用**と**反作用**の測定値とする。
物体のあいだにたがいに生じる力の**動力量**(*motive quantity*) は，一定の時間に生み出された運動量 (momentum) で測定され，これを**動力**(*Moving Force*) と呼ぶ。そして今まで述べたことによれば，この動力は〈静力とまったく同一である作用〉の測定ともなることは明らかである。

65) [Whewell 1834a], xv.

原文：
15. *Case* 2. When force acts upon a system by means of any mechanical connexion whatever.
In a system which is in motion, the moving forces, as inferred from the momenta gained and lost by each part of the system, are called the *effective moving forces,* and the pressures which produce motion are called the *impressed forces.*
In this *case,* The effective forces are equivalent to the impressed forces, according to the statical properties of the system.
This is proved by reasoning similar to that employed in Case 1.

66) [Whewell 1834a], p.42.

原文：

Equality of Impressed and Effective Forces.

154. The forces which really act upon a system, are called the *impressed forces* : the forces which must act upon each of the points of the system, supposing them unconstrained, in order to produce the motions of those points which really take place, are called *the effective forces.*

PROP. *In all cases of the motion of points, connected so that the mutual action of any two is in the straight line which joins them, the impressed and the effective forces are statically equivalent to each other.*

67) この伝えられた力，事実上の力という概念の下に，ヒューウェルは以下の命題を導いている([Whewell 1834a], p.44.)。

原文：

156. PROP. *The sum of the vis viva of each of the points of a system which has been acted upon by any forces, under the same condition as in* Art. 154., *is the same as if the points, being separate, had been acted upon by the same forces, through the same spaces.*

Let P be the impressed force which acts on the particle m, p the distance of m from a fixed point in the direction of this force; therefore $\dfrac{dp}{dt}$ is m's velocity in the direction of the force. Also, if q be the distance of m from a fixed point in the direction or its motion, $\frac{dq}{dt}$ is its velocity, $\dfrac{d^2q}{dt^2}$ the effective accelerating force, and $m\dfrac{d^2q}{dt^2}$ the effective moving force, by the principles of mechanics.

訳：

156.命題〈なんらかの力が作用する，系のそれぞれの点における活力 (vis viva)〉の合計は，154 項と同じ条件の下に，あたかもそれぞれの点が分離しており，同じ力が同じ距離だけ働いたのと同様である。P を質点 m にはたらく印加力，p を固定点から m までの力の方向への距離とすると，$\dfrac{dp}{dt}$ が力の方向への m の速度となる。同様に，q を固定点から m までの運動方向への距離とすると，$\dfrac{dq}{dt}$ がその m の速度となり，力学の原理より $\dfrac{d^2q}{dt^2}$ が有効加速力 (the effective accelerating force)，$m\dfrac{d^2q}{dt^2}$ が有効起動力 (the effective moving force) となる。そしてもし m', m'', その他について同様の方程式をたてるとすれば，我々は m, m', m'' その他の速度を仮想速度として考えるだろう。というのは，それらは系に連結されているからである。そこで，我々は次式を得る。

$$\text{印加力}, Pm, P'm', P''m'', \&c.$$
$$\text{印加力の仮想速度}\frac{dp}{dt}, \frac{dp'}{dt}, \frac{dp''}{dt}, \&c.$$
$$\text{有効力}\ m\frac{d^2q}{dt^2}, \frac{d^2q'}{dt^2}, \frac{d^2q''}{dt^2}, \&c.$$
$$\text{有効力の仮想速度}\frac{dq}{dt}, \frac{dq'}{dt}, \frac{dq''}{dt}, \&c.$$

したがって，これらの力は前節により静力学的に釣り合う。そこで我々は仮想速度の原理より，

$$mP\frac{dp}{dt} + m'P'\frac{dp'}{dt} + \&c. = m\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt\ 2} + m\frac{dq'}{dt}\frac{d^2q'}{dt\ 2} + \&c.$$

仮想速度とは，今日では仮想仕事とされる概念である（仮想速度，およびダランベールの原理の歴史的な議論は，[山本 1997], pp.295-301., pp.308-312. にくわしい）。この記述は，剛体力学の教科書で，拘束された質点に対してダランベールの原理を仮想仕事の原理に適用し，ラグランジュ方程式を導く過程で登場する部分に対応する（たとえば，[ゴールドスタイン 1983], pp.21-27.）。

68) [Whewell 1836], pp.1-2.

The third Law of Motion gives us the connexion between e statical force requisite to produce

equilibrium in a point, and the dynamical force by which its motion is affected.
When several points are connected, so that they must move or rest simultaneously, and one of them is acted on by any pressure ; this total pressure is to be resolved, on statical principles, into various partial pressures, acting on the several points ; and these partial pressures must be so proportioned and adjusted that the points shall move in a manner consistently with their connexion. This rule, applied to determine the change of motion of a system, is an extension of the third law of motion to the case where the force is transferred from one part of the system to another by the connexion of the parts of the system. It is generally introduced into calculations by means of *D'Alembert's Principie.*

69) [Whewell 1832b].

70) [Whewell 1823].

71) 該当部分を引用しておく。

まず，冒頭でこの本の目的について以下のように述べている ([Whewell 1836], iii.)。

原文：
A leading object in compiling a Treatise on Dynamics for the use of this University must of course be to conduct the Student through most of the reasonings, formulae and propositions which are requisite as a preparation for the higher investigations connected with physical science, and especially with the most profound and perfect of mathematical sciences, Physical Astronomy.

訳：
『動力学論』をこの大学で使用するために編集した主要な目的は，当然ながら，〈自然科学，特に数学的科学の深遠さと完全さである物理学的天文学 (Physical Astronomy) に接続したより高度な研究〉のために必要となる推論，定式化，命題を通じて，学生を導くことでなければならない。

そして，もう一つの目的として述べている部分が以下である ([Whewell 1836], vi.) 。

原文：
Another main object of the present edition appeared to me equally necessary with reference to the course of mathematical reading commonly pursued in this place, and more difficult to accomplish : I mean the assigning to the Principia of Newton its proper place among our Dynamical studies.
On this subject there has existed, and probably still exists, a good deal of difference of opinion in the University. Some strenuous analysts have loved to maintain that the study of Newton's works in their original form, or in a form somewhat like it, has long been a millstone about the neck of our system of mathematical education ; that it wastes the time and ruins the taste of our Students, destroys the unity of our calculus, and limits the range of our generalisations. Others again have held that, from us, countrymen and disciples of Newton, his works have a paramount claim to attention ; and they have asserted moreover that the geometrical and synthetical methods which he pursues offer to us examples of solid and instructive reasoning, while analysis too often merely gives us results which exercise no intellectual faculty, nor convey any satisfactory knowledge.
I shall not attempt to decide between these rival opinions. I will observe however that if we should resolve to preserve a part of the Principia in our examinations only as a matter of mathematical history, and as a token of our veneration for Newton, a very few propositions might answer the purpose, and spare valuable time; and that if much of the work is to be retained, this ought to be done on the ground of its being a useful portion of dynamical science. I conceive moreover that a considerable number of the propositions of the Principia, including most of those which usually appear in our examination papers, have this substantial claim to our notice. I refer especially to the propositions in the Third Book, and to those in the First Book on which these mainly depend. There are very considerable advantages to

the Student in Newton's mode of investigating the motions of the heavenly bodies. Nothing could be more unwise than to deny the vast superiority which the analytical methods possess in the treatment of all complex and general problems.

訳：
この版のもう一つの主要な目的は，この分野で一般に行われている数学的な解釈の課程において，同じくらい必要なことであり，そして成し遂げるのはより困難だと私には思える。それはニュートンの『プリンキピア』を動力学の学習において適切な位置に割り当てることである。
この問題については，大学の中には非常に多くの様々な意見がこれまであったし，おそらく現在もある。ある精力的な解析学者が好んで主張してきたことによれば，〈ニュートンの業績をその原型のまま，あるいはある程度同じ形式で学ぶこと〉は，我々の数学教育における重荷となってきた。それは時間の無駄であり，我々の学生の洗練を阻害し，計算法の統一をだいなしにし，普遍化の範囲を制限するというのである。それに対して，われわれ同国人やニュートンの信奉者からは，〈彼の業績は注目すべき最高の主張である〉との反論がなされてきた。そして彼らがさらに主張していることによれば，ニュートンが追求した幾何学的および総合的 (synthetical) 方法は，堅実で教育的な推論の実例を提供する一方，解析学は単に結果を与えるのみで，知的な機能を少しも果たさないばかりか，なんら十分な知識をもたらさないというのである。
私は，この対立するどちらの意見にも与しようとはしない。しかしながら，もし我々がプリンキピアの一部を，ニュートンに対する敬意の証として，数学の歴史の問題としてのみ保存しようとするならば，きわめて少数の命題で事足りて，貴重な時間を節約するだろう。そしてもし，多くの命題が保持されるなら，それが動力学という科学で有益な一部をなしているという根拠に基づいて行われねばならない。私はそのうえ，我々の試験によく見られるプリンキピアの命題のかなりの数が，我々の注目を引く価値のある主張を持っていると考えている。私は特に，第 3 部および第 1 部の命題を，この点で主に依拠し，参照している。ニュートンの天体の運動を研究するやり方は学生たちに少なからぬ利益をもたらす。すべての複雑で一般的な問題の取り扱いにおいて，解析的な方法がもつ大きな優越を否定することほどおろかなことはない。

72) [Whewell 1836], p.1.

原文：
1. THE object of the science of Dynamics is to determine, for any body or system of bodies, the motion which corresponds to any forces; and conversely, to determine the forces which correspond to any motion : that is, we have to investigate the relation of the time, space, velocity, and force, when bodies are in motion under given circumstances. In the "Introduction to Dynamics," we have proved that if s be the space, described in the time t, in the direction of the motion, v the velocity at the end of that time, f the accelerating force in the direction of the motion, we have the equations $v = \dfrac{ds}{dt}, f = \dfrac{dv}{dt}$. These equations may be considered as the mathematical *definitions* of velocity and force.

訳：
1. 動力学という科学 (science of Dynamics) の目的は，力によって，物体あるいは物体の系の運動を決定することである。逆に言えば，運動から力を決定することでもある。すなわち，ある状況で運動している物体の，時間，距離，速度そして力の関係を我々は研究しなければならない。『動力学入門』で我々は，s を時間 t で描かれる運動方向への距離とし，v をその時間経過した後の速度，f を運動方向の加速力としたときの式 $v = \dfrac{ds}{dt}, f = \dfrac{dv}{dt}$ を得た。これらの式は速度と力の数学的な**定義**であると考えられる。

73) [Whewell 1836], p.1.

前記引用文にすぐ続いて以下のように記述されている。

原文：
Force, according to the common acceptation of the word, signifies the quality by which external causes produce an effect upon the motion of a body. We cannot conceive cause and effect without supposing certain principles which result from this relation ; and by considering

the manner in which these principles are exemplified in the phenomena of motion, we obtain Laws of Motion, (Introd. to Dynamics, p. 20.) by means which Dynamical Problems may be reduced to equations.

世間に認知されているところによれば，力とは，物体の運動に結果をもたらす外的原因の量を意味する。我々はこの関係から得られるある原理を想定すること無しに原因と結果を考えることはできない。そしてこれらの原理が運動現象で例証される方法を考えることによって，我々は運動の法則を得て（『動力学入門』p.20），それによって動力学の問題が式にまとめられる。

74) [Whewell 1836], p.1.

原文：
The first Law of Motion is implied in the above-mentioned definition of force.

75) [Whewell 1836], p.1.

原文：
The second Law of Motion is translated into analytical language in obtaining the equations of the curvilinear motion of a point. (Art. 19.)

76) [Whewell 1836], p.20.

原文：
PROP. *To find the equations of motion of a body, moving in a plane and acted upon by any forces in that plane.*

77) [Whewell 1836], p.22.

原文：
These equations enable us to solve various problems respecting the motions of bodies acted on by any forces.

78) その 18 項および 19 項を以下に引用しておく。

[Whewell 1836], pp.20-22.

原文：
18. WHEN a point in motion is acted on by a force which is not in the direction of its motion, it will be perpetually deflected from its path, so as to describe a curve line. The quantity of this deflection will be regulated by the second law of motion, as explained in the Introduction, p. 23. By that law it is asserted, that if a point at P be moving with a velocity which would in a given time carry it through the space PR, *fig.7*; and if, during its motion it be acted on by a constant force always parallel to itself, which would in the same time make it move through a space Pp from rest, it will be found, at the end of that time, in a point r, determined by completing the parallelogram Rp.
If the force which acts upon the body, be variable in magnitude, or direction, or both, we can no longer in the same manner find the place of the body at the end of a *finite* time from P. The second law of motion is then applicable *ultimately* only ; that is, to the motion of the body during an indefinitely small time ; as explained in the Introduction, Cor. 1, to Law II.

18. 運動している点がその運動方向とは異なる方向の力を受けるとき，その運動は軌道から絶え間なく偏向していく。この偏向の大きさが第 2 法則から規定されることは，『動力学入門』p.23 で説明したとおりである。その法則によれば，第 7 図のように，〈P 点からある時間で PR の距離を進む速度で運動している点〉に，その運動の間，一定で常に平行な向きに，〈その力が静止状態に作用したときは Pp の距離の運動を生じるような力〉がはたらくとき，同じ時間経過したときには，平行四辺形 Rp を形作る r にその点が到達することがわかる。
〈その大きさか向きのどちらか，あるいは両者が変動するような力〉が物体に作用するなら，我々はあ

る**決められた**(*finite*) 時間での物体の位置を同様な方法で知ることは，もはやできなくなる。そこで，運動の第 2 法則は，『動力学入門』の第 2 法則の系 2 で説明されているように，**極限の**(*ultimately*)，すなわち，無限小時間の物体の運動でのみ，適用可能になる。

19. Prop. *To find the equations of motion of a body, moving in a plane and acted upon by any forces in that plane.*

Fig. 7. Let t be the time from a given epoch, till the body arrives at P, and $t+h$ till it arrives at Q, so that h is the time of motion in PQ. Also let AM, MP be rectangular co-ordinates to the point P, and be called x and y : similarly, let AN, NQ, and AO, OR, be co-ordinates parallel to these; PI and RK parallel to AN. Let the force at P be called P, and let the angle which it makes with x, be called α. Also let the velocity at P be called V, and let the angle which it makes with x be called θ.

Let PR be described in the time h, with the velocity at P, and let Rr be the space through which a point would in the same time be described by the force at P. We shall then have

$$PR = Vh: \text{ and} Rr = \frac{1}{2}Ph^2;$$

because Rr is described by a constant force. (Ch. I. Ex. 2.) Hence, $PH = Vh\cos.\theta; RH = Vh\sin.\theta$.

Also if Rs, sr be parallel to AM, MP,

$$Rs = \frac{1}{2}Ph^2\cos.\alpha; \quad sr = \frac{1}{2}Ph^2\sin.\alpha.$$

But by Taylor's Theorem, considering x and y as functions of t, and t as the independent variable,

$$AN = x + \frac{dx}{dt}.h + \frac{d^2x}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} + \&\text{c.}$$
$$NQ = y + \frac{dy}{dt}.h + \frac{d^2y}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} + \&\text{c.}$$

Hence,

$$RK = MN - PH = \frac{dx}{dt}.h + \frac{d^2x}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} + \&\text{c.} - Vh\cos.\theta.$$
$$KQ = IQ - RH = \frac{dy}{dt}.h + \frac{d^2y}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} + \&\text{c.} - Vh\sin.\theta.$$

Now, by last article since Rr ultimately coincides with RQ, we have ultimately Rs, RK equal, and also sr, KQ. Hence, ultimately

$$\left(\frac{dx}{dt} - V\cos\theta\right)h + \frac{d^2x}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} + \&\text{c.} = \frac{1}{2}Ph^2.\cos\alpha.$$
$$\left(\frac{dy}{dt} - V\cos\theta\right)h + \frac{d^2y}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} + \&\text{c.} = \frac{1}{2}Ph^2.\sin\alpha.$$

Whence we must necessarily have, equating coefficients of h,

$$\frac{dx}{dt} - V\cos.\theta = 0, \qquad \frac{dy}{dt} - V\sin.\theta = 0,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos.\alpha, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = P\sin.\alpha.$$

Hence,

$$\frac{dx}{dt} = \text{velocity in } x, \qquad \frac{dy}{dt} = \text{velocity in } y,$$
$$\frac{d^2x}{dt} = \text{force in } x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \text{force in } y,$$

If we represent by X and Y, the whole forces which act on the point in the direction of x and of y, we have

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\text{and}\frac{d^2y}{dt^2}=Y;\text{...........(a)}$$

where t is the independent variable ; and X and Y are positive, when they tend to increase x and y.

訳:
19. 命題 **平面上を運動してなんらかの力の作用を受けている物体の運動方程式の導出**
第 7 図において，t をある時から物体が点 P に着くまでの時間，$t+h$ を Q につくまでの時間とすると，h は PQ を運動する時間となる。AM, MP を点 P の座標とし，x, y と呼ぶ。同様に AN, NQ と AO, OR をこれらと平行な座標，PI と RK を AN と平行な座標とする。P 点における力を P とし，それと x がなす角を α とする。そして，P における速度を V,x となす角を θ とする。
PR を P 点における速度が時間 h で描く距離とし，Rr をその点で力 P によって描かれる距離とする。すると，Rr は一定の力によって描かれる距離なので，次式のようにあらわされる（第 I 章例 2)。

$$PR=Vh:\text{および}\quad Rr=\frac{1}{2}Ph^2;$$

$$\text{したがって},PH=Vh\cos\theta;\quad RH=Vh\sin\theta$$

$$\text{そしてもし},Rs,sr\text{ が }AM,MP\text{ に平行なら，次式が成り立つ。}$$

$$Rs=\frac{1}{2}Ph^2\cos\alpha;\quad sr=\frac{1}{2}Ph^2\sin\alpha$$

しかし，テイラーの定理により，x と y を t の関数とし，t を独立変数と見なすと，

$$AN=x+\frac{dx}{dt}.h+\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2}+\&c.$$

$$NQ=y+\frac{dy}{dt}.h+\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2}+\&c.$$

ゆえに，

$$RK=MN-PH=\frac{dx}{dt}.h+\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2}+\&c.-Vh\cos.\theta.$$

$$KQ=IQ-RH=\frac{dy}{dt}.h+\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2}+\&c.-Vh\sin.\theta.$$

今，前項より，Rr は極限で RQ に一致するので，極限では，Rs と RK は等しく，また sr と KQ も等しい。そこで，極限では，

$$\left(\frac{dx}{dt}-V\cos\theta\right)h+\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2}+\&c.=\frac{1}{2}Ph^2.\cos\alpha.$$

$$\left(\frac{dy}{dt}-V\cos\theta\right)h+\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2}+\&c.=\frac{1}{2}Ph^2.\sin\alpha.$$

そこで，必然的に係数 h は等しくなるので，

$$\frac{dx}{dt}-V\cos.\theta=0,\qquad\frac{dy}{dt}-V\sin.\theta=0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=P\cos.\alpha,\qquad\frac{d^2y}{dt^2}=P\sin.\alpha.$$

となる。
したがって，

$$\frac{dx}{dt}=x\text{ 方向の速度},\qquad\frac{dy}{dt}=y\text{ 方向の速度},$$

$$\frac{d^2x}{dt}=x\text{ 方向の力},\qquad\frac{d^2y}{dt^2}=y\text{ 方向の力},$$

となる。
もし X および Y で，〈ある点に作用する x 方向および y 方向の力〉をあらわすとすれば，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, および \frac{d^2y}{dt^2}=Y; ....(a)$$

を得る。ただし，t は独立変数であり，X および Y は x と y が増加するとき正である。

79) [Whewell 1834a].

80) たとえば，第 II 書「抵抗を受けた物体の運動」(The Motion of Points in a Resisting Medium) 第 I 章「直線運動」では第 7,8 項の $\frac{ds}{dt}=v, \frac{dv}{dt}=f, v\frac{dv}{ds}=f$ から展開しているが，次の第 II 章「曲線運動」になると，やはり第 19 項の式をもとに論を展開している。

81) [Whewell 1834a], p.4.

原文：

Sect. I. THE MOTION OF A POINT ON A PLANE CURVE.

143. PROP. *When a body moves on a curve, acted on by given forces, to determine its velocity.*

Let a body P move on the curve PA, fig. 1, the curve being referred to the co-ordinates AM, MP, which are represented by x, y : and let the forces which act upon the body be resolved into X, Y, parallel, respectively, to these co-ordinates and tending to increase them. Besides these forces, we have to consider the reaction of the curve, which is in the direction PK, perpendicular to the curve, and which we may represent by PK, and may resolve into PL, PH. If we call the reaction R, we shall have, for the resolved parts in PL, and in PH. parallel to AM,

$$R.\frac{PL}{PK} \text{ and } R.\frac{PH}{PK}, \text{ respectively;}$$

or, (since the triangles PLK and TMP are manifestly similar, PT being a tangent),

$$R.\frac{MT}{PT}, \text{ and } R.\frac{MP}{PT}, \text{ that is, } R\frac{dx}{ds}, \text{ and } R\frac{dy}{ds} :$$

supposing $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, and s being therefore the curve AP.

Hence, collecting the whole forces in the directions PH and MP, we have, by equations (a) of Article 19,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X+R\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Y-R\frac{dx}{ds}.$$

Now, to eliminate R, multiply by $2\frac{dx}{dt}$ and $2\frac{dy}{dt}$, respectively, and and we have

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=2X\frac{dx}{dt}+2Y\frac{dy}{dt};$$

itegrating with respect to t

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}=2\int_t\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}\right)=2(\textstyle\int_x X+\int_y Y).$$

This expression is the same as it would be if the body moved freely. Hence, it appears that when a body, acted on by given forces, moves from one given point to another, as from B to P, the velocity is the same, whatever be the path it takes, and whether it moves freely or be constrained to move along a given curve.

If we suppose the body to be acted on by a force in parallel lines, we may suppose the axis of x to be parallel to these lines ; and we have then $Y=0$.

If the force be also supposed to be constant, as for instance, gravity, and x to be measured upwards, we have $X=-g$; and $2\int_x X=C-2gx$. Or, if we put $C=2gh$, h being a quantity depending on circumstances, we have

$$(\text{velocity})^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2g(h-x).$$

Here, when $x = h$, the velocity is $= 0$; therefore h is the height from which the body begins to fall. Also since the velocity depends on x alone, it appears that it is the same, whether the body fall down the perpendicular DM, or down any curve BP of the same vertical height.

訳：

第 I 節平坦な曲線上にある点の運動

143. 命題 **曲線上の物体にある力が作用しているときの速度の決定**

物体 P が第 1 図のように曲線上 PA にある。この曲線は x, y 方向の座標であらわすと，AM と MP の間にある曲線である。この物体に作用する力を，座標と平行でそれが作用する方向を正として分解したものをそれぞれ X, Y とする。これらの力の他に，斜面からの反作用を考える。この力は斜面に垂直な方向 PK にはたらいていて，PL, PH に分解できる。この反作用を R とすれば，PL および，AM に平行な方向に分解した PH はそれぞれ

$$R.\frac{PL}{PK} \text{ および } R.\frac{PH}{PK}$$

と書ける。すなわち，(三角形 PLK と，PT を斜面の接線としてできる三角形 TMP が相似であることは自明なので，)

$$R.\frac{MT}{PT}, \text{ および } R.\frac{MP}{PT}, \text{ つまり, } R\frac{dx}{ds}, \text{ および } R\frac{dy}{ds}$$

となる。上記で $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)}$ であり，したがって s は曲線 AP である。

したがって，PH および MP 方向のすべての力を第 19 項の式 (a) に集約すると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + R\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - R\frac{dx}{ds}$$

となる。

今，R を消去するために $2\dfrac{dx}{dt}$ と $2\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれにかけて加えると，

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 2X\frac{dx}{dt} + 2Y\frac{dy}{dt};$$

を得る。これを t について積分すると，

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2\int_t \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt}\right) = 2(\textstyle\int_x X + \int_y Y)$$

となる。

この式は，物体が自由に運動するときと同じである。したがって，物体がある力の下に，B から P のようにある点からある点に運動するとき，どんな軌跡をとろうとも，また与えられた曲線に束縛されようがされまいが，その速度は等しい。

もし，物体が，平行な力の作用を受けると考えるとき，x 軸を力に平行な向きにとれば，$Y = 0$ となる。そしてまた，力がたとえば重力のように一定であるとき，x を上方に向かってはかるものとすれば，$X = -g$ および $2\int_x X = C - 2gx$ となる。つまり，もし $C = 2gh$ とおけば，h はそのときどきに依存する量となり，

$$(\text{速度})^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2g(h-x)$$

となる。

ここで $x = h$ のとき，速度 $= 0$ となる。したがって，h は物体が落ち始める高さである。そしてまた，速度は x のみに依存するので，物体が垂直線 DM にそって落下しようが，曲線 BP にそって同じ高さに降下しようが，速度は等しい。

82) [Gregory 1815], p.223.

83) [Todhunter 1874].，この本は，十六折り本と小さな判型であるが，前書きには，

例題は，オリジナルのものもあるし，College および University の練習問題から選択したものもある。

との文章があるので，大学の入門教科書として使用されたと考えられる。

[84] [Todhunter 1874], p.212, p. 214, p.266.

原文：
First Law of Motion. Every body continues in a state of rest or of uniform motion in a straight line, exept in so far as it may be compelled to change that state by force acting on it.
Second Law of Motion. Change of Motion is proportional to the acting force, and takes place in the direction of the straight line in which the force acts.
Third Law of Motion.
To every action there is always an equal and contrary reaction: or the mutual actions of any two bodies are always equal and oppositely directed in the same straight line.

訳：
第 1 法則すべての物体はそれに力が作用してその状態を変えない限り，静止あるいは一直線上の等速運動の状態を続ける。
第 2 法則運動の変化は作用する力に比例し，変化の方向は力が作用する直線方向である。
第 3 法則すべての作用には，大きさが等しく反対方向の反作用がある。：任意の 2 物体の相互作用は常に等しく同一直線上の反対方向である。

[85] [Todhunter 1874], p.299.

原文：
137. We have followed Newton in our enunciation of the Laws of Motion ; but it is necessary to observe that this course is not universally adopted. Many writers in effect divide Newton's Second Law into two, which they term the Second and Third Laws, presenting them thus :

訳：
137. 我々は運動の法則の表現をニュートンのものによった。しかし，このやり方は一般的に採用されているわけではない。多くの著者たちがニュートンの第 2 法則を実際のところ以下の二つに分割し，第 2，第 3 法則と称している。

[86] [Todhunter 1874], p.299.

原文：
Second Law. When forces act on a body in motion each force communicates the same velocity to the body as if it acted singly on the body at rest.
Third Law. When force acts on a body the momentum generated in a unit of time is proportinal to the force.

[87] さらにトドハンターは，本来のニュートンによる第 3 法則について，

ニュートンの第 3 法則は正しいと認められるべきものとして，他の原理として提出される。いずれにしても，それはあきらかに正式に運動の法則として位置づけられるほど難解でもないし重要でもない。

と述べている。[Todhunter 1874], p.299.

原文：
Then Newton's Third Law is presented as another principle which must be admitted to be true, although apparently not difficult enough or not important enough to be ranked formally with the Laws of Motion.

[88] [Parkinson 1874], p.184.

原文：

48. α Much difference of opinion has prevailed at different times as to the proper mode of stating the principles derived from experience and observation which are commonly spoken of as *Laws of Motion*. These principles were the subject of much discussion among mathematicians at the close of the 16th and the beginning of the 17th centuries, and it would appear that to Galileo is due the credit of first and second laws. Newton's *Principia* was published A.D. 1687, and the celebrated *Axioms* or *Laws of Motion* which stand at the beginning of the book are a much clearer and more general statement of the grounds of Mechanics tahn had yet appeared, —though they do not involve any doctrines which had not been previously stated or taken for granted by other mathematicians.
The distinction between Statics and Dynamics now accepted is of recent date, and was not made till the beginning of the present century: —and the statement of the several Laws of Motion given in this chapter is substantially that adopted by Dr Whewell and the principal English writers on Elementary Mechanics of late years.

訳：
48. α 一般に**運動の法則**といわれる原理は，その時代時代で多くのことなった見解が，実験・観察から導き出され，それぞれのやりかたで表現され，普及してきた。これらの原理は 16 世紀終わりから 17 世紀初めにおける数学者の多くの議論の主題であった。そして，第 1 および第 2 法則を含む原理を最初に解明した名誉がガリレオに与えられることは明らかである。ニュートンの『プリンキピア』は 1687 年に出版され，その最初に位置した名高い**公理**すなわち**運動の法則**(*Axioms* or *Laws of Motion*) は，それまでよりもより明確により一般的に力学の基礎を表現した。もっとも，それはそれ以前に他の数学者たちによってすでに発見されたり知られていたこと以外のことは何も含んではいなかった。
現在受け入れられている静力学と動力学との区別は，近年のものであり，今世紀初めにはまだなかった。この章で与えた各々の〈運動の法則〉は，本質的には〈ヒューウェル博士が採用し，そののちに英国の著者たちが初等力学に関する書籍に採用したもの〉である。

89) [Parkinson 1863].

90) このほか，米国で出版されたレンウィック (1832)[Renwick 1832].，ヤング (1834)[Young 1834].，フランス語からの翻訳であるブシャルラ (1836)[Boucharlat 1836].，ポアッソン (1842)[Poisson 1842]. などを見ることが出来たが，これらは，翻訳本であったり，英国の出版物ではなかったりするので除外した。これらの本には「運動の 3 法則」という表現は見られない。

91) [Denison 1841].

92) [Pratt 1842].

93) [Walton 1842].

94) [Earnshaw 1844].

95) [Potter 1846].

96) [Hart 1847].

97) [Newth 1850].

98) [Phear 1850].

99) [Wilson 1850].

100) [Warr 1851].

101) [Baker 1851].

102) [Jackson 1852].

[103] [anonymous 1853].

[104] [Tate 1853].

[105] [Galbraith 1854].

[106] [Smith 1855].

[107] [Cherriman 1858].

[108] [Twisden 1860].

[109] [Earnshaw 1832].

[110] [Earnshaw 1844].

第 3 章

サンデマンとランによるニュートンの 3 法則への回帰

3.1　はじめに

英国では 1830 年ころから 1860 年ころにかけて，ヒューウェルが書き換えた 3 法則の形式が広く普及した。このヒューウェル流の 3 法則が全盛であった 1850 年代に，運動の法則をプリンキピア流に回帰させ，加速力と起動力の混乱を整理して加速度概念を導入し，しかも力学から運動学 (Kinematics) を独立させるなど，今日の力学教科書に近い特徴を備えた画期的な教科書が出版された。

1859 年に出版されたラン『運動論』[1)]は，ニュートン以降，ウッドやグレゴリー，ヒューウェルらが “加速力”(accelerating force) と呼んでいた量を加速度 (acceleration) と書き改め，それを表す記号もこれまでの f から α へと変更した上で，運動方程式 $F = M\alpha$ を第 2 法則の解説で導いていた。

それだけでなく，全体的な構成でも，力と運動に関する法則を学ぶ前に，まず前半部で〈位置，速度，加速度の数式的表現〉，つまり運動学 (Kinematics) を展開するという，現代の力学教科書に採用されている形式をとっていた。

このランに先行して Kinematics を動力学から独立させ，ランに大きな影響を与えたのが，サンデマン『質点の運動論』(1850)[2)]である。

この 2 冊は，現代の力学教科書に通じる，この時代としては先進的と思える内容・構成をもっていたが，これまで歴史的に言及されたことは筆者の知る限りない。この章では，このサンデマン，ランの力学書の内容について論じる。

3.2 節はサンデマン『質点の運動論』について扱う。この教科書の構成は，それ以前の教科書と異なり，運動学が独立されており（3.2.1 節），序文では “加速力” 概念を排除し，加速度概念を採用することが宣言されている。このことが，運動学独立の根拠の 1 つであった（3.2.2 節）。3.2.3 節では，サンデマンがヒューウェル流の 3 法則からニュートン『プリンキピア』流の 3 法則に回帰していた事実について，その記述及び，第 2 法則の導出過程をくわしく検討することによって，彼がなぜそのような 3 法則としたのかを論じ

る。その上で 3.2.4 節で，サンデマンが基本方程式をどのように表記し，それと運動法則がどのように結びつけられていたかを論じる。

3.3 節はラン『運動論』について扱う。ランは序文でサンデマンからの影響を包み隠さず述べている。特に，運動学を独立させる構成や，加速力概念の排除は，サンデマンからの影響が色濃い（3.3.1 節）。それだけでなく，第 2 法則の導出過程では，ランがサンデマンから受け継ぎ，それを入門者向けに改良した後が見られる（3.3.2 節）。この第 2 法則と運動方程式の関係について 3.3.3 節で論じ，3.3.4 節ではサンデマン，ランの第 3 法則の記述について論じる。

最後の 3.4 節では，ヒューウェル，サンデマン，ランおよびこの後に論じる力学書の執筆者トムソン，テイト，マクスウェルの経歴について述べ，彼らに何らかの交流があった可能性について論じる。

3.2 サンデマン『質点の運動論』(1850)

3.2.1 運動学の独立

1850 年に出版されたサンデマン『質点の運動論』(1850)[3] は，それまでの力学教科書とは違った構成をとっていた[4]。そのことは序文に以下のように述べられている[5]。

> 私は運動の特質を，幾何学的な (geometrical) ものと，力学的な (mechanical) ものに徹頭徹尾分別することに努めた。これらは時には**運動学的**(*kinematical*) 特質および**動力学的**(*dynamical*) 特質とも呼ばれる。 前者は，物理的原因によらず人の理性のみによって，必然的に距離と時間の関係を理解する手法から生じる特質である。そして，他の全ての幾何学的真理と同様，概念の拡張および伸展のために必要な知識を越えた外界の知識は何ら必要としない。後者はそれに反して，物理世界の構成に全面的に依存しており，物体に実験を行うことによってのみ発見されうるものである。

ここでいう「幾何学的」とは，図形を対象とした論理体系としての幾何学そのものをさすのではなく，〈幾何学のような，理性のみによって構築された必然的な論理体系〉のことを示している。つまりサンデマンは，力学の分野を実験的な検証が必要な動力学的体系と，距離，速度，時間，加速度などを論じる論理のみによって構成される運動学的体系との分離をここで述べている。

実際，目次を見ると以下のような構成になっていて，第 I 章が，この運動学に割り当てられている[6]。

第 I 章 点の運動に関する幾何学
第 II 章 質点の運動の法則
第 III 章 質点の自由運動
第 IV 章 互いに作用する二質点の自由運動

第 V 章 質点の拘束運動
第 VI 章 抵抗のある場合の質点の運動
第 VII 章 妨害のある場合の質点の運動

上記サンデマンの序文で,「運動学的 (kinematical) 特質」とよばれているこの〈運動の数学的記述法に関する分野〉は,現代では運動学 (Kinematics) と呼ばれている。このような,〈動力学的法則を学ぶ前に,まず力の概念を除外した運動学を学ぶ〉という構成は,現代の物理教科書が普通にとっている構成である。しかし,これまで検討してきたウッド,グレゴリー,ヒューウェルらの力学教科書はどれも,速度,距離,時間に関する記述は,〈力と運動に関する記述〉と混在して分離してはいなかった。

この Kinematics という単語を *OED* でひくと,初出はヒューウェルの『帰納的諸科学の哲学』(1840) とされている。ヒューウェルの著書から該当部分を引用する[7)]。

> 実際,近年そのような(力学を数学的な部分と,力と運動の関係性を論ずる部分との)分離の必要性は,科学の哲学的見解をとる立場の人たちに見られるようになってきた。そして,このような必要性はアンペールの『科学哲学小論』(1834) で力説された。
>
> (中略... アンペールからの引用)
>
> そして彼はこの科学を我々がやってきたこととほぼ同様の形で記述し,$\kappa\acute{\iota}\nu\eta\mu\alpha$,motion から,*Kinematics*(*Cinématique*) という用語を提案した。

ヒューウェル自身の力学教科書には,この Kinematics を独立させた教科書は見あたらないが[8)],まさにこのころ,運動学の独立が英国ではヒューウェルによって提唱されていたのである。

サンデマンの本でも,序文で運動学的 (kinematical) という単語が見られるだけで,本文にはどこにも運動学 (Kinematics) という用語は登場しない。サンデマンはこのころようやく英国でも使われ出した運動学という概念を先駆的に自らの教科書に採用したのである。

3.2.2 加速力概念の排除と加速度概念の採用

サンデマンは序文で上記引用に続けて,この運動学の力概念からの独立の理由を,加速力概念の排除という観点で述べている[9)]。

> 速度と加速度に関する命題を,力に関する命題と密接に関連させて(むしろその一部として)提示させるありふれた教程や,加速度を加速力と呼ぶほとんど一般的となっている実践では,確かに二つの種類の特質(訳注:静力学的 (kinematical) 特質と動力学的 (dynamical) 特質)を明確に分離していなかった。しかしながら,ここにあるなんらかの混乱が,運動の問題に関する関係についての概念を,不正確な概念に必然的に導いてしまうことになった。私は明快さのために,質点運動の力

学から幾何学を分離させることにした。**力**という用語は運動の変化の**原因**にのみ適用し，力のいくつかの効果は，静力学的，加速的，そして，運動的効果と呼ぶことにした。

つまりサンデマンが運動学を動力学から分離してまずは力を考慮に入れない運動の記述から出発したのも，加速度と加速力のような概念の混乱を避けたかったということが理由の 1 つとしてあったのである。

ニュートンが〈向心力の加速的量〉という概念を加速力として『プリンキピア』で導入して以来，これまで見てきたグレゴリー，ヒューウェルらは，加速度に相当する量に対して「加速力」の用語を当てていた。サンデマンはこの「加速力」という用語を排除し,「加速度」あるいは「力の加速的効果」という名称でこの量を呼ぶことにし，加速度と力の概念的混乱を解決しようとしたのであり，それが運動学を動力学から独立させた理由の 1 つだったのである。

3.2.3　サンデマンによる運動の法則の『プリンキピア』への回帰

運動の 3 法則の表現

第 II 章「質点の運動の基本法則」(The Fundamental Laws of Motion of Material Particles.) には運動の 3 法則がそれぞれ以下のように記述されている[10)]。

運動の第 1 法則 **質点に何の外力もはたらいていないとき，あるいは互いに釣り合っている外力がはたらいているとき，それは静止か，あるいは一直線上を一定の速度で運動する。**

運動の第 2 法則 **任意の質点に外力がはたらくとき，その力の動的効果は力の作用した方向におこり，その大きさは力の静力学的効果に比例する。**

運動の第 3 法則 **ある質点が他の質点に作用するとき，第 2 の質点から第 1 の質点に働く力は，第 1 から第 2 に働く力と同じ大きさで反対方向である。**

この第 2 法則で,「力の静力学的効果」とされているのは, ヒューウェルで静力 (pressure) とされていた概念である。実際，この第 2 法則の表現を見ると，力の方向とその効果の方向と同時に，力の動的効果と静力学的効果の比例が述べられている。つまり，ヒューウェルが〈第 2 法則としていた関係〉と〈第 3 法則としていた関係〉が統合されている。ニュートンは第 2 法則の表現に起動力を使用していたが，グレゴリー，ウッド，そしてヒューウェルらは第 2 法則から慣性質量の概念をはずしており，それが他の力学書に影響していた。それに対してこのサンデマンの運動法則では，慣性質量の概念が第 2 法則に回帰しているといえる。

なぜサンデマンはニュートン式の 3 法則に戻したのか

ヒューウェルは，運動の第 2 法則を「力と運動変化 (加速度)」の法則に限定し，〈対象の物体（質点）の違いに対応する比例定数の違い〉，すなわち慣性質量の概念に関しては第 3 法則で述べていた。それは，この法則の一方から他方を導くことはできず，互いに独立した法則だと考えたからであった（本論文 66 ページ)。

このヒューウェル流の 3 法則が 1800 年代中頃にかなり普及していたことは前章で見たとおりである。このことについて，サンデマンは序文で以下のように述べている[11)]。

> 私が述べた運動の 3 法則の形式はニュートンの『プリンキピア』の形式と実質上同じである。ニュートンの第 1 法則はあまねく支持されている。しかし，最近出版されたいくつかの本では，第 2 法則を 2 つに分割して，それぞれ，〈同一の質点 (same particle) に関する力の静力学的効果と加速的効果の比例関係〉と，〈いくつかの質点 (any particles) に関する力の静力学的効果と動的効果の比例関係〉に分けている。これらの本ではニュートンの第 3 法則，すなわち，作用と反作用の相等性は，実質のところ無視されている。

まさにヒューウェルの力学教科書か，あるいはそれに影響を受けた本のことを指している。これに対してサンデマンは次のように続けている[12)]。

> 今，〈ニュートンの第 2 法則を 2 つに分割すること〉に関して述べれば，もし〈ある質点 (a given particle) にはたらく力の加速的効果と静力学的効果の比例関係の法則〉が確立され，その比例定数を質点の質量と呼ぶなら〈いくつかの質点 (any particles) にはたらく力の動的効果と静力学的効果の比例関係の法則〉は，当然の帰結となってしまうだろう。
>
> そこでこれらの 2 つの法則は基本的に相違はなく，それぞれが相手を包含している。質量の定義はこの 2 つを同一化するのに必要な唯一のものである。そればかりか，もし一方から他方に移すためにある力学法則が必要だとしたら，それは，〈力の静力学的効果と加速的効果の比例定数〉は質点が異なれば必ずしも同一ではないという法則である。しかし，これはかなり一般的に認められている想定である。このようにニュートンの第 2 法則を 2 つの基本法則を含むものと見なすことに対する主な反論は，〈そのようにしてしまうと，法則とは独立に質量の概念を導出することが必要になってしまう〉ということであった。にもかかわらず，まさにこの法則こそが，全ての物理学の部門において質量，すなわち物質の量を導き出すことができる明確な概念を提供する根拠となりうるものなのである。

ヒューウェルは，第 2 法則で，ひとつの質点に関する力と加速度の比例関係のみを問題にし，比例定数は問題にしなかった。しかし，それを数値的関係に表せば，比例定数は必然的に現れてしまう。そこで，ヒューウェルが第 3 法則とした〈質点の違いとしての比例定数〉は，わざわざ別の法則として独立させる必要はない，というのがサンデマンの主張

である。

実際に，運動方程式は法則ではなく，力あるいは質量の定義式ではないかという議論があるが[13]，まさにサンデマンはそのことを指摘し，〈これは経験上認めるしかなく，結局法則の外からは導くことはできないので，力と加速度の法則と慣性質量の概念をひとつにまとめても問題ない〉と述べているのである。

第 2 法則の導出での場合分け

サンデマンは，力と運動について次のような 6 項目に場合分けし，それをまとめる形で第 2 法則を導いている [14]。

> (1) **力が，絶えず一定の強さで同じ方向に作用し続けるとき，その物体が静止していようが力の方向に運動していようが，物体に生じる運動は全面的にその力の方向であり，一様に加速される。**
>
> (2) **様々な一定の強さの力によって生じる運動の加速度は，それらが質点の運動方向に単独に作用するときは，それぞれの力の方向であり，それぞれの強さに比例する。**
>
> (3) **任意の力によって生じる運動の加速度は，それらが質点の運動方向に単独に作用するときは，それぞれの力の方向であり，それぞれの大きさに比例している。**
>
> (4) **いくつもの力によって生じる運動の加速度は，それらが質点の運動方向に同時に作用するときは，それぞれの力が独立に働いたときに生じる加速度の合計と等しい。**
>
> (5) **ある質点に任意の方向に作用する力によって生じる加速度は，その力の方向でその力の大きさに比例する。**
>
> (6) **任意の力が同時に質点に作用するとき，その質点が静止していようが運動していようが，それぞれの力はそれぞれの方向にそれぞれの力に比例した加速度を生じさせる。そして，その加速度はそれらの力が静止している質点に単独に作用するときと正確に等しい。**

(1) から (4) までは，〈力の作用する方向と物体の運動方向が一致する場合〉に関する規則であり，それらの規則を任意の方向へと拡張したのが，(5),(6) である。これはちょうど，ヒューウェルが，「力学の基礎原理」で運動の第 2 法則を導出する過程で，運動と力の合成を場合（ケース）1「〈物体が運動する方向〉に力が作用する場合」と，場合（ケース）2「力が物体の運動する方向に対して横向きあるいは斜めに働く場合」に場合分けして論じていたのに対応する。ヒューウェルはこのそれぞれの場合（ケース）に対して，力の大きさが一定の場合と，力の大きさが変動する場合にわけて論じていた（本論文 69 ページ）。

ヒューウェルの場合分けを図にまとめたものを再掲すると以下の通りである。

- 場合（ケース）1 運動方向の力
  - 一様な力の場合
  - 変動する力の場合
- 場合（ケース）2 横向きあるいは斜方向の力
  - 一様な力の場合
  - 変動する力の場合

下に行くほど，一般化の度合いが高くなっている。サンデマンの (1)〜(6) の規則をこれと同様の図に表すと次のように書ける。

- 運動方向の力
  - 大きさ一定の力
    - 静止でも運動していても同じ効果 (1)
    - 加速度と力の大きさの比例関係 (2)
  - 変動する力
    - 力が単独に作用（比例関係）(3)
    - 複数の力が同時に作用する場合は，その加速度の独立和 (4)
- 任意方向の力……変動する力
  - 力が単独に作用（比例関係）(5)
  - 複数の力が同時に作用（独立和）(6)

(1) で力の効果は相手の運動状態によらないことが述べられ，(2) でその力の効果（=生じる加速度）と力の大きさの比例関係が述べられている。ここでヒューウェルが第 3 法則としていた命題が第 2 法則にとりこまれているといえる。その上で，(3) 以降，それが変動する力，同時に複数の力が作用する場合，方向が任意の力へと拡張され，一般化の度合いが高められていく。

このように，サンデマンが第 2 法則を導出する際に用いていた 6 つの規則は，ヒューウェルが「力学の基礎原理」で用いていた場合分けと似た構造になっており，そこにヒューウェルが第 3 法則としていた命題を追加した構造になっていることがわかる。

3.2.4　サンデマンの基本方程式

慣性質量の定義と運動方程式

サンデマンは，規則 (4) を導くに当たって，同じ質点に作用する〈力の静力学的効果〉f, f', f'' ,⋯, と〈力の加速的効果〉a, a', a'',⋯, の間には, 規則 (3) より $\dfrac{f}{a} = \dfrac{f'}{a'} = \dfrac{f''}{a''} =\cdots$ が成り立ち，この比の値は数学的に $\dfrac{f + f' + f" + \cdots}{a + a' + a" + \cdots}$ とも一致することから，複数の力が同時に作用する場合に生じる加速度の規則を証明している[15]。

この質点に特有の比の値こそ，慣性質量の定義となる。サンデマンはここでは質量の定義を行っていないが，規則 (6) でこれらの関係の一般化を行った後に次のように記述している[16]。

> ここまでで，同一の質点に様々な力の作用について比較してきた。そして結論として，静力学的な力が p であるような力が，その力の方向に生じさせる加速度 a は， $p \propto a$ であらわせる。つまり，
>
> $$p = ma$$

がなりたち，m は，p と a から独立な値で，同一の質点では一定の値をとる。

そして，この m のことを，「質点特有の力学的定数」として，「**質量**($mass$)，すなわち**物質の量**($quantity\ of\ matter$)」を定義している[17)]。

ヒューウェルは第 3 法則で，〈静力学的な力と，それによる加速度を結びつける比例定数〉を慣性の量とし，〈物質の量をはかるもの〉として定義し，〈加速力と静力の関係式〉として，式 $F = \dfrac{P}{Q}$ を記述していた（本論文 63 ページ，F, P, Q はそれぞれ加速力，静力，物質量)。この式を変形すれば，$P = FQ$ となり，上記サンデマンの式と近い。ただ注目するべき点は，ヒューウェルは，加速度に相当する量を加速力という力の測定量の 1 つとして記号 F を使用していたのに対して，サンデマンはここで加速度という用語を使用し，記号 a を割り当てていたことである。

サンデマンが基本方程式としていたのは何か

サンデマンは上記で〈力の静力学的測定量〉という，現代では使われていない概念を使用し記号 p を使用していたものの，第 2 法則で運動方程式とほぼ同等な式を導いていた。ただしこの式を「すべての力学に適用する基本方程式」とみなしていたわけではない。というのは，実際にサンデマンが力学問題を解く際に使用していた式はこれではないからである。

サンデマンは，第 II 章「質点の運動の法則」の次の第 III 章「質点の自由運動」の最初で，x, y, z を質点の座標，X, Y, Z を質点に働く力による加速的効果とした上で，式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

を導き，「質点の自由運動の方程式であり，第 2 法則の解析的言語への翻訳と見なすことができる」としている[18)]。

サンデマンは X, Y, Z を「加速力」とは呼ばずに，「力の加速的効果」と呼んで力そのものとははっきりと区別をつけていたが，ヒューウェルと同様（73 ページ参照）に質量 m の項を欠いたこの式を「第 2 法則の解析的言語への翻訳」と呼び，「質点の自由運動の方程式」(the equations of the free motion of a particle) と呼んでいた。

実際，この章の中にある問題「24. 垂直に対して傾いた方向へ投射した重い質点の運動の決定：完全な真空中での実験と仮定する」[19)]で，投射体の運動を論じるに際して，「運動方程式」(The eqation of motion) と明記した上で，式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

を記述している[20)]。

しかし，すべてにおいて質量を除いた運動方程式をたてていたわけではなく，次の第 IV 章「2 つの質点が互いに作用する自由運動」[21)]や，その次の第 V 章「質点系の束縛運動」[22)]のような複数の質点あるいは質点系の問題を扱った章では，質量の因子が運動方程

式にあらわれている。たとえば，第 V 章の第 53 項「ある決まったなめらかな平面上を束縛され，ある力を平面からうけて運動する質点の運動の決定」[23] では，運動方程式が R を束縛力として[24]，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mX - R\frac{dy}{ds}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mY + R\frac{dx}{ds}$$

といった形でたてられている。

また逆に，その後の第 VI 章「抵抗のある作用の下での質点運動」[25] のような，1 つの質点 (a particle) に関する章ではたとえば，第 64 項「力が直線上に作用する質点の抵抗媒体中の運動の決定」[26] で，媒質から速度の 2 乗の抵抗をうける質点の運動方程式が，

$$\frac{d^2s}{dt^2} = S \mp k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

という形で今度は質量の因子なしでたてられている[27]。

このように，1 つの質点 (a particle) の力学の運動方程式では慣性質量の因子が登場せず，質点系 (particles) の力学の場合にだけ，質量の因子まで入れた運動方程式が出てくるのは，これまで見たグレゴリー『力学論』(1815) やヒューウェル『動力学論』(1832) などでも同様であった。この理由は，質点 (a paraticle)1 個の質量を 1 と考え，質量をこの質点の個数ではかっていたからだと考えられる。

ただし，サンデマンの場合は，運動方程式に質量 m の項を入れている場合は，R を束縛「力」としているし，質量 m がない後者のような場合は kv^2 を，媒質が運動に及ぼす抵抗の「加速的効果」とよび，厳密に力と加速的効果を区別していた。

今日では通常，力 F と質量 m，加速度 a の 3 者の関係を表記した式 $F = ma$ が「運動方程式」とよばれ，物体の位置を s としてこれを微分形式にすれば，$F = m\dfrac{d^2s}{dt^2}$ と表記され，さらにこれを $s(x, y, z), F(X, Y, Z)$ として成分分解して微分方程式にすれば，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

となる。

この場合重要なのは，力と質量と加速度の 3 者の関係であって，加速度の表記を a とするか，微分形の $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ とするか，あるいは x, y, z の 3 方向への成分表示するかは，数学的な書き換えに過ぎない。

しかし，上記からわかるように，ヒューウェル，サンデマンのいう運動方程式とは，「力の加速的効果を X,Y,Z の 3 方向に分解して，それを x,y,z の 2 階微分の方程式にたてたもの」が「運動方程式」と考えられていて，慣性質量は，2 個以上の質点を論じる場合は運動方程式に登場するものの，さほど重要とは考えられていないことがわかる。

このように考えると，サンデマンが第 2 法則で導出した式 $p = ma$ は，今日の “運動方程式” と同じ位置づけを与えられているとは言い難いことがわかる。

3.3　ラン『運動論』(1859)

3.3.1　序文に見るサンデマンからの継承

運動学 (Kinematics) の独立

1859 年に出版されたラン『運動論』は，本文 132 ページの八つ折り本で，著者の肩書きは，学芸修士 (M.A.) およびケンブリッジのセントジョンズカレッジのフェローおよびサドラー夫人講座講師とある。

ランはこの本の序文で，

> この書物で私が目的としたことは，運動の科学の諸原理を，正当な幾何学的形式として提出することであり，力を考察すること（その特質は静力学で十分検討されているとして）は，読者が念頭で幾何学的概念を力学的概念から分離できるようになるまで後回しにした。そもそもこれらの概念が分離されていないという事実こそが，〈実際の研究におけるあらゆる場合において学生の理解が明瞭になっていないこと〉の原因ではないかと私は懸念している。

と述べ[28)]，サンデマンと同じように動力学から運動学の独立を宣言している。

実際，序文には，

> 最初の 4 つの章について，私は運動の現象，すなわちこれまで（一般的ではないものの，）運動学 (Kinematics) と呼ばれてきたものに限定した。

と書かれ[29)]，運動学 (Kinematics) という用語も使用されている。目次を見ると，

> **第 I 章**　一般原理――速度と加速度
> **第 II 章**　一般的な点の運動――ある方向への速度，加速度の解析的表現
> **第 III 章**　方向が変化しない一定の加速度による点の運動
> **第 IV 章**　その方向が固定点を常に通る加速度による運動
> **第 V 章**　物質と運動
> **第 VI 章**　力の動力学法則，いわゆる運動の法則
> **第 VII 章**　自由運動のいくつかの場合
> **第 VIII 章**　質点の束縛運動
> **第 IX 章**　力積と質点の衝突

となっており，確かに前半の 4 章は，速度，加速度の定義および等速運動，加速度運動の数学的な取り扱いについてのみ論じられており，力に関する記述はない。

OED で Kinematics の初出としてあげられているのが，ヒューウェル『帰納的諸科学の哲学』(1840)[30] であることはすでに述べたとおりだが（本論文 105 ページ），その次の用例としてあげられているのがこのラン『運動論』である。ということは，力学教科書で Kinematics という用語が使われたのはこのラン『運動論』が最初だったと考えられる。

加速度概念

ランはまた，序文で以下のように加速力の概念を加速度に置き換えることを主張している[31]。

> そして私はついでながらそこで，ニュートンがいつも力という単語を加速度と同義語として使用していたことを注釈しておく。そして将来のニュートンの編集者は「力」(force) と「物体」(body) を「加速度」(acceleration) と「点」(point) に置き換えれば，哲学の発展に大きな恩恵をもたらすだろうと考える。

その上でさらに，加速度の記号についても f を使用せず α を採用することを以下のように宣言している[32]。

> 私は命名には純粋主義であることを心がけている。しかし，特に最初の原理について少なくとも間違いだと思われ，運動についての曖昧な概念から読者を自由にしたいという私の目的を促進するために，加速度に通常使われる記号 f を使用することを拒絶し，その代わりに α を使用することにした。というのは f を使用することにより読者を自然に力を考える方向に誘導してしまうと考えるからである。

これまで加速度を〈加速力〉と呼び，その量を力 (force) の頭文字 f で表記することによって，加速度と力を混同する概念的混乱が続いていた。しかし，サンデマン，ランによってこの概念の混乱が明確に指摘され，加速度の記号も，f から α に書き改められることになったわけである。

ランのサンデマンからの模倣

このようにランが序文でこの本の特徴としてあげている，運動学の独立，加速力概念の排除といったことはすべてその 9 年前に出版されたサンデマン『質点の運動論』が実現していたことであった。

実際，ランは序文で，運動学 (Kinematics) を独立させた先行文献としてサンデマン『質点の運動論』をあげ[33]，さらに，

> 私はこの本に多くを負っている。特に，私が 6 つめの章で彼の〈「運動の第 2 法則」に関する第 2 章〉を少なからず引き写しているのを読者は容易に見ることができるだろう。

と述べて，この本から多くを倣い，その一部を引き写したことさえ認めている[34]。

3.3.2　ランによる運動の第 2 法則

ラン『運動論』における運動の 3 法則

序文で述べられていたサンデマンの第 2 章とは，前節で論じた運動の第 2 法則の記述を含む「質点の運動の基本法則」と題された章である。ランは第 VI 章「力の動力学的法則，一般に言うところの運動の法則」(Of The Dynamical Laws of Force, Commonly Called, The Laws of Motion) で運動の法則を導出しているが，本人が述べているとおり，このサンデマンの第 II 章から多くの影響を受けていることが認められる。このランの 3 法則は，サンデマンと同様，第 2 法則に「力と運動の合成法則」と「力と加速度の比例法則」がふくまれ，第 3 法則は「作用反作用の法則」となっている[35]。

ランは第 2 法則を証明するに当たって，次の (1) から (7) まで 7 つの項目を挙げている[36]。

(1)　静止している質点に，方向と強さがかわらない力が働き続ければ，力の方向に等加速度運動を生じる。
(2)　質点の最初の運動方向が，力のはたらく向きと同じ場合にも，これは同様に正しい。
(3)　物体が他の任意の方向へ速度を持っているときもまた，同様に正しい。
(4)　一定力によって生じる加速度は力の強さと比例関係にある。
(5)　同じ方向にいくつかの力がはたらくとき，生じる加速度はそれらが個別に生じる加速度の合計と等しい。
(6)　質点にはたらく一定力の効果は，**他のどんな**一定力の効果とも独立である。
(7)　上述の言明は**いかなる**力に関してもまた正しい。

これは，サンデマンが第 2 法則を導出するに当たってもうけた 6 つの規則に類似している（108 ページ）。しかし，サンデマンが規則 (2) で力と加速度の比例関係を導き，それを一般化していったのに対してランは，(1)〜(3) まで単独の一定力と運動の合成法則について，(1) 質点が静止している場合→ (2) 運動方向と同じ方向に作用する場合→ (3) 任意の方向に作用する場合と一般化している。

そして，(4) 単独の一定力と加速度の比例関係を導き，(5) 同方向の複数の一定力への拡張，(6) 方向の異なる複数の一定力への拡張をおこない，(7) ですべての力（変動力）へと一般化している。これらを図で整理すると，以下のようになる。

- 一定力
  - 単独
    - (1) 静止している物体に作用
    - (2) 運動方向と同じ方向に作用
    - (3) 任意の方向へ作用
    - (4) 一定力と加速度の比例関係
  - 複数
    - (5) 同方向の複数の一定力への拡張
    - (6) 方向の異なる複数の一定力への拡張
- 変動力 ……… (7) すべての力への一般化

(6) まではサンデマンと違って，一定の大きさの力について法則を一般化し，最後の (7) で最終的にそれらを変動力へと一般化している。ランが変動力への拡張を一番最後に持ってきたのは，ランがこの本で極力微分法を避けようとしていたことによると考えられる。というのは，ランがサンデマンの本について，1 つだけ欠点としてあげているのが，微分法の難解さだったからである。ランは序文でサンデマンの本を賞賛しそれに倣ったことを記述した上で，次のように述べている[37]。

> その本には 1 つだけ欠点があって，この本で全面的に改めた点がある。それは，このテーマに関する事前の知識がかなり必要で，微分計算を習得していない人々にはほとんど受け入れがたかった点である。

実際，このラン『運動論』は，微分計算を極力排除していて，どうしてもやむを得ない場合は △ マークをつけて，読者がその部分をとばし読みできるようになっている。この配慮が，上記の分類でランが (1)〜(6) まで一定力の条件の下に話を進めている理由だと思われる。というのは，変動力について扱えば，どうしても微分法に近い極限の概念が必要になってくる。そこで，そういった概念は極力排除した上で話を進め，最後に (7) で変動力に一般化する手法をとったのだと考えられる。

サンデマンの場合は規則 (3) で一定力を変動力に拡張し，

> 今，瞬間の加速度が，〈その瞬間に運動がもっていた加速度〉で測定されるなら，〈その瞬間の直後までの短い間〉に，〈瞬間的な等加速度運動〉を物体はしたとみなせる (第 6 項)。

と述べて，微分法による式 $\dfrac{dv}{dt} = a$ や，$v\dfrac{dv}{ds} = a$ が記述されている第 6 項の変化する加速度運動に関する項目を参照しながら説明している[38]。

それに対してランは，規則 (7) の変動力への拡張でも，次のように極限の概念をさけながら説明している[39]。

> というのは，問題になっている〈瞬間の可変力の効果〉は，〈ある時間等しいままではたらく力の効果〉によって測定されるだろう。そこで，加速度の測定は，（瞬間の場合も）それが一定であるかのようにして測定できることになる。

3.3.3　ランと運動方程式

このようにして第 2 法則を場合分けして一般化した上で[40]，サンデマンと同様，ランは力 F とそれが生じさせる加速度 a との比を「物体の物質の量を測る唯一の方法」として，物質の量および質量を導入し[41]，「力 F は質点の質量 M と生じる加速度 α の両方に比例して変化する」として，式 $F = M\alpha$ を導いている[42]。

サンデマンの場合，この式は $p = ma$ となっていた。それは，当時静力学的な力とされていた pressure の頭文字を用いていたと思われる。それに対して，ランは，力 (force) の

頭文字 F を用いている。ここではじめて，現代的な運動方程式の記述 $F = ma$ が第2法則にあらわれたことになる。

とはいっても，この式が様々な力学問題に適用されているのが確認されなければ，これが今日の運動方程式と同じ位置づけが与えられていたかが確認できない。しかし，ランのこの本では，微分計算を極力さけているためもあり，運動方程式をたてるような問題はほとんど掲載されていない。たとえば，第VI章の運動方程式をあつかった章の次の第VII章は，落下などの問題を一定の重力加速度の下に解いているので，運動学 (Kinematics) の知識で解けてしまい，運動方程式は必要とされていない。

唯一，第VIII章「質点系の束縛運動」にある △ 印がつけられた第137項「なめらかな曲線上の一般的な運動を以下に決定する」(The general case of motion on a smooth plane curve is detemined in the following manner:—.) では，

> 曲線状の平面の2つの直交座標をとり，α_x, α_y を，x と y 方向の外力による加速度とし，ξ を線上のあらゆる点で垂直な，束縛力による加速度とする。質点の質量を m とするとき，（第107項より）$m\alpha_x, m\alpha_y$ は質点にはたらく力で，$m\xi$ は束縛力なので，
>
> $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha_x - \xi\dfrac{dy}{ds} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \alpha_y + \xi\dfrac{dx}{ds} \end{array}\right\}$$
>
> これらの式をあわせて，運動を決定できる。

と $F = M\alpha$ が導出された第107項を参照しながら微分方程式をたてている。これだけでは根拠が薄いが，一応，ランはこの式を基本方程式と考えていたのではないかと推測される[43)]。

3.3.4　サンデマン，ランの第3法則の位置づけ

第3法則についてサンデマンは，アトウッドの器械による実験で証明しており，ランもほぼそれに倣っている。図のような装置において，滑車にかけられた糸にむすばれた2つの物体の質量をそれぞれ m, m'（ただし $m > m'$）としたとき，作用反作用の法則が正しければ，両物体にかかる張力 T は等しくなり，重い方の質点に作用する鉛直下方の力は $mg - T$ であり，もう一方は $T - m'g$ となる。

したがって，これらの物体の加速度は $\dfrac{m - m'}{m + m'}g$ と計算され，この加速度を測定することによって作用反作用の法則の正しさが証明できる。このようにすれば，結局作用反作用の法則は動力学的な実験で検証することができる。これは，ヒューウェルが問題視した「作用反作用は運動の法則ではなくて静力学的な法則である」という難点をある意味解決する解釈だったともいえる。

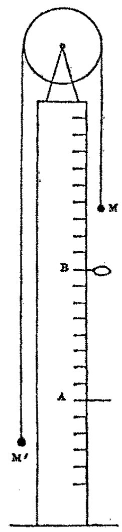


図 3.1　アトウッドの器械：ラン p.64 の図より

3.4　サンデマン，ランは何者か

このように現代からみると，先進的な教科書ともいえる教科書を
執筆したラン，サンデマンの名は，現代ではほとんど知られていない。*D.S.B.* や *D.N.B.* といった代表的な人物辞典にも，その名はみられない。

サンデマン，ランの本の表紙をみると，サンデマンの肩書きは，ケンブリッジのクィーンズカレッジのフェローおよびチューターとなっていて，ランの肩書きは，学芸修士 (M.A.) およびケンブリッジのセントジョンズカレッジのフェローおよびサドラー夫人講座講師となっている。

このサンデマンの名は，デービッド・ウィルソンの論文「教育的基盤：ヴィクトリア朝初期のケンブリッジ，エジンバラ，グラスゴーの大学における物理教育」にある当時の大学の優等生をまとめたリストにその名がみられ[44)]，1846 年にケンブリッジを数学卒業優等試験第 4 位 (4th ラングラー) で卒業したことがわかる。

また，ランについては意外なことに当時の英国音楽人名辞典 (1897 年刊) に「聖職者および作曲家」との肩書きでその名がみられる[45)]。それによれば，彼は 3 歳からオルガン，4 歳からはピアノの教育を受け，ケンブリッジ大学卒業後，セントジョンズカレッジのフェローおよびサドラー講師を勤めながら，大学音楽協会の会長や，演奏家，作曲家として活躍したようである。その辞典には，彼が 1853 年にケンブリッジをサンデマンと同じトライポス第 4 位 (4th ラングラー) で卒業したことも書かれている。これらからわかった事実と，有名な物理教科書トムソン=テイトの著者 W. トムソンと P.G. テイトのケンブリッジ卒業年度をまとめると以下のようになる。

1841 年　W. トムソン……ケンブリッジ大学入学
1842 年　サンデマン……ケンブリッジ大学入学
1843 年
1844 年
1845 年　W. トムソン……ケンブリッジ大学卒業 (2nd ラングラー)
1846 年　サンデマン……ケンブリッジ大学卒業 (4th ラングラー)
1847 年
1848 年　テイト……ケンブリッジ大学入学
1849 年　ラン……ケンブリッジ大学入学
1850 年　マクスウェル……ケンブリッジ大学入学
1851 年
1852 年　テイト……ケンブリッジ大学卒業 (シニアラングラー)
1853 年　ラン……ケンブリッジ大学卒業 (4th ラングラー)
1854 年　マクスウェル……ケンブリッジ大学卒業 (2nd ラングラー)

サンデマンは，W. トムソンの 1 年後輩，ランもまたテイトの 1 年後輩としてケンブ

リッジを卒業しており，マクスウェルはランの 1 年後輩として卒業していることがわかる。そしてまた，彼らがともにケンブリッジのトライポスで上位の成績をおさめ，ラングラーの称号を得ていることから，彼らになんらかのつながりか知己があったとしても不思議ではない。ヒューウェルはこの時期，ケンブリッジのトリニティ・カレッジの学寮長をつとめ，1854 年まで道徳哲学教授を勤めている。

ランがサンデマンの教科書の影響の下に執筆したことは本人が序文で認めているとおりであるが，それ以外にも，あくまで推測ではあるが，ラン，サンデマンとトムソン，テイト，マクスウェルの間にもなんらかの影響があった可能性が，上記からは認められる。

3.5　おわりに

このサンデマン，ランの 2 人の力学書によって，ようやくそれまでの加速力や静力など，力概念をめぐる混乱に収拾がつき，第 2 法則が運動方程式にほぼ結びつけられたように思われる。

このサンデマン，ランは，今日ではまったくその名が知られていないが，有名なトムソン&テイト『自然哲学論』(1867) が出版される以前にこのような本が出ていたことは注目に値すると思う。トムソン&テイトの本は後の章で述べるように 1863 年には完成していたと考えられるので，執筆時期まで考えるとトムソンやテイトらのほうがすでに先にそのような着想を得ていたかもしれないし，あるいは彼らの経歴を考慮すると，なんらかの情報や交流が著者らの間であって逆にサンデマンやランらがトムソン，テイトらから影響を受けた可能性も考えられる。

いずれにしても，この時期，ケンブリッジを舞台にようやくニュートンの運動法則を今日的な意味での根本原理とした教科書がほぼできあがりつつあったと言えるだろう。

注

[1] [Lunn 1859].

[2] [Sandeman 1850].

[3] [Sandeman 1850].

[4] この本は，本文 190 ページの八つ折り本であり，サンデマンの肩書きは，ケンブリッジのクィーンズカレッジのフェローおよびチューターとある。

[5] [Sandeman 1850], iii.

原文：
I have throughout endeavoured to distinguish between the geometrical and mechanical, or, as they are sometimes called, the *kinematical* and *dynamical*, properties of motion. Properties of the former kind do not depend on physical causes, but arise solely from the manner in which the human mind necessarily conceives the relations of space and time, and, like all geometrical truths, require for their investigation no knowledge of the external world beyond what is necessary to develope the ideas of extension and succession : properties of the latter kind, on the contrary, depend entirely on the constitution of the physical universe, and can be discovered in no way other than by making experiments on material bodies.

[6] この第 I 章をさらに詳しく見ると，以下のようになっていてこの部分が，運動学に相当する記述に割り当てられていることがわかる。

運動の定義——経路，方向，運動の進度
速度と最初の位置から点の位置を決定すること
速度の合成と分解
速度の成分と初期位置から点の位置を決定する
加速度の定義と測定
任意の経路における加速度と初速度，初期位置からの点の位置の決定
加速度の合成と分解
成分加速度の法則およびその初期位置，成分速度から点の位置の決定

[7] [Whewell 1840], p.146.

[8] その理由については，[Smith and Wise 1989] に詳しい。本論文 133 ページ参照。

[9] [Sandeman 1850], iii- iv.

原文：
The course usually followed of presenting propositions relating to velocities and accelerations of motion in close connexion with (and even as forming parts of), propositions relating to forces, and the all-but-universal practice of calling accelerations of motion, accelerating forces, certainly do not tend to keep clear the distinction between the two kinds of properties; yet, any confusion here will inevitably lead to incorrect conceptions of the relationships existing in the subject of motion. For the sake of clearness, I have kept the geometry separate from the mechanics of particle motion ; the term *force* has been applied exclusively to the *cause* of motional change, and the several effects of force have been spoken of as the statical, accelerating, and moving effects.

[10] [Sandeman 1850], p.28.

原文：
FIRST LAW OF MOTION. *If a particle be acted on by no external forces, or by external forces which balance one another, either it is at rest, or it moves in a straight line with a constant velocity.*

[Sandeman 1850], p.35.

SECOND LAW OF MOTION. *If any material particles be acted on by external forces, the moving effect of each force is in the direction in which the force acts, and is proportional to the statical effect of the force.*

[Sandeman 1850], p.35.

THIRD LAW OF MOTION. *If one particle act on another particle, the second exerts on the first a force equal in magnitude and opposite in direction to that which the first exerts on the second.*

11) [Sandeman 1850], v-vi.

原文：
The form under which I have stated the three laws of motion is virtually the same as that under which they appear in Newton's *Principia*. The first Newtonian law is universally adopted; but in a few lately published books the second is split up into two laws which respectively assert the proportionality of the statical and accelerating effects of forces with regard to the same particle, and the proportionality of the statical and moving effects of forces with regard to any particles; in these books the third Newtonian law, viz. the equality of action and reaction, is virtually ignored.

12) [Sandeman 1850], vi-vii.

原文：
Now, with reference to the breaking up of Newton's second law into two, it may be observed that if the law of the proportionality of the accelerating and statical effects of forces acting on a given particle be established, and if the constant of this proportionality be called the mass of the particle, the law of the proportionality of the moving and statical effects of forces acting on any particles, follows as an immediate consequence.
These laws therefore are not essentially different, but each of them involves the other; the definition of mass is the only thing required to render them identical. If indeed a mechanical law be necessary in order to pass from the one to the other, it is that the constant of the proportionality of the statical to the accelerating effects of forces is not necessarily the same for different particles; but this is really only the most general supposition that can be made. The great objection to thus considering the second Newtonian law as involving two essentially different laws, is that so doing gives an appearance of appealing to some idea of mass derived independently of the law; whereas it is precisely to this very law that every department of physics looks as the only source whence a definite idea of mass or quantity of matter can be derived.

13) たとえば, [菅野 1983], pp.32-34.

14) [Sandeman 1850], p.28.

原文：
12. The laws which regulate the action of forces on a material particle may be stated as follows:

12. 質点に働く力の作用を規定する法則は以下のように述べられる。

[Sandeman 1850], p.28.

(1) *If a force act constantly, with the same intensity and in the same direction, on a particle which is initially either at rest or moving in the direction of the force, the resulting motion is wholly in direction of the force and is uniformly accelerated.*

[Sandeman 1850], p.29.

(2) *The accelerations of motion produced by different forces of constant intensities, when they act singly on a given particle in the direction of its motion, are in the directions and proportional to the intensities of the forces.*

[Sandeman 1850], p.30.

原文：
(3) *The accelerations of motion produced by any forces, acting singly on a given particle in the direction of its motion, are in the directions and proportional to the intensities of the forces.*

[Sandeman 1850], p.30.

(4) *The acceleration of motion produced by any number of forces, acting simultaneously on a particle in the direction of its motion, is equal to the sum of the accelerations which they would separately produce if each of them acted singly in the same direction.*

[Sandeman 1850], p.31.

原文：
(5) *The acceleration produced by a force acting in any direction on a given particle is in the direction and proportional to the intensity of the force ;*

[Sandeman 1850], p.33.

原文：
(6) *When any forces act simultaneously on a material particle, which is either at rest or in motion, each of them produces in its own direction an acceleration proportional to its intensity, and precisely the same as it would have produced if it alone had acted and the particle had been initially at rest.*

15) [Sandeman 1850], pp.30-31.

原文：
For if $f, f', f"$, &c. denote the statical effects of the forces, and $a, a', a"$, &c. their respective accelerating effects when they act singly; by the preceding law we have

$$\frac{\text{statical effect of the simultaneous action of the forces}}{\text{accelerating effect of their simultaneous action}}$$
$$= \frac{f}{a} = \frac{f'}{a'} = \frac{f"}{a"} = \&\text{c.}$$
$$\text{and} \therefore = \frac{f + f' + f" + \&\text{c.}}{a + a' + a" + \&\text{c.}}$$

But the statical effect of the forces acting simultaneously is $= f + f' + f" +$ &c. ; and therefore the acceleration produced by their simultaneous action is $= a + a' + a" +$ &c.

訳：
$f, f', f"$, &c. を力の静力学的効果を示し，$a, a', a"$, &c. をそれぞれそれらの力が単独で働いた場合の力の加速的効果を示すものとすると，先の法則（訳注：規則 (3)）より，

$$\frac{\text{同時に作用する力の静力学的効果}}{\text{それらが同時に作用することによる加速的効果}}$$
$$= \frac{f}{a} = \frac{f'}{a'} = \frac{f"}{a"} = \&\text{c.}$$
$$\text{そして}\ \therefore = \frac{f + f' + f" + \&\text{c.}}{a + a' + a" + \&\text{c.}}$$

しかし同時に作用する力の静力学的効果$= f + f' + f" +$ &c. である。したがって，それらが同時に作用することによる加速度$= a + a' + a" +$ &c. となる。

16) [Sandeman 1850], pp.33-34.

原文：
Hitherto the actions of different forces on the same particle have been compared; and it has been concluded that a force whose statical measure is p produces in its direction an acceleration of motion a, such that $p \propto a$, and therefore

$$p = ma$$

m being a quantity independent of p and a, and constant for the same particle.

17) [Sandeman 1850], p.34.

原文：
If, however, the actions of the same force on different particles be compared, the accelerations of motion produced will not necessarily be the same ; therefore the quantity m is not necessarily the same for different particles. Consequently, each particle of matter has its peculiar and distinctive constant, which expresses the connexion between the statical measure of any force acting on it and the acceleration of its motion produced by the force; the greater this constant is, the greater will be the force required to produce a given acceleration of motion, and the less will be the acceleration of motion produced by a given force. The characteristic mechanical constant of a particle, thus found to exist, is taken as the measure of the *mass* of, or the *quantity of matter* in, the particle; it also may be considered as measuring the indisposition to a change of motion, or as it is called, the *inertia*, of the particle. For the sake of distinctness, the following definition may be made:
The mass of a particle is measured by the statical intensity of the force which produces in it an acceleration of motion equal to unity.

訳：
しかしながら，もし異なる質点に同じ力が作用する場合を比べれば，運動の加速度は必ずしも同一ではないだろう。したがって，m という量は異なる質点については必ずしも同一ではない。その結果それぞれの質点は，〈うける力の静力学的測定値〉と〈その力によって生じる加速度の測定値〉とを結びつける定数を，それぞれ個別に持っている。その定数が大きくなれば，ある加速度を生じさせるのに必要な力は大きくなる。このようにそれぞれの質点が特有することが判明したこの力学的定数は，質点の**質量**(*mass*)，すなわち**物質の量**(*quantity of matter*) とされる。そしてまた，これは運動をいやがる性質の測定とも考えられ，質点の**慣性**(*inertia*) とも呼ばれる。明瞭化のため，以下のように定義しておく。
質点の質量は，〈その質点に 1 単位の加速度を生じさせる力〉の静力学的な大きさで測定される。

18) [Sandeman 1850], p.38.

全文は以下の通り。

原文：

CHAPTER III.

THE FREE MOTION OF A MATERIAL PARTICLE.

14. A PARTICLE is said to move *freely* under the action of forces, when these forces are the

only causes which affect its motion ; it is subject to no geometrical conditions, nor does it experience resistance from the medium in which it moves.
The forces which act on a particle may be supposed to be known at any instant when the accelerations which they produce in three perpendicular directions are known. At the end of the interval of time t measured from a fixed epoch, let x, y, z be the co-ordinates of a particle referred to a system of co-ordinate axes, and let X, Y, Z be the component accelerating effects, in the respective directions of the coordinate axes, of the forces acting on the particle. If the motion of the particle be free, we have

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

These are the equations of the free motion of a particle, and they may be regarded as the translation of the second law of motion into the language of analysis.

14.質点 は，着目する力のみが運動に作用しているとき，その力の作用の下に**自由に**運動するとされる。それは幾何学的な条件に支配されないし，それが運動する媒介からも抵抗を受けない。
3 つの垂直方向に生じる加速度がわかっていれば，各瞬間に質点に作用する力は，分かるはずである。ある決まった時刻から時間 t 経過したとき，x, y, z を質点の座標とし，X, Y, Z を質点に働く力による加速的効果のそれぞれの座標軸方向の成分とする。質点が自由なら，次式を得る。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

これらは質点の自由運動の方程式であり，第 2 法則の解析的言語への翻訳と見なすことができる。

19) [Sandeman 1850], p.61., IV. *To determine the motion of a heavy particle, which is projected in a direction inclined to the vertical; the motion being supposed to take place in a perfect vacuum.*

20) [Sandeman 1850], p.61.

原文：
The path will be wholly in the vertical plane passing through the line of initial projection. Let the point of projection be taken, for origin, the horizontal line through the point of projection in the plane of motion for the axis of x, and the line drawn vertically upwards from the point of projection for the axis of y ; and let x, y be the co-ordinates of the particle at the end of the time t, measured from the instant of projection. Suppose the particle projected with the velocity v' in a direction making an angle i with the horizon.
The equations of motion are

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -g;$$

g being the accelerating effect of gravity.

訳:
この全軌道は，最初の放物線を含む鉛直面上にある。投射点を出発点として，面上の投射点を通る水平線を x 軸，投射点から垂直に引いた線を y 軸とする。x, y を投射の瞬間から時間 t 経過したときの座標とする。速度 v' で水平面から角度 i で投射したとして，運動方程式は，g を重力の加速的効果として，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

となる。

21) [Sandeman 1850], p.96-, Chapter IV. The Free Motion of two Material Particles acting on One Another

22) [Sandeman 1850], p. 122-, Chapter V. The Constrained Motion of Particles.

23) [Sandeman 1850], p.123. To determine the motion of a particle, constrained to move in a given smooth plane curve, and acted on by given forces in the plane of the curve.

24) [Sandeman 1850], p.123.

全文は以下の通り。

原文：
Let R denote the moving effect of the force of constraint exerted by the curve on the particle ; since the motion of the particle and the forces acting on it are wholly in the plane of the curve, therefore the force R acts in this plane ; and since the curve is smooth the force acts along the normal. Hence the equations of motion are

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mX - R\frac{dy}{ds},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mY + R\frac{dx}{ds},$$

s being an arc of the curve intercepted between (x, y) and a fixed point.

訳：R を曲面から質点が受ける束縛力とする。質点の運動とそれに作用する力はすべて曲面上にあるので，力 R はこの面上で作用する。そして曲面はなめらかなので，力は垂直にはたらく。そこで，運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mX - R\frac{dy}{ds}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mY + R\frac{dx}{ds}$$

となる。ただし，s は，(x, y) と固定点で切り取られる曲面の弧である。

25) [Sandeman 1850]. p.160-., Chapter VI. The Motion of a Particle in a Resisting Medium

26) [Sandeman 1850], p.161., p.64. *To detrmine the motion in a resisting medium of a particle, acted on by a force in the line of motion.*

27) [Sandeman 1850], p.161.

原文：
Since the force acts in the line of motion and the resistance acts in direction opposite to the direction of motion, therefore the path of the particle is a straight line. After an interval of time t elapsed from a fixed epoch let s be the distance of the particle from a fixed point in its path, and let S denote the accelerating effect of the force acting on it. If kv^2 be the accelerating effect of the force of resistance which the medium offers to the motion, k being a constant quantity and v the particle's velocity, we have for the equation of the motion

$$\frac{d^2s}{dt^2} = S \mp k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

the upper or the lower sign being taken according as $\dfrac{ds}{dt}$ is positive or negative.

力は運動の方向に作用し，抵抗は運動の反対方向に作用するから，質点の軌道は直線である。ある時刻から時間 t 経過したときのある点からの質点の距離を s，S は作用する力の加速的効果とする。k を定数，v を質点の速度として，kv^2 を媒質が運動に及ぼす抵抗の加速的効果とする。運動方程式は以下のようになる。

$$\frac{d^2s}{dt^2} = S \mp k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

なお，増減の印は $\dfrac{ds}{dt}$ の正負によってとる。

28) [Lunn 1859], iii.

原文：
My object in the following pages has been to put forth the principles of the Science of Motion in their true geometrical form, postponing the consideration of force (the properties of which are presumed to have been fully investigated in Statics) until the reader may be able to separate in his mind the geometrical ideas from the mechanical.

29) [Lunn 1859], v.

原文：
In the first four chapters I have confined myself entirely to the *phænomena* of Motion, that is, I have treated of what has hitherto been called (though not universally) Kinematics :

30) [Whewell 1840].

31) [Lunn 1859], iv.

原文：
and I may remark in passing, that in them Newton always uses the word “force” as synonymous with “acceleration;” and I think that if any editor of Newton should in future replace the words “force” and “body” by “acceleration” and “point,” he will do good service to the cause of philosophy.

32) [Lunn 1859], v.

原文：
I may be thought a purist in my nomenclature, but it seems at least a fault on the right side, especially in a work on first principles : for the furtherance of my purpose of keeping the reader’s mind free from any idea of force in his considering motion abstractedly, I have rejected the usual symbol f for an acceleration, using instead α; for the actual choice of f would in my opinion naturally lead the reader to think of force.

33) [Lunn 1859], iii.

原文：
The first book, I think, in winch the geometry of Motion was formally treated of, separate from the cause, was Griffin’s *Dynamics of a Rigid Body*; this of course could not be referred to till the kelements of the subject had been mastered. The same method of treatment was adopted in Sandeman’s excellent treatise *Of the Motion of a Single Particle;*

訳：
運動の幾何学を，運動の原因と切り離して分離した最初の本は，私の考えでは，グリフィンの『剛体の動力学』である。この本では，この主題の要素に熟達するまで運動の原因には言及しない。同様の方法はサンデマンのすばらしい『質点の運動論』に見られる。

サンデマンとともにあげられているグリフィンの本は書名が *Dynamics of a Rigid Body* とされているが，その書名ではどのデータベースでもヒットしない。そこで，同じ著者によるこの『剛体の運動論』(1847)([Griffin 1847].) だと考えられる。

この本は本文 116 ページの比較的薄い八つ折り本であるが，その第 I 章は「剛体の幾何学的性質」と題する 9 ページからなっており，剛体の定義，慣性モーメント，主軸などの定義がなされている。そして第 II 章「ダランベールの原理」，第 III 章「固定軸まわりの剛体の運動」，第 IV 章「固定点周りの剛体の運動」，第 V 章「自由な剛体の運動」，第 VI 章「剛体系の運動」という構成となっている。

おそらく第 I 章「剛体の幾何学的性質」となっている部分をさして「運動学」を独立させた先行文献と考えていたようである。

34) [Lunn 1859], iii-iv.

原文：
a work to which I am greatly indebted, as the reader will easily see, the 6th chapter being very little else than a transcript of his second chapter on the Laws of Motion.

35) [Lunn 1859], pp.55-56., pp.57-58., p.62.

原文：
101. THE FIRST LAW OF MOTION then will be: —"If a material particle be acted upon by no external force, or by forces which statically balance each other, it will either be at rest, or be moving uniformly in a straight line."

THE SECOND LAW OF MOTION.
"When any number of forces act on a material particle, the acceleration which any one of them produces on the motion is the same, both in direction and magnitude, as if it had acted on the particle at rest, and the other forces had not acted at all, being proportional to the intensity of the force."

THE THIRD LAW OF MOTION
"If one particle act on another particle, the motional effect produced by the first on the second is equal in magnitude and opposite in direction to that produced by the second on the first." Or concisely thus: "Action and reaction are equal and opposite."

運動の第 1 法則は次のようなものである—「もし質点に何の外力も作用していなければ，あるいは力が静力学的に釣り合っていれば，それは静止状態を続けるか，一直線上を等速で動き続ける」

運動の第 2 法則
「いくつかの数の力が質点にはたらくとき，その一つが運動に生じさせる加速度は，方向と大きさともに，質点が静止していて他の力が全く作用していなかったときとまったく同じで，力の大きさに比例する」

運動の第 3 法則
「ある質点が他の質点にはたらくとき，第 1 の質点から第 2 の質点に及ぼす運動の効果は，第 2 の質点が第 1 の質点に及ぼす効果と大きさが等しく反対方向である」，あるいは簡潔に以下のように言われる。「作用と反作用は大きさが等しく，方向が反対である」

36) [Lunn 1859], p.58.

原文：
(1) that a force acting constantly in the same direction and with the same intensity on a particle at rest, will produce an uniformly accelerated motion in its own direction.

(2) The same is true if the particle have an initial motion in the direction in which the force acts.

(3) This is also true if the body have a velocity in any other direction.

(4) The accelerations produced by constant forces are proportional to their intensities.

(5) If any number of constant forces act in the same direction, the acceleration produced will be equal to the sum of the accelerations which they would separately produce.

(6) The effect of any constant force acting on a particle is independent of *any other* constant force that may be acting.

(7) The foregoing statements will also be true for *any* forces.

37) [Lunn 1859], iii-iv.

原文：
There is one defect in that work, but for which the present treatise would never have appeared : it is, that a certain amount of previous knowledge of the subject is almost necessary, and the work itself is inadmissible in the case of those who are unacquainted with the Differential Calculus.

38) [Lunn 1859], p.30.

原文：
Now the acceleration of the motion at the instant is measured by the acceleration which would have been, had the motion immediately after the instant continued uniformly accelerated (art. 6).

39) [Lunn 1859], p.60.,

原文：
For the effect of a variable force at the instant in question will be measured by the effect of an equal force continued constant for a certain time, and therefore the measures of the accelerations will be the same (for the instant) as if the forces were continued constant,

40) [Lunn 1859], pp.59-60.

この中では，(4) から (5) への拡張では，以下のようにサンデマンの規則 (4) への拡張とほぼ同じ論法を用いている。

原文：
Let the forces be F_1, F_2, &c. and the accelerations they would separately produce be α_1, α_2 &c.; also let F be the resulting force, and α the acceleration produced by it.
Then F is in the same direction as F_1, F_2, &c., and therefore α is in the same direction as α_1, α_2, &c.
Also, by the preceding case,

$$\frac{F}{\alpha} = \frac{F_1}{\alpha_1} = \frac{F_2}{\alpha_2} = \&c.,$$

$$\text{and thererore each} = \frac{F_1 + F_2 + \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots}$$

$$\text{But } F = F_1 + F_2 + \ldots; \therefore \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$$

訳：
力を $F_1, F_2, \ldots$，それらが個別に生じさせる加速度を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ とする。そしてまた，F を合力，α をそれによって生じる加速度とする。
そのとき，F は $F_1, F_2, \ldots$ の方向にしたがい，α も,$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ の方向にしたがう。そしてまた，前述の場合によって，

$$\frac{F}{\alpha} = \frac{F_1}{\alpha_1} = \frac{F_2}{\alpha_2} = \ldots$$

$$\text{そこで，それぞれは，} = \frac{F_1 + F_2 + \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots}$$

$$\text{ただし } F = F_1 + F_2 + \ldots; \therefore \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$$

41) [Lunn 1859], p.61.

原文：
if F be the force acting on each particle to produce an acceleration α in its motion, there being n particles; when they are connected together, or formed into one particle, all the forces, i.e. nF, must act in order to produce the same acceleration α as before.
Now the quantity of matter in this last particle is n times as great as the quantity of matter in one of the original particles: wherefore, in order that the accelerations on different particles

may be the same, the intensity of the forces acting on them must be proportional to the quantity of matter in the particles. This is the only plan on which we can proceed to estimate the quantity of matter in bodies.

それぞれの質点に加速度 α の運動を生じさせる力 F がはたらくとする。そして，n 個の質点があってそれらが互いに連結している，あるいは 1 つの質点を形成するときには，そのすべての力，すなわち nF が，それまでと同じ加速度 α を生じさせるためには必要である。
今，この最後に述べた質点の物質量が元々の質点の 1 つの物質量の n 倍の大きさだったとする。すると，これらの異なる質点の加速度が同じとなるためには，それぞれにはたらく力の強さは，それぞれの質点の物質量に比例しなければならない。

42) [Lunn 1859], pp.61-62.

原文：
107. The force then acting on a particle varies as the acceleration produced as long as the mass of the particle is the same, and as the mass when the acceleration is the same; therefore generally the force varies as the mass of the particle and the acceleration produced jointly; i.e. if forces F, F' acting on particles whose masses are M, M', produce accelerations α, α', then $\dfrac{F}{F'} = \dfrac{M}{M'} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha'}$. We must assume the unit of mass: let the mass of the second particle M' be the unit of mass, then

$$\frac{F}{F'} = \frac{M}{1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}, \text{ or } M = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{F}{F'}.$$

F', α' are at present undetermined: let them both $= 1$,

$$\text{then } M = \frac{F}{\alpha} \text{ or } F = M\alpha.$$

This assumption fixes the unit of mass to be that quantity of matter in which the unit of force produces the unit of acceleration, and then we have the numerical measure of the intensity of a force equal to the product of the numerical measures of the mass moved and the acceleration produced.

訳：
質点に作用する力は質点の質量が同じであれば，生じる加速度に比例して変化する。そして，加速度が同じなら質量に比例して変化する。したがって一般に，力は質点の質量と生じる加速度の両方に比例して変化する。すなわち，力 F, F' が質量 M, M' の質量の質点にはたらいて，加速度 α, α' が生じるとき，$\dfrac{F}{F'} = \dfrac{M}{M'} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha'}$ が成り立つ。我々は質量の単位を決めねばならない。そこで，2 番目の質量 M' を質量の単位とすると，

$$\frac{F}{F'} = \frac{M}{1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}, \text{ すなわち } M = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{F}{F'}$$

が成り立つ。F', α' は決められていないので，両者を=1 とすれば，

$$M = \frac{F}{\alpha} \text{ すなわち } F = M\alpha \text{となる。}$$

この仮定は，質量の単位を 1 単位の力が 1 単位の加速度を生じる物質量とするものである。これによって我々は，〈力の数値的測定〉を，〈質量の数値的測定〉と〈生じる加速度〉の積として得た。

43) [Lunn 1859], p.77.

原文：
Take a pair of rectangular axes in the plane of the curve, and let α_x, α_y, be the accelerations on the motion in directions of x and y, arising from the external forces, and ξ the acceleration due to the force of constraint, which is in the direction of the normal at any point: then if m be the mass of the particle, $m\alpha_x$, m_y, are the forces acting on it, and mg is the force of constraint (Art. 107); and we have

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha_x - \xi\frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_y + \xi\frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\},$$

these, together with the equation to the curve, determine the motion.

[44] [Wilson 1985], p.35.

[45] [Brown and Stratton 1897], p. 256.

第 4 章

トムソン&テイトとマクスウェル

4.1　はじめに

1867 年に出版されたトムソン&テイト『自然哲学論』は，1923 年まで版を重ねるロングセラーとなり，その後の力学教科書のスタンダードとなった。またマクスウェルは 1867 年に力学を解説した小冊子『物質と運動』を出版するが，そこで，英国では初めて力積 (impulse) 概念を明確に定義する。

この 2 冊によって，英国で「ニュートンの運動法則を力学の基本原理に置き，運動方程式を第 2 法則としてむすびつけた」形式としてのニュートン力学はほぼ完成する。この章では，まず 4.2 節でトムソン&テイト『自然哲学論』について論じる。トムソンとテイトはこの教科書で新たに運動学 (Kinematics) を章として独立させる。そのことに加えて，新たに運動学 Kinetics という分類を採用し，力学の構成を再構築した。そのことを 4.2.1 節でまず述べる。そして次の 2 節で運動の 3 法則の表記と扱いについて論じ，第 2 法則と運動方程式の関係について論じる。

次の 4.3 節では，マクスウェル『物質と運動』を中心に論じる。4.3.1 節では，当時まで続いていた衝撃力と力積概念の混乱について述べ，フランスでは 1800 年代前半に解決されることを，ブランジェ『力学教程』の記述をもとに論述する。そして 4.3 節で，英国での解決はマクスウェルによっておこなわれ，マクスウェルは力積概念を元に運動方程式を再定義したことを述べる。そした最後にその後，マクスウェルによる運動方程式はどのように引き継がれたか，引き継がれなかったかについて論述する。

4.2　力学教科書の標準—トムソン&テイト『自然哲学論』(1867)

4.2.1　運動学の独立と力学の再構成

1867 年に出版されたトムソン&テイト『自然哲学論』[1)]（以降『トムソン&テイト』と表記）は，1923 年まで版を重ねるロングセラーとなり，その後の力学教科書に大きな影

響を与えた。それは，単なる力学教科書としてではなく，その時代の力学の体系を再構築するものであった。たとえば田村松平はこの本について，「ニュートンのプリンキピア以後の力作であり，説明の仕方，用法に於いて極めて独創的なもの」とし，「ポアンカレーの言う如く，他の書物に書いていない理論，何故かはわからないが大陸のこれに類似した書物にも引用されない理論が見出される」と述べ，ヘルムホルツとウェルハイトによって独語訳が出されたことも述べている[2]。またハーマンはこの本を「解析的な動力学を再編成するものであった」とし，「英国の物理学者たちが好んでいた「動力学的な」理論（中略）に対して，大きな衝撃を与えた」としている[3]。

ハーマンはこの『トムソン&テイト』が，ニュートンの運動法則からすべての力学原理が導出されるアプローチになっていること，内容が kinematics（運動学）と dynamics（力学）に区分され，さらに dynamics（力学）が statics（静力学）と kinetics（動力学）にわけられていることを指摘している[4]。

実際，『トムソン&テイト』の序文には以下のような記述がある[5]

> 我々は，アンペールの提案を採用し，理論的に純粋な運動の幾何学的科学に**運動学**(*Kinematics*) の用語を使用する。言語の妥当性を考慮しかつ，最高に論理的な著者たちに倣った上で，我々は，力が〈相対的な静止を維持する場合〉と〈運動に相対的な加速を生じさせる場合〉をあわせて，真の意味で〈力の作用を扱う科学〉として，われわれは *Dynamics*（**力学**）という用語を用いる。Dynamics（力学）のこの 2 つに相当する分野は，*Statics*（**静力学**），*Kinetics*（**動力学**）と適切に名付けられている。

これまでの力学教科書では，力学 (Mechanics) が静力学 (Statics) と動力学 (Dynamics) の 2 分野に分けられるのが普通だった。ところが，『トムソン&テイト』では，まず，運動学 (Kinematics) =「力抜きで運動のみを論ずる分野」が独立しており，力に関する科学全般が Dynamics（力学）とされ，その Dynamics（力学）がさらに静力学 (Statics) =「静止している場合」と，動力学 (Kinetics) =「力と運動について論じる分野」とに分けられている。

$$\begin{cases} \text{運動学 (Kinematics)} \\ \\ \text{力学 (Dynamics)} \begin{cases} \text{静力学 (Statics)} \\ \text{運動力学 (Kinetics)} \end{cases} \end{cases}$$

目次を見ると，運動学 (Kinematics) と題する章がまずはじめにおかれ，第 1 分冊「予備的概念」(Preliminary Notions) の本文 336 ページ中 160 ページが割り当てられている。そして残りのうち 144 ページが「力学的法則と原理」(Dynamical Laws and Principles)，32 ページが「実践」(Experience) となっている（ちなみに第 2 分冊は「純粋力学」(Abstract Dynamics) となっている）。

すでに論じたように，力学から運動学を独立させることは，英国ではヒューウェルが

「アンペールの提案」として，著書で紹介していたものの，自身の著書では採用していなかった (本論文 105 ページ参照)。スミス&ワイズによれば，その理由はヒューウェルが力学全体を “必然的真理” の体系として構築しようとしていたため，論理のみに基づく “ 必然的な ” 運動学と，実験に基づく “ 経験的な ” 動力学とに力学を分割することが彼の哲学と合致しなかったためである[6)]。そしてまた，彼が力学 (Mechanics) を静力学 (Statics) と動力学 (Dynamics) の 2 分野に分割し，静力学的な法則と動力学的な法則を独立させたのも，彼が力を〈静力学的な測定量〉である静力と〈動力学的な測定量〉である起動力に厳密に分離したためである。それに対してフランスのラグランジュは静力と起動力は力の 2 つの側面に過ぎないとした。トムソンはグラスゴー大学の学生時代にミクルハム，ニコルの講義を通じてこのフランス力学の影響を受けていたため，ヒューウェル哲学に対抗する力学を構築しようとした。そこで，力学一般を意味する用語として Mechanics にかえて〈力の科学〉を意味する Dynamics を位置づけることをテイトに提案した。そして，これまでヒューウェルらに Dynamics と呼ばれていた分野を意味する用語として新しく Kinetics という用語を作り出した[7)]。

サンデマン，ランらは，序文で Kinematics あるいは Kinematical という用語を用いて運動学の独立を宣言していたが，彼らはそのようにして独立させた運動学的な内容の章に「運動学 (Kinematics)」という章題を掲げることはなかったし，本文にこれらの用語を使用することもなかった。それに対して，この『トムソン&テイト』では力の科学 =Dynamics から，必然的な論理から導かれる運動学を力学から独立させたことになる。

今日 Kinetics の訳語としては，「動力学」があてられるのが一般的となっており，Dynamics の訳語には「力学」あるいは「動力学」があてられている[8)]。これは，現在でも Dynamics が〈静力学抜きの動力学〉を指す場合と〈力学一般〉を指す場合の両方の用例があるためである。したがって，これらの用語を訳語で一対一に対応させて，たとえば Dynamics を一貫として「動力学」と訳すことはかえって誤解を招く。したがって，本論文ではその用語が指す内容を考慮した上で，Dynamics の訳語は動力学と力学のどちらか一方を採用し，Kinetics の訳語は Dynamics と同じ「動力学」を採用する。

4.2.2 運動の 3 法則の位置づけ

この『自然哲学論』本文には，ニュートンの運動の 3 法則の原文のラテン語および英訳がそのまま掲載されている。その前置きの文章には，「彼がこれらを述べてから 2 世紀近くの経過の間，何の追加も修正も必要なかった」[9)] と書かれていて，マッハ『力学史』(1887) の「ニュートン以降，力学に関する新しい原理は述べられていない」とする見方と近い考えが示されている[10)]。『自然哲学論』が独訳されていることも考えると，マッハがこの『自然哲学論』に影響をうけた可能性も考えられる。その真偽はわからないが，いずれにしても，「ニュートンの『プリンキピア』によって力学の基本原理がまとめあげられた」とする力学史観はこのころ形成されたことがわかる。

ただし，『自然哲学論』にはすぐ次に以下のような記述があり，現代の物理教科書のよ

うに，力学原理の発見がニュートンに帰せられてはいない[11)]。

> 最初の 2 つの法則は実際，ガリレオによって発見されたものだし，第 3 法則は様々な形式のいくつかはフック，ホイヘンス，ウォリス，レンその他の人々によって，『プリンキピア』出版以前に知られていた。

つまり，ニュートンの業績はそれ以前に発見された力学法則を 3 法則による体系として整理したことだと考えられている。

また，ヒューウェル的な運動の 3 法則の記述についても以下のように述べている[12)]。

> 最近は，第 2 法則を 2 つにわけ，それらを第 2，第 3 法則として，全ての動力学の問題に**直接**使用しているにも関わらず，第 3 法則を全く無視するという傾向がある。しかし，そうする人々は，ダランベールの原理と呼ばれる公理を導入することにより，ニュートンの体系の完全さを**間接的に**認めていることになる。というのは，ダランベールの原理は，実際には，彼らが却下したニュートンの第 3 法則の別の形式なのである。ニュートンによる第 3 法則の解釈は，ダランベールの原理を示しているだけでなく，現代的な仕事とエネルギーの原理をも示しているのである。

ヒューウェルが慣性質量の定義を第 3 法則に分離させ，それを最終的に運動量保存則と結びつけたことは第 2 章でみたとおりである。そしてヒューウェルも最終的には第 3 法則とダランベールの原理を結びつけていた。そうすることによって，「作用・反作用の法則」もまた第 3 法則の一部にしようという意図があったのだろうと考えられる。結局，このトムソン&テイトでは，その論理が逆に用いられて，ダランベールの原理が第 3 法則の独立性の根拠とされていることになる。

4.2.3　第 2 法則と運動方程式

運動方程式は，第 2 法則の解説中で，「点の運動学による翻訳」(Translations from the kinematics of a point) として，次のように与えられている[13)]。

> 259. 結局の所，この法則から，すべての加速度に関する運動学 (Kinematics) のすべての定理は，動力学 (Kinetics) にその対応するものがあることがわかる。
>
> たとえば，X, Y, Z をそれぞれ質量 M の質点に作用する力の x, y, z 軸に平行な成分とすると，§212 より，次式を得る。
>
> $$M\frac{d^2x}{dt^2} = X, M\frac{d^2y}{dt^2} = Y, M\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$
>
> つまり，
>
> $$M\ddot{x} = X, M\ddot{y} = Y, M\ddot{z} = Z$$

これまで，ヒューウェル，サンデマンらは「第 2 法則の解析的言語への翻訳」として，質量の因子を欠いた式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, \frac{d^2y}{dt^2}=Y, \frac{d^2z}{dt^2}=Z;$$

を「運動方程式」としてきた。それにたいしてこのトムソン&テイト『自然哲学論』では，質量の因子まではいった解析的な運動方程式が記述されている。

ところでこの『自然哲学論』の著者の一人，テイトはスティールと共著で『質点の動力学』を 1856 年に出版しているが，その序文で「力の概念を取り除いた運動学的な (Kinematical) 主題を第 1 章で取り扱うと宣言し，第 1 章を「運動する点の幾何学」(Geometry of a Moving Point's Motion) としている。そしてその第 2 章「運動の法則」では，運動の法則をいわゆる慣性の法則[14]と，次のように表現される第 2 法則の 2 つとしている[15]。

> 運動している質点にいくつかの力が作用するとき，それぞれの力の効果は，運動に変換される大きさおよび方向については，それぞれの力が単独に静止している質点に作用するときと等しい。

そしてこの第 2 法則の帰結として，

> 力の測定量は，それが一様なら，単位時間あたりに生成する運動量に等しく，もし変動するなら，各瞬間の力が一様だと仮定したときに単位時間に生成するであろう運動量に等しい。

とし[16]，変化する力の場合の関係式

$$F=M\frac{dv}{dt}=M\alpha$$

を導いている[17]。

この『質点の動力学』はこのように，第 2 法則と質量まではいった運動方程式が第 2 法則と結びつけられているが，運動の法則は 2 つとされ，運動の法則にニュートンの名も出てこない。これにたいして，この 9 年後の 1865 年に出版された第 2 版では，その序文に前著を書いたときに『プリンキピア』を参照していなかった反省が述べられ，第 2 章が全面的に書き換えられたことが述べられている[18]。そしてまた，トムソンとの著書『自然哲学論』は未公刊 (unpublished) ではあるものの，その 2 年前にすでに印刷公表 (printed off) されていることも述べられている[19]。

実際，この第 2 版では，運動の 3 法則がニュートンの 3 法則そのものにとして記述され，第 2 法則の解説は，『自然哲学論』とまったく同じ文章で書き始められ，

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=X, M\frac{d^2y}{dt^2}=Y, M\frac{d^2z}{dt^2}=Z;$$

が導出されている[20]。その解説には，加速力概念の混乱について，「力を加速力と駆動力とわけることによって，混乱が持ち込まれることがある」として，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

とした場合,「X は物体にはたらく力の単位質量あたりの x 成分と理解されるべき」と述べて，これまでの混乱を整理する記述がみられる[21)]。

これらのことから，1860 年代になって，トムソン，テイトらによってニュートンの運動の 3 法則が力学の基本原理としてはっきり位置づけられ，解析的な運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X, \cdots\cdots$ が，第 2 法則と結びつけられたことになる。

4.3　マクスウェルによる力積概念にもとづく運動方程式

4.3.1　〈衝撃力の測定量〉をめぐる混乱とその解決

フランスにおける力積概念と衝撃力の混乱の解決

これまでの章で見たように，1800 年代中ごろまで，衝突や衝撃力をめぐる概念は混乱していた。ウッドは，力を衝撃的な (imupulsive) 力と一様な (constant) あるいは連続的な (continued) 力の 2 種類に分類し，衝撃的な力は，それが生み出す効果全体で測定するものとした（本論文 20 ページ）。グレゴリーは，衝撃力を「瞬時に速度を産み出すもの」として，時間の項をのぞいて mv に相当する量として理解していた（本論文 28 ページ）。つまり両者とも，衝撃力を現代では〈力積〉と呼ばれる量で測定するものとしていたことになる。通常の力に対して衝撃力を特殊な力と考えるその考え方は，フランスの著者たちにも見られ，彼らがそれをもとに〈力と運動の合成〉を考えていた。そのことをヒューウェルが批判し，ヒューウェルが第 2 法則を分割する 1 つの根拠となっていたことはすでに見たとおりである。この衝撃力として力と混同されていた Ft という量に名称を与えたのは，マッハ『力学史』によれば，1847 年にブランジェが与えたのが最初である。このマッハ『力学史』の邦訳は 3 冊が出版されているが，現在も書店で入手できるのは岩野訳の文庫版である。これには，ブランジェが 1847 年に「力の起動力 (Antrieb) なる名称を提案した」とある。他の訳書を見ると，この部分は伏見訳では「力積と呼ぼうと言い出した」と訳されており，青木訳では「力積 (impulse,Antrieb) なる名称を提出している」と訳されていて，原書には，この力積に相当する単語には Antrieb が使用されている[22)]。ちなみに現代ではドイツ語で力積は通常，impuls の単語が使われ，Antrieb は,「動因，誘因，動機，原動力」などの意味が与えられている[23)]。

そのブランジェ『力学教程』の序文には，次のような記述があり，たしかにブランジェがこの量に新しい名称 impulsion を与えたことが宣言されている[24)]。

> 一般的で実り豊かな定理（184 ページ）としては,〈力と時間の積〉がある。
>
> 私はその重要性への着目を固定するために，名前を与えることが適切と判断した。それはときには**運動の量**(*quantité de mouvement*) という単語によって，表現されてきたが，これは，正確に質量と速度の積を意味する単語である。だから，結

> 果と原因を混同することになってしまう。そこで，私は *impulsion* という単語をこれに適用する。そうすることによって，はじめて力学の正確な認識ができるようになる。

上記引用文で参照されている 184 ページには，力積を用いた運動方程式が記述されているが，力積 (impulsion) そのものの定義は p.40 の §2. の「力の力積 (impulsion) について」と題された節で力積が積 Ft あるいは力が変化する場合は $\int Fdt$ として定義されている[25)]。

またこの節では，これまで科学者たちが途中経過なく突然速度変化を生じさせる瞬間力と，通常の連続的な力とを区別していたことが述べられ，その量が単に時間が非常に短いだけに過ぎないとする「瞬間力を拒絶する学説」は，そのころ認められたことが以下のように記述されている[26)]。

> 瞬間力を拒絶するこれらの学説は，ポンスレ氏が 1825 年のメッツ砲術工学学校 (l,école de l'artillerie et du genie de Metz) の講義で言明し，コリオリが 1829 年に出版した『力学の計算法について』(Traité du calcul de l'effet des machines) で言明した。このことは，ポアソンの 1835 年の『力学』(Traité de mécanique) 第 2 版で認められた。

衝撃力が時間の項がない一瞬に働く力として通常の力とは違うと誤解されていたことがヒューウェルによって批判されたのはすでに見たとおりだが，ブランジェのこの言によれば，フランスでこの誤解が整理されたのは，ヒューウェルがその批判を展開した 1820 年代から 1830 年代にかけてであったことになる。ヒューウェルが批判したポアソン『力学』の第 2 版 (1835) でそれが改められ，1847 年にこの量 Ft がブランジェによって impulsion の名称が与えられたのである。

英国における衝撃力と impulse

一方英国では 1828 年にヒューウェルが衝撃力は〈作用する時間が極端に短い力〉にすぎないことを指摘したものの，1850 年代に入ってもなお，量 Ft に特別な名称は付与されてはいなかった。

前章で論じたラン『運動論』(1859) では，第 9 章で衝突が論じられているが，衝撃力を「力が関知できないほどの短い時間に働くのにもかかわらず，測定可能な速さを引き起こすことがある」として正しく理解した上で，「このような力を衝撃力 (impulse) と呼ぶ」としている。しかし，衝撃力 (impulse) の作用する時間が小さすぎる困難を解決するために，「それぞれの impulse がはたらく〈関知できないほど小さな時間〉を，みな等しい」という前提をたてて，impulse R を質量 M と速度 v の積として $R = Mv$ であらわし，「impulse の大きさはそれによってうまれる**運動量**である」としている[27)]。

このように，衝撃力=impulse をその作用時間の小ささの困難のために時間と分離せず，生成する運動量で〈衝撃力 (impulse) の大きさ〉とする考えは，1870 年代の教科書にも多

く見られる。

たとえば，1874 年刊行のパーキンソン『力学の基礎』第 5 版では衝撃力を「非常に小さな時間に力が働くことによって，その効果が生み出される」[28] として，

$$F\tau = mf\tau = mv$$

(F は力，τ は接触時間，m は質量，f は加速度を示す)

としながら，この mv を「衝撃力 (impulsive force) の尺度」とし，衝撃力 P を式 $P = mv$ で与えているし，同年に発行されたトドハンター『初心者のための力学』第 5 版 (1874) でも，「衝撃力と他の力とは，その程度が異なるだけ」とし，「運動の法則を衝撃力にも適用することができる」としておきながら，その作用する時間が非常に短く測定不可能であることを理由に，「衝撃力はそれが産み出す全運動量によってはかる」としている[29]。

また，グロス『運動学と動力学 (Kinetics) の基礎』(1876) でも，「ある運動量を生ずるのに無限に短い時間しか要しない力を〈Impulsive Force, or Impulses〉と呼ぶ」とし，「厳密に〈Impulses〉と呼びうるような力は存在しない」と述べながら，

> いま，すでに述べた impulse という言葉によって，〈impulse によって生じた力の量〉を意味するとする。
>
> そこで，impulse が質量 m に速度 v をつくり出すとすると，その impulse の尺度 (F) は $m.v.$ すなわち，
>
> $$F = m.v.$$
>
> である。〈impulse の単位〉によって，〈単位質量に単位速度を生じさせるようなもの〉を表すのである。

としている[30]。

これらの著者たちは衝撃力=imupulsive force を，〈極端に短い時間に作用する力〉であって通常の力と本質的には同じだということは正しく認識していた。そして，その "衝撃力の大きさ" を運動量の大きさで測るとしていた。この量は今日では，impulse（力積）=力×時間として定義され，当時と同じように impulse の名称が与えられている。当時もこの量を impulse と呼んでいたという意味では，用語上は現代と同じであり，混乱は見られないように思える。しかし当時 impulse は，「衝撃力の大きさ」という意味で使用され，時間と分離しない単独の量として記号 R, P, F などがあてられていた。そのため力積 Ft の次元を持つ量が力を測る量として混同されかねなかった。

実際，これらの著書より 20 年ほど後に出版されたツウェット『理論力学の基礎』(1898) では，衝突に関する項の注釈に次のような記述がある[31]。

> 多くの著者たちが，**衝撃力，あるいは瞬間力**（*impulsive,of instanteneous,force*）という名称を「衝撃力の力積 (impulse)」というべきものに使っている。彼らは衝

> 撃力を，「積分 $\int_t^{t'} Fdt$ の F が際限なく大きくなり，$t'-t$ が限りなく小さくなったときの極限値」として定義している。いいかえれば，「〈無限小の時間に測定しうる運動量を産み出す無限大の力〉の impulse」を，衝撃力として定義している。
>
> この定義によれば，衝撃力あるいは瞬間力は，その性質の大きさということなってしまい，単位も通常の力の大きさとは，異なったものになってしまう。そのディメンジョンは，$\mathbf{MLT^{-1}}$ となり，$\mathbf{MLT^{-2}}$ とはならない。この単位は運動量のそれと同じである。実際，それは力ではなくて力積 (impulse) なのである。

この頃は，すでに impulse=力×時間という定義は広く普及していた。このように impulse が明確に量 Ft を示すものと明確に定義され認知されるようになってはじめて，衝撃力と力をめぐる混乱が払拭されたのである。

4.3.2 マクスウェルによる力積概念の提唱と運動方程式への展開

英語圏においてこの生成する運動量で測られる量 impulse を「力×時間」に相当する量としてはじめて明確に定義したのが，電磁気学や分子運動論の研究で知られる J.C. マクスウェルであった。

マクスウェルは，1876 年に力学の入門書として刊行した八折り本の小冊子『物質と運動』の「49. 力積について（ON IMPULSE）」で，「力の作用時間とその強さとの積を，その力の力積 (impulse) と呼ぶ」とした上で，次のように述べている[32)]。

> 〈インパルスという言葉〉(The word impulse) は，もともとは〈釘をたたくハンマーの場合のように，短い期間に働く力の効果〉をあらわすために用いられたものである。けれども，この場合と他のいかなる場合とを較べて見ても，力の作用に本質的な違いは全くない。それゆえ私たちは，〈インパルスという言葉〉を，上のように定義して使用し，〈その作用が例外的に瞬間的な性質をもった場合〉だけに限らないことにする。

このようにマクスウェルは impulse を力×時間で測られるものとし，しかも衝突現象だけに限定するのではなく，広く力と運動全般に適用可能な量として定義し直したのである。これによって衝撃力と重力などの力が，「作用する時間の違い」だけで本質的には同じ性質を持った “力” であることが統一的に理解されるようになったとも言える。

じつはマクスウェルは，その「力積 (impulse)」概念を『物質と運動』という小冊子の中ではじめて使ったのではない。彼がはじめて電磁波の存在を予言した有名な論文＝「電磁場の動力学的理論」(1864) にも，impulse の記述があるし，また，『熱の理論』(1870) にも，impulse については次のような記述がある[33)]。

> その時間 T の最初の運動量は Mv で，その時間 T の終わりの運動量は Mv' であったとする。その力 F がその時間 T のあいだ作用することによって作り出した

運動量は $Mv' - Mv$ である。

しかし，力は単位時間に作り出される運動量によって測られるから，短時間に F によって生ずる運動量は F で，T 単位の時間に F によって生ずる運動量は FT である。この二つの値は等しいから，

$$FT = M(v' - v)$$

である。

これは，動力学の基礎方程式の 1 つの形である。いま，〈力のインパルス the impulse of a force〉を〈力の平均値にその力が働いた時間を掛けたもの〉と定義するなら，この方程式は〈力のインパルスは，それによって生ずる運動量に等しい〉という言葉によって表現することができる。

年代的に言うと，ここではじめてマックスウェルは，従来の〈impulse ＝衝撃力〉概念を〈impulse ＝力積〉概念へ拡張したことになる。

そしてまた，『電気・磁気論』(1873)[34) の「第 4 部 電磁気」の「第 5 章 連結系の運動方程式について」でも，〈力積 (impulse)〉という単語が 16 回，impulsive force という単語が 4 回用いられていて，特に「運動量」の節 (201〜2 ページ) には，

〈力の時間積分〉は〈力の Impulse〉と呼ばれる。そこで我々は〈運動量は，その物体を静止の状態から与えられた運動量の状態にもたらす力のインパルスである〉ということができる

と書かれている。これらのことから力積=impulse の概念は，マックスウェルが電磁気学や熱の分子運動論を展開するのに役立てられ，その経験を下に，『物質と運動』(1876) という教育的な小冊子をまとめる際に，改めてそれ明確に定義したと考えられる。

マクスウェルがこの新しく定義した力積 (impulse) 概念を重要視していたことは，『熱の理論』で式 $FT = M(v' - v)$ を「動力学の基礎方程式の 1 つの形」としていることからわかる。つまり，マクスウェルはこの新しく定義した力積 (impulse) 概念をもとに運動方程式の修正を試みているのである。そのことは，『物質と運動』でも見られる。52 節は「impulse と運動量という言葉を用いて表した運動の第二法則」となっていて，

物体の運動量の変化は，その変化を起こす impulse に数値的に等しく，同じ方向に生ずる。

と記述されている。数式は記述されていないものの，マクスウェルは第 2 法則を力積 (impulse) と運動量変化による運動方程式として再定義しようとしていたことがわかる[35)]。

ところで，トムソン&テイト『自然哲学論』は，このマクスウェルが力積概念を『熱の理論』で定義する数年前に出版されたが，この本では，量 Ft に力積 (impulse) という用語が用いられず，〈時間積分 (time-integral)〉という語が当てられていた[36)]。これに対してマクスウェルは，それが出版された翌年 1868 年 8 月 19 日のトムソン宛の私信[37)]で，

> なぜ，あなたは力の時間積分という表現をするのでしょうか。なぜ，動力学の一般方程式として力積 (Impulse of a Forse)=物体系の運動量という表現をとらないのでしょう。

と疑問を呈している。当時マクスウェルとトムソンの間でこの力積 (impulse) 概念に関する議論があり，しかもマクスウェルがこの〈impulse=力×時間〉という定義と〈力積概念を使用した運動方程式〉の重要性を強く意識していたことがこの事実からもうかがえる。

4.3.3　その後の物理教科書への力積概念の継承と断絶

このマクスウェルによる「拡張された impulse 概念」とそれをもとにした運動方程式の表現は，1800 年代末から 1900 年代初等のいくつかの力学教科書に受け継がれた。

たとえば, 1890 年代では, ロネイ『動力学基礎論』(1891)[38)]，ラブ『理論力学』(1897)[39)]，ツウェット『理論力学の基礎』(1897)[40)]，ペリー『応用力学』(1898)[41)] で，運動の第 2 法則が力積 (impulse) で記述されていたり，運動方程式が力積で表現されていたりする[42)]。

また，1900 年代に入っても，ホルブロウによれば「工学部の学生を対象として 1908 年から 1938 年までのあいだに 13 万もの部数を売った」[43)] ダフ『物理学の教科書』は，第 2 法則の解説の中で運動方程式 $F = ma$ を与えた直後に，〈力の力積〉(Impulse of a Force) と題する節をもうけている。そしてそこで，「力の力積はそれによって生じる運動量に等しい」(the impulse of force equals the momentum produced by it) と述べ，式 $Ft = mv - mv_0$ を与えている[44)]。また，フラー『物理学の第 1 原理』(1937) では，第 2 法則をまず,

$$\text{力} \times \text{時間 (力積 impulse)} = \text{質量} \times \text{速度 (運動量 momentum)}$$

という形で与えて，それから $F = ma$ を導くという形式をとっている[45)]。

このように，1900 年代初頭までは，いくつかの力学書にこの拡張した力積概念は踏襲されていき，第 2 法則ないし運動方程式といった動力学の基本原理の表現に用いられている。しかし，1960 年以降の現代の物理教科書では，この拡張された力積概念はほとんどみられない。ほとんどの教科書では，力積と運動量の関係は，衝突などの現象を扱うときの解説で登場するだけで，多くの場合,「時間が短い場合」にのみ限定されている。それは，impulse という単語がもともと衝撃力を意味する単語であったことがその一因かもしれない。

そのなかで,『PSSC 物理学』(1669)[46)] では，このマクスウェル流の拡張された力積概念に基づいて運動の第 2 法則が記載されていることは特筆に値する。

4.4　おわりに

トムソン&テイト『自然哲学論』は 1800 年代に書かれたすぐれた力学教科書であり，その後に影響を与えた教科書として，その名が現代でも知られている。この本は，Dynamics

を力の科学として，静力学 (Statics) をその一部として取り込ませ，運動学 (Kinematics) を独立させるという構成をとっていた。そして，ニュートンの "運動の 3 法則" および，" ニュートンの" 運動方程式から力学を構築するものであった。そのような意味で，現代の "ニュートン的な" 力学教科書のルーツといえる。

それは突然生まれたものではなく，特にヒューウェル哲学にもとづく "形而上学的な" 力学を乗り越えるものとして提出されたものであった。もちろんそれは，ヒューウェルによる力学体系をまっこうから否定するものではなく，ニュートンの運動の 3 法則を力学の中心に据え，第 2 法則を基本方程式と結びつける形式などを継承したものでもあった。

トムソンやテイトとサンデマン，ランらに直接の関係があったかどうかは推測するしかないが，彼らの経歴からすると，1850 年以降ヒューウェル哲学に基づく力学に対する批判的な考えが若い世代にめばえ，そこから，サンデマン，ラン，そしてトムソンとテイトらによる意欲的な力学教科書が生まれ，今日我々が知るような "ニュートン力学" が形成されたのだろう。彼ら "若い" 世代にとって，ヒューウェルは乗り越えるべき巨大な存在だったのである。

そしてまた，マクスウェルは，運動の第 2 法則を定式化するに当たって，〈力と加速度の関係〉ではなく，〈力積と運動量の関係〉として定式化した。マクスウェルはこの力積概念に基づく運動方程式を入門書だけでなく，研究書でも用いていた。力積概念が動力学の理解を深めるために本質的な概念だとマクスウェルは考えていたに違いない。そのことは，彼のトムソンへの手紙からもうかがえる。しかし，マクスウェルのその意図は継承されることなく，現代の "ニュートン力学" の体系の中では力積概念は衝撃力のみで使用される概念となっている。それは，この力積が衝撃を意味する語 impulse があてられていたことによるのではないかと推測される。マクスウェルが考えていたように，力積概念が古典力学を理解する上で真に有効な概念であったとすれば，これはきわめて残念なことであった。

注

1) [Thomson 1867].

2) [田村 1948]., p.66.

> ニュートンのプリンキピア以後の力作であり，説明の仕方，用法に於いて極めて独創的なものがあり，ポアンカレーの言う如く，他の書物に書いていない理論，何故かはわからないが大陸のこれに類似した書物にも引用されない理論が見出されるのであった。ヘルムホルツとウェルハイトとによってドイツ語に翻訳された。

3) [ハーマン 1991], 原著 p.69, 訳書 p.76.

邦訳書から該当部分を引用する。

> トムソンとテイトの『自然哲学論考』(1867) は，解析的な動力学を再編成するものであった。ラグランジュの一般化された運動方程式の物理的な基礎を重視し，解析的な動力学の枠組みの中にエネルギー保存則を統合したのである。こうした方法は，英国の物理学者たちが好んでいた「動力学的な」理論，すなわち，特定の力学的モデルを構築する替わりに解析的な動力学にもとづいた説明を与えようとする理論に対して，大きな衝撃を与えた。

4) [ハーマン 1991], 原著 pp.69-70.，邦訳 pp.76-77.

邦訳書から該当部分を引用する（この邦訳では，kinetics の訳語に kinematics と同じ「運動学」があてられている)。

> トムソンとテイトは，まず一般化された運動方程式を導き，ついでそれを，問題を解くための解析的な定理として用いるという，徹頭徹尾抽象的なアプローチは採用しないで，ニュートンの運動法則から出発する物理的なアプローチを採用した。彼らは，力の平行四辺形の原理も仮想仕事の原理もダランベールの原理も，解析的な定理として導き出されるのではなくて，すべて（実験によって確立された物理学的な観念である）ニュートンの運動法則から導き出されるのだと考えた。
> トムソンとテイトは，運動と力の作用を取り扱うことが，数学的な力学の根本的な課題であると考えた。それは，数学的な力学を，運動学〔kinematics〕（運動についての抽象的な研究）と動力学〔dynamics〕（力という作用因を扱う科学）に区分することと対応していた。力について研究する動力学は，さらに静力学〔statics〕（力は静止状態を保つ働きをする）と運動学〔kinetics〕（力は運動状態を保つ働きをする）に分けられた。トムソンとテイトは力を重視していたことが，静力学を動力学の一部門の地位に位置づけていることから窺い知ることができる。彼らは，静力学はニュートンの運動の第二法則から導き出されるべきであり，力が動力学的な平衡を保っているのだと理解されるべきである，と主張した。

5) [Thomson 1867], ii.

> 原文：
> We adopt the suggestion of Ampére, and use the term *Kinematics* for the purely geometrical science of motion in the abstract. Keeping in view the proprieties of language, and following the example of the most logical writers, we employ the term *Dynamics* in its true sense as the science which treats of the action of *force*, whether it maintains relative rest, or produeces acceleration of relative motion. The two corresponding divisions of Dynamics are thus conveniently entitled *Statics* and *Kinetics*.

6) [Smith and Wise 1989], pp.361-362.

7) [Smith and Wise 1989], pp.376-378.

8) たとえば，研究社『リーダーズ英和辞典』[英和 1996]. では，Kinetics の〈【理】—理学, 物理学用語〉としての訳語は「動力学」，Dynamics では「力学，動力学」となっている。

9) [Thomson 1867], p.178.

242 項にその記述がある。

> the two centuries which have nearly elapsed since he first gave them have not shown a necessity for any addition or modification.

10) [マッハ 1969], p.170.

11) [Thomson 1867], p.178.

> 原文：
> The first two, indeed, were discovered by Galileo, and the third, in some of its many forms, was known to Hooke, Huyghens, Wallis, Wren, and others; before the publication of the *Principia*.

12) [Thomson 1867], p.178.

242 項に以下のような記述がある。

> Of late there has been a tendency to split the second law into two, called respectively the second and third, and to ignore the third entirely, though using it *directly* in every dynamical problem ; but all who have done so have been forced *indirectly* to acknowledge the completeness of Newton's system, which is really Newton's rejected third law in another form. Newton's own interpretation of his third law directly points out not only D'Alembert's principle, but also the modern princples of Work and Energy.

13) [Thomson 1867], p.183.

> 原文：
> 259.It appears, lastly, from this law, that every theorem of Kinematics connected with acceleration has its counterpart in Kinematics.
> For instance, suppose X, Y, Z to be the components, parallel to fixed axes of x, y, z respectively, of the whole force acting on a particle of mass M, We see by §212 that
> $$M\frac{d^2x}{dt^2} = X, M\frac{d^2y}{dt^2} = Y, M\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$
> or
> $$M\ddot{x} = X, M\ddot{y} = Y, M\ddot{z} = Z$$

14) [Tait 1856], p.25.

> 外力がはたらいていない質点は，静止したままかあるいは一直線上を一様に運動する
>
> *A particle acted on by no external forces will either remain at rest or move uniformly in a straight line.*

15) [Tait 1856], p.26.

> *If any number of forces act upon a particle in motion, the effect of each forces, in respect to intensity and direction, in altering the particle's motion, is the same as if it had acted singly on the particle at rest.*

16) [Tait 1856], p.27.

> *The measure of a force if uniform is the momentum generated by it in an unit of time; if*

variable, that which would have been generated by the force if at any instant it had continued uniform for an unit of time.

17) [Tait 1856], p.28.

18) [Tait 1865], viii.

When I wrote that Chapter, in 1855, I had not read Newton's admirable introduction to the Principia; and I endeavoured to make the best of the information I had then acquired from English and French treatises on Mechanics.

19) [Tait 1865], viii.

the whole of the second Chapter has been rewritten, upon the basis of the corresponding portion of Thomson and Tait's Natural Philosophy which, though as yet unpublished, was printed off nearly two years ago.

20) [Tait 1865], p.43.

21) この部分を以下に引用する。

[Tait 1865], pp.51-52.

結局の所，この法則から，すべての加速度に関する運動学 (Kinematics) のすべての定理は，動力学 (Kinetics) にその対応するものがあることがわかる。
つまり，たとえば (§18)，曲線に沿って運動する質点にはたらく力は，曲線の接線と曲線の中心方向の 2 つの成分に分解できる。その大きさは運動量の加速度の大きさと，運動量と曲線の中心に対する角速度の積である。等速度運動の場合，このうち前者は消去され，全体の力は運動方向に垂直である。運動方向に垂直な力が働かなければ，曲線運動はせず直線に沿って運動する。
したがって，質量 m の質点に働く力の x, y, z 座標 3 方向の成分を X, Y, Z とすると，次式を得る。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, m\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

この後の章の多くで，運動する質点の質量を 1 単位と仮定することによって，これらの方程式がいくぶん単純化されるだろう。もしそれができないのであれば，X, Y, Z を**単位質量**に働く力の成分と考えて，前の式を以下のようにすると便利なことがある。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mX, \&\text{c.};$$

当然のことながら，上式から m は消去される。
[力を「**加速**力」,「**動**力」としばしば分けることによって，混乱が持ち込まれることがある。そしてしばしば前者は **1** つの次元を持ち，後者は **4** つの次元を持つと言われることさえある。しかしながら実際は,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

のような式は動力学的にも，単なる運動学的にも解釈可能である。運動学的には，これらの項の意味は明らかである。動力学的には，質量の単位は左辺の係数として理解されるべきで，その場合，X は物体にはたらく力の単位質量あたりの x 成分と理解されるべきである。]

22) [Mach 1883], p.285，伏見訳 [マッハ 1969]. の該当ページは p.271, 岩野訳（公輪社版）[マッハ 1976]. は p.221，青木訳 [マッハ 1931]. は p.290.

23) [独和 2000].

24) [Belanger 1847], v.

原文：

Un théorème général et sécond (pag.184) montre le rôle que joue le produit force par la durée de son action. J'ai jugé convenable de donner un nom à cette quantité pour fixer l'attention des élèves sur son importance.Il m'a paru que la déigner, comme on le fait quelquefois , par les mots *quantité de mouvement*, qui signifient proprement le produit de la masse d'un corps par sa vitesse , c'était s'exposer à confondre un effet avec sa cause : j'ai préféré le mot *impulsion*, dont je n'ai fait que préciser le sens en mécanique.

25) [Belanger 1847], p.40.

26) [Belanger 1847], pp.40-41.

該当部分の節を全文引用して訳出すると以下の通り。

§2. 力の impulsion について
物体に力が作用するときの時間は，力の大きさが別の大きさに変化するための間隔があることは当然である。
長い間，科学者たちは，自然界には力の種類が二つあると認めてきた。1 つは，時間なしに，すなわち途中経過がなく，突然の速度変化を物体に生じさせるものである。もう一つは，とぎれることなく連続的に物体に作用し，ある程度の時間の後に，その結果大きな影響を物体に与えるものである。彼らは前者を**瞬間力** (*forces instantanées*) あるいは衝撃 (percussion)，後者を**加速力**(*forces accélératrices*) と呼んだ。
しかし，〈自然界のすべての作用は連続的である〉とする正常な物理学では，自然界に瞬間の力というものを決して認めてはおらず，ある時間絶えず作用するような力だけしか認めないのである。その時間はときには非常に短く，またときには際限なく長い。そして力の大きさは，非常に大きくなりうるが，それにもかかわらず常に n67 で定義したキログラムと比較可能である。(注*)
注* 瞬間力を拒絶するこれらの学説は，ポンスレ氏が 1825 年のメッツ砲術工学学校 (l,école de l'artillerie et du genie de Metz) の講義で言明し，コリオリが 1829 年に出版した『力学の計算法について』(Traité du calcul de l'effet des machines) で言明した。このことは，ポアッソンの 1835 年の『力学』(Traité de mécanique) 第 2 版で認められた。

原文：
§2 *De l'impulsion d'une force.*
Toute force agissant réellement sur un corps a nécessairement une certaine durée pendant laquelle la force peut d'ailleurs varier d'intensité.
Longtemps les savants ont admis qu'il existait dans la nature deux espéces distinctes de forces,les unes supposèes sans durée, et capables de produire dans les corps des changements brusques de vitesse sans les faire passer par les états intermédiaires; les autres agissant sans interruption, d'une manière continue, et ne produisant par conséquent un effet sensible qu'après un temps appréciable.Ils appelaient les premières *forces instantanées* ou de percussion:les drnières , *forces accélératrices.*
Mais une saine physique constant que toutes les actios sont continues dans la nature , on s'accorde généralement aujourd'hui à ne plus admettre dans la science les forces instantanées, et à ne reconnaître que des forces dont l'action a toujours une certaine durée,quelquefois très-petite,quelquefois indéfiniment prolongée, et dont l'intensité, qui peut etre très-grande, est néanmoins toujours comparable à une même unité telle que le kilograme défini au n 67.
(*) Cette doctrine , qui repousse les forces instantanées, a été prosesée par M.Poncelet dans ses leçons à l'école de l'artillerie et du génie de Metz dés 1825, et par Coriolis dans son Traité du calcul de l'effet des machines , publié eu 1829. Elle a été admise par Poisson dans la seconde édition de son Traité de mécanique, en 1835.

27) [Lunn 1859], pp.87-88.

151. これまでわれわれが考えてきた〈有限な力を要する力〉は，質点に関知しうる速さを引き起こす。ところが，力が関知できないほどの短い時間に働くのにもかかわらず，測定可能な速さを引き起こすことがある。このような力を impulse と呼ぶ。もちろん，これは他の力を測定するのと類似の方法で測ることができるので，その大きさは，それが生み出す加速度に比例するだろう。加速度は単位時間に生み

出す速度なので，この場合は，その単位時間に生み出す速度を想定することになる。しかし，そうすると，それは無限に大きくなってしまうので，われわれは impulse を測定する別の方法を求める必要がある。いま加速度が一定のとき，われわれは $v = \alpha t$ を得る (21 項)。したがって，一連の加速度において t が等しいとすると，v は α によるので，impulse の大きさは**割り当てた時間**に生成した速度による。それぞれの impulse がはたらく〈関知できないほど小さな時間〉を，みな等しいと考えると，impulse の大きさは，**実際に生成する**速さによって測られることになる。ただし，これは物体の質量が同じという前提がある。異なる質点に impulse が作用し，同じ速度が生まれたときは，impulse の大きさはもちろん，106 項で述べたように，物質量の大きさによって変化する。そこで，もし単位 impulse が質量 M' の物質に働いて速度 v' が生まれたとき，質量 M の物体が速度 v を生成する impulse を R とすると，

$$R : 1 :: Mv : M'v'$$

M' と v' は任意なので，双方を 1 とすると，単位 impulse は，単位質量に作用したとき単位速度を生成する量として決定することができ，われわれは，$R = Mv$ を得る。したがって，impulse の大きさはそれによってうまれる**運動量**である (109 項)。

原文：
151. The forces we have hitherto considered have required a finite time in which to act in order that they might generate an appreciable velocity in a particle, but cases occur in which forces are brought into action for an inappreciably small time and yet a finite velocity is generated: such forces are called impulses. Of course they will be measured in an analogous way to that in which all other forces are measured, and therefore their measures will be proportional to the accelerations they would produce, i. e. to the velocities they would generate in an unit of time, supposing them to be constantly acting for that unit. But these would be infinitely great, therefore we must seek for some other measure of an impulse. Now with an uniform acceleration, we have $v = \alpha t$ (Art. 21); therefore if t be the same for a set of accelerations, v will vary as α, and therefore the measure of an impulse will vary as the velocity it generates *in any assigned time.* We shall assume that the inappreciably small times for which impulses act are appreciably equal; then the measure of an impulse will vary as the velocity it *actually generates.* This is as long as the same quantity of matter is acted on: and when different particles are acted on and the same velocity is generated, the measure of an impulse will of course vary as the measure of the quantity of matter, as in Art. 106. Then if with the unit of impulse acting on a particle of mass M' a velocity v' is generated, and with the impulse R acting on the mass M a velocity v is generated, we have

$$R : 1 :: Mv : M'v'$$

As M' and v' are arbitrary, let them both = 1 ; this fixes the unit of impulse to be that which generates the unit of velocity when acting on the unit of mass, and then we have $R = Mv$: therefore the measure of an impulse is the *momentum* produced by it (Art. 109).

28) [Parkinson 1874], p,164.

29) [Todhunter 1874], p.271. Statics の部に続く Dynamics の部の，「4 章物体の正面衝突」の記述。

93. これまでわれわれは，力を与えられた時間内に生成される運動量で測定されるものとして述べてきた。そして，もっとも身近な力は重力である。それはわれわれが認知しうる時間に適度の速度を産み出す。しかし，認識できないほど短い時間に，とても大きな速度を産み出すかあるいは消滅させる力がある。たとえば，バットによる打撃でクリケットボールが打ち返されるとき，ボールのもとの速度が消滅させられて，新しい速度が生成される。そしてバットがボールに作用する時間はとても短いのである。同様に，弾丸が銃から発射されるとき，非常に大きな速度が，きわめて短い時間に産み出される。このような効果を産み出す力を**衝撃力** (*impulsive force*) とよび，次のように定義する。**衝撃力は，不確定の短い時間に有限な運動の変化を生む力である。**
94. そこで，衝撃力と他の力とは，その**程度**が異なるだけである。衝撃力は，とても短い時間に激烈に作用する力である。
運動の法則は，運動の変化を生む力の強さがどうであれ成り立つので，この法則を衝撃力に適用することができる。

しかし衝撃力が作用する時間が非常に短いので，ある時間に産み出された運動量によって力を測定することはできない。そこで,〈衝撃力はそれが産み出す全運動量によってはかる〉と，一般に決められている。

30) [Gross 1876], pp.85-86.

31) [Ziwet 1894], pp.2-3.

32) [Maxwell 1876].

33) [Maxwell 1870], p.88.

34) [Maxwell 1873].

35) [Maxwell 1876], p.39.

原文：
The change of momentum of a body is numerically equal to the impulse which produces it, and is in the same direction.

36) たとえば以下のような記述が見られる。[Thomson 1867], p.274.

物体の運動を厳密に決定したり,〈どれくらい運動が偏るか〉といった問いに答えるのに，**時間積分**の知識だけで十分である。たとえば〈力がはじめに非常に大きく，やがて徐々に減少する〉ような場合と,〈力が非常にゆっくりと増加し，とつぜんやんでしまう〉ような場合とは，時間積分が同じだったとしても，その効果は非常に違ったものになる。しかし物体に，水平方向に “強打を与えた” 場合，手による場合でも，槌またはその他硬いものを使った場合でも，力の作用は，つりひもが垂直からのぶれを生ずる前にやんでしまうだろう。重力も，他のいかなる力も，衝撃の効果を知覚できるほどに変えることはできない。したがって，衝撃後の全体の運動量は，この場合は，単純に “時間積分” にきわめてひとしくなる。

37) [Harman 1995], p.423., “LETTER TO WILLIAM THOMSON 19 AUGUST 1868”

原文：
Why do you talk of the time integral of a force. Why you not say Impulse and take Impulse of a Force=Momentum of a System or Body as the general eq^{n} of Dynamics.

38) [Loney 1891], p.80.

39) [Love 1897], p.90.

40) [Ziwet 1897], p.36.

41) [Perry 1898], p.264.

42) それぞれ該当箇所を引用すると以下の通りである。

・ロネイ『動力学基礎論』(1891)

[Loney 1891], p.80.

運動の第 2 法則を

与えられた時間における質点の運動量の変化は，同じ時間内に質点にはたらいた the impulse of the force に等しい。

と表現している.

・ラブ『理論力学』(1897)[Love 1897], p.90.

81.Impulse of a force
$\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ を $t = t_0$ の瞬間の速度の成分とする。上記を積分して，

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^{t} X dt \text{ と，同様の二式。}$$

を得る。
ある時間の最初と最後の間で，時間積分したものをその時間の，力の impulse と呼ぶ。それぞれの成分は，それぞれの方向の力の成分を，同じ時間における時間積分することによって得られる（非局所的な unlocalised）ベクトルである。
上記の式を言葉に置き換えると以下のようになる。ある時間の質点の運動量変化は，その時間に作用する力の impulse に等しい。

・ツウェット『理論力学の基礎』(1898) [Ziwet 1897], p.36.

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} \qquad (6)$$

を導いたあとに，

61. 式 (6) を積分することによって，われわれは，

$$\int_{t}^{t'} F dt = mv' - mv \qquad (7)$$

を得る。
一定の力と，それが作用する時間 $t' - t$ **との積** $F(t' - t)$ あるいは，力が変化する場合は，**時間積分** $\int_t^{t'} F dt$ をその時間における力の **impulse** と呼ぶ。
式 (4) と (7) から，**ある時間の impulse は，その時間の運動量変化に等しい。**

と，わざわざ運動方程式を積分形に書き換えた上で，運動量と拡張した impulse の関係を記述している。

・ペリー『応用力学』(1898) [Perry 1898], p.264.

210. さまざまな力がそれぞれの時間で物体に作用することによって，速度が生じたり消滅するとき，それぞれの力と作用時間をかけ（この積を **impulse** と呼ぶ），その和は，生成または消滅した運動量全体と等しいはずである。〈物体に運動をおこした力〉が作用する**時間**を知れば，物体の運動量を計算することによって運動を決定することが，一般にできる。〈物体に運動を起こした力〉が作用した距離を知れば，物体の運動エネルギーを，まず知ることができる。

43) [Holbrow 1999], p.53.

44) [Duff 1921], p.32.

45) [Fuller 1937], p.220.

46) [PSSC 1669].

終章

力学入門教育の改革にむけて

5.1　はじめに

これまで，1800 年代の英国ケンブリッジの力学教科書における運動法則と運動方程式に関する記述を，大陸流解析学導入以前（第 I 期），大陸流解析学導入と同時に独特の運動法則を中心に据えた力学教科書が影響を与えた第 II 期，現代的な運動法則と運動方程式による力学教科書が登場した第 III 期，今日の力学教科書のルーツとされる教科書が登場した第 IV 期といった時代区分に添って各章に分けて論じてきた。

最後にこの各章で論じた内容を総括し，その内容に考察を加えた上で結論を述べる。その上で，その結論をふまえた現代の力学入門教育の改革についても述べる。

5.2　英国ケンブリッジ力学教科書における“運動の 3 法則”の成立

5.2.1　第 I 期　大陸流解析学導入以前（〜1818，第 1 章）

第 1 章では，まず，ケンブリッジの 1800 年代初期の標準教科書とされたウッド『力学の原理』第 5 版 (1812) の内容を検討した。

ウッドは「運動の法則」と題する章を，冒頭の諸概念の定義に関する章の次においており，力学の出発点とみなしていたと考えられる。運動の 3 法則の記述は，ほぼニュートン『プリンキピア』に準じるものであったが，第 2 法則は，ニュートンが起動力（力積）と運動変化の関係だったのに対して，ウッドの表現は力と速度変化の関係となっていて質量に関する記述が欠落していた。

そしてその解説では，力と運動の合成法則が強調されていた。ニュートン『プリンキピア』もまた，第 2 法則で，力の合成法則を詳しく説明しているので，その影響と考えられる。また，ウッドは第 3 法則で作用を起動力として解釈し，衝突実験を例に運動量の保存と関連づけ，そこで質量と運動の関係を記述していた。第 3 法則で衝突実験を例に出し，運動量と関連づけるのは，『プリンキピア』の運動の法則の解説でも述べられていたこと

である。

このように，ウッド『力学の原理』で記述された運動の 3 法則は，『プリンキピア』の運動の 3 法則の影響をうけ，その表現も似ていた。ただし，ウッドは第 2 法則で力と速度変化のみをのべ，第 3 法則で起動力とともに質量との関係を述べるという変更を行っていた。

また，ウッド『力学の原理』における力学の基本方程式は，速度と力，時間の比例関係として $\mathrm{V} \propto \mathrm{FT}$ という形式で与えられていた。この式は，力学問題を解く基本方程式として使用されてはいたが，加速力概念を使用していたため，質量の因子がなく，また比の形式であったために不十分であったし，運動の 3 法則とも結びつけられてはいなかった。

次に，このウッドとほぼ同時代で，ウーリッチ王立軍事アカデミーで教鞭をとったグレゴリー『力学論』第 3 版 (1815) の内容を検討した。グレゴリーもまた，『プリンキピア』で記述されていた運動の 3 法則をほぼ踏襲していた。グレゴリーの場合，第 2 法則と力の定義が結びつけられていたが，そこで参照されていた力の定義は，「運動変化の原因」とされており，質量のことはふれられていなかった。後の章で「速度に質量をかけた量」として力が定義され直すが，ここで定義される力は力積の概念であるし，直接第 2 法則と関連づけられたとは言い難い。

グレゴリーは，「一般的な変化運動の基本方程式」として，$\phi = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$（今日の形式で記述すれば $\phi = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$）を記述していた。ここでの力 ϕ は加速力の概念を用いていたために質量の因子が欠落していたものの，力学現象に適用する使われ方は，今日の運動方程式と同様の解法が用いられていた。

しかしそもそもグレゴリーは，一定の速さの運動は $\mathrm{F} \propto \mathrm{BV}$ を，一定の割合で変化する運動の場合は $\mathrm{FT} \propto \mathrm{BV}$ を，それぞれ基本方程式として使い分けていた (B は質量をさす)。したがって，式 $\phi = \dfrac{\ddot{s}}{\dot{t}^2}$ をすべての力学問題に適用可能な基本方程式とはしていなかったし，これらの式は運動の 3 法則と結びつけられてもいなかった。

5.2.2　第 II 期　大陸流解析学導入期（1819〜1849，第 2 章）

第 2 章では，ケンブリッジ大学に生涯勤め，当時の英国の知的活動に大きな影響を与えたウィリアム・ヒューウェルの書いた力学の教科書を時代を追って検討した。

ヒューウェルによる運動の 3 法則

ヒューウェルは，力学に関する処女作『力学の基礎』(1819) で，運動の 3 法則を

第 1 法則　慣性の法則
第 2 法則　力と運動変化の法則
第 3 法則　加速力と静力 (pressure) の比例および加速力と物質量の反比例の法則

とした。

この第 2 法則は，〈力と運動の合成法則〉となっており，ウッドの第 2 法則の前半部に相当する。ウッドの場合，この合成法則と〈力の大きさと運動変化の割合との比例法則〉が第 2 法則であったが，ヒューウェルは後者については第 3 法則で〈加速力と物質量の反比例則〉とあわせて表現していた。そして，〈静力学的な作用・反作用の法則（力と反力の法則）〉は，運動の法則から除外してしまった。

もともとウッドは，第 3 法則の作用・反作用の法則を，衝突の実験で証明する形にして，運動量の保存則として表現し，そこで慣性質量の概念を導入していた。そういった意味では，ヒューウェルはこのウッドの第 3 法則を引き継ぎ，第 3 法則から静力学的な概念を取り除いて，より純粋に動力学的な法則として慣性質量を導入するように第 3 法則を書き換えたとも言える。

第 3 法則の意味

この第 3 法則でヒューウェルは，pressure という用語を使用しているが，これは今日の presssure（圧力）という用語に割り当てられている〈単位面積あたりの力〉といった概念ではなく，〈重力との静力学的なつりあいによって測定される力〉（=静力）を意味していていた。つまりヒューウェルが表現した第 3 法則は，〈静力学的に測定された力〉＝静力と，〈動力学的に測定された力〉＝加速力とを物質量を比例定数として結びつけた法則であった。このように慣性の大きさで定義された物質量（慣性質量）は，重力で測定された〈物体の重さ〉と一致する。そこでこの第 3 法則は，静力と加速力の比例定数としての物質量が，物体の重さと等しいことを示す法則，つまり慣性質量と重力質量の一致を述べた法則とみなすこともできた。

第 3 法則のより簡潔な表記

その後ヒューウェルは，この第 3 法則の表現を改定して，

第 3 法則　静力と起動力の比例法則

という形式に書き換えた。当初，『力学の基礎』初版でヒューウェルが第 3 法則から作用・反作用の法則を除外し上記のような表現にしたのは，〈作用や起動力，運動量などといった新しい概念の導入をできるだけ避ける〉という意図があった。しかし，その場合の第 3 法則の表現は，〈加速力と静力の比例関係〉と，〈加速力と質量の反比例関係〉の 2 つを併記するという形式であった。しかし，このように起動力 (=質量×加速力）という用語を使用すれば，〈静力と起動力の比例関係〉というシンプルな形式で第 3 法則を表現することができるようになる。ヒューウェルはこの利点を優先したわけである。

〈力と運動の合成法則〉は〈静力と起動力の比例法則〉に含まれるか

ヒューウェルによる第 3 法則は，現代の第 2 法則とほぼ同等である。現代の運動法則では，ヒューウェルが第 2 法則とした〈力と運動変化の法則〉は，暗黙に第 1 あるいは第 2 法則に含まれているものとして，明示的には述べられていない。当時のフランスの著者た

ちが現代と同じように，この 2 つ（ヒューウェルによる第 2，第 3 法則）を一つにまとめて第 2 法則としていることは，ヒューウェルが論文「フランスの著者たちが述べている動力学の原理について」(1828) で批判的に紹介している。ヒューウェルはこの論文で，フランスの著者たちとは違ってこれらをなぜ別個の法則にしなければならないかについて述べている。その根拠の 1 つは，フランスの著者たちが〈力と運動の合成法則〉を証明する際に，衝撃力の大きさを力積と混同しているということにあった。そしてもう 1 つは，彼が第 2 法則とした〈力と運動の合成法則〉と，第 3 法則としていた〈静力と起動力の比例法則〉はたがいに独立で，一方を証明したからといってもう一方が証明できる性質のものではないとの主張にあった。

力学の公理体系化

1834 年頃からヒューウェルは，理性のみから導き出される "必然的真理" を，理性の外からの働きかけによってえられる "経験的真理" より上と見なし，力学を幾何学と同様できるだけ必然的真理の体系としようとし，その体系化を試みた。

彼はそこで，第 2 法則，第 3 法則を場合分けによって整理し，すべての動力学的な定義も公理から導き出されるような体系化をこころみ，ダランベールの原理も第 3 法則に組み込んだ。

運動方程式と第 2 法則

ヒューウェルは，1834 年の著書で，「第 2 法則の解析的言語への翻訳」として，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

を導出し，これを「運動方程式の導出」とした（X, Y, Z は力の x, y, z 座標成分)。その上で，この微分方程式を様々な力学問題に適用して解いた。彼はこの式を〈力学の基本方程式〉としていたのである。ただし，この式は加速力の概念を用いていたので，質量の因子がなかった。この式の導出法は，力と運動の合成法則を解析的に表現したものであった。

このヒューウェルの力学教科書のスタイル，特に 3 法則の表現は同時代の英国の力学教科書に大きな影響を与え，多くの教科書がその形式に倣うこととなった。

5.2.3　第 III 期　力学概念の現代的整理（1850〜1866，第 3 章）

第 3 章は，現代ではほとんどその内容について言及されることがないサンデマン『質点の運動論』(1850) とラン『運動論』(1859) に注目し，その内容について論述した。

サンデマン『質点の運動論』は，運動の 3 法則を

第 1 法則　慣性の法則

第 2 法則　力の動力学的効果と静力学的効果の比例法則

第 3 法則　作用・反作用（力と反力）の法則

として，当時かなり普及していたヒューウェル流の運動法則をニュートン流のものに回帰させた。具体的には，ヒューウェルの第 2・第 3 法則を第 2 法則に統合し，作用・反作用の法則を第 3 法則に復活させた。

ヒューウェルが第 2 法則を〈力と運動変化の法則〉，第 3 法則を〈比例定数＝慣性質量の導入〉として分離していたのは，〈両者が互いに独立であって，互いを導き出せない〉というのがその理由であった。それにたいしてサンデマンは，力と運動変化の比例関係を述べれば必然的に比例定数の存在は必然であり，その定義も同時に述べるべきだと考えた。

サンデマンはまた，これまで使用されていた “加速力” という用語を排除し，〈力の加速的効果〉あるいは単に “加速度” という用語を使用し，第 2 法則の解説では，静力学的な力 p と加速度 a，質量 m の関係式

$$p = ma$$

を導出した。

このように，サンデマン『質点の運動論』は，ヒューウェルによって普及した運動の 3 法則を本来のニュートンの表現に近い形に回帰させ，しかも今日運動方程式とされる関係式を第 2 法則と結びつけた当時画期的ともいえる教科書であった。

ただ，サンデマンが記述していた関係式 $p = ma$ は，今日の運動方程式のように〈すべての力学問題に適用しうる基礎方程式〉とされていたかというと残念ながらそうなってはいなかった。サンデマンは，運動の法則とは別の章で，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

を，「質点の自由運動の方程式であり，第 2 法則の解析的言語への翻訳」としている。これはヒューウェルの「第 2 法則の解析的言語への翻訳」と全く同じ式であり，質量の因子を欠いている。ただしサンデマンはヒューウェルとは違い，X, Y, Z を「力の加速的効果」と呼んで力とは厳密に区別し，この式を使い，質点に関する力学問題を解く基本方程式としていたのである。

このサンデマン『質点の運動論』の多くの特徴を引き継いだのが，ラン『運動論』であった。ランは序文で宣言しているよう，サンデマンの教科書から多くを学び模倣した上で，さらに多くの改良を行った。これはまさに創造的模倣ともいえる行為であった。

ランは，サンデマンの運動の 3 法則をうけついだ上で，サンデマンの使用していた「力の静力学的効果，加速的効果」という用語も使用せず，単に「力，加速度」という用語に統一した。そして第 2 法則と

$$F = ma$$

を結びつけた。しかも，力学問題を解く際に，この式とか微分方程式を結びつけてもいた。

このラン，サンデマンの教科書にはさらに現代の教科書の原型ともいえるある特徴を備えていた。それは〈運動学 (Kinematics) の独立〉である。〈力と運動の関係〉を論じる前に，運動の数学的扱いである運動学に一章がもうけられるのは，現代の多くの力学教科書

がとる構成である。しかし，サンデマン以前の力学教科書でこの形式をとる書物はほとんどみられなかった。この〈運動学の力学からの分離〉の必要性は，フランスのアンペールの主張として、ヒューウェルが『帰納的諸科学の哲学』(1840) で英国に紹介していたことである。サンデマン，ランらはこのアンペールの主張を受けて，力概念に言及しない「運動学」を冒頭に分離したのだと思われる。両者とも，本文に運動学 (Kinematics) の用語は記述されてはいないが，サンデマンの序文には，「運動学的」(Kinematical)，ランの序文には (Kinematics) の語がみられ，運動学独立の必要性とその意図が述べられている。

5.2.4　第 IV 期　現代的力学教科書のルーツ（1867～，第 4 章）

第 4 章は，ラン『運動論』(1859) の 8 年後に出版されたトムソン&テイト『自然哲学論』(1867) と，マクスウェル『物質と運動』(1876) の 2 冊を中心に論じ，現代の物理教科書への影響と今後の展望について論じた。トムソン&テイトは，サンデマンやランの構成をさらに推し進め，運動学 (Kinematics) と題する章に，第一分冊の本文 437 ページ中 204 ページを割り当てた。運動の 3 法則は，ニュートン『プリンキピア』からほぼそのままの形で記載されおり，第 2 法則に運動方程式

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = X, M\frac{d^2y}{dt^2} = Y, M\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

が結びつけられている。

マクスウェルは，著書『物質と運動』(1876) で，これまで衝撃力を測定する量であった impulse を拡張して，通常の力にも適用できる量として再定義し，impulse による運動方程式を提唱した。マクスウェルがこのように運動方程式を再定式化したのは，彼が拡張した力積 (impulse) 概念の有効性を強く認識していたからだと思われる。このマクスウェルの〈力積による運動方程式〉は，1900 年代になっても，いくつかの代表的な教科書に継承されたが，現代ではほとんど忘れ去られてしまっている。その要因として，impulse という用語がもともと衝撃をイメージする用語だったことが推測される。

5.3　考察と結論—力学教科書における “運動の 3 法則” の形成

5.3.1　考察：研究方法の確認

本研究は，〈古典力学の基本原理を，ニュートンの “運動の 3 法則” におく力学教科書〉が，1800 年代の英国ケンブリッジ大学において，大陸流解析学に基づいた力学が輸入される過程で形成されたとの予想のもとに展開した。

前節の総括でわかるように，第 I 期では，代表的な英国の力学教科書では，“運動の 3 法則” は，力学の出発点の位置に置かれていたものの，そもそも〈すべての力学問題に適用できる式〉という位置づけの力学の基本方程式（運動方程式）は記述されていなかった。

それが第 II 期になると，ケンブリッジにおけるヒューウェルの標準的力学教科書で，不十分ながらも〈力学の一般的な基本方程式〉として運動方程式が記述され，“運動の法則” と結びつけられるようになった。第 III 期，第 IV 期では，ケンブリッジを舞台とした力学教科書で，〈現代的な力の概念にもとづく運動方程式〉が “運動の 3 法則” と明確に結びつけられるようになった。

〈1800 年代英国ケンブリッジにおける力学教科書の変遷を中心に論じる〉という，当初設定した方法論によって，本研究の目的は達成されたと考えていいだろう。

5.3.2　結論：力学の出発点としての “運動の 3 法則” の形成

これまで論じた内容によれば，ただ 1 冊の教科書あるいは 1 人の執筆者に，〈第 2 法則を力学の基本方程式と等価な法則とした〉功績を与えるわけにはいかないことが理解されるだろう。ヒューウェルは，「第 2 法則の解析的言語への翻訳」という形で，第 2 法則と基本方程式（運動方程式）をむすびつけたが，その式には質量の因子が欠けていたし，“運動の 3 法則” の形式も今日のものとはかなり形式が違っていた。サンデマンやランは，“運動の 3 法則” を整理し，式 $F = ma$ を第 2 法則と結びつけてはいたが，その解析的表現や力学問題への適用という面では不十分であった。だからといって，最終的に今日の力学教科書の原型ともいえる教科書を執筆したトムソン&テイトやマクスウェルだけにその功績を与えるのは，それ以前の功績を低く評価しすぎである。

結局，〈運動方程式を基本方程式とし，それを第 2 法則と結びつけた教科書〉は，1800 年代英国の〈ニュートンの “運動の 3 法則” 重視〉という土壌での，ヒューウェルからマクスウェルまでの一連の継承の結果，力の概念，数式的表現，法則の整理などいくつもの課題が解決されていく中で形成されたというほかはない。

したがって，この形成過程全体をもって，本研究の目的である「運動の 3 法則を基本原理とする物理教科書の形成過程」が明らかになったと考えられる。

5.3.3　今後の課題

序章で述べたように，現在ニュートン力学とされる体系は，エネルギー概念，剛体力学，解析力学などを含んだ広範な体系となっている。本研究は，その “ニュートン力学” の入り口である “運動の 3 法則” が力学の出発点とされるようになった経緯を明らかにした。今後は，この “ニュートン力学” の体系全体が成立した過程が明らかにされることを期待したい。

たとえばエネルギー概念については，トムソン&テイト『自然哲学論』によって，〈仕事と運動エネルギーの概念〉や力学的エネルギー保存則が力学原理と結びつけて再構成されたことがハーマンやスミス&ワイズによって論じられている[1)]。

本論文で見たように，グレゴリー，ヒューウェル，サンデマンの教科書でも，エネルギー積分に相当する式が有用な式として用いられていた。エネルギー概念は 1800 年代に成立

した概念であり，トムソン&テイトによってはじめて力学教科書に組み込まれた可能性は高い。その検証と，その後の教科書への影響・定着の過程もまた，興味深い課題である。

また，運動方程式 $F = ma$ が〈すべての力学問題に適用できる式〉として力学教科書に記載されるようになったのは，英国においては第 2 法則と結びつく形でまずヒューウェルが “加速力” 概念に基づく不十分な形式でおこない，それがランやトムソン&テイトによって完成されたことを明らかにしたが，大陸での事情については全く触れることが出来なかった。大陸ではいつごろ運動方程式が〈すべての力学問題に適用できる式〉として力学教科書に記載されるようになったのか，その事情も明らかにするべきだろう。そのためには，特にエコール・ポリテクニクでの力学教育について検討すべきだと思われる。

マクスウェルが提唱した〈“拡張された力積概念” による運動方程式〉の現代までの力学教科書への継承と断絶については，第 4 章で言及してはいるが，さらに豊富な資料による検証が必要だと思われる。その中で，日本の物理教科書への力積概念の輸入についても明らかにされるべきである。

本研究は，1800 年代に古典力学が “ニュートン力学” として形成された歴史の一部として，〈物理教科書において “運動の 3 法則” が基本原理として形成された過程〉についてを明らかにした。本研究の根本的な動機は 0.1.2 節で述べたように，「今もなお困難とされている力学入門教育を再構築するための指針」としたいと考えたからである。

最後に次節で，本研究で明らかにしたことが，どのように現代の力学入門教育に役立てられるかについて論じておく。

5.4　現代の力学教育における “拡張された力積概念” の復活

5.4.1　日本における力積概念の輸入と継承

現代の力学教育の改革に言及する前にまず，日本の物理教科書への力積概念の輸入について，これまで筆者らによって明らかにされていることを論じておく[2)]。

日本で物理学の研究・教育が本格的に始められるようになったのは，明治維新 (1868) 以後のことであるが，その前後の訳語を見ると，堀龍之助『英和対訳袖珍辞書』(1862)[3)]では，「Impulse　Impulsion　進ませること，励ますこと」，明治 2(1869) 年の『薩摩辞書』(1869)[4)]では，Impulse の訳語は「衝力」となっている。

また，明治 7 年リッテル述／平岡盛三郎訳『物理日記』(明治 7(1874) 年 3 月序)[5)]，明治 12 年飯盛挺造 訳編『物理学』上編[6)]などにも力積に関する記述は見あたらない。

東京大学が最初の物理学科の卒業生を出したのは，明治 11(1878) 年のことであり，ようやく日本人の物理学者が出る様になった。そこで，東京数学物理学会では物理学訳語会を組織して明治 18 年から数回会合を持ち，明治 21(1888) 年に『物理学述語対訳字書』[7)]を刊行した。

この物理学訳語会の議事録によれば，明治 18(1885) 年 2/25 日の会合では，Impulse の訳語は「衝突力」と決められている。しかし，明治 21(1888) 年に刊行された『物理学述

語対訳字書』では，Impulse の訳語は「力積 Ryokuseki」とされている。

このときには，もうすでにマックスウェルの『物質と運動』(1876) は出版されていた。そこで，物理学訳語会では，明治 18(1885) 年 2 月 25 日の会合で，一度 impulse の訳語を「衝突力」と決めたあと，1888 年にその成果を『物理学術語対訳字書』にまとめたときには，その訳語を「力積 Ryokseki」とすることが出来たのではないだろうか。これは，日本における「力積」概念の歴史にとって幸運なことだったといえるだろう。

なぜなら，英語で impulse というと，どうしても「瞬間的な作用」というイメージが伴ってしまう。しかし「力積」はそうではない。後進国日本はその点とても有利だったことになる。

それでは，その後，明治中期の日本の物理学者たちには，この「力積」という用語は普及しただろうか。

この時期にもっとも多くの物理の教科書を書いたのは 1888 年に東大物理学科を卒業した木村駿吉であるが，その『新編物理学・上巻』(1890) の「67. 第二運動則，加速度」の節には，

> 静止せる物体が大きさにおいても方向においても変ぜざる力によって常に働かれおれば，漸次その速度を増加して一直線上に運動す。この直線は力の働きの道と同じく，その速度はその運動せる時間に比例して増加し，時間の単位（たとえば一秒間）前後における速度の差を〈運動の加速度〉という。………

などとあるが，力積=impulse の語はない。

それ以外の著者たちもなかなか「力積」という言葉を使おうとはしなかった。

調査した文献の中で日本で出版された物理書で「力積」という言葉がはじめて見られるのは，アルフレッド・ダニエル原著／木村駿吉補訳『(物理学参考書）物理学原論』(1892) であるが[8)]，これも例外的な使用例であって，本多光太郎，中村清二，田丸卓郎といった人々か執筆した明治期の代表的な中等物理学教科書の中にも「力積」の語は見いだされない[9)]。

その点，唯一とも言えるほど例外的なのは京都の第三高等学校の教授だった森総之助であった。彼の書いた『(実験及び理論) 物理学――重学及び物性論』(1905)[10)]，『(最新) 物理学講義』(1908)[11)]，『(中等) 物理学教科書』(1913)[12)]，『力学 A Treatise on Dynamics』(1915)[13)] のどれを見ても「力積」という言葉が出ている。

とくに最後にあげた『力学 A Treatise on Dynamics』(1915) は，旧制高等学校向きの教科書だが，ニュートンの「運動の第二定律」を，「運動量の変化は力積に正比例し，その方向は力の方向と一致す」と訳し，「上記の定律の原文中の Motion は今日の運動量の意にして impressed force は今日の力積の意なり。以下にこの二つの量を説明したる後，この定律を示す式を求めんとす」と書いている。

森総之助は，旧制中学校用の文部省検定教科書でも，その用語・概念をそのまま用いた。そして，全面的に力積の概念を重視して第二法則を展開し，「力積 Impulse」の項も設けて詳しく説明した。彼は，敗戦前の日本の物理学者のうちで，もっとも力積の概念を重視

した人と言ってもいい。

森の努力が成果をあげたのか，1930 年ころになると，他の著者の書いた中等物理の教科書，参考書の中にも「力積」という言葉が導入されるようになった。そして，敗戦寸前の 1944 年に事実上の「国定教科書」として出版された中等学校教科書 (株)『物象 (中学校用）4・第一類』[14] にも「運動量と力積」の項を設けられるに至った。その伝統が効果をあげたのか，敗戦後の新制高等学校の物理教科書には，のきなみ「力積」の語がはいるようになった。それは，1948 年に発表された文部省『高等学校の学習指導要項（試案）』[15] の中に「力積」の語が入ったことによるのかも知れない。

このようにして，現代の日本の高校物理でも，「力積」という概念を教えるようにはなった。しかし，現代の力学をあつかった教科書では，力積概念は衝突現象の項の部分だけに限定して登場し，運動方程式などを学ぶ場面では登場していない。

5.4.2　力積概念による力学教育の改革

今なお困難な力学教育

本研究で明らかになったように，多くの年月をかけて力学は今日の体系に整理されてきた[16]。このようにして多くの努力によって作り上げられて力学の体系ではあるが，それでも現代の力学教育は成功しているとは言い難い。その証拠に，高校や大学で力学を学んだ後でも，正しい力の概念がほとんど身についていないことが，数多く報告されている。

その種の報告でもっとも古いのは，1959 年の板倉聖宣（当時国立教育研究所・現私立板倉研究室）らの報告である。それによると，進学校の物理既習の生徒たちや一流大学の物理専攻の学生でさえ，その多くが正しい力学概念を身につけていなかった[17]。

また米国では，1980 年代に入って，クレメント (J.Clement) が，〈鉛直投げ上げをしたコインに働く力〉および〈宇宙船の運動に関する問題〉について調査を行い，米国物理教師学会 (American Association of Physics Teachers, AAPT) の論文誌『アメリカ物理学雑誌』(*American Journal of Physics, AJP*) に報告した[18]。その報告では，たとえば，〈鉛直投げ上げをしたコイン〉に働く力を答えさせる問題では，高校物理既習の工学部 1 年生の正答率は 12 %しかなく，大学で物理教育を受けた後も，7 割ほどの生徒は誤った考えのままであった。また，漂流する宇宙ロケットが一定時間だけ噴射した場合の，ロケットの軌跡を答えさせる問題では，物理既習の工学部学生でも正答率は 23% に過ぎなかった。この二つの問題は，後にコインプロブレム，ロケットプロブレムと通称されるようになり，その後の物理教育研究に大きな影響を与え，何度も引用される有名な問題になった。

このクレメントの研究に影響を受けたハロウン，ヘステネスらは，1885 年に力学概念に関する組織的な調査を行い，解答パターンを分類した論文を発表した[19]。ヘステネスらは，さらにそれらの問題を整理し，30 問からなる力学概念調査問題 (Force Concept Inventory ,FCI) を公開し，力学概念調査の基礎資料として広く使えるように提供している[20]。

筆者らはこの FCI を和訳して，日本の大学生・高校生に実施したが，それによれば一部

の受験エリートをのぞいた多くの学生が，力に関する概念調査の問題に正しく答えられないことが明らかになっている[21)]。このような調査結果によれば，現代においても一般教養としての力学教育は成功しているとは言い難いことは明らかである。

力学教育の問題点

このように力学教育が失敗に終わっている原因はまず，初学者にとってきわめて難解と思われる数学や，実験装置の複雑さが大きな原因となっている。

サンデマン，ラン，トムソン&テイトらがアンペールの提案を受けて，力学から必然的真理として運動学を独立させたことは，古典力学の整理に大きな貢献をしたことはまちがいない。力学を学ぶ上で，まず力概念を抜きにした運動学を学び数学的準備をするのは，数理科学を専攻する学生にとっては，その後の学習の助けになるはずである。

しかし今日では，理工系の専門教育に進まない多くの一般の人々にも力学教育が重要であることが認識されている。そのような数学そのものがあまり得意でない人々にとっては，正しい力概念を学ぶ前に，運動の数学的な取り扱いをあまりにもくわしく学ぶことは，あまり効果的とはいえない。

しかも現代の高校物理の教科書では，力学はまず運動学を学んだ後に落下運動を学び，重力による運動を数学的に取り扱いながら力概念を学ぶ。この重力からはいるという展開も，一般の人にとっては，重力があまりにも特殊な力であるために，力学現象一般とはほとんどつながらない。落下現象は「落ちれば落ちるほど勢いがつく」ということは直感的にわかっても，それが「力によるもの」とはなかなか認識することは出来ないのである。

したがって，落下運動をいくら数学的に詳しく論じても，それが近代的な力の概念を理解する助けにはならない。さらに，記録タイマーなどをつかった実験が普及しているが[22)]，これは装置が複雑で，しかも取り扱いが数学的である。構造が複雑であるため，摩擦も気になってくる。一見，精密な実験のように見えるが，逆に直感的にはいろいろなことが気になってしまう。

このように，数学的準備の問題，直感的ではない実験などによって，現代の力学入門教育では，正しい力概念を学ぶ前にすでに学習意欲が失われてしまっているのが現状である。

〈力積概念による運動方程式〉の有効性

このような苦難を乗り越えてようやく学生たちは運動の法則や運動方程式を学ぶ。そのとき学ぶ $F = ma$ あるいは $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ といった形式の運動方程式は，初学者にはとても分かりにくい。というのは，右辺の加速度という量は，二階微分，あるいは“変化率の変化率”といった量となっていて，実験的にも数学的にも直感的ではなく，入門者にはとてもとりつきにくい量だからである。

これに対して，マクスウェルらが提唱した〈力積概念による運動方程式〉は，力積という量が直感的に理解しやすいために，初学者には大変有効だと思われる。

しかも，この式は直感的であると同時に，“ 位置変化的な運動 ” 以外の，一般的な運動・変化にも適用できそうだという魅力もある。もともと古代の力学は，「あらゆる運動・変化と力との関係」を明らかにするという期待をもとに，“運動論” として研究されてきた。それに対してガリレオ以降の近代的な力学は，運動を位置変化に限定することによって成功した。

しかし，現代の人々が様々な変化を考えるときには，“学力” とか “生産力”，“交渉力” あるいは “生産速度”，“反応速度” といった用例から分かるように，今でも直感的に力学的概念を適用して考えるのが普通である。このように人々が位置変化的運動以外に力学の概念を使うときは，ほとんど古代中世的な力の概念にもとづいて考えている。古典力学は運動を位置変化に限定することで，古代の運動論的な力学を乗りこえることに成功したが，この成功はまた，注目する量の時間発展の法則を見いだすことによる成功でもあった。

そこでこの近代的な力学概念を位置変化的運動から解き放ち，時間発展の法則としてあらゆる変化に適用できるようになれば，古典力学の理解がより豊富なものになり，理科系以外のすべての一般的な人々にとっても力学教育が魅力的なものになるのではないだろうか。

近代的な力学の成功を時間発展の法則による成功と捉えるなら，力学概念にとって最も本質的な量は s（長さ，距離）ではなく，時間 t の方がより本質的な量となる。そのような意味でも入門教育における運動方程式の形式は，現代の力学教育で一般に用いられている $F = ma$ ではなく，$Fs = \frac{1}{2}mv^2$ でもなく，マクスウェル流の運動方程式 $F\Delta t = \Delta mv$ で与えるのがもっとも適切ではないかと思われる。

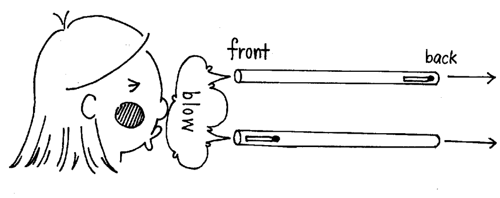
ブランジェやマクスウェルが力積概念を拡張し，〈運動量の時間変化と力積の関係式〉$F\Delta t = \Delta mv$ を力学の基本方程式として位置づけたにもかかわらず，現代ではほとんど廃れてしまっている一因は英語・フランス語・ドイツ語ではいずれも力積に impulse,impulsion,impuls といった衝撃を連想される用語が与えられていたからと考えられる。それに対して日本では欧米と違って，衝撃という意味を排除した〈力積〉という適切な訳語が当てられたのに，やはり現代では同じように力積は衝突現象だけに適用される概念となっているのは残念なことである[23)]。

吹き矢の力学による力積概念の導入

この力積概念を感動的に検証でき，しかも重力ではない力概念から動力学が学べる実験として，「ストローとマッチ棒を利用した吹き矢による一連の実験」[24)] を紹介し，その有効性を示そうと思う。以下にその実験を簡単に紹介する。

【問題１】

ストローとマッチ棒がある。このストローの孔にマッチ棒を入れて吹き矢を作る。このとき，マッチ棒をストローの先端に入れたときと，手前に入れたときとで，飛



び方はどう変わると思いますか。

ア． 先端に入れたときの方がよく飛ぶ。

イ． 手前に入れたときの方がよく飛ぶ。

ウ． どちらもほとんど変わらない。

もちろんマッチ棒は物理実験のために作られたものではない。ストローは，ある程度均一に作られているが，マッチ棒の方は頭部の薬品の部分は均一ではない。

したがって，完全に一様な結果が期待できるとは思えないかも知れない。そういう意味では，この問題は一見ずさんな実験である。ところが，そのずさんさにもかかわらず，実際に実験してみると大まかに言っていつも同じ結果になる。そこで，このずさんさはマイナス要因よりも，プラス要因となる。

というのは，「こんなずさんな実験でも，こんなに見事な結果がでるのか」という感動が得られるからである。「実験は精密な機械を使わなければいけない」と勘違いしている人がいる。しかし，予想の当否が明確にわかる実験結果を安定して再現できるなら，むしろ一見雑に見える実験装置の方がいいのである。

実験してみると，誰が何度やっても，〈イ．マッチ棒を手前に入れた時〉の方が，はるかによく飛ぶ。この実験の予想をとると，大学物理学科の学生でも３割ほどの学生が〈ア．先端に入れた方がよく飛ぶ〉と答える。息の力積の作用よりも，ストローの壁との摩擦を気にしてしまうようである。

【問題２】　こんどは〈２本分の長さのストロー〉にマッチ棒を手前に入れて吹くことにします。このとき，飛び方は１本の時とくらべてどう思いますか。

ア．　２本の方が遠くまでとばせる。

イ．　２本の方が飛ばない。

ウ．　どちらもほとんど同じ。

この【問題 2】でも，3 割〜5 割くらいの学生・生徒は，〈イ．２本の方が飛ばない〉を選択する。ストローの長さを増せば力積が増えるのに，それよりも空気の抵抗やストローの壁との摩擦を気にする学生が多いことがわかる。

しかし実験をしてみると，２本の方が遠くに飛んでいく。しかも，その飛び方は正解した学生たちの予想よりもはるかに遠くまで飛んでいくのである。そのことは学生たちからは歓声が上がることでわかる。

さらに，ここでは省略するが，

【問題 3】ストローを 4 本つなげた場合

そして，

【問題 4】吹き筒の長さが 2m の場合

まで実験を繰り返すと，ストローが 2m になっても，勢いは増し，おどろくほどの勢いで

マッチ棒が飛び出すことが実験で分かる。

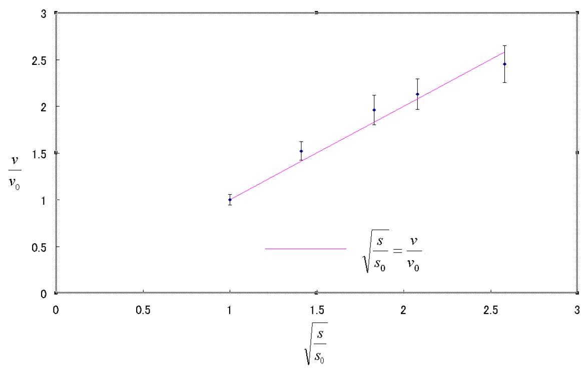
ここまで実験を繰り返すと最後は多くの生徒・学生が正しく予想するようになるが，自分たちの予想があたっても，結果があまりにも見事なので，感動的である。

この実験は，一見非常におおざっぱでいいかげんな実験に見える。しかし，そのためかえって直感的であり，わざとらしくない。おおざっぱな実験で最初は空気抵抗や摩擦が非常に気になるが，条件を変えながら実験を重ねて行くと抵抗はそれほど重要でないことに納得でき、力積概念が見えてきて感動をよぶ。記録タイマーのように数学的でないが，そのためにかえって直感的・感動的な実験になる。

このような直感的な実験によって，〈近代的な力の概念〉と，〈古代中世的な，あるいは現代でも直感的な，力の概念〉とを対決させることによって，力積概念を感動的に身につけることができる。そうすれば，力学入門教育を単なる計算でない，物理的な教育にしうる。

吹き矢実験の動力学的測定

この吹矢実験は，一見，非常に粗雑に見える。ストローやマッチ棒は力学実験用に開発されたものではない。ストローとマッチ棒の摩擦，空気の抵抗などが複雑に関係しているようにも思われる。しかし筆者は，アクリルパイプと綿棒を使用し，発射速度と飛距離を測定することにより，吹き筒の長さがおよそ 2m ほどまでは，この吹矢のストローの長さと初速度，到達速度の関係は，摩擦を考慮しない力学基本方程式による予想にかなりしたがうことを明らかにした[25)]。



図終.1　吹矢実験—筒の長さ比と初速度比

今，吹筒の長さを s, 筒から発射される矢の速度を v, 矢の質量を m とし，息が矢を押す力を F とすると，仕事と運動エネルギーの関係式より，

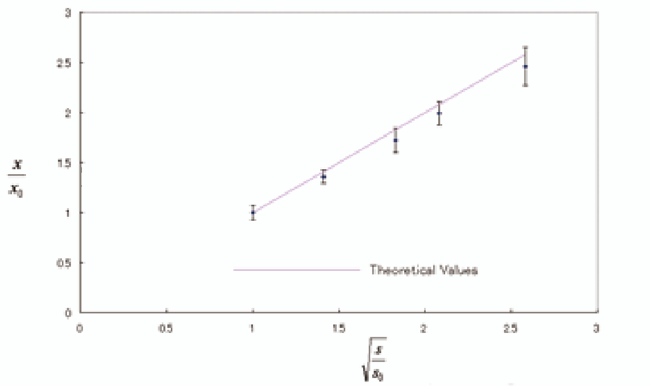
$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

基準となる筒の長さを s_0, 速度を v_0 として，任意の筒の長さ，速度を s, v とすれば上式は，

$$\sqrt{\frac{s}{s_0}} = \frac{v}{v_0}$$

とあらわせる。そこで，基準となるアクリルパイプの長さを 0.3m として，実験をすると，v_0 は，6.08m/s であり，その実験結果は，グラフに示すように，$\sqrt{\dfrac{s}{s_0}}$ と $\dfrac{v}{v_0}$ の関係は，予想した直線上に乗る。

同じように，$\sqrt{\dfrac{s}{s_0}}$ と飛距離の関係 $\dfrac{x}{x_0}(x_0 = 2.4m)$ もまた，初等力学に基づく予想にかなり一致する。



図終.2　吹矢実験—筒の長さ比と飛距離

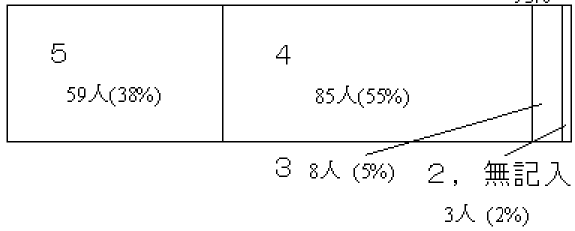
つまりこの実験は，一見雑な定性的に過ぎない実験のように見えて，実は吹き筒が 2m の長さの範囲までなら，摩擦や空気抵抗などを一切考慮しない初等的な理論とかなり一致する。そこで，初等力学教育で力積概念を感動的に導入できる非常に有効な実験となりうることが分かる。

大学教育での実験授業の結果

この実験によって，多くの学生が感動的に学べることは，小・中・高校の多くの実験授業によって示されている[26)]。ここでは，2002 年 5 月に東京理科大学理学部物理学科，応用物理学科の授業「講義実験」で実施した結果を示す[27)]。

楽しさ度		
5．とてもたのしかった	59 人 (38%)	
4．たのしかった	85 人 (55%)	↑ 93%
3．どちらでもない	8 人 (5%)	
2．つまらなかった	1 人 (1%)	
1．とてもつまらなかった	0 人 (0%)	
記入無し	2 人 (1%)	

このように，この例でも 93% もの学生たちがこの実験をもとにした授業を歓迎していることもまた，この実験の有効性を示しているものと思われる。



図終.3　吹矢実験—大学生の楽しさ度

そこで，このような実験を元に，運動方程式を $F\Delta t = \Delta mv$ として導入すれば，2 階

微分の理解に煩わされず〈時間発展の法則〉の考え方に注目を集められ文科系の学生だけでなく，理科系の学生にとっても動力学の理解が豊かになり，力学教育の困難のいくつかは解決されるはずである。マクスウェルは力学入門書だけでなく，その研究書でも，力積概念を多用していたという事実は，彼が教育的な意図だけでなく，力積概念は動力学の理解を豊かにする概念であることを認識していたからではないかと思えるのである。

5.5　おわりに

通常，歴史研究では現代について過度に言及するのは慎むべき事，とされるようである[28)]。しかし，序章 0.4.2 節などでも述べたように，本研究の直接的な動機は現代の物理教育に資することであった。そこで最後の節で，あえて現代の力学教育の改革についての筆者らの研究を，やや詳しすぎるくらい言及した。

もちろん，本研究で明らかにした歴史的事実 のみ によって，「〈力積と運動量〉を運動方程式とすることの有効性が示された」といったら言い過ぎであることは間違いない。この件について歴史から直接言えることは，「マクスウェルが〈力積と運動量〉に基づく運動方程式を重要視して提唱しており，それがその後しばらく影響を与えていた」という事実のみである。〈力積と運動量〉に基づく運動方程式の教育的有効性は，現代の物理教育研究の文脈の中で証明されるべき事柄である。

しかし，古典力学がニュートン『プリンキピア』以降，200 年近くもの間，多くの研究的・教育的な概念の拡張と修正を積み重ねてはじめて今日の形をとるようになったきたという事実，そして，現代の〈第 2 法則と $F = ma$ を原理とする力学教育の体系〉は決して絶対的なものではなく，たまたま偶然が重なって現代にこの形式が継承されたとも言える歴史的事実は〈現代における力学の教育研究〉にも，まだまだ創造的な研究の余地が充分残されているということを示すものといえよう。

また，〈静力学的な力の概念〉と〈動力学的な力の概念〉の接続で多くの生徒が混乱してしまうといった，力学の初学者が直面する困難は，この研究で明らかにした歴史的な力学概念の困難と重なる部分が多く，その点でも力学教育研究に多くの示唆をもたらすと考えられる。

〈科学史研究を科学教育に資する〉という点では，板倉による仮説実験授業が大きな成果を上げていることは周知の事実である。本研究は，板倉によって拓かれた〈教育研究の基礎としての科学史研究〉を継承し，特に〈物理教科書の歴史的研究によって物理教育研究の基礎とする〉研究としては嚆矢となるものと自負する次第である。

注

[1] [ハーマン 1991], 訳書 p.78.

[2] 5.4.1 節は，板倉聖宣と筆者の共同研究によって行ったものであり，日本物理学会第 54 回年会（於：広島大学)（1999 年 3 月 30 日）での板倉による特別講演「物理学者にとって物理教育の研究とは何をすることなのか」の当日配付資料をもとにしている。

[3] [堀 1862].

[4] [薩摩 1869].

[5] [リッテル 1874].

本書は，ヘルマン・リッテルが大阪理学所で明治三年十二月〜明治五年九月の 1 年半に講義したものを，平岡盛三郎が訳して『理化日記』と題して分冊発行したもののうち，物理学の部を改訳編集しなおして，文部省が合本して発行したものである。明治 15 年 9 月再版，B6 版 596 ページ。

第 41 回に「迫撃」の語はあるが，力積という用語および力積概念に関する記述はみあらたない

[6] 東京大学医学部助教の飯盛挺造が，日本語で医学を学ぶ学生のために，ドイツ語の物理学書〈ミュルレル・アンゼンロール〉の物理書を主として，ヨフマン／ウュルネル／デシャネルなどの諸処をも参考にして訳編したものという。[飯盛 1879] B6 半，412 ページ。

この「衝突」の項 ([飯盛 1879], p.244.) にも，力積に関する事項は無い。

[7] [物理学訳語会 1888].

[8] [ダニエル 1892].

[9] ・三守　守著『普通物理学・上巻』[三守 1893]. の「運動および力の論」の「第三の原則」の項には，

> いま甲，乙 2 つの物ありて，甲は乙の作用を受くれば，乙は甲の反動を受く。甲の質量を M，その運動の加速度すなわち〈時の単位の終わりにおける速度〉を V とし，乙の質量と時の単位の終わりの速度とを m, v とし，相互の作用及び反動の力を F とせば，
>
> $$F = MV, \quad F = mv$$
>
> $$\text{故に,} \qquad MV = mv,$$
>
> MV, mv という量を甲，乙の運動量という。………(38〜39 ページ)

とある。

この「作用」及び「反動の力」を F としているが，この F は力学的には「力」そのものではなくて，「力積」のディメンジョンをもつものである。しかし，本書には「力積」概念がないので，力と混同する結果になっているのは，マクスウェルが力積概念を提唱する以前の英国と同様であり，注目に値する。

・中村誠二校閲・田辺尚雄著『(実用）大物理学講義・第一巻（力学・物性論・音響学)』[中村 1911]. の「運動の第二法則」は，

1. 「一の物体に力が働けば，その働いた方向に一定の加速度を生じ，その加速度の大きさは働いた力に比例し且つその物体の質量に反比例す」
2. 「一の物体に力が働けば，その働いた方向に運動量の変化を生じ，而してその運動量の変化の割合は，働いた力に比例す」

の二様に表現されている。しかし，そのどちらにも，時間の項がなく，力積概念の入り込む余地がない。それは，その法則がすべて〈加速度〉〈運動量の変化の割合〉などと微分形式で述べられていて，積分形式になっていないからである。ただし，三守『普通物理学』(1893) にみられる〈作用／反動の力〉の概念の混乱はカバーしている。

10) [森 1905].

11) [森 1908].

12) [森 1913].

13) [森 1915].

14) [物象 1944].

15) [文部省 1948].

16) 5.4.2 節（動力学的測定以外) は，第 3 回日中物理教育シンポジウム（2002 年南京大学，The 3rd China-Japan Symposium of University Physics Experiment Education, Southeast University, Nanjing, P.R. China. [Invited Talk]) での当日配布資料（塚本，板倉聖宣，加納誠の共著）を元にしている。

17) [板倉 1965].

18) [Clement 1982].

19) [Halloun 1985a].，[Halloun 1985b].

20) [Hestenes 1992].

21) [塚本 2005]. など。

22) 記録タイマーは，1960 年代に『PSSC 物理』[PSSC 1669]. によって導入されたが，米国ではほとんど廃れてしまっている。しかし，日本では未だに実験の主流として使用されている。

23) たとえば，本論文執筆時点の学習指導要領に基づく日本の高校物理教科書では，「物理 I」には力積に関する記載はなく，「物理 II」の衝突の学習項目でのみ，力積の概念が使用される。文系の生徒は物理を選択履修したとしても，「物理 II」まで履修することはほとんど無い。したがって，現行の日本の教育課程では，多くの人々は〈力積〉という名称さえ知らないまま，物理の学習を終えてしまうのである。

24) 授業プラン化は主に板倉聖宣, 塩野広次, 佐藤重範らによる。[板倉 2005].,[板倉 2002].,[Tsukamoto 2002].

25) 筆者と内野昌憲との共同研究による [Tsukamoto 2008].

26) 佐藤重範氏（仮説実験授業研究会）の研究による（未公刊)。

27) [Tsukamoto 2002].

28) [佐藤 2006], p.277.

付録

参照した英語物理教科書一覧

1 **ウィリアム・エマーソン『力学の原理 運動の法則，重力の法則，落下物体の運動，投射，機械の力，振り子，重心など，材木の曲げ強度，静水力学，機械の構造の説明と立証　自然および技術の知見を希望するすべての紳士と他の人々に必要な作品　そしてすべての職人機械工，船大工，水車大工，時計職人その他機械を使用する仕事に有用な作品』第２版** (1758)

William Emerson, *The Principles of Mechanics. Explaing and Demonstrating The general Laws of Motion, The Laws of Gravity, Motion of Descending Bodies, Projectiles, Mechanical Powers, Pendulums, Centres of Gravity, &c. Strength and Stress of Timber, Hydrostatics, and Construction of Machines. A Work very necessary to be known, by all Gentleman, and Others, that desire to have an in sight into the Works of Nature and Art. And extremely useful to all Sorts of Artificers; particularly to Architects, Engineers, Shipwrights, Millwrights, Watchmakers, &c. or any that work in a Mechanical Way.*(London:Printed for J. R. Richardson, 1758)[Emerson 1758].

今回見たものは，1758 年第２版。

定義 (Definition)，公準 (Postulata) のあとの公理 (Axiom) に，運動の 3 法則がある。1 から 20 まである公理の最初の 3 つが運動の 3 法則となっている[1)]。

1.　すべての物体は静止していようが一直線上を運動していようが，外力によって無理に変えられない限り，その状態を保存する。

2. 運動の変更，すなわちある物体に生じるあるいは消滅する運動は，与えた力に比例し，その力が与えられた直線上に起こる。

3.2 つの物体間の作用と反作用は等しく，反対向きである。

4. 物体全体の運動はすべての部部の運動の合計である。

5. ある場所におけるすべての物体の重さは，それが含む物質の量に比例し，体積，形状，種類によらない。2 倍の物質は 2 倍重く，3 倍の物質は 3 倍重い，以下同じ。

6. すべての慣性力 (vis inertias) はその物質量に比例する。

7. すべての物体はできるだけ低い場所に下降しようとする。

8. 重い物体を支えるものは何であれ，その重さのすべてに耐える。

9.2 つの等しい力が互いに反対方向に働くとき，一方はもう一方の作用を打ち消す。

10. 物体が反対方向の 2 つの力の作用を受けるとき，その差だけの力を大きい方の向きに受けるのと同じである。

11. 物体がつりあいにあるとき，同じ直線上にある反対方向の力は等しく，互いに打ち消しあう。

12. ある一定の時間にある力が生じさせた運動の量はと等量の運動の量は，同じ力が逆方向に働くことによって打ち消す。

13. 活力 (active force) は，速かれ遅かれ，大きい抵抗より小さい抵抗に容易に打ち勝つ。

14. もしあるおもりがなんらかのパワーにより引くか押されるかすれば，それはその線上のすべての点を押すか引くかする。そしてそれはその直線上のどの点に力が作用しても同じ事である。

15. 2 つの物体が同じ方向に運動しているとき，どの直線上でもその相対運動は同じであり，一方が静止していて，その差の分だけもう一方が近づいてくるか，あるいは後退する。もしくは反対方向に運動しているときは，その 2 つの合計だけ後退する。

16. 物体がロープに引かれる場合，力の方向は物体に近接したロープの一部にかかる力の方向と同じ方向である。

17. 何らかの力が物体を動かすか支えるためにロープによって働くとき，ロープのすべて中間部分はその方向と逆向きに広がっている。

18. いくつかの滑車にロープがかけられているとき，そのすべての部分は等しく伸びている。

19. 力を支点にささえられていないてこや梁に与えるとき，もう一方の端がその長さの方向に力で押されるか作用する。

20. 液体の部分はそれにかかる圧力が最小になるように身を任せ，後退する。

第 1 部（Section I）が,「運動 **の一般的法則**」(*The general laws of* MOTION) となっており，そのその命題 IV 「何らかの瞬間的な力によって生じる運動はそれをうみだす運動に比例する (*The motion generated by any momentary force, is as the force that generates it.*) に以下の記述がある[2)]。

注釈

$b =$ **運動する物体の物質量**

$f =$ **物体** b **にはたらく衝撃の力**(*force of impulse*)

$m = b$ **によって生じる運動量あるいは運動の量**

$v = b$ **によって生じる速度**

$s =$ **物体**b **によって描く距離** $t =$ **速度**v **で距離**s **を描く時間**

とするとき，前の 3 つの命題より，$m \propto bv, s \propto tv$, そして $f \propto m$ を得る。

ちなみにその「前の 3 つの命題」とは，以下の通りである。

命題 I (PROP. I)[3]

すべての物体の物質量は，その大きさと密度の複合比である。(*The quantities of matter is all bodies are in the complicate ratio of their magnitudes and densities.*)

命題 II (PROP. II)[4]

運動する物体の運動の量はすべて，物質量と速度の複合比である。(*The quantities of motion, in all moving bodies whatever, are in the complicate ratio of the quantities of matter and the velocities.*)

命題 III (PROP. III)[5]

すべての等速運動で，描く距離は時間と速度の複合比である。(*In all uniform motions, the space described is in the complicate ratio of the time and velocity.*)

2 ウィリアム・マラット『力学の理論および実用入門: 5冊のなかのひとつとして，学校用，実例による解説』(1810)

William Marrat, *An Introduction to the Theory and Practice of Mechanics: In Five Books, for the Use of Schools, Illustrated by Examples*(Boston: Printed and sold by J. Hellaby; Sold also by Lackington, Allen, and co. London, 1810)[Marrat 1810].

著者の肩書きは「ボストンの数学教師」(Teacher of Mathematics, Boston) とある。

第 1 書「静力学」の最初に,「定義」(Difinitions) が，1 項から 16 項まで記述されている。その項目はそれぞれ，1. 力学 (Mechanics)，2. 物質 (Matter)，3. 物体 (Body)，4. 距離 (Space)，5. 場所 (Place)，6. 静止 (Rest)，7. 運動 (Motion)，8. 等速 (Uniform)，9. 加速，減速 (Accerated,Retarded)，10. 速度，速さ (Velocity,Celerity)，11. 時間 (Time)，12. 力 (Force)，13. 多孔性 (porous)（訳注：同じ体積でも物質ごとに主さが違うのは原子間に細かい孔があるということを述べている。)，14. 物体に固有の重力 (Specific Gravity)，15. 重力 (Gravity)，16. 慣性 (The Inetia) となっている。これらの定義に続く「公理」(Axioms) に，ニュートンの運動の法則が 17〜19 項として記述されている[6]。

17. 全ての物体は，なんらかの外力が作用しない限り，静止状態を続けるか，一直線上を等速運動する。

18. 静止あるいは運動している物体に引き起こされる変化は，与えられた力の方向と同じで，力の大きさに比例する。

19. 作用と反作用は等しく反対方向である。すなわち，二つの物体の相互作用はつねに等しく反対方向を向いている。

「公理」(Axioms) としてニュートンの運動の法則を列記したあと，以下のような文章が記述されている[7)]。

> これらの一般原理は**アイザック・ニュートン卿**の『プリンキピア』によって最初に与えられた。それからこれらは力学の公理とされてきて，学生たちがその学習をするときにつねに注意を喚起されてきたものである。
>
> これらは実際，自明の真理ではなく，我々の感覚に基づいた証拠から合理的に導かれた真理でもない。
>
> これらすべては，経験的ではなく，演繹的に，物体の自動性のなさに集約することができる。

第 II 書「力学」(BOOK II Dynamics) の冒頭「定義と実例」(DEFINITIONS AND ILLUSTRATIONS) に以下のように加速力が定義されている[8)]。

> 245. 速度を生じさせる力を**加速力**(*accelerating force*)，運動を生じさせる力を**起動力**(*moving force*) と呼ぶ。
>
> このように，加速力は，動かされる物質の量に関係なく，ある一定時間に一様に増加した速度で測定される。そして起動力はある一定時間に一様に生じた運動の量で測定される。

また起動力の定義は，次のようにされている[9)]。

> 250. **物体にはたらく起動力 (moving force) と，ある一定時間 (a given time) に物体に生じる運動量 (momenta) は物質の量 (quantities of matter) と速度の両方に比例する。**
>
> というのは，（245 項で,）ある決められた一定時間 (a given time) に生じる速度が等しければ，起動力は物質量に比例するからである。そして 18 項により，物質量が与えられていれば，起動力は同じ時間に生じる速度に比例する。したがって，物質量と生じる速度の両方が異なれば，起動力とその効果，すなわち生じる運動量は物質量と生じた速度の両方に比例する。
>
> そこで，もし m を運動量，b を物体，f を力，v を速度とすれば，$f \propto m \propto bv$, および $v \propto \dfrac{f}{b}$. が成り立つ。

18 項は，その前で引用しているように第 2 法則に相当する公理である。

3 **デイビッド・ブレア『自然・実験哲学の初歩；物理学，動力学，力学，静水力学，水力学，空気学，音響学，光学，天文学，電気学，ガルヴァーニ電気，磁気に関する最近の発見：100 の木版図付き』 増補改訂版（第 21 版，米国第 8 版，ロンドン第 12 版より）**(1826)

David Blair, *A Grammar of Natural and Experimental Philosophy: including physics, dynamics, mechanics, hydrostatics, pneumatics, acoustics, optics, astronomy, electricity, galvanism, magnetism, according to the latest discoveries : with one hundred engravings on wood* Eighth Americam ,From the Twelfth London Edition, Improved and Enlarged(Hartford, 1826)[Blair 1826].

非常に多くの版が出版されたようであるが，確認できたのは，ロンドンで出版されたもの：版数不明 (1814)，第 10 版 (1816)，第 12 版 (1822)，第 15 版 (1823)，第 19 版 (1848)，ロンドン第 12 版を底本として米国で改訂されたもの：不明版 (1822)，第 20 版 (1824)，第 21 版米国 8 版 (1826) である。内容を参照できたのは，第 21 版米国 8 版 (1826) である。12 折り。

運動の法則は以下のように記述されている[10)]。

> 20. 運動の主要な法則は以下の通りである。
>
> 第 1 **物体は，外力によってその状態を無理に変えられない限り，静止状態を続けるか，一直線上を等速運動し続ける。**
>
> 第 2 **運動の変化は常にそれを生じさせる起動力と，力を与えた方向に生じる。**
>
> 第 3 **作用と反作用は常に大きさが等しく反対方向である。**
>
> 41. 運動する物体の力，すなわちそれが他の物体に作用する力は常にその速度と質量の積に比例する。この力を物体の運動量と呼ぶ。

4 **ウィリアム・エンフィールド『自然哲学講座，理論的，実用的 —サミュエル・ウェッバーによるいくつかの訂正と項目の順番変更，ユーイング氏の実用天文学から選択した天文分野の付録の追加』米国第２版** (1811)

William Enfield, *Institutes of Natural Philosopy, Theoretical and practical with some Collections; Change in the order of the Order of the Branches; and the Addition of An Appendix to the Astronomical Part, Selected from Mr Ewing's Practical Astronomy. by Samuel Webber* Second American Edition (Boston: Published by Thomas & Andrews, 1811)[Enfield 1811].

著者エンフィールドの肩書きには，LL.D.（法学博士）とのみある。また，改訂を行ったウェッバーについては，A.M.（Master of Arts, 学芸修士），A.A.M.（Academiae Americanae Socius (=Fellow of the American Academy)，アメリカ学術院会員），前ハーバードカレッジ学長 (Late President of Harvard Colleeg) とある。

確認できた版は以下の通り。

初版 (1785)，第 2 版 (1799)，米国版初版（ロンドン第 2 版より）(1802)，米国第 2 版 (1811)，米国第 3 版 (1820)，米国第 5 版 (1832)

第 II 書「力学あるいは運動の原理」の中にある第 I 章「運動の一般法則」に「命題 1〜3」があり，そこに以下のように記述されている[11)]。

> 命題 I すべての 物体はその状態を何らかの力により無理矢理変えられない限り，静止状態を続けるか一直線上を運動し続ける。
>
> 命題 II 任意の物体に生じる運動の変化は与えた力に比例し，その力の方向におこる。
>
> 命題 III 物体にたいするすべての作用にたいして，等しい大きさで反対方向の反作用が存在する。すなわち，すべての物体の相互作用は，大きさが等しく反対方向であり，同一直線上にある。

3 法則の記載の後に以下の注釈がある[12)]。

> これら運動の 3 法則は実験によって示すことができる。しかしその最良の実証は，これらから導き出されるそれぞれの結論が，一般的な経験に一致することである。これらはアイザック・ニュートン卿によって力学の基本原理として想定され，これらを原理として導き出すすべての運動についての理論は，あらゆる場合において，実験と観察に一致することがわかっている。そしてまた，この法則自身は数学的に正しいと考えられている。

自然哲学全般にわたる書籍なので，力学以外の分野も扱っている。

力学分野を扱っているのは，第 II 書「力学，すなわち運動の原理」(Book II. Of Mechanics, or the Doctrine of Motion) で，10 ページから 80 ページまでの計 71 ページがわりあてられている。

それ以外の内容は，第 I 書「物質」(Book I. Of Matter)， 第 III 書「水力学と空気力学」(Book III. Of Hydrostaticks and Pneumaticks)，第 IV 書「磁気」(Book IV. Of Magnetism)，第 V 書「電気」(Book V. Of Electricity)，第 VI 書「光学，画像」(Book VI. Of Opticks, Or The Laws of Light and Vision) となっている[13)]。

> 命題 XIII. ある物体にある力，抵抗を克服するパワー (power) は，その運動量である。
>
> ある大きさの運動をもっている物体はある大きさの抵抗を克服することができるので，運動量の増加にしたがって，より大きな抵抗に打ち勝つようになるのは明らかである。

エンフィールドは上記引用の前ページ命題 A で，以下のように力積と運動量の式を導いている。この場合は，速度変化と比例するのは $F \times T$ すなわち「力×時間」となっていて，現代の力積と運動量の関係式に近い表現となっている（ただし，$F \times T$ と比例す

るのは速度変化であって運動量とはなっていない）[14]。

> 命題 A もし物体が異なる一定力 (constant forces) の作用を受ければ，生じる速度は力と時間の合成比によって変化する。
>
> F, V, T をそれぞれ力，速度，時間とし，それらが変化するとすると，力と時間の両方の変化と同じ比で，速度が増加したり減少したりするのは明らかである。そして，それらの変化は互いに独立に変化する。V は， F × T に比例して変化する。
>
> 系 したがって F が，時間 t に v を生じさせる既知の力 f と比べられるなら，V : v :: F × T : $f \times t$ が成り立つ。

5　ジェームズ・ウッド『力学の原理: 大学生用』第 5 版 (1812)

James Wood, *The Principle of Mechanics: Designed for the Use of Students in the University* The Fifth Edition (Cambridge, 1812)[Wood 1812].

初版 (1796)，第 2 版 (1799)，第 3 版（不明)，第 4 版 (1809)，第 5 版 (1812)，第 6 版 (1818)，第 7 版 (1824)，第 8 版 (1830)。

今回参照した第 5 版は，本文 211 ページの八つ折り本である。著者の肩書きはケンブリッジ，セントジョンズカレッジのフェロー (Fellow of St. John's College, Cambridge) とある。

この本は全般を通じて，ユークリッド幾何学的な図が多用されており，数式も比を用いた表現が主体の本である。全 9 章の表題を挙げると，第 I 章「物質と運動」(On Matter and Motion)，第 II 章「運動の法則」(On the Laws of Motion)，第 III 章「運動の合成と分解」(On the Composition and Resolution of Motion)，第 IV 章「機械の力」(On the Mechanical Power)，第 V 章「重心」(On the Center of Gravity)，第 VI 章「物体の衝突」(On the Collision of Bodies)，第 VII 章「加減速運動」(On accelerated and retarded Motion)，第 VIII 章「物体の振動」(On the Oscillation of Bodies)，第 IX 章「投射」(On Projectiles) となっている。

第 I 章には以下の記述がある[15]。

> I. ニュートン卿は，月がその軌道を保つのは，物体が地上に落ちるのと同様の原因による作用であり，地球から月が遠く離れているために大きさが異なっているだけだということを明らかにした。

また，同じ章に次の記述がある[16]。

> 力の作用によってひきおこされる効果は二種類ある。速度と運動量である。そこで，力を速度の原因とみなすか運動量の原因と見なすかで，力を比較する方法に二つあることになる。
>
> (21.) **加速力**は，物体の物質量によらず，任意の時間に一様に生成された**速度**で測定される。

（中略）

(22.) **起動力**は，任意の時間に一様に生成された**運動量**によって測定される。

目次と本文の間の前書きに当たる部分に以下の文章がある[17)]。

力学(*Mechanics*) という用語は様々な著者たちによって様々なときに科学の基礎的な分野を指すために使用されてきた。そもそもは釣り合いの原理，すなわち互いに釣り合う場合の力 (power) の割合を研究する分野に限定して使用されていた。

近年になって，〈運動の本質，生成，変化についての科学〉に関する自らの発見を書き示す分野として，この言葉を使用する著者たちがあらわれた。そして，前者の分野を区別するために静力学 (Statics) という名が与えられるようになった。

また，この両方の科学を意味するものとしてより包括的な名称としてこの名を使用する著者たちもいる。

本書の目的にとっては，どちらの定義も厳密にはそぐわない。高度なこの哲学の分野について，入門だけを目的とした本書にとって，前者は限定しすぎだし，後者は広すぎる。力学の我々の体系は，釣り合いの原理を含むし，同じように運動の科学も衝突や重力の作用を解説するには必須である。

「物質の量」は，次のように「質点の慣性の集合体」として定義されている[18)]。

(9.) 物体の**物質の量**(*quantity of matter*) によって，我々は，それぞれがある大きさの慣性を持つ質点の集合体と理解する。いいかえると，物体が質点で構成されていて，そのそれぞれが同じ慣性を持っているとすれば，〈物体の物質量と他の物体の物質量に対する比〉が，〈後者の質点の数にたいする前者の質点の数の比〉に比例するということである (*)。

6　ビューイック・ブリッジ『力学論: 自然哲学学習の入門用』(1814)

Bewick Bridge, *A Treatise on Mechanics: Intended as an Introduction to the Study of Natural Philosophy* (Printed for T. Cadell and W. Davis, Strand, London, 1814)[Bridge 1814].

大学初学年レベルの教科書である。巻１ (Volume The First) と巻２ (Volume The Second) に分かれている。

巻１

第１部「物体の直線運動，運動の合成と分解，重心，物体の衝突，投射」(On The Rectilinear Motion of Bodies, Compositoin and Resolution of Motion, Center of Gravity, Collision of Bodies, and Projectiles.)

第２部「力学的な作用と静力 (pressures), 機械の動力 (power)」(On Mechanical Action and Pressure: and The Powers of Machinery) がおさめられており，

巻２

第 3 部「斜面上の物体の運動と物体の振動運動」(On The Motion of Bodies upon Inclined Planes; and on The Rotatory and Vibratory Motion of Bodies)

第 4 部「様々な力による物体の運動」(On the Motion of Bodies by Variable Forces)

という構成になっている。

第 1 部「物体の直線運動, 運動の合成と分解, 重心, 物体の衝突, 投射」の講義 I(Lecture I.)「運動と運動の法則」(ON MOTION, AND THE LAWS OF MOTION.) で運動の 3 法則が以下のように述べられているが，ニュートンの名はどこにも出てこない[19)]。

> これらは運動の法則と呼ばれていて，時には自然哲学の公理とみなされる。しかしながら，それらはけっして自明ではないし，数学的に厳密な証明ができるわけでもない。その正しさは物質の重力と慣性に普遍的に関係づけた実験あるいは推論過程によって確立されている。それらは以下の通りである。
>
> I. **物体は常にその静止状態，あるいは等速直線運動を続ける。さもなければ，なんらかの外力がはたらくことによって，その状態を変化させる。**
>
> II. **運動，あるいは運動の変化は，与えられた力に比例し，それが作用する直線上に起こる。**
>
> III. **物体が互いに作用するとき，作用と反作用は大きさが等しく，その方向は反対向きである。**

力については，次のように衝撃力と連続的な力に分類されている[20)]。

> 物質は，その慣性から，その静止状態を変える能力を持たないので，そのような変化が起これば，なんらかの外的要因によることは明らかである。その要因のことを**力**(*force*) とか**パワー**(*power*) と呼ぶ。したがって，運動の法則に進む前に，力の一般的性質についていくつかの考察を与えておくのが適切である。
>
> 1. 力はその作用の仕方で 2 種類に分類することができる。
>
> I. 瞬間にはたらきすぐやむような力を**衝撃力**(*impulsive* force) と呼ぶ。 ボールが手や何かの器具で突然水平方向に運動させられるような場合は，衝力による作用の実例である。それが一定の速度で運動するなら，それがある一定の時間に描く距離とそれに生じる運動量はすでに述べた規則に従う（訳注：この前の節で運動量を質量と速度の積として与えている)。
>
> II. 力が絶え間なく作用するなら，それは**一定**(*constant*) な力あるいは**変動する**(*variable*) 力である。一定か変動するかの違いは，ある時間の間の速度の増加あるいは減少が**等しい**か，**等しくない**かによる。地球表面の重力は一定力の実例である。なぜなら，それは**衝撃**(*impulse*) ではない**絶え間ない**(*incessant*) 作用によって，ある時間における速度増加あるいは減少を引き起こすからである。

続いて起動力と加速力が次のように記述されている[21)]。

> 2. 力はまた，生じる**運動量**に注目するか，あるいは生じる**速度**に注目するかに

> よって，それぞれ別々の名称で呼ばれる。生じる運動量に着目する場合，それは**起動**力と呼ばれ，速度に注目する場合は**加速**力と呼ばれる。

運動方程式に相当する記述は第 2 巻の最初，「斜面上の物体の運動と物体の振動運動」(On The Motion of Bodies upon Inclined Planes; and on The Rotatory and Vibratory Motion of Bodies) の最初の講義 XII(講義番号は第 1 部からのものとなっている) 斜面上の物体の運動 (On the Motion of Bodies upon Inclined Planes) にある[22]。

> これらの効果を見積もるためには，我々は以下の事を考えれば足りる。同じ時間における**異なる**一定力が物体に作用する場合，生じる速度はそれらの力の**強さ**に比例する。そして**同じ**力が，**異なる時間に**作用すれば，速度はその力が作用する時間に比例する。このことから，異なる一定力が異なる時間作用すれば，**生じる速度**全体は**力と時間の両者に**比例する。今，重力を 1 として，$m = l6\frac{1}{12}$ フィートとし，**他の何らかの一定の力**F の作用によって物体が**距離**S を描き，$V =$ その**時間**T で得られる速度とすると，上記より，V :1 秒で重力によって得られた速度 $(2m)\ ::\ F \times T\ :\ 1 \times 1,\ \therefore\ V = 2mFT$ が得られ，$T = \dfrac{V}{2mF}$ が得られる。

ここで $m = l6\frac{1}{12}$ フィートとは 1 秒間に物体が落下する距離であり，メートルに換算すると，約 4.9m である。したがって，$2m = 9.8(= g)$ となる。

運動の法則との関連については述べられていない。

7　ピエール・シモン・ラプラス／ジョン・トプリス英訳『解析力学論 ラプラスの天体力学第１巻より　トプリスによる注釈つきの訳と解説』(1814)

Pierre Simon Laplace, *Treatise upon Analytical Mechanics; being the first book of the Mécanique céleste of P.S. Laplace, Member of the Institute and of the Bureau of Longitude of France, &c., &c. Translated and elucidated with explanatory notes by The Rev. John Toplis.*[Laplace 1814].

本文 286 ページの八つ折り本で，ラプラスの大作『天体力学』全 5 巻の第 1 巻 (1799) を英訳して解説を加えたものである。訳者のトプリスは，ケンブリッジ，クィーンズカレッジのフェロー (Fellow of Queen's College, Cambridge) とある。

ラプラスは，大陸で解析数学を発展させた人物の一人である。英国に大陸流の解析数学を積極的に導入しようとしてケンブリッジ大学の学部生バベッジらが「解析協会」を設立して『解析協会論文集』を発刊したのが，1813 年である。この本はその翌年に発刊されたもので，まだ英国に解析数学が全面的に導入される以前のものである（1800 年代の英国への解析数学の導入とバベッジ「解析協会」の影響については，野村恒彦氏の博士論文に詳しい[23]）。

この本は入門的な教科書としてではなく，専門書・研究書として読まれたのだと考えられるが，英国に大陸流の解析力学をもっとも初期に導入したものといえるので，その後の英国の力学教科書が解析的に書かれるようになるためになんらかの影響を与えたと考えら

れる。

運動の法則 (laws of motions) は，ニュートンの名は記載されていないし，法則も 3 つではなく，「慣性の法則」および「力と速度との比例法則」の 2 つとしている。その記述は，第 2 章「質点の運動について」(Of the motion of a material point) にある[24)]。

> そこでわれわれは二つの運動法則，慣性の法則および力と速度との比例法則を得る。それらはきわめて当然であり，単純であるので，容易に想像可能であり，疑問無く物質の性質から導き出すことができる。しかし，この性質はこれまで知られていなかったので，我々にとって，単なる観察からの帰結であり，経験から力学という科学が必要とした唯一のものとなっている。

運動方程式は，以下のように仮想仕事の原理から導いているが，1815 年に刊行されたグレゴリー『力学論』著書がニュートンの流率法を利用していたのに対して，ほぼ同じ年代の 1814 年に出版されたこの本は微分形式で記述している。こういった本が英国への解析数学や解析数学を使った力学の導入に影響を影響を与えたのだろうと思われる[25)]。

> そこで，$\delta x, \delta y, \delta z$ を 3 つの座標 x, y, z のなんらかの変位を示すものとするとする。ただし，dx, dy, dz は，微少時間 dt の座標に平行な方向への運動をあらわすものであって混同してはいけない。そのとき，No.3 の式 *(b)* は，

$$0 = \delta x.\{d.\frac{dx}{dt} - P.dt\} + \delta y.\{d.\frac{dy}{dt} - Q.dt\}. + \delta z\{d.\frac{dz}{dt} - R.dt\} \quad (f)$$

> もし質点 M が自由であれば，$\delta x, \delta y, \delta z$ をそれぞれ独立にゼロとすることができるので，以下のような微分方程式が導かれる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P; \frac{d^2y}{dt^2} = Q; \frac{d^2z}{dt^2} = R.$$

> (訳注：P, Q, R は，力のそれぞれ x, y, z 成分)

ただし，加速力の概念を用いているので，上記の方程式はグレゴリーやヒューウェルと同様，質量の因子を欠いている。

質量および運動量に関する定義は「第 III 章 物体系のつりあい」の最初にあり，質点の数を質量とし，それと速度の積を運動の量としている[26)]。

> 物体の質量はその質点の数であり，質量と速度の積は運動の量と呼ばれ，運動している物体の力として理解される。

密度についても，同じページで以下のように記述している[27)]。

> 物体の密度はある一定の体積に含まれる質点の数 (the number of material points) に依存している。その厳密な密度を知るには，質点間の隙間がまったくない物体の質量と比べることが必要である。しかし，実際にはそれは困難であるの

> で，相対的密度しか知ることができない。すなわち，ある物質に対する比として密度を知るしかない。質量は大きさと密度の比であることは間違いないので，M を物体の質量と名付け，U をその大きさ，D をその密度とすると，$M = DU$ を得る。この式に含まれる M, D, U は，それぞれの単位量に対する比を示している。

質量 m を "質点の数" と理解しているので，当然，質点の運動方程式には質量 m が出てこない。そして，大きさまでふくめたいわゆる剛体力学を扱う「第 V 章 物体系の運動の一般原理」で，質点の数だけ m 倍して，今日と同じ運動方程式が導出されている[28)]。

> おのおのの瞬間に消滅させられる系の運動の力は，あきらかにその瞬間の釣り合いの方程式を形成する。もしこの物体の釣り合いの方程式がそれぞれの位置で無限に小さければ，仮想速度の原理による力のモーメントは何者とも等しくない。消滅させられる力は mP, mQ, mR, $m'P'$, など，つまり $-m.\dfrac{d^2x}{dt^2}, -m.\dfrac{d^2y}{dt^2}, -m.\dfrac{d^2z}{dt^2}, -m'.\dfrac{d^2x'}{dt^2}$, であり，そのモーメントは……

剛体力学になると，質量の因子まで含んだ運動方程式になるのは，グレゴリー，ヒューウェルも同じである。

この本にはほとんどニュートンの名は登場しない。当時のフランスでのニュートンの扱いが分かる。

8　オリンサス・グレゴリー『力学論 理論的，実用的，かつ記述的　第１巻 静力学，動力学，静水力学，水力学の理論』第３版増補改訂版 (1815)

Olinthus Gregory *A treatise of mechanics : theoretical, practical, and descriptive, Vol.1. containing The theory of statics, dynamics, hydrostatics, hydrodynamics, and pneumatics.* The third Edition, Corrected and Improved. (London: printed for F. C. and J.Rivington, etc., 1815)[Gregory 1815].

全３巻の内容は以下の通り。

第１巻　「静力学，動力学，静水力学，水力学，空気力学の理論」
The theory of statics, dynamics, hydrostatics, hydrodynamics, and pneumatics

第２巻　「〈機械装置の性質，構造，簡略化〉,〈ひもおよび，速く動くもの他，の摩擦と剛性〉, そして〈多くの風変わりで有用な機械装置の説明〉に関する所見」(Remarks on the nature, construction, and simplification of machinery, on friction, rigidity of cords, first movers, &c., and descriptions of many curious and useful machines)

第３巻　「図版」(Plates)

初版 (1806)，第２版 (1807)，第３版 (1815)，第４版 (1826) と版を重ねており，この時代にかなり普及した教科書と考えられる。

今回参照した第３版第１巻は，本文＋ index で 569 ページの八折り本である。

質量の概念

第 I 書「静力学」での物質 (Matter)，物体 (Body)，慣性 (Inertia) の定義

グレゴリーの力の定義では，「物体すなわち質量 (The body or mass) は，起動力に正比例して，速度に反比例する」と書いていて，物体 (Body) と質量 (Mass) を併記している。また，$F \propto BV$ などとして，今日なら質量 (Mass) の頭文字 m を使うべき所に物体 (Body) の頭文字と考えられる B を使用している。それでは物体 (body) や質量 (matter) の定義はどうなっているだろうか。静力学の項からそれらの定義を引用する[29)]。

> 2. **物質**(*Matter*) とは，〈我々の知覚するすべてのものがそれによって構成されている実体〉を意味する単語と考えられている。力学に関する限り，延長性，不可入性と慣性をもつものと考えられている。
>
> 3. **物体**(*Body*) とは，容易に知覚可能か，感覚上明らかであるような物質の量の集まりである。物体について，**固体**(*solid*) と我々が言うとき，互いに固着していて簡単には分離しない粒子 (particles) すなわち分子 (moleculæ) から構成されている物質を指す。たとえば金属や木のようなものである。**流体**(*fluid*) と言うときには，固着がとてもわずかで，ほとんど努力なしにたがいに動いてしまう粒子で構成されている物質を指す。たとえば水やワインや空気のようなものである。
>
> すべての物体には，広がり（延長 extention）があり，したがって延長の境界による形状すなわち姿形があることは明らかである。そしてまた，物質に基本的なこととして，**同種の**他の物質がその場所に占めることを妨げる。そして，そのことにより，その状況から離れさせる，あるいはその状態を変化させる何か外部の活動 (exertion) を要求する。前者の特質を**固体性**(*Solidity*) とか**不可入性**(*Impenetrability*) といい，後者を**不活発性**(*inertness*) とか**慣性**(*inertia*) と呼ぶ（第 18 項)。

このように物体 (Body) とは，物質量のあつまりとしてとらえられていて，それは，延長性，不可入性，慣性といった性質を備えていると考えられている。そして，その物質量 (quantity of matter) の実体は，物質を構成する粒子，分子からなるとしており，原子論の考え方が根強い。

慣性については，第 18 項で以下のように説明されている。出だしの所を引用する[30)]。

> 18. 他の力の中には，一般に**慣性力**(*vis inertia*) とか，**慣性の力**(*inert force*) と呼ばれてきたものがある。〈現在の状態を保持しようとする，あるいは運動や静止することに対する無関心さ〉といった物体の特質に，この単語を適用する。しかし一方で，パワー，力，作用 (powers, forces, actions).... といったことにかかわった言葉でこの性質を使用することがこれまで許されてきたが，それは暗喩的なものとしてであり，そのような使用には反対すべきである…

そして慣性が力とは違う理由として，〈慣性はものを動かせないこと〉や，また逆に，〈どんなに大きな慣性を持つ物体でも，小さな力で動かすことは可能なこと〉などをあげ，

慣性力など，力を意味する言葉の使用に反対し，慣性とは，物体が内部にもつ受動的な性質として定義している。

第 II 書「動力学」での質量の定義

質量は，第 II 書「動力学」序章「定義と注釈」のところでは，以下のように定義されている[31)]。

> 211. 物体を構成する物質粒子 (material particles) の合計が，我々が**質量**(*Mass*) という単語で示すものである。この質量は物体の体積と我々が**密度**(*Density*) と呼ぶものによって決まる。我々はすでに密度は物質の量と正比例し，物体の大きさに反比例することを認めた (第 10 項)。しかし，この関係を含んだ一般的定理を簡潔に導くことは不都合ではないだろう。この目的のために，全ての物体は無数の空隙と細孔に貫かれており，その物質の量はその体積によらないと考えねばならない。しかし同じ質量のもとでは，物質の多い少ないは，粒子の離れ具合が近いか遠いかによって決まる。そしてそれを我々は密度が多い，少ないと表現し，それにつれてその分子間の近接が近かったり離れていたりする。そこで我々は，物体がより**密**であるというとき，同じ体積により多くの物質を含むことをいう。それに対して，より**密**でないとか，より**疎**である（**密度**や**希薄さ**といいのは相対的な量であるので）というとき，同体積でより少ない物質を含むことをいう。そこで密度は，体積がわかっているときに，物質粒子の数を判断するのに役立つ。したがって我々は密度を，決められた体積における同じ分子の数をあらわすものとみなす。たとえば，我々が金は水よりも 19 倍密であるというとき，同じ空間に金は水の 19 倍の粒子を含んでいると理解するのがよいだろう。
>
> 我々は密度を，**大きさの単位**とみなす決められた体積における分子の量を表現するものとしたので，大きさがわかっている任意の物体の質量，すなわち分子の総量を得るには，密度と大きさの積を求めればいいということは明らかである。

これは 53 ページの注で述べたようにニュートン『プリンキピア』での定義に近い。上記の質量の定義もまた，原子論の影響が強く出ている。しかも今度は密度をもとに定義している。

9 ピエール・シモン・ラプラス，トーマス・ヤング『ラプラス「天体力学」の基本的解説 第１部，第１巻を含む』(1821)

Pierre Simon Laplace, Thomas Young, *Elementary Illustrations of the Celestial Mechanics of Laplace Part the First, comprehending the First Book*(London: Printed for John Murray ,1821)[Laplace 1821].

本文 344 ページ，八折り本

トプリスの英訳本と同じくラプラス『天体力学』第 1 巻の翻訳であるが，翻訳というよりも，全面的にニュートンの流率法で書き換え注釈を加えた本といったほうがいい。そこで，トプリス訳のものには，ニュートンの名はほとんど登場しないのに比べて，ところど

ころにニュートンの運動の法則に関する記述がでている。たとえば，時間に対する定義をおこなっている 222. 項の「時間」についての定義 (DEFINITION) の注釈 2 に以下のような記述がある[32]。

注釈 2 今，時間の同一性があるひとつの運動から見積もられたとき，他のすべての物体が障害物がない運動をしているとき，それらは同じ時間に同じ線分だけ，その方向に動く。そしてこれが，第 2 法則であり，前の法則とともに，ニュートンの第 1 公理すなわち運動の第 1 法則の構成要素となっている。その第 1 法則とは「すべての物体は，静止あるいは等速直線運動の状態を他の力によって無理に変えられない限り我慢強く保持しようとする」というものである。この第 2 法則は，前提とされてきた公理と定義および運動の相対的性質についての考察と，絶対運動の基準がありえないということから，厳密に導かれる。そしてまた，直接の証明とするにはあまりにも単純すぎるような実験的事実によって，その正しさは完璧に証明することができる。

226 項「運動の合成」についての定理 (THEOREM) に対する注釈でも，『プリンキピア』の内容にふれ，ニュートンを「偉大な著者」としている[33]。

注釈 6 『プリンキピア』の一番の基礎である運動の法則で，偉大な著者は一気に力の考察を導いた。そして最初の系は次のように立てられた。「2 つの力が同時に物体に作用するとき物体が描く線は，その力を別々に物体に作用させたときに物体が描く線をそれぞれの辺とした平行四辺形の対角線である」

また，226 項の注釈 5 では以下のように記述されている[34]。

注釈 5 ここで確立した運動の法則は，アリストテレスが『力学問題』で表現したものとさほど変わるものではない。彼が言うところによれば，「もし運動する物体が二つの運動をもっていれば，互いに一定の割合をあたえる。必然的に二辺がその運動の比になっている平行四辺形の対角線を描く」というのである。この命題は等速運動だけでなく，同様に加速あるいは減速運動に関する考察も含んでいたのは明らかである。そして，この問題がこのように明確に理解されたときから 2000 年の時が費やされてやっと，ニュートンがきわめて単純でみごとなやりかたで，物体に偏向力を与えられた物体の速度の決定にこの法則を適用することを我々はまったく予期できなかった。

質量の定義は次のようにされている[35]。

[D.] 物体の質量は，その数だけの質点がある。質量と速度の積は物体の運動の量と呼ばれる。

10　ジョン・ファラー『力学の基礎 釣り合いと運動の原理，固体と流体への応用として主にニューイングランド ケンブリッジの大学の学生向けに編集企画された』(1825)

John Farrar, *An Elementary Treatise on Mechanics, Comprehending the Doctrine of Equilbrium and Motion, as Applied to Solids and Fluids, Chiefly Compiled, and Designed for the Use of the Students of the University at Cambridge, New England.*(Cambridge, N. E. Printed by Hilliard and metcalf, at the University Pres., 1825)[Farrar 1825].

本文 438 ページの八折り本である。

副題に “Designed for the Use of the Students of the University at Cambridge, New England” とあり，大学の講義向けとして使用されたことが分かる。ただし，このケンブリッジは，米国ニューイングランドにあるハーバード大学の所在地ケンブリッジのことである。ファラーは，ハーバードの数学および自然哲学教授 (Professon of Mathematics and Natural Philosophy) である。これらのことから，主に米国ハーバード大学で使用された教科書だと思われる。

冒頭の「読者へ」(ADVERTISEMENT) には以下のような記述がある[36)]。

> この本を準備するにあたって，ビオ，ベズー，ポアソン，フランクール，グレゴリー，ヒューウェル，レスリーらのこの分野の書籍を使用した。全体として一貫性を保つために，それらから切り取った断片に，かなりの変更と追加を行っている。その上，命題の内容あるいは論理の仮定を適合させるのに，それを詳細に述べたり要約したり，あるいは述語を変更したりすることがしばしばあった。したがって，それぞれの断片に引用符をつけて区別するのは不都合になってしまった。物質については別の体系によって組み替えたものの，実質上は，静力学，動力学，静水力学についてはベズーのものを借用している。そして，グレゴリーからは，多くの変更と書き換えのもとに，主に水力学に関する記述を借用している。

つまり静力学・動力学は主にフランスのベズーの教科書をもとにしたというのである。とすると，この本は米国出版であることとあわせてフランス教科書の強い影響のもとに書かれたということができるだろう。そこで，英国のニュートン崇拝の影響がうすく，ニュートンの 3 法則が記載されていなかったのだと思われる。

静力学の第 1 節は「等速直線運動」(Uniform Motion)，第 2 節は「力と運動の量」(Forces and the Quantity of Motion) となっている。この第 2 節には力と運動の関係が定義されている

静力学の「力と運動の量」の記述には以下のようにある[37)]。

> 物体の質量と速度の積は物体の**運動の量**とよばれる。**そこで，それぞれの力は，それが産み出すことができる運動の量で量られる。**したがって，上記の積を p, 質量を m, 速度を v と表すとすると，$p = mv$ を得る。この式から，$v = \dfrac{p}{m}$, そして

$m = \dfrac{p}{v}$ を導き出すことができ，そこから，以下のことが分かる。

1. 物体の起動力 (moving force) と質量がわかっているとき，速度は起動力を質量で割ることで導くことができる。
2. 起動力と速度がわかっているとき，起動力が働いて速度を得ている質量は，起動力を速度で割ることで導かれる。
3. 互いに等しい起動力が働くとき，速度は質量に反比例する。

これらの命題の正しさは，それぞれ m の値に m' を，v の値に v'，p の値に p' を代入することで，命題に還元し，変換することができ，上記の命題の形式にすることができる。

質量は以下のように質点の数および密度から定義されている[38)]。

> 30. 質量，すなわち物体の質点の数は，その容積すなわち体積に依存し，いわゆる**密度**は，その粒子の近さすなわち近接度の度合いの大小である。多かれ少なかれすべての物体はそのなかに空間があり，物質の量はその大きさに比例しない。同じ大きさの物体で，その部分が混雑して圧縮するにつれて物質量は増す。同じ容積でより多くの物質があるとき，物体は**密**だという。一方，同じ体積で物質がより少ないとき，物体は**疎**だという。
>
> したがって，物体の容積がわかっているときは，物体の密度によって，我々は，その物体を構成する質点の数を判断することができる。そこで，密度はある容積に含まれる質点の数と考えることができる。

動力学の部冒頭の節「一様に加速された運動」(Of Motion uniformly accelerated) では，加速力が以下のようにして定義されている。しかし，他の著作のような量的定義はされていない[39)]。

> 物体に作用してその運動を変化させる力を**加速力**ないし**減速力**(accelerating or *retarding* force) という。 それが等しい時間に等しくはたらくとき，**一様な加速力**とか，**一様な減速力**(*a uniformly accelerating*, or *uniformly retarding force*) と呼び，それに応じて物体の速度が増加しようとしたり，減少しようとしたりする。

動力学の 2 つめの節，重い物体の自由運動 (Free Motion in haevy bodies) の 280 項[40)]。

> 280 項 この種の運動の詳細を決定するのに必要な原理は，等速運動および等加速度運動に関する原理から容易に導出できる。

に，力学の第 1 基礎方程式

$$v = \frac{ds}{dt} \text{すなわち}, ds = vdt$$

と第 2 基礎方程式

$$v = gdt$$

が導かれている (g は加速度を示す)。

11　トーマス・ジャクソン『理論力学の基礎: 静力学と動力学に関する講義の内容として』(1827)

Thomas Jackson, *Elements of Theoretical Mechanics: Being the Substance of a Course of Lectures on Statics and Dynamics* (Edinburgh: Printed for W. & D. Laing and Longman, Rees, Orme, Brown, & Green, London, 1827)[Jackson 1827].

著者の肩書きはセントアンドリュース大学の自然哲学教授，エジンバラ王認学会のフェロー，ロンドン天文学会のフェロー (Professor of Natural Philosophy in the University of St. Andrews, Fellow of the Royal Society of Edingurgh, and Fellow of the Astronomical Society of London.) とある。

本文 296 ページの八折り本である。副題に “Being the Substance of the Course of Lectures on Statics and Dynamics” とあり，前書きによれば，この著者の大学における自然哲学講義の中の静力学および動力学の部分を発展させたものとのことである。

この本はウッドと比べると，図形は描かれていないが，しかしラプラス『解析力学』のような大陸流の解析力学を用いているわけでもない。まだニュートンの流率法の影響が色濃い。

運動の法則に関する記述は動力学の部の冒頭にある[41)]。

> 287. アイザック・ニュートン卿によって提示された，これら（運動の法則）のもっとも一般的な原理は以下の 3 つである。
> 1. 全ての物体は，なんらかの力が与えられない限り，静止のものは静止状態を，運動しているものは一定の直線運動の状態を続けようとする。
> 2. 運動の変化は常に与えられた起動力と比例し，力の方向に変化は起こる。
> 3. 反作用はいつも作用と等しく，正反対である。あるいは物体の作用は互いに等しく反対である。

そして，運動の法則の記述の直後に以下のように書かれている[42)]。

> 288. これら 3 つの法則は少なくかつ簡潔であるが，適用範囲は広大であり，もっとも身近な現象から，それによってニュートンの弟子たちが，力学的な結びつきと調和的な依存関係にしたがって，太陽系という壮大な機械装置を感動的に考察することとなったような科学の最高の到達点に至るまでにおよんでいる。
>
> これは最重要であるので，我々は注意深く学ばねばならないし，その重要な概念を明快かつ正確に身につけるよう努力しなければならない。

力については，やはり起動力 (motive force) と加速力 (accelerative force) の区別をし

ている。

起動力については「等速度運動」(Of uniform Motion) と題した節に以下のように記述されている[43)]。

> 310. 力という用語に関して，我々は，学術的な議論でも，少なからず通常の言葉遣いを採用してしまう。しかし通常，限られた制限的な意味がある。たとえば一般用語では，1 ポンドの物体を動かすより 2 ポンドの物体を同じ速さで動かす方が，大きな力が必要だと我々は言う。そして，同じ重さなら 10 フィート毎秒の速度を与える方が 9 フィート毎秒の速度を与えるより大きな力が必要だとも言う。しかし，これはおそらくいささか不正確であり，明確な力の測定への言及を欠いているのである。我々自身の尽力について，同じ時間にかなり労力が続いたと思われることを意味していたり，あるいはより長い時間に同じあるいはより少ない労力が続いたことをもってして，一方の場合を労力が 2 : 1 だったとか，もう一方の場合を 10 : 9 と明確に断言することはできない。理学的な研究では，起動力 (motive force) の大きさに関するかぎりいつも，ニュートンにならって，その正確な測定として，ある時間において**生成あるいは消費された運動の量**を採用する。

加速力は，「一様に変化する運動，すなわち一定の力が作用する運動」(Of uniformly varied Motion, or Motion depending on the Agency of a Constant Force) と題する節に以下のように記述されている[44)]。

> 314. 一様に変化する運動は，それぞれの時間に均等な加速あるいは減速をし，その変化の割合すなわち任意の時間に—通常は 1 秒間に，生成あるいは消滅する速度は，いわゆる加速力あるいは減速力として測定される。加速の場合，これを ϕ とあらわし，V を T 秒後に得た最終速度とすれば，
>
> $$1.V = \phi T,$$
>
> となる。すなわち最終速度は，1 秒間に得た速度にそれを得た時間をかけたものに等しい。

また，運動方程式に相当する式は発見できなかったが，起動力が定義されていた「等速度運動」の節に，衝突のような瞬間的な量の時について，力積と運動量変化の関係式に近い量を導入している。しかし，本来力積 $F\Delta t$(t は時間を表す）とすべき量を力 F としており，衝突における力と力積との混同がみられる。これが，この本では最も運動方程式に近い式であると考えられる。以下にその部分を引用する[45)]。

> 衝突のように，運動の生成が，反発力により，その大きさが未知で，着目している物体固有の性質によって変化し，近似の程度が逐次的であるような場合，我々はめったに連続的な生成を考えないで，それをあたかも感覚的には瞬間的なものとして取り扱うのである。起動力は，この場合，消費された運動の量で測定する。そし

て，第 3 法則を根拠として，この力の測定と生成された運動の測定とのあいだの絶対方程式を表す。しかし，力を述べるときに，基準を現在一定の速度で運動しているある速度が生成した力にとると，我々は力とその結果の運動の量の比例式を述べるのみでいい。

V	一定の運動の速度
S	その描く距離
T	運動する時間
Q	物質の量
F	起動力

とすると，着目するすべての量の関係は以下のように表される。

$$S = VT = \frac{FT}{Q}$$
$$V = \frac{S}{T} = \frac{F}{Q}$$
$$T = \frac{S}{V}$$
$$F = QV = \frac{QS}{T}$$
$$Q = \frac{F}{V} = \frac{FT}{S}$$

12　ジェームズ・レンウィック『力学の基礎』(1832)

James Renwick, *The Elements of Mechanics.* (Philadelphia: Carey & Lea, Chesnut-Street., 1832)[Renwick 1832].

本文 508 ページの八つ折り本である。

著者の肩書きは，ニューヨーク州コロンビアカレッジの自然実験哲学と化学の教授 (Professor of Natural Experimental Philosophy and Chemistry in Columbia College, New-York) とある。

米国出版のためか,「運動の 3 法則」という形での記述はない。

「運動の 3 法則」という形での記述はない。あえてあげるとしたら，第 II 書「運動について」の中にある以下の記述である[46)]。

> 43. もしひとたび物体が運動し始めれば，等速でその方向に永久に動き続ける。これは物質にそなわった性質であるにもかかわらず，このような運動は自然界の中では決して多数派ではない。力には以下の 2 種類がある。
> (1) 一時の間物体に働き，物体が先に動き始めると，それを捨て去って離れてしまい，物体はそこから等速で運動する。このような力を投射の力 (projectile forces) という。

(2) 物体が運動し続ける間作用する。このような力は物体の方向と速度を変化させたり生み出したりする原因となる。このような力を一般用語で変位制の運動 (Variable Motions) という。

13 サミュエル・アーンショウ『動力学，あるいは運動の基礎; 一般原理と公式に関する多くの種類の実例となる例題 と引力に関する短い論考の追加』(1832)

Samuel Earnshaw, *Dynamics, or an Elementary Treatise on Motion; with a Great Variety of Examples illustrative of the General Principles and Formulæ: to Which is Added, A Short Treatise on Attractions.* (Cambridge, 1832) [Earnshaw 1832].

初版 (1832)，第 2 版 (1839)，第 3 版 (1844)

本文 185 ページの八つ折り本。

著者の肩書きは，ケンブリッジのセントジョンズカレッジ (St. John's College, Cambridge) とある。

第 1 章の中の「定義と第 1 原理」(Difinition and First Principles) に続く「慣性の法則」(The Law of Inertia),「力の合成法則」(The Law of the Composition of Forces) と題した節に，運動に関する法則が記述されているが,「運動の法則」(Laws of Motion) という表記はない。慣性の法則は以下のように記述されている[47)]。

> 11. **質点は，自分自身のいかなる作用によっても，現在の静止あるいは運動の状態を変化させることはできない。**

力の合成法則は以下の通りである[48)]。

> 17. **もし質点がいくつかの力の作用を受けるとき，それぞれの力はそれが作用する方向に与えると予想される効果に 相当する 効果を生みだす。**

それでは，今日我々が “運動の法則” と呼ぶ法則はどこに記載されているかというと，慣性の法則の「系 1」として記述されている[49)]。

> 12. 系 1.　運動と運動の変化は，力の作用によってのみ引き起こされる。
>
> 13. 系 2. および定義　もし質点の速度が連続的に**増加**あるいは**減少**するなら，それぞれ**加速**力あるいは**減速**力の作用による。そしてその力が**一定**か**不定**かは，ある時間における速度の増加が**等しい**か**等しくない**かによる。

14 ウィリアム・ヒューウェル『動力学入門，運動の法則およびプリンキピアの最初の 3 節を含む』(1832)

William Whewell, *An Introduction of Dynamics, Containing The Laws of Motion and The First Three Section of The Principia.*(Cambridge: Printed by John Smith Printer to the University; for J. and J. J. Deighton; and Whittaker, Trecher, & Arnot, London., 1832)[Whewell 1832a].

本文 64 ページの八つ折り本。

本文でくわしく言及。

15　**ウィリアム・ヒューウェル『力学の最初の原理』**(1832)

目次は以下の通り[50)]。

16 ウィリアム・ヒューウェル『束縛され抵抗を受けた点の運動および剛体の運動について—動力学論新版第２部』(1834)

William Whewell, *On the Motion of Points Constrained and Resisted, and on the Motion of a Rigid Body. The Second Part of a New Edition of A treatise on Dynamics.* (Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John Smith, Printer to the University. for J. J. Deighton, Trinity Street: and Whittaker & co. London., 1834)[Whewell 1834a].

本文 338 ページの八つ折り本。

著者の肩書きは，トリニティカレッジのフェローでありチューター (Fellow and Tutor of Trinitiy College) とある。

ヒューウェルは，この本の前身として『動力学論—力学問題の多数の問題を含む』(*A Treatise on Dynamics Containing a Considerable Collection of Mechanical Problems*(Cambridge: J. Deighton; London: G. & W.B. Whittaker, 1823)[Whewell 1823] を 1823 年に出版している。その本は１巻本だったが，これはその新版として２分冊にされたものの第２部である。

本文で詳しく言及。

17 ジョン・ラドフォード・ヤング著／ジョン・D・ウィリアムズ改訂『力学の基礎—静力学と動力学を数多くの力学問題とともに含む，大学および高等学校の数学の学生向け，多くの図版つき』(1834)

John Radford Young, Revised and Corrected by John D. Williams, *The Elements of Mechanics, Comprehending Statics and Dynamics. with a Copious Collection of Mechanical Problems. intended for the Use of Mathematical Students in Schools and Universities. with Numerous Plates.*, (Philadelphia, 1834)[Young 1834].

本文 258 ページの 12 折り本。

著者の肩書きは,「解析幾何の基礎」,「微積分の基礎」の著者 (Author of “The Elements of Analytical Geometry;” “Elements of the Differential and Integral Calculus.”) とある。

また，改訂者は,「ハットン数学の解答」の著者 (Author of “Key to Hutton’s Mathematics,”) とある。

1832 年版，1836 年版，1848 年版が確認されている。1836 年版と 1848 年版は内容がまったく同じで，表紙に “Revised and Corrected by John Williams” とあるので，1832 年版の増補改訂版と考えられる。

米国発刊のためか,「運動の 3 法則」という形での記述はない。

前書きにも以下のようにあり，この本の対象読者が分かる[51)]。

この本は，力学原理という限定された範囲に関する現在の進歩状況を示すことを試みたものであり，また，英国の学生たちへの，自然哲学のこの重要な分野に関する明解でわかりやすい教科書を提供することを意図したものである。

われわれの言語ではすでにこの科学の分野でいくつかの価値ある仕事がある。たとえば，グレゴリー教授やヒューウェル教授のそれである。それらの実際上の伝達する情報は，大陸の隣人たちによるこの分野の業績には，匹敵するものはおそらくないのである。

第 II 部「動力学の基礎」(Elements of Dynamics) の Section I. On the Rectilinear Motion of A free Point. の Chapter I. が，「運動の基礎方程式」(On the Fundamental Equations of Motion) と題されている。

力は次のように定義されている[52)]。

われわれは変化する運動の原因を，それが何であれ，**力**と呼ぶ。その速度が増加するときは加速力，減少している場合は，減速力と呼ぶ。我々の一般的な理論では，力を加速力として考える。なぜなら，われわれの結論を減速力に適応させるには，単に F の式に負の符号をつけるだけでいいからである。

この後，加速度一定の場合として $F = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ を，加速度が一定じゃないときの加速力として $F = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ が導き出されている[53)]。

このように，加速力として質量の項を欠いた方程式で力が定義されているが，質量まで入れたいわゆる“起動力”は剛体力学を述べた第 3 節「固体の運動」(Section III On the Motion of a Solid Body) の第 V 章　任意の加速力がはたらく物体系の運動 (On the motion of a system of bodies acted on by any accelerative forces whatever.) に表現されている[54)]。

われわれはこの章で，加速力が互いに任意の方法で作用し，影響し合う物体系の運動に適用するきわめて一般的で注目すべき定理を示す。

$m, m_1, m_2,...$ を，系におけるそれぞれの物質の質量とし，$x, y, z; x_1 y_1, z_1,...$ を，その位置を示す座標，$X, Y, Z,$ を m にはたらく加速力の成分，$X_1, Y_1, Z_1,$ を同様に m_1 にはたらく加速力の成分... とするとき，任意の質量 m の物体に**作用する**起動力は，$m\dfrac{m}{d^2x}dt^2, m\dfrac{d^2y}{dt^2}, m\dfrac{d^2z}{dt^2}$ となる。ゆえに，座標方向に分解した有効な力の差分は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - mX, m\frac{d^2y}{dt^2} - mY, m\frac{d^2z}{dt^2} - mZ;$$

である。同様に他の物体 $m_1, m_2, ...$ についても，同様の式を得ることができる。そしてダランベールの原理から，これらの差分が単独で系に作用している場合は，つりあいの状態になる。

この本では全面的に大陸流の解析的な微分法が導入されている。しかし，まだ力の概念には混乱が見られ，質量の因子を欠いた加速力を質点系の力学では採用しており，剛体力学になって加速力に質量をかけたものとして「起動力」を導入している。

18 ウィリアム・ヒューウェル『点の自由運動および万有引力について，プリンキピアの第 I 巻と第 III 巻の主要な命題を含む—動力学論第１部』第３版 (1836)

William Whewell, *On the Free Motion of Points, and on Universal Gravitation, Including the Principal Propositions of Books I. and III. of the Principia; the First Part of A Treatise on Dynamics.*Third Edition. (Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John Smith, Printer to the University. for J. J. Deighton, Trinity Street: and Whittaker & co. London., 1836)[Whewell 1836].

初版は１巻本 (1823)[Whewell 1823]，第２版 (1832)，第３版 (1836)。

本文 238 ページの八つ折り本である（第３版)。

著者の肩書きは，トリニティカレッジのフェローでありチューター (Fellow and Tutor of Trinity College) とある。

本文で詳しく言及。

19 ジャンールイ・ブシャルラ 『力学の基礎 エドワード・コートニーによるブシャルラ氏のフランス語からの翻訳，米国士官学校候補生のための追加と修正』(1836)

Jean-Louis Boucharlat *Elementary Treatise on Mechanics. Translated from the French of M. Boucharlat with Additions and Emendations Desingned to Adapt it to the use of the Cadets of the U. S. Military Academy by Edward H. Courtenay* (New York: Published by Harper & Brothers, 1836)[Boucharlat 1836]. フランス語からの翻訳である。

1833，1836，1845，1848 年の版が存在する。

訳者の肩書きは，アカデミーの自然および実験哲学の教授 (Professor of Natural and Experimental Philosophy) とある。

慣性の法則の次の「直線運動」の後が「変化運動」(Of varied motion) となっていて，ここの第 390 項に，変化運動の第 2 方程式 (the second equation of varied motion) として，以下のような式が記述されている[55)]。

> したがって，この力を ϕ で表すことにすると，変化運動の第 2 方程式として次式を得る。
>
> $$\phi = \frac{dv}{dt} .....(149)$$
>
> 文字 ϕ は，今後力の強さを示すものとして使用する。力はそれが生み出す効果によって表される。

それでは，変化運動の第 1 方程式は何かというと，p.192 の第 387 項に記載されている $v = \dfrac{ds}{dt}$(式 148) が，変化運動の方程式として提出されている。

第 392 項ではさらに第 3 方程式を導いている。その過程を引用するために，第 391 項といっしょに引用する[56)]。

391. 前期の方程式から次式を得る。

$$\phi dt = dv$$

したがって，絶え間ない力の大きさが分かれば，ある時間 dt における速度増加は容易に計算できる。

392. 式 (148) と (149) から dt を消去することにより，運動の第 3 方程式を得る。

$$\phi ds = vdv.$$

このように，基本方程式のどれにも慣性質量が出てこないのは，フランスでも同じように加速力の概念を使っていためである。

それでは質量まで考慮に入れた力の関係式はというと，p.288. の「有効力を求める様々な方法」(*different Methods of measuring the Effects of Forces*) にある[57)]。

F を質量 M の物体に速度 V を付与する力を示すものとする。同じ力が M 倍少ない質量にはたらく場合を考えると，この質量は $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 1$ であるから，〈1 単位の質量にこの力が生じさせる速度〉は，〈質量 M に生じる速度〉より M 倍大きくなることになる。したがって，この速度は MV で表される。同様の理由により，質量 M' に速度 V' を生じさせる力 F' は，$\dfrac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'} = 1$ の質量に，M'V' で表される速度を生じさせる。

速度 MV および M'V' は，力 F および F' によって 1 単位の質量に生じた速度を示しているので，388. 項で表された原理により，以下の比を得る。

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}' :: \mathrm{MV} : \mathrm{M}'\mathrm{V}'.$$

MV および M'V' は，力 F および F' によって生じた**運動の量**(*quantities of motion*) と呼ばれる。そして，文字 M, V, F, M', V, F' は，比をの値を示す単なる抽象的な量であり，単位をもった量でもよい。

力の単位は自由に決めてよいので，我々はそれを力が生じさせる運動の量で表すことにする。そこで，F' をその単位とすると，上記の比例式で F' を M'V' で置き換えることができる。それによって次式を得る。

$$\mathrm{F} = \mathrm{MV}$$

548. 力 ϕ が連続的に作用するとき，388 項によればこの力は単位時間に生じる速度で表せるので，力の値が定数なら，V に変わって ϕ を使い，

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}\phi$$

となる。この M を単位にとれば，次式を得る。

$$\mathrm{F} = \phi;$$

ϕ は単位質量にはたらく力を表す。この ϕ の量を普通，**加速力**(*accelerating force*) と呼び，F を**起動力**(*moving force*) と呼ぶ。F が与えられれば，ϕ の値はそれを単に質量 M で割ることによって得られる。

引用文でふれている第 388 項は，その前で引用した変化運動の第 1 方程式を述べた 387 項とと第 2 方程式を述べている 389 項の間にある[58)]。

388. 絶え間ない力 (incessant force) の値を検討する前に，力と速度の関係を発見しておかねばならない。

力 F が速度 v を生み出すと考えられるとき，n 倍の力が nv と等しい速度を生み出すとは限らない。力の本質が未知であるために，この比例関係の正しさへの疑問はもっともであり，〈2 倍の力が 2 倍の速度を生み出す〉，あるいはより一般的に，〈2 つの力の合計に等しい大きさの力が単独ではたらいたときに，生み出す速度はそれぞれの力が単独にはたらいた時に生み出す速度の合計になる〉とは必ずしも断言できない。しかし，普遍的な経験により確認されたことによれば，これを原理として採用してもよい。すなわち，様々な力がある一つの質点にはたらくときに，それらの相対的な強さは，それぞれが生み出す速度を比較することによって得られる。

絶え間ない力の正確な測定は，ある一定の時間に生じる速度で与えられる。しかし力の強さが変化する場合は，測定しようとする瞬間では力が一定であると見なして，その瞬間での 1 秒間に生じる速度を力の測定値とする。この絶え間ない力によって生じる単位時間あたりの速度は，それが一定値をとるとみなすとき，変化する絶え間ない力 (variable incessant force) が同じ時間に生み出すであろう速度とは明らかに異なる。

このように，力と加速度の比例関係を第 388 項で述べて，それをもとに，その比例定数として 548 項で慣性質量を導入している。

20　ロバート・ウィリス『機械学の原理 大学の学生および一般の工学の学生向け』(1841)

Robert Willis, *Principles of Mechanism, Designed for the Use of Students in the Universities, and for Engineering Students Generally.* (London: John W. Parker, 1841)[Willis 1841].

著者の肩書きは，ケンブリッジ大学の自然・実験哲学のジャクソニアン教授 (Jacksonian Professor of Natural and Experimental Philosophy in the University of Cambridge) とある。

本文 446 ページの八つ折り本。
1870 年版あり。
この本は機械学の本であるが，前書きに Kinematics に関する記述がある[59)]。

> しかしながらアンペールは後者の目的を含む構成を熟慮して，1834 年に出版された『科学哲学小論』で以下のように明瞭に述べた。「もし十分に発展すれば完全な科学となりうるのに，これまでほとんど無視されてきたかあるいは論文やある種の小論でのみ述べられてきたある種の考察がある。この科学（彼は *Kinematics* という用語を当てた）は，それを生じさせる力を除いた運動に関するすべてを含むべきである。 それはまず第 1 に様々な運動による距離や時間そして距離と時間の間に成り立つさまざまな関係に関する速度の決定について扱うべきである」

続けて以下のような記述をアンペールから引用している[60)]。

> このような運動と速度に関する一般的な考察の後，この新しい科学は，さらに発展すれば，機械の異なる点における速度や，一般に質点の系の速度に存在する比を，機械ないし系が取り得るすべての運動に関して決定するところまで発展するだろう。一言で言えば，質点に働く力とは独立に，**仮想速度**と呼ばれるものを決定するのである。このように力に関する考察から分離することによってこの決定ははてしなく分かりやすくなる。
> （アンペール『科学哲学小論』1835, p.50）

さらにヒューウェルについても以下のように言及している[61)]。

> この卓越した著者が，この主題に関する明瞭で効果的な見解を追求しなかったのは大変遺憾である。
> 私はこの運動の原理に関する同様の分離を，ケンブリッジ大学で 1837 年に最初におこなった機械論の講義に基づいて形成した。そして同様の見解はその後，高名で権威あるヒューウェル教授によって賛同され，彼の『機能的諸科学の哲学』の「運動の原理」で記述されている。そこでは「純粋機械論」の表題の下に，この科学を上記のアンペールの言葉を引用しながら定義しているのである。
> ヒューウェル，『機能的諸科学の哲学』(1840), p.144.

21　ジョセフ・デニソン『力学新編，数学新入門，ユークリッド幾何学原論への新増補，その他の著者による』(1841)

Joseph Denison, *A New Treatise on Mechanics, by the Author of "A New Introduction to the Mathematics," "A New Supplement to Euclid's Elements of Geometry,"&c. &c.* (London: Whittaker & Co. Ave Maria Lane., 1841)[Denison 1841].
本文 184 ページの八つ折り本。
この本では，第 1 章が「定義と運動の法則」(Definition and Laws of Motion) と名付

けられており，冒頭に 3 法則が記述されている[62]。

運動は，衝撃 (impulse) の作用による受動 (passion) であるので，静止状態（運動の単なる否定に過ぎない）は，衝撃 (impulse) の作用がないことによる受動である。

第 1 法則—物体はなんらかの外力 (external force) あるいは衝撃 (impulse) によってその状態が変化させられない限り，静止状態，あるいは等速直線運動の状態を続ける。

第 2 法則—運動，あるいは運動の変化は，衝撃 (impulse) あるいは力が作用する方向におこり，抵抗を超えて与えられた力の超過量に比例する。

第 3 法則　力が抵抗する物体に与えられるとき，抵抗は力が働く向きと逆向きで，力の働きの作用の程度まではたらく。[この法則は一般に以下のようにいわれる—「作用と反作用はひとしく，反対向きである」]

第 3 法則は作用・反作用としているものの，その理解は今日とはかなり違うものとなっている。

その解説には，以下のように書かれている[63]。

第 1 のケースでは，一方の物体は運動し，もう一方は静止していて，静止物体の抵抗はその重さと摩擦であるというケースである。もし重さと摩擦をあわせたものが運動物体の力と等しいか勝っていれば，抵抗物体の抵抗する量は運動物体の作用と等しく，互いに打ち消しあう。しかし，もし静止物体の抵抗が運動物体の作用より少なければ，静止物体の反作用はその抵抗量と等しいに過ぎなく，運動物体の作用より小さくなる。そこで，その作用は反作用と等しい分だけしか打ち消されない。そしてこのようにして理解されるこの法則は，一般に著者たちによって「作用と反作用は等しい」と表現されているが，これは量の面で等しいということではなく，その効果の程度が等しいと言うことである。このことは，二つの運動物体が互いに反対方向に運動しているときにはより明らかだろう

つまり，力を $f = m\dfrac{dv}{dt}$ とせず，質量の因子を欠いた加速力 $f = \dfrac{dv}{dt}$ として理解しているために，質量は摩擦と同様に，力を打ち消す抵抗力として理解されてるのである。そこで，作用・反作用の概念も現代的な理解とは異なった理解となってしまっているのである。

Chapter IX は起動力 (Moving Force) と題されており，そこに以下の記述がある[64]。

これらの考察から，**起動力**(*moving-force*) が物体に作用してつりあい状態になっているなら，その結果としてその起動力が物体に生じさせる運動量がつりあい状態になる。原因と結果が等しくなるために，起動力は運動量と等しい。しかしながら，この 2 つの相等性にもかかわらず，起動力と運動量の両者は，互いを識別する特有の性質があり，互いに変換したり交わったりすることはできない。このように重さと速度の積は運動量とは決して等しくはなく，常にそれを上回っている。d の

値が何であれ，M は常に$=\dfrac{\mathrm{WV}}{d}$である。反対に，F，すなわち起動力は常に=WV である。というのは F は，物体につりあいをもたらすために与えられた力の一部に補助的な部分を持つが，運動量はそのような補助をもたないのである。

したがって，物体の重さから解放されると，その分だけ物体に起動力 (the moving-force) が，与えられる。そのような重さからの解放は，起動力を援助することになる。しかしこの解放は，運動量の減少になる。つりあいの状態にあるとき，起動力は物体を推進するのに優位な状態にある。重さを持つ物体をその重さがあたかもないような容易さで動かす。したがって，それが物質の量を動かすとき，それは実際に重さを動かしている。なぜなら，重さ無しの物質の量だけ動かすことはできないからである。したがって，起動力の作用に関して，$\frac{\mathrm{W}}{d}=\mathrm{W}$ であり，$\mathrm{F}=\mathrm{WV}$ である。その結果として，$\mathrm{W}=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{W}}$ が成り立つ。この式は等速で運動しているすべての物体にかんする起動力のすべての場合を決定する。

22　**サミュエル・アーンショウ『動力学，あるいは運動の基礎; 一般原理と公式に関する多くの種類の実例となる例題 と引力に関する短い論考の追加』第３版改訂版** (1844)

Samuel Earnshaw, *Dynamics, or an Elementary Treatise on Motion; with a Great Variety of Examples illustrative of the General Principles and Formulæ: to Which is Added, A Short Treatise on Attractions*Third Edition, Revised (Cambridge, 1844) [Earnshaw 1844]. 初版 (1832)，第 2 版 (1839)，第 3 版 (1844)

本文 372 ページの八つ折り本。初版に比べて 2 倍もの量になっている。

著者の肩書きは，初版と同じケンブリッジのセントジョンズカレッジ (St. John's College, Cambridge) とある。

第 1 章の「定義と第 1 原理」のあとの節が「運動の法則」(THE LAWS OF MOTION) となっており，そこに運動の 3 法則が記述されているが，それはヒューウェルに準じた表記となっている[65]。

運動の第 1 法則

8. **運動している物体にいかなる 外 力も働いていなければ，その物体は一直線上を一定の速度で運動する。**

運動の第 2 法則

12. **運動している質点に外力が働くとき，運動の変化は力の方向におこり，その大きさはその質点があらかじめ動いてなかったときと同じである。**

運動の第 3 法則

23. **物体に運動を引き起こす静力 (pressure—重さを支える力から静力学的に測定される) は，物体の質量と加速力との積に等しい。**

第 2 法則で加速力が以下のように定義されている[66)]。

結果として，変化する加速力について，

$$\text{力} = \frac{\text{無限に小さい速度の増加}}{\text{それを生じさせる時間}}$$

$$= \frac{\text{速度の増加}}{\text{それを生じさせる時間}}\text{の極限}$$

が成り立つ。

起動力と加速力の関係式は第 3 法則の解説中にある[67)]。

∴静力 (pressure) = 質量 (mass)・加速力 (accelerating force)

運動法則とニュートンを結びつける記述はない。

23 ウィリアム・ウォールトン『理論力学の原理の実例としての問題集』(1842)

William Walton, *A collection of problems in illustration of the principles of Theoretical Mechanics.* (Cambridge: W. P. Grant, 1842)[Walton 1842].

確認できた版は，1842,1855,1876

著者の肩書きは，学士 (B.A.) ケンブリッジ，トリニティーカレッジ

第 II 部 Dynamics の第 1 章は Collision and Impact で，それに続く第 2 章が「質点の直線運動」(Rectilinear Motion of a Particle) である。

質点の運動方程式として，以下のように式が与えられている[68)]。

有限な加速力あるいは減速力の作用の下に一直線上を運動する質点の運動状況を決定するには，以下の 2 つの微分方程式による。これらの式は質点の運動方程式と呼ばれる。

$$\frac{dx}{dt} = v, \frac{dv}{dt} = f$$

ここで t は決められた時間から計算された運動の時間をあらし，x は決められた点からこの時間の終わりの質点の位置，v は速度，f は加速力ないし減速力を示すものとする。

これらの 2 つの式は以下の式に容易に変形できる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f, v\frac{dv}{dx} = f.$$

これらの式は，加速度ないし減速度 (acceleration or retardation) のすべての条件に関する微分計算の言語による完璧な表現であるが，1700 年にヴァリニョンによって『パリ科学アカデミー論文集』p.22 に発表された。しかしながらそれよりずっと以前にこの変化する力による直線運動の幾何学的研究はニュートンによって述べられた。

ニュートンの箇所には脚注がふられ，Principia, lib. I sect.7. lib. II. sect 1. が参照されている。

起動力との関係式はこの本には表現されていない。Chapter X Dynamical Principles の　Sect1. *Vis Viva* のところで，Moving Force が以下のように説明され，ニュートンに起源を持つことが述べられている[69]。

> ダランベールの出版により，この Vis Viva という用語は，単なる運動物体の質量と速度の二乗との積を意味づけるものとして使われてきた。一方起動力 (Moving Force) という単語は，一般的にニュートンが『プリンキピア』で与えた定義に賛同して一般に作用されてきた。この質量と加速力の積の意味については，
>
> これらの定義にふくまれると考えられる力の絶対的な性質がなんであれ，何の物理的な理論もこれらを支配しているとは考えられてこなかった。

24　シメオン－デニス・ポアソン『力学論 H.H. ハートによるフランス語からの翻訳と注釈』全２巻の第１巻 (1842)

Siméon-Denis Poisson *A Treatise of Mechanics, Translated from the French, and Elucidated with Explanatory Notes by H. H. Harte.*in Two Volumes. Vol.I, (London: Longman and co. Dublin: A Miliken; and Hodges and Smith, 1842)[Poisson 1842].

仏語版ポアソン『力学論』(*Traité de Mècanique*)(1811 初版,1833 第 2 版）全 2 巻の英訳。

訳者の肩書きは，ダブリンのトリニティカレッジの前フェロー (Late Fellow of Trinity College, Dublin) とある。

原書は，ポアッソンが理工科学校 (École polytechnique) でおこなった講義を元にしたものである。そこで，フランスでは講義用の教科書として使用されたのではないかと考えられるが，英国でどのくらい大学などの入門教育に使用されたかはわからない。しかしいずれにしても，その後大陸流の解析的な力学が英国に導入されるにあたって，この本が英訳されたことの影響は少なくないと思われる。

この本は 1，2 巻が全体で第 1 書～第 6 書 (Book The First～Sixth) まで 6 部構成になっており，第 1 巻には第 1 書～第 3 書「静力学 (Statics) 第 1 部 (Firs Part)」,「動力学 (Dynamics) 第 1 部」,「静力学第 2 部」がおさめられており，第 2 巻には第 4 書～第 6 書の剛体の動力学および流体力学に関する内容がおさめられている。

運動の法則に関する記述は，第 2 書「動力学第 1 部」の第 1 章「直線運動と力の測定」(Of rectilinear motion and of the measure of forces.) 第 1 節「直線運動の公式」(Formulae of rectilinear Motion.) に以下のように記述されている[70]。

> 釣り合いの法則は，力と対応する速度との特別な関係を示すものではなく，静力学の問題を解決するためのものである。そこで，No.5 で定義したような力の数値的関係を知ることができれば十分である。それに対して運動の法則は，任意の力に

> よって生み出された速度の大きさの大きさの間になりたつ関係による。そしてこの関係は，動力学の問題を解決するのに書くことのできない知識であり，これから示す力の関係式と同じである。

この後に，質量を欠いた加速力 ϕ が，

$$\phi = \frac{dv}{dt}$$

として導入されている[71]。

これに質量をかけたいわゆる運動方程式に該当する式は，第 2 節「質量を考慮にいれた力の測定」(Measure of Forces having regard to the Masses) に以下のように記述されている[72]。

> 以下のことがこれまで明らかになっている。ある大きさと形がある物体を考える。それらのすべての点が同じ速度で，平行に運動しており，しかも刻々と変化しているとする，この物体を，先ほど定義したように，質量と等しい無数の量に分割する。これらすべての運動は，運動体全体を通じて等しく，平行である力に帰することができる。この物体のすべての部分の合力は，その合計であり，その部分の重心にはたらく。任意の二つの部分に対応する力はそれぞれその質量に比例する。したがって，運動体の質量 m の物体にはたらく力を f とするとき，ϕ をこの質量の一部に応じる力として基本単位とすると，
>
> $$f = m\phi$$
>
> 力 ϕ について，これは無限小の時間に運動体が増加した速度に比例している。そして v を時間 t 経過した後の速度とすると，その大きさは No.118 にあるように，以下で示される。
>
> $$\phi = \frac{dv}{dt}$$
>
> したがって，その結果
>
> $$f = m\frac{dv}{dt}$$
>
> が得られる。この式は，運動体の質量を考慮に入れ，そのすべての点が同じ速度であると考えられている。
>
> この力 f，すなわち，無限に小さい力の合力であり，その物体を構成するすべての点がその力によって動かされるような力を，**起動力**(*motive force*) と呼ぶ。その値 $m\phi$ の要素 ϕ は，**加速力**(*accelerating force*) と呼ばれる。これは単位時間についての起動力以外の何者でもない。

つまり，加速力 ϕ は，質点 1 つ 1 つに働く “1 単位の力” であり，質量 m の物体というのは，m 個の質点に働く力と考えているのである。そこで，物体の質量のある物体を考えたときには，質点 1 つ 1 つに働く力 ϕ を質量の数 m 倍して $f = m\phi$ としているのである。そういえば，すでにみたラプラス『解析力学』でも，質点の力学の時は運動方程式は質量の因子を欠いていたのに，剛体を扱う章になると質量まで考慮に入れた運動方程式が登場した (180 ページ参照)。英国のグレゴリーやヒューウェルと同じである。

25　ジョン・ヘンリー・プラット『力学哲学の数学的原理とその応用—基礎力学および建築学への少しの応用と，万有引力への応用を重点的に』第２版増補改訂版 (1842)

John Henry Pratt *The Mathematical Principles of Mechanical Philosophy and Their Application to Elementary Mechanics and Architecture, but chifly to the Theory of Universal Gravitation. Second Edition, revised and improved.* (Cambridge: J, & J. J. Deighton, Cambridge; etc., 1842)[Pratt 1842].

初版 (1836)，第 2 版 (1842)，第 2 版には 1845 年の版も存在している。

著者の肩書きはケンブリッジのゴンヴィルおよびカイウスカレッジのフェロー，インドの首都カルカッタの主教つき司祭 (Fellow of Bonville and Caius College, Cambridge. and Domestic Chaplain to the Loard Biship of Calcutta, Metropolitan of India.) とある。

前書きで，ヒューウェル，ポアソンなどへの謝意を表明している。その前書きでまた，運動の 3 法則についても言及している[73]。

> 運動を測定する伝統的な方法を解説した後，外因に影響されない場合の物体の運動を規定する法則についての探求を進める。さまざまな実験と日常的な出来事による事実が運動の第 1 法則と呼ばれる原理を示している。これが力の伝統的な測定法を動力学的に導きだす。力の算出法を説明するに当たって，私が目指したことは，その効果を発生するのに測定可能な時間を必要とする力の性質と，無限に小さな時間に速度を産み出す力を明確に区別する概念を与えることである。そこで，その検討は，異なる要因によるものが同時に作用するときの物体の運動を規定する法則になる。そしてこれから，第 2 法則と名付けられる原理を導き出すことになる。この法則によって我々は 3 つの直交座標上の曲線運動に言及する方法を導き出すことが可能になる。そこでこの因果関係は二つの自由に想定された力の測定値の関係を示す。すなわち

冒頭の「序論と定義—静力学と動力学における力の測定」(Introduction and definitions, measure of force in Statics and Dynamics.) の第 7 項で静力 (pressure) の定義[74]

> 7. 静力学では，力は静力によって測定される。それは物体が静止している場合，接触しているもう一方の物体に対して生じるものであり，静力学的に測定されるという言い方をする。

第 2 部動力学の冒頭で運動の三法則の解説。各法則でデザギュリエの実験を参照している。

第 1 法則は慣性の法則[75]

> 物体の運動に関するより多くの実験はデザギュリエの『実験哲学教程』全 4 巻,1734 の Vol.I, 第 V 講を参照のこと。
>
> 哲学者は，物体の運動の基本原理として，**運動している物体に外力が働いていないとき，一直線上を等速運動する**という原理を疎決め，これを**運動の第 1 法則**と名付けた。

第 1 法則から加速力の定義[76]。

> 194. 運動の第 1 法則によって，5 条と 191 条で与えられた力の定義を拡張できるようになった。— 我々は今，物体に運動を生み出す，あるいは産み出そうとする場合だけでなく，物体の等速直線運動を変化させる場合にもこれを定義することができる。
>
> そこで物体の速度が変化するような運動の時，力がはたらいていることが明らかである。そして，反対に力が物体に働いているとき，その速度は連続的に変化していく。今ある時間に速度が変化する大きさを物体にはたらく力の大きさの測度とする。そして，区別のために，力をこの方法ではかるとき，それを**加速力**と呼ぶ。すでに述べたように，力を静的に測定したとき，それは静力 (Pressure) と呼ばれる (7 条)。

衝突現象より，極限の概念を提出。加速力を定義している[77]。

> したがって，f を一定であろうが，変化的であろうが t 時間に速度 v を生じさせる加速力としたとき，f, v, t は式 $f = \dfrac{dv}{dt}$ で結びつけられる。

第 2 法則は二つ以上の運動の原因があるときの法則として記述されている[78]。

> より多くの事実と実験はやはりデザギュリエの実験哲学の第 5 講を参照。
>
> これらの事実は次の一般原理を我々に指し示す。
>
> **力が運動している物体にはたらくとき，その運動の変化の大きさと方向は，それが静止しているときにはたらく結果と同じである。**
>
> これは運動の第 2 法則と呼ばれる。

起動力と加速力との関係は，運動の第 3 法則の節の中の，「1. 測定可能な力 (Finite Force)」の中，第 3 法則を記述する前の部分にある[79]。

> 214. 物体の質量と加速力の積はニュートンによって物体の**起動力**(*Moving Force*) と名付けられた。そして速度と物体の質量はその**運動量**(*Momentum*) と名付けられ，運動の量 (quantity of motion) ともよばれる。そこでこれらの実験は,

静力 (pressures) は，起動力すなわちある決まった時間に物体に生じる運動量にしたがって変化するとういことを示している。というのは，加速力は決められた時間に生じる速度ではかられるので，起動力は決められた時間に生じる運動量によって測定されるからである。

第 3 法則は，「2. 衝撃力 (Impulsive Force)」 の中で，デザギュリエの衝突実験を例に挙げながら，以下のように述べられている[80)]。

有限，衝撃的を問わず，力の静力学的測定は，物体の質量と力の動力学的測定との積に正比例する。

引き続いて以下のように記述されている[81)]。

218. この法則は以下のような形式でも記述することができる。

測定可能な(*finite*) 静力 (pressure) が，物体に運動を生成あるいは消滅させるとき，起動力は静力に比例する。また，**瞬間的な**(*impulsive*) 静力が物体に運動を生成あるいは消滅させるとき，生成あるいは消滅する運動量は静力に比例する。

ニュートンはこの法則をより一般化した形式，「作用と反作用は等しく正反対である」という形式で与えた。もし動力学において作用と反作用が運動の量が得失によって測定されるなら，これは第 3 法則の直接の演繹である。

この後に数式としての表現が「静力と質量の単位 (The Unity of Pressure and Mass)」と題する節にある[82)]。

220. 今我々は静力すなわち静力学的な力と，質量の単位を選ぶ。

P を測定可能な静力，f を加速力，M を質量とすると，P は Mf につれて変化する。静力の単位を物体の質量が M' で加速力が f' のときにとると，

$$P : 1 :: Mf : M'f';$$

$$\therefore P = \frac{Mf}{M'f'}$$

となる。M' と f' をこの式ができるだけ単純になるようにとるために，$M' = 1, f' = 1$ とすると，

$$P = Mf..................(l)$$

つまり，**1 単位の静力は，1 単位の加速力がはたらく 1 単位の質量の静力である。**

この静力が衝撃的 (impulsive) であるとき，**その単位は 1 単位の速度で運動する 1 単位の質量の静力である。**そこで，上記と同様に，次式が与えられる。

$$P = Mv..................(2).$$

26 リチャード・ポッター『力学の基礎—大学教養課程の学生向け』(1846)

Richard Potter, *An Elementary Treatise on Mechanics. For the Use of Junior University Students.* (London: Taylor and Walton, 1846) [Potter 1846].

第 2 版 (1848)，第 3 版 (1855)，第 4 版（1859)

著者の肩書きは，ケンブリッジ クィーンズカレッジの元フェロー，ロンドン王立医科大学の免状所有者，セントアンドリュースの文学哲学協会の名誉会員，ロンドン大学の自然哲学および天文学の教授 (Late Fellow of Queen's College, Cambridge; Licentiate of the Royal College of Physicians, London ; Honorary Member of the Literary and Philosophical Society of St. Andrew's ; Professor of Natural Philosophy and Astronomy in University College, London.) とある。

全 162 ページのうち，静力学 114 ページ。

「運動の 3 法則について」(ON THE THREE LAWS OF MOTION) と題する節の中で以下のように記述されている[83)]。

> **第 1 法則　物体に何の外力も働かないとき，それは一直線上を等速で運動する。**
>
> **第 2 法則　いくつかの力が同時に物体に働くとき，それぞれがその力の方向にもたらしうる最大の効果を産み出し，それは静止しているか運動しているかによらない。**
>
> **第 3 法則　静力 (pressure) が物体に働いて運動させているとき，起動力は単位時間に生成する運動量で測定されるが，それは静力に比例する。**

第 3 法則は，起動力の定義を兼ねているが，同時に静力学的な力と動力学的な力であるところの起動力とを結びつける定義となっている。

動力学の第一章の最初の節「定義と運動の法則」の中で，運動の法則を述べる前に，加速度と起動力の定義がある[84)]

> 我々は, 連続的に物体の速度を増加させるときの力を**加速力**(*accelerating force*), 連続的に減少させるときの力を**減速力**(*accelerating force*) と呼ぶ。一様，あるいは一定の**加速**力は，物体の速度を一様に増加させる，すなわち物体に，同じ継続時間ごとに同じ割合で，それ以前の運動に速度を追加していく。一様な**減速**力は，同じ法則により速度を減少させていく。**変化する**(*Variable*) 加速ないし減速力は，物体の速度に対する作用が連続的に変化するような力である。
>
> 物体にはたらく**起動力**は，すぐ後で述べる第 3 法則で見るように，**動かされる質量**(*mass moved*) に加速力 (*retarding force*) をかけたものを意味し，それは物体に与える静力 (pressure) に比例する。そしてその静力は，ばねの復元だろうが，物体の引力であろうが，火薬の爆発であろうが，何の要因でも関係ない。
>
> 運動する物体の**運動量**は，質量にその速度をかけたものを意味する。質量に速度の 2 乗をかけたものは運動物体の**活力**(*vis viva*) と呼ばれる。

力はそれが生み出す作用によって測定されるので，加速力の動力学的測定は，それが一様ないし一定の場合，ある一定の時間に物体に生じる速度でなければならない。f で力を表し，一定時間を単位時間とすると，「$f=$ 単位時間に生じた速度」ということになる。力は一定なので，毎単位時間ごとに同じ速度の追加を得る。そこでもし，v を t 単位時間に静止状態から力の作用を得た結果に得た速度とすれば，$v=ft$ が成り立つ。

上記の定義より，**起動力**は 1 単位時間に生じた運動量で測定される。

式 $v=ft$ より，我々は，

$$f=\frac{v}{t}=\frac{\text{ある時間に生じた速度}}{\text{時間}}$$

を得る。

力が変化し，瞬間的に次から次へと変化するとき，我々は時間を無限に小さくとる。そこで，変化する力では

$$f=\frac{\text{無限に小さな時間に生じる速度}}{\text{時間}}$$

$$=\frac{v'-v}{t'-t}=\frac{\delta v}{\delta v}$$

が成り立つ。上記で $v=$ 時刻 t の物体の速度，v' を t に無限に近い時刻 t' における速度 v' である。

基本的には力は加速力としてあつかっている。起動力は，たとえば，向心力の問題では，まず加速力を

$$f=\frac{v^2}{r}\quad (r\text{ は回転半径})$$

として求め，m を質量として，向心力を

$$\begin{aligned}&=mf\\&=\frac{mv^2}{r}\\&=\text{糸の張力}\end{aligned}$$

といったように，加速力を求めて，最後に質量をかけることによって起動力を求めている[85)]。

27 ウィリアム・ヒューウェル『力学の基礎: カレッジおよび大学向け』第 7 版増補改訂版 (1847)

William Whewell, *An Elementary Treatise on Mechanics: Intended for the Use of Colleges and Universities* The Seventh Edition, with Extensive Corrections and Additions (Cambridge: Deightons; and Whittaker & co. London., 1847)[Whewell 1847].

初版 (1819), 第 2 版 (1824), 第 3 版 (1828), 第 4 版 (1833), 第 5 版 (1836) 第 6 版 (1841) 第 7 版 (1847)

初版には第 I 巻 (Vol. I) とあるが，第 II 巻の存在は確認できていない。第 II 巻は出版されず，第 I 巻が改訂を続けたと考えられる。

参照した第 7 版は，本文 191 ページのうち，第一部静力学 131 ページ，残りが第二部動力学である。

動力学の構成は，

となっている。

動力学冒頭で，静力 (pressure) と力 (force) について，次のように述べている[86)]。

> 129. 動力学では，静力学での定義，公理，命題，そのほかの成果を適用する。
>
> 動力学は，〈運動を生じさせるか変えると見なされている力〉に関する科学である。もし物体 (any body or bodies) にいくつかの力がはたらくとき，それらが釣り合っていなければ，なんらかの運動か何かが起こる。動力学は，この運動の事情と性質が何であるかを決定することを目的とした科学である。
>
> そこで，動力学では静力学で考慮したのと同じ種類の力を考える。すなわち**静力**(*Pressures*) である。静力学では静力はつりあいを生み出した。動力学では静力は運動を生み出す。

Kinematics については，「運動の第 1 法則」の中で以下のように言及されている[87)]。

> 139. 一般に機械の部分の速度や方向に関する法則，一部から他の部分への速度の伝達のそのような法則の変形などに関する考察は，別の科学に属しており，それは**運動学**(*Kinematics*) とか**機械論**(*Mechanism*) と呼ばれている。本論の目的は，それを生じさせる力あるいはそれに変わるものを考慮に入れた運動である。

「運動の第 1 法則」に続く章「等加速度運動」(Uniformly accelerated Motion) に，加

速力の定義がある[88)]。

> 144.定義 加速力はある決まった時間にそれが物体に生み出す速度によって測定される。

それを数式化したのが次の 145 条である[89)]。

> 145.定義 **一様な加速力 (Uniform Accelerating Force) は決められた一定の時間，たとえば 1 秒間に追加する（あるいは減じる）速度によって測定される。**

この節の中で，式

$$f = \frac{v}{t}$$

が導かれている。

この微分形式の表現は，「変化する力」(Variable forces) の Section IV に表記されている[90)]。

> 154. 加速力が変化するとき，運動に関する推論には極限の概念が必要になる。そして，その計算のために，この概念を適用するための数学的方法，たとえば微分法の計算が必要となる。
>
> 微分計算の基本原理から，t に対する s の微分係数は s の増加と t の比の極限であるので，次のように表現できる。$\dfrac{ds}{dt}$
>
> 命題 s を加速力 f が質点の運動方向に t 時間はたらいたときに描く距離とし，v を各瞬間の速度とすれば,
>
> $$v = \frac{ds}{dt}, f = \frac{dv}{dt}.$$
>
> を得る。135 項ですでに見たように，速度は距離の増加と時間の比の極限であることを示している。
>
> そしてまた，同様に，加速力は決められた一定時間に増加する速度が増加するにしたがって増加し，速度の増加と時間の増加の比が等しいなら，その比で求められる。このことは 146 項の系ですでに示している。
>
> そこで，この比が一定ではない場合，速度と同じように，時間を減少させる場合のこの比の極限によって加速力をはかる。そこで，微分係数の定義より，
>
> $$v = \frac{ds}{dt}, f = \frac{dv}{d}.$$

第一章「加速力」の末には，次のような式が出てくるが，質量の因子を欠いている。p.162.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

第 2 章「起動力」(Moving Force) の最初の節が「運動の第 3 法則」である。

まず，起動力が以下のように定義されている[91]。

> 定義 I. **物体の運動量はその速度と物質量の両者に比例する。**
> 定義 II. **起動力は決められた一定時間に物体に生じる運動量ではかられる。**

しかし，第 2 章「起動力」の Section II.「一定の起動力」(Constant Moving Forces) 冒頭には，以下のように加速力と起動力の関係式は記述されているが，他のどこにも，$m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を力とするような，今日の運動方程式のような式は記述されていない

28　ウィリアム・ナザニエル・グリフィン『剛体の動力学』第 2 版 (1847)

William Nathaniel Griffin *A Treatise on the Motion of a Rigid Body.* (Cambridge: 1847)[Griffin 1847].

著者の肩書きは，神学学士 (B.D.)，セント・ジョンズ・カレッジのフェロー (Fellow of St John's College) とある。

本文で詳しく言及。

29　アンドリュー・サール・ハート『力学の基礎』第２版増補版 (1847)

Andrew Searle Hart *An Elementary Treatise on Mechanics.* Second Edition, enlarged. (Dublin; James McGlashan, 1847) [Hart 1847].

著者の肩書きは，ダブリン，トリニティカレッジのフェロー (Fellow of Trinity College, Dublin) とある。

初版 (1844)

前書きにポアソンへの言及あり。

全 129 ページのうち，第 I 部「静力学」56 ページ，第 II 部「動力学」

第 II 部　動力学の第一章「定義と原理」(Difinitions and Principles.)(p.57.)

の公理 1 から公理 5 までを引用する。

まず公理 1 と 2 は，連続して以下のように記述されている[92]。

> 公理 1. 物体に何らかの力がかからない限り，質点が静止している場合は静止し続け，運動しているときは一直線上を等速で運動し続ける。
>
> 公理 2. もし静止している質点になんらかの力が作用したとき，産み出される速度は力に比例し，その方向は力の方向となる。

公理 1 と 2 に関する解説の後，公理 3 は以下の通りである[93]。

> 公理 3. もし運動している質点に何らかの力が作用した結果として生ずる速度は，その質点が静止していたときに，この力と最初の速度を産み出すための力との合成によって生じる速度と等しい。

その後に公理 3 の解説が以下のように記述されている[94]。

> この公理と第 2 の公理は通常ひとつにまとめられて運動の第 2 法則と呼ばれ，次のように表現される。「速度，つまり運動の変化は，与えられた力の方向に起き，その大きさに比例する」この法則をここでは二つに分けている。それは，「運動の変化」という語句に対する誤解を排除するためである。

このように，運動の第 2 法則を正面切って記述してはいないが，もともとの第 2 法則は「運動の変化の法則」とみなしていて，それを「力と加速度の法則」と「力と運動の合成法則」の 2 つとする考え方には，ヒューウェルの影響が見られる。

公理 4，公理 5 を続けて引用する[95)]。

> 公理 4. 等しい質点の重さは等しい。
> 公理 5. 作用と反作用の大きさは等しく，反対方向である。

公理 5 の脚注には以下のようにある[96)]。

> 第 5 の公理は，ニュートンによって第 3 法則と名付けられたが，ダランベールによってより一般的に以下のように述べられた。—いくつかの力が物体，すなわち物質系の異なる点に作用したとき，これらの点の運動は，それらの相互の結びつきの結果として，それらが結合していなかったときとは異なる運動をするだろう。しかし，もし，実際に産み出された速度を引き起こす力と，同じ大きさで反対方向の力が全ての質点に働いたとしたら，それらの力は運動を生み出した力と釣り合うだろう。—ニュートンの第 3 法則の表現では，質点が他と結びついていることによって引き起こされる運動の変化は，その質点の作用と呼ばれ，それに対応した第 2 の質点の変化が反作用と呼ばれる。これらの二つは等しく反対方向であるために，これらの原因となる力は釣り合う。そしてこれは全ての質点について正しいので，系全体の運動の変化を起こすすべての力は，釣り合う。しかし，こららの力はダランベールの原理により，釣り合っている力の合力と同じ大きさで反対方向であることは明らかである。したがって，これら二つの原理は同一である。

30　アーチボルト・サンデマン『〈１つの質点〉および〈互いに作用する２つの質点〉に関する運動論』(1850)

Archibald Sandeman *A Treatise on the Motion of a Single Particle and of Two Particles Acting on One Another.* (Cambridge, 1850)[Sandeman 1850].

肩書きはケンブリッジのクィーンズカレッジのフェロー及びチューター (Fellow and Tutor of Queen's College Cambridge)

本文 190 ページの八つ折り本。

序文—運動の法則と力の測定についての記述[97)]。

> 運動の法則の考察を導入する段階にはいると，我々は運動および運動の変化を測定する方法を得る。そして静力学から力の測定方法を得る。そこで，この法則の目

的はわかりやすく明確なものとなる。それは質点の運動および運動変化の運動学的な測定値を質点に働く力の静力学的測定値を結びつけるものである。そこで，測定値に関する全ては，確定されることになる。あとは距離，時間，静力学的な力の単位に選択の余地があるに過ぎない。

そのような事情により（よくおこなわれるように），この法則の目的を物体の運動から導き出される力の測定値を求めるためのものとするのは，明白な誤りである。しかしながら実際は，運動の法則はそのような測定法をもたらすものである。しかしそれは，いわば付随的なものであり，質点に作用する力によって産み出された加速度がすでに採用されていた力の測定値と比例していたという事情から発生したということである。

序文—運動の法則の位置づけについて[98)]

厳密に言えば，運動の法則は一つだけと言ってもいいかもしれない。つまり，任意の質点にはたらく力の静力学的効果と動的効果の比例関係の法則である。この法則の中に，外力がはたらかないときの等速直線運動の法則を含んでいるのは明らかである。力の静力学的効果と加速的効果の定数の法則は質点が異なれば必ずしも等しくないという法則は，運動の法則と言うよりむしろ物質の法則である。というのは，その法則が力と結びつけるのは運動ではなくむしろ物質だからである。そして作用と反作用の相等性の法則は，運動の法則と言うよりむしろ力の法則である。というのは，その法則は力と力を結びつけているのであり，力と運動を結びつけているのではないからである。ダランベールの名を冠している原理は，ニュートンの第 2 法則の一般化に過ぎない。なぜなら，この法則は，質点系に同じ動的効果をもたらす 2 つの力の系は，静力学的に等しいという原理に直ちに結びつけることができるからである。

序文—運動の法則の目的[99)]

この本における主要な目的は，以上で述べたような欠点や誤りを取り除くことによって，運動の科学における正しい基本関係をわかりやすく示すことである。運動の原理に関する正しい哲学の重要性はどんなに強調してもしすぎることはない。というのは，それらはそれ自身の領域で重要な結果を導くにしても，あるいは物理学全体の基礎を築くものともなりうるし，人類の知識の本質を考察するための貴重な材料を供給するとも考えられるのである。

序文—第 3 法則に関する記述[100)]

上記で述べたような本では，〈力の静力学的効果と動的効果の比例関係の法則〉と〈作用と反作用の同一性の法則〉を，異なる形式ではあるけれど，等しいと表現されている。言い換えると，ニュートンの第 2 法則と第 3 法則は等しいと表現されている。そのような概念の混乱がどのようにして生じたかを知ることは困難であ

る。後者の法則は 2 つの質点に互いに働く力を比較したものである（つまり，一方への静力学的効果と他方へのそれを比べたもの，あるいは動的効果どうしを比べたものである）。一方前者の法則は一つの質点にはたらく力の静力学的効果と動的効果を比較したものである。すべての力はもう一方の物体の作用から発生するという原理に関するあいまいな理解が，基本的に異なるはずの 2 つの法則をごたまぜにする事態になんらかの原因があるのかもしれない。

31 サミュエル・ニュート『静力学，動力学，静水力学の基礎—付録として光の法則，レンズの像の形成，音の性質』(1850)

Samuel Newth, *The Elements of Statics, Dynamics, and Hydrostatics, with an Appendix on the Laws of Light, the Formation of Images by Lenses, and the Nature of Sound.* (London: Taylor, Walton, and Maberly, 1850)[Newth 1850].

著者の肩書きは学芸修士 (M.A.)，ロンドン ユニバーシティカレッジのフェロー (Fellow of University College, London)。

155 ページの 12 折り本.

Dynamics. の Chapter I. DEFINITIONS AND THE LAWS OF MOTION.

運動の第 1 法則の表現は以下の通り[101)]。

> **運動の第 1 法則** 運動している物体に外力が何もはたらかないとき，一直線上を等速で運動し続ける。

第 2 法則[102)]—

> 100. **運動の第 2 法則** 力が運動している物体にはたらくとき，生じる運動の変化は物体が静止している時にその力がはたらいたときに生じる大きさと方向に等しい。

第 3 法則[103)]—

> 101. **運動の第 3 法則** 静力 (pressure) が物体に運動を伝えるとき，加速力は静力と質量 (mass) の比によって変化する。

第 3 法則のすぐ後で，起動力の定義が以下のようにされている[104)]。

> 102. $f \;:\; f' \;::\; \dfrac{P}{A} \;:\; \dfrac{Q}{B}$ より，
>
> $fA \;:\; f'B \;::\; P \;:\; Q$ が成り立つ。
>
> 加速力と質量の積は**起動力**(*moving force*) と名付けられる。したがって運動の第 3 法則は以下のように表すことができる。—静力 (pressure) が物体に運動を生じさせるとき，起動力は静力に比例する。
>
> 103. 重さ W の物体に運動を生じさせる静力 (pressure) を P とし，$f =$ 加速力

で，$g=$ 重力とする。W が重力の作用の下に自由落下すると，運動を生じさせる静力 (pressure) は，重さそのものである。そこで，運動の第 3 法則により，

$$f : g :: \frac{P}{\text{質量}} : \frac{W}{\text{質量}}$$

しかし両者で質量は等しいので，

$$f : g :: P : W$$

したがって，静力 (pressure) が物体に運動を生じさせるとき，

$$\text{加速力} = g\frac{\text{静力 (pressure)}}{\text{重さ (weight moved)}}$$

となる。

32　ジョン・バッド・フィア『基礎力学』(1850)

John Budd Phear, *Elementary mechanics* (Cambridge; Macmillan and co., 1850)[Phear 1850].

著者の肩書きは，ケンブリッジのクレアホールのフェローおよび数学講師 (Fellow and Mathematical Lecturer of Clare Hall, Cambridge)。

全 255 ページの八つ折り本。

171 ページが静力学，173 ページからが動力学。

第 1 法則[105)]

> **運動の第 1 法則 静止あるいは運動している質点は，外力がはたらかない限り同じ一直線上を等速運動する。**

第 2 法則[106)]

> **運動している質点にいくつかの力が同時に作用するとき，その瞬間のそれぞれの力の強さと方向に関する性質は質点が静止していたときに力が単独で作用したときと同じである**

第 3 法則は，運動量とともに以下のように定義されている (p.216.)[107)]

> 39. **運動量を物体の質量とその時の速度の積**と定義するなら，この実験の結果が示すことは，以下のような表現で知られている形式で示すことができる。
>
> **運動の第 3 法則 力は決められた時間に，ある質量に対して生成する運動量に比例する。**

第 3 法則の定義のあとに，以下の記述がある[108)]。

したがって，F で表される力が，単位時間に質量 M の物体に速度 V を生じさせるとしたら，次式を得る。

$$F = CMV,$$

C は力，質量，速度の単位によって決まる定数である。

そこでこれらの単位を $C = 1$ となるように決めると便利であるのでそうすると，

$$F = MV$$

となる。

F と V のそれぞれに 1 を入れれば，$M = 1$ となる。このことから，質量の単位は〈1 単位の力が単位時間に単位速度を生じさせる質量〉であることになる。

次の 40 項で，単位をフィート，ポンド，秒などをもとに決め，41 項で以下のような記述が見られる[109]。

41. 式

$$F = MV$$

において，V は 1 秒間に質量 M の物体に力が生じせせる速度である。そこで 6 項より，これは F が M に生じさせる加速力の大きさを決めることになる。F そのものは，**起動力**の大きさとされる。この加速力は我々の表記法一致されて f で表すと，

$$F = Mf$$

となる。したがって，

$$f = \frac{F}{M}$$

が与えられる。

6 項とは，加速力の定義である。これは 5 項の，

力はそれが一定なら，ある一定の時間に質点に生じさせるあるいは消滅させる速度に比例する。

という命題を受けて[110]，以下のように加速力を定義している[111]。

6. この主張が示していることは，もし我々が単純に，〈質点の速度の変更を生じさせる作用〉を力と見なすなら，我々は，〈単位時間あたりに質点に生じさせる，あるいは消滅させる速度〉によって，それらを非常に正確に測定することができる。そして実際の所，この約束が通常用いられている。そのように測定された力に加速力という独特の名称がつけられている。

運動の第 1，第 2 法則は動力学の Sec.I「序文」(Preliminary) で与えており，第 3 法則は Sec.IV「物体の運動」(Motion of a Body) で与えている。そして，次の Sec.V「物理

的法則」(Physical Law) で，もう一度運動の 3 法則を書き出し，これを代数的に定義し直している。

そこには以下のような記述がある[112)]。

> ある一定の時間に速度 v を質量 M の物体に生じさせる力を F とし，同じ時間に質量 M' に速度 v' を生じさせる力を F' とするとき，その一定時間に同じ質点に生じさせる速度が同じなら，力は等しいという考察から，F と F' を見積もることができる。
>
> **M に生じる速度は，そこから分離した 1 単位の質量に，$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{M}}$ と等しい力が単独で同じ単位時間にはたらいたときに生じる速度と等しい。**
>
> 同じことが M' から分離した単位質量についても言うことができる。
>
> したがって，質量の単位は両者で等しいので，運動の第 2 法則より，これらの速度はそれらを生じさせた力に比例する。そこで，次式が成り立つ。
>
> $$v : v' :: \frac{F}{M} : \frac{F'}{M'},$$
>
> すなわち，
>
> $$\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'};$$
>
> したがって，
>
> $$F \propto Mv$$
>
> ここでおこなった仮定は，イタリックで記述されている（訳注:訳文ではゴシック）。これは単に質量の定義と同等である。いいかえれば，質量と，〈同じ速度を生じさせる力〉との厳密な比例関係と同等である。しかしこの測定は 38 で注釈したように，第 3 法則自身，あるいはそれと同等な主張からのみ立証できる。同様に第 2 法則が加速力の測定の正しさを立証するのと同じように，第 3 法則は質量の測定の正しさを立証する。これは運動の第 2 法則から導かれない限り，実験事実として独立している。

33　ウィリアム・パーキンソン・ウィルソン『動力学論』(1850)

William Parkinson Wilson, *A Treatise on Dynamics.* (Cambridge: Macmillan and Co., London: George Bell. Dublin: Hodges and Smith., 1850)[Wilson 1850].

著者の肩書きは，ケンブリッジ セント・ジョンズ・カレッジのフェローおよびベルファストのクィーンズカレッジ数学教授 (Fellow of Saint John's College, Cambridge; and Professor of Mathematics in Queen's College, Belfast)

176 ページの八つ折り本。

加速力 (accelerative force) ではなく，加速度 (acceleration) という用語が使用されている[113)]。

> ここで加速度の単位を $\dfrac{\delta v_1}{\delta t_1} = 1$ と決めると，以下の式を得る。

$$a = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

この単位は常に採用する。

文字 f を加速度の数値的表示と定めると，この式は

$$f = \frac{\delta v}{\delta t}.$$

となる。

第 1 法則 (p.18.)[114)]

しかしながら，それは以下の，運動の第 1 法則と名付けられている法則に従うことが知られている。

いかなる外力もはたらいていない運動している物体は一直線上を一定の速度で運動する。

この法則は二つの事実を我々に保証する。

第 1 に，物質はその運動の方向やその速度を変化，減少させるような性質をその内部には持たない。

第 2 に，質点を構成する究極の原子をつなぎとめる分子の力はそのような性質を持たない。

力に関する定義[115)]

16. 先に進む前に，決して見失ってはいけない点について注釈しておくことにする。力 (force) は，どのような方法で起こされようが，あるいはどのような原因から生起しようが，必然的・本質的にその性質にかわりはない。

力はつりあったり運動を生み出したりするが，力には違いがない。

したがって，我々が「力」(force) という単語を使うとき，我々はいつも，そのような力を静力 (pressure) あるいは張力 (tension) を意味するものとしている。

二つの力が，ある点に反対方向にはたらき，静止しているとき，それは互いに等しい。

二つの等しい力がある点に同じ方向にはたらいているとき，それは 2 倍の力となる。

これらの二つの定義から，なんらかの力を基準として力の単位を決めれば，力を数値的に表すことができる。

第 2 法則に関する記述は以下の通り[116)]。

我々は今，質点に作用する力の効果を考える。

もともと静止している質点の場合，この質点に力が働けば，質点に速度を生成する。そして，力がある時間だけはたらき，その後力がはたらかなくなるなら，第 1

法則より，質点は力が働かなくなったときの速度で一直線上を運動し続ける。

この力と等しい力が全く同じ時間，もう一つの静止していた質点に働くような場合，まったく同じことが起こるだろう。つまりこの質点は先ほどの質点と同じ速度を得て，力が働くなったときの速度のまま運動し続ける。

すなわち，いいかえれば，任意の静止している質点に任意の力が任意の時間作用するとき，その時間生成する速度は決まっているということである。

そこで，ある力がある時間作用してある速度を生成する場合を考えよう。その力が同じ方向に別の時間だけ作用し続けるとき，その力は速度を増加させる。しかし我々はそれを原理的にどれくらいかを示すことはできない。そこで，ここで我々の考察は再び行き止まりになってしまう。

そしてまた，ある決められた時間に，物体に二つの同じ力が同じ方向にはたらき，力は 2 倍になる場合，任意の時間にこの 2 つの力によって生成する速度が，力が 1 つの場合に比べてどれくらいの割合になるかを，我々は原理的に知ることはできない。

この 2 つの困難に応ずるために，我々は新しい規則，運動の第 2 法則を導入する。

運動している質点にいくつかの力が作用するとき，それぞれの力の質点の速度に対する効果は，その質点が静止しているときに力がそれぞれ単独にはたらいたときと等しい。

この法則にたいする最上の注釈はそれを適用する方法によって示すのがいいだろう。力を文字 P で示すとき，この文字は力の強さを何らかの単位に基づいて数値的に表現しているものと見なす。その強さが等しく同じ方向にはたらくすべての力は，どんな要因によって起こった力であろうとも，同じ力とみなされる。たとえば，物体がひもによってひかれる場合と，別の物体が磁石によって引きつけられる場合でその方向と大きさが同じ場合は，同じ力と見なされる。同じ原因からの力でも，（同じ物体からの引力でも距離が異なる場合のように）大きさが違う力なら，それは違う力と見なされる。

運動方程式が第 2 法則から導かれ，質点力学の基本方程式とされている[117)]。

u, v, w を時刻 t の質点の速度の 3 つの軸の成分とし，X, Y, Z を時刻 t の質点にはたらくすべての力のそれぞれの軸方向の成分とする。

$X+\delta X, Y+\delta Y, Z+\delta Z$ は，時刻 $t+\delta t$ における同じ量である。$\delta X, \delta Y, \delta Z$ は δt に依存することは明らかであり，そして同様に質点の位置と速度の変化も依存する。しかし，すべての場合において，δt とともにこれらは消滅する。

第 2 法則が言っていることは，これらの力それぞれが時間 δt の間に質点の速度にたいして生成する効果は，δt の最初に静止している質点に力が単独ではたらく場合と同じであるということである。

したがって変化する力 X がこの時間に生成する速度を δu とすると，この値は

$\dfrac{X\delta t}{M}$ と $\dfrac{(X+\delta X)\delta t}{M}$ との間にある。他の力についてもそれぞれの方向に速度を生成する。つまり,

$$\delta v \text{ は } \frac{Y\delta t}{M} \text{ と } \frac{(Y+\delta Y)\delta t}{M} \text{の間にあり,}$$

$$\delta w \text{ は } \frac{Z\delta t}{M} \text{ と } \frac{(Z+\delta Z)\delta t}{M} \text{の間にある。}$$

そこで，時刻 $t+\delta t$ における速度の成分はそれぞれ $u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w$ となり，$\delta u, \delta v, \delta w$ は それぞれに対する $u, v,$ および w の増分となる。

そこで極限をとると，以下の式を得る。

$$M\frac{du}{dt} = X, M\frac{dv}{dt} = Y, \qquad \text{および } M\frac{dw}{dt} = Z.$$

x, y, z を質点の時刻 t における座標とすると,

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt},$$

$$\text{そして } M\frac{d^2x}{dt^2} = X, M\frac{d^2y}{dt^2} = Y, M\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

これらの式は質点の運動のみを考察する動力学の基本方程式である。

加速力，運動量などの用語の混乱について，以下のような記述がある[118)]。

28. いままで我々は，通常言語で使用され，本来の意味を持つ用語を使用し，その意味を本来の意味とは違う意味を割り当てたり，あるいは一部のみ元の意味と一致させたり，それらの意味を勝手に割り当ててきたことに対して，異論を受けることがある。

この異論に対して答えるなら，いかなる定義も我々が満足のいくように勝手に与えることについて，なんら問題はない。ただしそれはこの分野の範囲内において首尾一貫するという条件がある。

しかしながら力学は，この点についてとりわけ不幸である。というのは，ここで使用されてきた用語は，定義によって与えられた意味に加えて，日常会話における意味を持っていたからである。それは次のような事実から生じている。この学問の黎明期に誤った概念，非常に誤った概念がこの原理に導入されてしまい，誤った述語がそういった誤った概念を表現するのに採用されてしまった。正しい原理が徐々に展開されたが，その際，これら古い名前を残し，それを今までと同様の解析的な配列や数値的な量を表現するのに使った方が便利だと考えられた。しかしながらその名前によってなんらかの原理を表現するという考えは捨て去られてしまった。

しかしながら，一般的な言葉の中では，それら古い概念はそれらの単語に染みついたままだった。

そのような用語に「運動量」(momentum),「加速力」(accelerating-force),「活力」(vis viva)」などがある。

> 我々は学生に，定義によって割り当てられた以外の意味がないという注意をしっかりと与えねばならない。

第 3 法則に関する記述は見つからない。また，ニュートンの名もみられない。

34　ハーベイ・グッドウィン『力学の基礎　第 I 部静力学』(1851)

Harvey Goodwin, *Elementary Mechanics Designed Chiefly for the Use of Schools. Part I. Statics.* (Cambridge: John Deighton. London: Simpkin, Marshall & Co., and George Bell. Liverpool: Deighton & Laughton., 1851)[Goodwin 1851].

本文 187 ページの八つ折り本。

著者の肩書きは，ゴンヴィル・アンド・キーズ・カレッジの元フェローおよび数学講師 (Late Fellow and Mathematical Lecturer of Gonville and Caius College)

ゴンヴィル・アンド・キーズ・カレッジ (Gonville and Caius College) とは、ケンブリッジ大学のカレッジの一つ。1348 年ゴンヴィル・ホールとして創立。1557 年ジョン・キーズによって再創立された。 医学に伝統と高い評判のあるカレッジ（ウィキペディアによる)。

この巻は静力学のみ。動力学も後に出版されている (1853 年) が，未見。

冒頭の Introductory Conversation に，kinematics に言及している[119)]。

> P.（生徒 Pupile）それでは運動を引き起こすのは何ですか？
>
> T.(教師 Tutor) 我々への質問は，何が最初に運動を引き起こしたかではなく，どんな力が今作用しているかです。そして A から B の間では，力が一切はたらいていないので，この区間の運動は力の作用について考慮はしなくていいのです。
>
> 力について何も一切考慮しない物体の運動の科学を時には運動学 (*kinematics*) として分離されます。

35　ジョージ・フィンデン・ウォー『動力学，機械の構造，建築物の安定，材料の強度』(1851)

George Finden Warr, *Dynamics, Construction of Machinery, Equilibrium of Structures and the Strength of Materials.* (London: Robert Baldwin, 1851)[Warr 1851].

296 ページの八つ折り本

ウォー『動力学，機械の構造，建築物の安定，材料の強度』(1851)[120)]

第 1 法則[121)]

> ここで我々が導く原理は，アイザックニュートン卿の『プリンキピア』で述べられているあの有名な運動の法則の第 1 法則である。というのは，すべての物体は静止あるいは運動の状態を継続する。ただし，もしそれらが運動していて静止する傾向や power をまったく持っていないとき，そして静止している場合は動かす power が無いときである。後者の主張は容易に認められるだろう。すべての物体を

動かそうとすると，抵抗があることが分かるからである。しかし前者は，今まで見たように，物理的な意味を簡単に示すのは難しい。そればかりか多くの古い哲学者たちは静止を物体の自然状態だと考えてきた。運動している物体がそれを求め，したがってこの消極性を物体の慣性とか，惰性と名付けられてきた。

第 2 法則 (p.5.) [122)]

今までの文章で述べてきたことは，運動の第 2 法則から導くことができる。

第 3 法則発見できず。

36　トーマス・ベイカー『静力学と動力学の原理と実践—静水力学，水力学，気学の明確な発展を含む 付；中心力と外側レールの片勾配 公立学校，私立学校向け』(1851)

Thomas Baker, *The Principles and Practice of Statics and Dynamics, Embracing a Clear Development of Hydrostatics, Hydrodynamics, and Pneumatics: with Central Forces and Super-Elevation of Exterior Rail for the Use of Schools and Private Students.* (London: John Weale, 1851)[Baker 1851].

第 2 版 (1869, Second edition, revised and corrected by Edward Nugent)

148 ページの 12 折り本。

ニュートンの運動法則として，以下の法則が動力学の最初に記述されている。

加速度＝加速力

ベイカー『静力学と動力学の原理と実践』(1851)[123)]は，第 II 部動力学の最初にまず，定義 (Definition) という節があり，そこで，動力学 (Dynamics), 運動 (Motion), 等速運動 (Uniform motion), 加速運動 (Accelerated motion), 速度 (Velocity), 運動量 (momentum), 加速力 (Accelerating force), 起動力 (Moving force) といった用語が定義されている[124)]。

その直後の「ニュートンの運動の法則」と題する節で，3 法則が続けて表記されている[125)]。

ニュートンの運動の法則

129. **第 1**　運動している物体に何の外力もはたらかないとき，一直線上を等速で運動する。

130. **第 2**　力が運動している物体に与えられるとき，運動の変化の量と方向は，その力が静止している物体にはたらいたときと同様である。

131. **第 3**　静力 (pressure) が物体に運動を生じさせるとき，ある短い時間に生じる運動量はその力 (pressure) に比例する。

運動の 3 法則の直後に加速力の定義が記述されている[126)]。

133. <u>定義</u>—**力が一様にはたらいて加速するとき，ある時間に産み出される速度は力と時間の積に等しい。**

f を加速力とするとき，f=1 秒間に生じる速度である。そして，力は一様なので，次の 1 秒でまた f が速度に追加される。そこで，$2f$ が 2 秒間で生じた速度となる。同様に，$3f$ が 3 秒後の速度となる。そして一般に tf が t 秒後に生じた速度である。したがって，v =速度とすると，その結果は以下のようになる。

$$v = ft, \qquad \text{したがって} \quad t = \frac{v}{f}.$$

そこで，f = 地球表面の重力 = $32\frac{1}{6}$ フィートとし，運動する時間を 3 秒とすると，

$$v = ft = 32\tfrac{1}{6} \times 3 = 96\tfrac{1}{2}\text{フィート}.$$

となる。

37　アイザック・ウィルバー・ジャクソン『力学の基礎』(1852)

Isaac Wilber Jackson, *An Elementary Treatise on Mechanics* (Albany: Published by Gray, Sprague & co., 1852)[Jackson 1852].

著者: ユニオンカレッジの数学教授 (Professor of Mathematics in Union College)

1854 年の版も存在。

Advertisement に以下の記述有り[127)]。

編者から読者へ

この合理的力学の基本原理についての説明は，十分に簡潔で，難解さをさけて，この分野の学習に通常の時間を割くことができ，一般物理学と実用力学にまだ十分な理解力を持っていない，普通の能力をもつ学生が完全に理解できるよう意図した。この本は，オリジナリティーをなんら主張するものではない。解説は，これまで一般に用いられている方法によっており，同様の主題に関するよりよい書籍にも見られるものである。

この本を準備するに当たって参考にし，多くを依拠したのはポアソンとブシャレットである。いくつかはアーンショウ，ポッター，サウリ，プサンにもよった。

今回の出版では固体問題のみを扱った。流体に関するいくつかの節は近々出版する予定である。

イントロダクションに運動の 3 法則。

第 1 法則[128)]。

I. **慣性の法則**

物体の運動は，それ自身だけでは，等速直線である。

第 2 法則[129)]

II. **運動の共存ないし独立の法則**

物体系の相対運動は系のすべての質点に共通の他の運動に影響されない。

第 3 法則[130)]

III. **作用と反作用の相等性の法則**
すべての作用に対して，常に反対方向で等しい大きさの反作用が存在する。

それでは，力と加速度の法則はどこに記述されているかというと，
第 2 部 DYNAMICS の冒頭に，加速力の定義がされている[131)]

我々は一定の加速力の測定を，単位時間に生成する速度とする。

運動方程式に関する表現[132)]。

比例関係 [d]（訳注：$F : F' :: mv : m'v'$）で m' を単位質量と見なし，v' を単位速度とすれば，F' は単位質量に力が起こす速度は単位速度に等しい。そしてもしこれを力の単位とすれば次式を得る。

$$F = mv \ldots\ldots \tag{e}$$

式は運動量と力積の関係のように見えるが，v を単位速度としているので，意味するところは $F = ma$ と同じである。
これを元に，以下のような表記がある[133)]。

先の関係 (訳注:$F = mv$) は v の値によらず，正しいことは明らかである。それが衝撃力 (impulsive) と呼ばれる種類の力による測定可能な速度であろうと，あるいは，重力のように無限に小さな間隔で作用していると我々が考える力による無限に小さな速度であろうが，または，それが後者の力が（すなわち加速力が）ある時間作用することによって測定可能な速度になった場合も，正しい。
v を衝撃力 (impulsive force) を示すものとし，ϕ を単位時間に一様に作用する加速力を示すものとすると，この二つの場合について，次のようになる。

$$F = mv, \ldots\ldots\ldots \tag{k}$$

$$F = m\phi. \ldots\ldots\ldots \tag{k'}$$

これらの関係式において $m = 1$ とすると，次式を得る。

$$F = v, F = \phi;$$

それぞれの場合について，F は質点あるいは単位質量に作用する力となる。簡単のために，ϕ は一般に**加速力**(*the accelerating force*) とよばれ，式 [k'] における F の一般的表現である $m\phi$ は**起動力**(*moving force*) と呼ばれる。

38　バートレット『解析力学の基礎』(1853)

William Holms Chambers Bartlett, *Elements of Analytical Mechanics*(NewYork, 1853)[Bartlett 1853].

本文 445 ページ。

著者の肩書きは，アメリカ合衆国陸軍士官学校の自然実験哲学の教授であり，『力学，音響学，光学の基礎』の著者 (Professor of Natural and Experimental Philosophy in the United States Military Academy at West Point, and Author of Elements of Mechanics, Acoustics and Optics.) とある。

序論 (Introduction) で力の定義がされているが，それは現代的な概念になっていて，加速力の概念はない[134]。

力

§7.—物体の静止あるいは運動状態を変化させようとする作用をすべて **力**と呼ぶ。たとえば静止している物体が，運動の状態に変更ないし変更されようとしたら，この作用を **力** と呼ぶ。そしてまた，もし物体がすでに運動している場合，その運動を速めたり遅めたりする原因を **力** と呼ぶ。

力の実際の本質はわからない。我々は，力が産み出す作用によってのみ，その存在を知ることができる。したがって我々は単に感覚を通じて，力を知ることになる。そこで，そういった操作が行われるようになると，力は物体に関連して常に何らかの形で姿を現し，我々の感覚に影響するようになる。

序論 (INTRODUCTION) のあとの固体の力学 (Mechanics of Solid) の「様々な運動」(Varied Motion) に以下の記述がある[135]。

同じ質量の物体に，一定の力がはたらくとき，同じ継続時間に生成する速度は互いに等しい。しかしながら，力が変化するとき，無限に小さい間隔 dt なら力は一定と考えることができる。このとき力は dv を生成し，それは一定のままであり，力は単位時間に dv を単位時間に含まれる dt の数だけ繰り返し生成する。そこで，生成される速度は以下に等しい。

$$dv.\frac{1}{dt} = \frac{dv}{dt};$$

そして力の強さを P で示し，質量を M で示すことにすると，以下の式を得る。

$$P = M.\frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

そして，t を独立変数とみなして式 (11) を微分すると，次式を得る。

$$dv = \frac{d^2s}{dt};$$

これと式 (12) によって，

$$P = M.\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{13}$$

が与えられる。

式 (11)（訳注：$v = \dfrac{ds}{dt}$）から，変化する運動では，任意の瞬間における速度は，時間の関数としての距離の一次微分である。

式 (12) から，任意の瞬間における任意の起動力 (motive force) の大きさあるいはそれがうみだす慣性の強さは，**質量と〈時間の関数である速度の一次微分〉との積**として測定される。

そして式 (13) から，起動力あるいは慣性の強さは，**質量と時間の関数である距離の二次微分との積**として測定される。

39　著者不明（一般文芸教育協会編）『自然哲学の基礎 第１巻 静力学と動力学の基礎』(1853)

anonymous (The Committee of General Literature and Education), *The Elements of Natural Philosophy. Vol. I. Elementary Statics and Dynamics.* (London: Society for Promoting Christian Knowledge, 1853)[anonymous 1853].

著者不明で，表紙にキリスト教知識増進協会によって組織された一般文芸教育協会の監督の下での出版 (Published under the Direction of the Comittee of General Literature and Education, Appointed by the Society for Promoting Christian Knowledge) とある。

(1862) にも同じ版が存在。476 ページの八つ折り本。

第 I 部　機械科学のイントロダクションの第三章 Measurement and Graphical Representation of Force—Division of the Mechanical Sciences.

の中の Division of Mechanics. に Kinematics の項目あり[136)]。

> 運動を幾何学的に考察する，言い換えると，力を一切参照しない力学の重要な分野がある。これは機械のさまざまな形式と運動，車の歯，輪の運動，時計の構造などに関するすべてを包含している。ケンブリッジのウィリス教授は力学のこの分野に関して『機械学の原理』(*The Principles of Mechanism*) のもとに多くの論考を著しているが，ギリシャ語の運動 (*move*) を意味する単語から *Kinematics* という名が提唱されている。

他の項目は，(100)*Statics.*(101)*Dynamics.*(103)*Hydrostatics., including Pneumatics.*(104)*Hydro-dynamics, including Hydraulics.*

ただし，構成は，以下で言及されているように，Dynamics に Kinematics は含まれている。また，第 II 部 Dynamics の冒頭には運動の法則は記述されている[137)]。

> (106) 我々は力学の科学を 3 つに分ける。すなわち**静力学**(*Statics*)，**動力**

学(*Dynamics*)，**水力学**(*Hydromechanics*) である。動力学に**運動学**(*Kinematics*)，すなわち**機械論の原理**(*Principles of Mechanism*) を含める。

運動の第 1 法則[138)]

運動の第 1 法則

物体に力が何も作用していないとき，それが静止していれば，それは静止のままであるし，運動していれば，それは等速で同じ方向に運動し続ける。

第 2 法則[139)]

運動の第 2 法則

ある方向に運動している物体に，運動方向に対して斜めに力が働いたとき，ある時間に生じる偏差は，もともと物体が静止しているとき，同じ力が働いて，物体が描いたであろう距離に等しい。

第 3 法則[140)]

ある物体に作用する力によってある時間に生成される速度は，力に比例する。

運動方程式に関する一般的注解に，ニュートンの運動の法則との関連について言及されている[141)]。

運動の法則に関する一般的注解

作用と反作用—上記で示した運動の法則は，この分野の知識のほとんどをその人に負うニュートンが与えたものとは同じではない。多くの著者たちが慣例的にこの運動の法則を上記のように二つに分割している。そしておそらくその分割はそれは全体的に見て成功している。ニュートンの**第 2** 法則は今まで述べたように，実質的に第 2 と第 3 法則を含んでいる。彼の第 3 法則は次のようになっている—**作用と反作用とは等しく反対向きである。**つまり，物体 A が物体 B に，力をおよぼしたとき，それが衝突，張力，圧迫であろうが，引力，反発力 (repulsion) またはそれ以外であろうが，B は A に全く同じ力 (force) を反対方向に及ぼす。いいかえれば，B の A に対する**反静力すなわち反作用**(*return pressure or reaction*)（第 I 部，32 ページを見よ，原注）は，**元の静力**(*original pressure*)，すなわち A の B に対する作用，に等しく反対方向である。これは最も重要な力学法則であるが，その重要性は動力学と同じくらい静力学にもある。そこで，運動の法則に特化するのは適当ではない。この法則の例として，太陽と惑星の相互引力の場合を引き合いに出してみよう。太陽が地球に及ぼす引力の実際の力は地球が太陽に及ぼす力に等しい。これは地球がどれだけ太陽より小さいかを考えると奇妙に思える。にも関わらずこれは事実なのである。

第 II 章「運動の法則から直ちに導かれる結論と原理」(CONSEQUENCES AND PRINCI-

PLES IMMEDIATELY DEDUCIBLE FROM THE LAWS OF MOTION.)
の冒頭には力と加速度の定義とともに運動方程式に近い表現がある[142)]。

> **加速力**—力学論では通常，1 秒間で生成する速度を「**加速力**」という用語で示す。しかし我々はこれは目的のためには非常によくない用語である。そして一般にこれは学生にこの数値が示す本質について誤解を与える。われわれは決してこの用語を使用しない。そこで，この f を単純に「**1 秒間に生じる速度**(velocity generated per second)」とか，「**加速率**(*rate of acceleration*)」と呼ぶことにする。
>
> **質量**—質量という用語は，その重さによって測定され，物体の物質の量を示すものとして使用される。これは，上記の f の表示をできるだけ簡素化するために決められた力学特有の単位を基準として一般的に測定される。質量の単位は 32.2 ポンド，より正確に言えば g ポンドの重さの物体とされる。すでに述べたように，g は（グリニッジで），32.1908 である。そこで，g の重さの物体の物質の量は，1 とされ，$2g$ ポンド重さは 2，$3g$ ポンドは 3 である。そこで，一般に Mg ポンドの重さの物体の質量は M と考えられる。そこでもし，W を物体の重さとすると，その質量は以下の式で表される。
>
> $$W = Mg.$$
>
> 今，式 $f = \dfrac{P}{W}g$ に W の値を入れると，次式を得る。
>
> $$f = \frac{P}{M}, \qquad \text{および} \qquad \therefore \quad P = fM.$$
>
> つまり，1 秒間の速度は力を質量で割ることによって求められ，力は 1 秒間の速度に質量をかけたもので求められる。

40　トーマス・テイト『機械哲学の原理 工業力学への応用: 著者の「力学と自然哲学の演習」の続編として』(1853)

Thomas Tate, *The Principles of Mechanical Philosophy Applied to Industrial Mechanics: forming a sequel to author's "Exercises on Mechanics and Natural Philosophy."* (London: Longman, Brown, Green, and Longmans., 1853)[Tate 1853].

著者の肩書きは，トゥッケナムのネラー・トレーニング・カレッジ；バタシーの国立協会トレーニングカレッジの数学教授および化学講師 (Of Kneller Training College,Twickenham; Late Mathematical Professor and Lecturer on Chemistry in the National Society's Training College, Battersea)

342 ページの八つ折り本。

運動の法則 (LAWS OF MOTION.) という節に 3 法則が記述されている。

第 1 法則[143)]

> 24. 次の 3 法則の正しさは間作と実験に基づいている。

運動の第 1 法則—**物体に外力が何もはたらかないとき，物体は一直線上を等速で運動する。**

第 2 法則[144)]

運動の第 2 法則—いくつかの力が同時に運動している物体にはたらくとき，それぞれの力は物体が静止しているときに単独で作用しているのと全く同じ効果をその力の方向に与える。

第 2 法則の解説を見ると，相対運動である[145)]。

そこで，ボールを一定の速度で運動している船上のマストから落下させると，ボールはマストの根本に落下し，船が静止しているときと全く同じとなる。

第 3 法則は以下の通りとなっている[146)]。

運動の第 3 法則 静力 (pressure) が運動している物体に作用するとき，単位時間に生成する運動量は静力に比例する。

この法則は 19 条および 20 条によって証明される。

41 ジョセフ・アレン・ガルブレイス／サミュエル・ホートン『力学のマニュアル』第 2 版改訂版 (1854)

Joseph Allen Galbraith and Samuel Haughton, *Manual of Mechanics* Second and Improved Edition. (London: Longman, Brown, Green, and Longmans., 1854)[Galbraith 1854].

トリニティカレッジのフェローおよびダブリン大学の自然実験哲学のエラスムス・スミス講座教授 (Fellow and Tutor of Trinity Collge, and Erasmus Smith's Professor of Natural and Experimental Philosophy in the University of Dublin)

本文 86 ページの八つ折り本。

第 4 版 (1855,1856)，第 5 版 (1860,1861)，新版 (New edition, 1862)

第 1 部が静力学，第 2 部が動力学という構成になっている。44 ページから動力学の記述がはじまり，第 1 章が「定義と運動の法則」(DEFINITION AND LAWS OF MOTION.) となっている。

第 1 節が「運動，すなわち速度」(Motion, or Velocity)，第 2 節が物質の量と運動 (Quantity of Matter and Motion)，そして第 3 節が運動の法則 (Laws of Motion) である[147)]。

3. **運動の法則** — 運動の法則は観察事実からの簡潔な言明である。そこからは余分な実験なしに，ほとんどの複雑な運動の法則が導き出せてしまう。これらはアイザック・ニュートン卿によって 3 つにまとめられた。そのうちの第 1 と第 2 のみここでは取り上げる。その運動の法則の二つは以下である—

LEX I.

“*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum ilium mutare*”—Princip. Math. Jes. Edit. torn. i. p. 15.

物体は力がはたらくことによって無理にその状態を変えられない限り，静止の状態を続けるか，一直線上を等速運動する状態を続ける。

第 2 法則[148)]

LEX II.

“*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresseæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis ilia imprimilur.*”—Princip. Math. Jes. Edit.,tom. i. p. 15.

運動の変化は与えられた力に比例し，その力の方向に作用する。

この法則を 3 つに分離している[149)]。

この運動の法則は 3 つの個別な主張を含んでいる。よりわかりやすくするために，我々はそれを分離して示す。第 1 は方向について，第 2 と第 3 は大きさについてである。

第 1 文—**力の作用によって物体に起こる運動は力の方向であり，物体にすでにもっているいかなる運動とも独立である。**

第 2 文と第 3 文は以下のようになっている[150)]

第 2 文 — **異なる静力学的な力によって，1 秒間あたりに同一の物体に生じる速度は，それらの力に比例する。**

第 3 文 — **同じ静力学的な力が運動している異なる物体に作用するとき，1 秒間あたりに生じる速度は運動する物体の質量に反比例する。**

次の式

$$F = mf \tag{2}$$

は，動力学的な力 f が静力学的な力 F に正比例し，物質の量 m に反比例することを表している。すなわち，**運動している物体にはたらく静力学的な力は，ある時間に生じる運動の量に正比例する。**

42 オーガスタス・ウィリアム・スミス『力学の基礎：静力学と動力学の理論と固体と流体への応用を含む ウェズレー大学の学部生の準備用』(1855)

Augustus William Smith, *An Elementary Treatise on Mechanics: Embracing the Theory of Statics and Dynamics, and its Application to Solids and Fluids. Pre-*

pared for the Undergraduate Course in the Wesleyan University. (New York: Harper &Brothers, Publishers, 1855)[Smith 1855].

著者の肩書きは，法学博士 (LL.D.)，数学及び天文学の教授 (Professor of Mathematics and Astronomy)

307 ページ八折り本

1849，1855，1863，1874 の版がある。

第 1 法則[151)]

216. ある瞬間の物体は二つの状態，運動か静止のどちらの状態にある。物体の慣性とは，物体そのものにはその状態を変化させる能力は全くないということを示している。それは同様に，運動している物体がその割合及び方向を変化する能力がないことも示している。したがって，

外力が物体に何もはたらいていないとき，それが静止していれば，そのままだし，もし運動していれば，一直線上を等速で運動し続ける。

これは運動の第 1 法則と呼ばれる。

第 2 法則[152)]

物体のすべての運動あるいは運動変化は与えた力に比例し，その力の方向に起こる。

第 3 法則[153)]

作用と反作用は大きさが等しく，方向は反対である。

加速力と起動力については，次のような記述がある[154)]。

225. 絶え間ない力の効果を見積もるのに，それぞれの力が自由な質点，すなわち単位質量にうみだす加速度のみを考えた。そのようにはかった力を**加速**力 (*accelerating* force) という。もし運動している物体がわれわれが単位質量と呼ぶものと違っていて，それを力の効果を算定するのに考慮に入れていた場合，それは**起動力**(moving force) と呼ばれる。ϕ を加速度すなわち単位時間に生じる速度，M を単位質量の数，Φ を起動力とすると，Φ は単位時間に生じる運動の量によって測定される。すなわち次式の通り。

$$\Phi = \phi \mathrm{M}. \qquad \text{(VI.)}$$

したがって，$\phi = \dfrac{\Phi}{\mathrm{M}}$ つまり加速力は起動力を質量で割ったものに等しい。

43　ベンジャミン・パース『理学的天体力学』(1855)

Benjamin Peirce, *Physical and Celestial Mechanics* (Boston: Little, Brown and Company, 1855)[Peirce 1855]

「力の測定」と題する節に以下の記述がある[155)]

II 力の測定

7. 実験が示すところによると，何らかの物体を動かすのに要求される力の発揮 (exertion) は，労力 (effort) の強さとそれが与えられた距離の積に比例する。そこでこの積は，運動を生み出すのに必要な力の量の適切な測定法である。しかしながら，長い間の慣習では，**力**(*force*) という単語の使用は，労力 (effort) の強さを表すのに制限され，**発揮の総量**(*whole amount of exertion*) を表すには**パワー**(*power*) が用いられてきた。したがって，もしパワー P が距離 S の間はたらく一定の力 F の発揮 (exertion) によって生み出されるなら，その力についての式は，以下である。

$$F = \frac{P}{s}$$

8. これは，運動する物体の力はその速度に比例するという観察に基づいている。したがって，もし m が単位速度で動かす力とすると，それが速度 v であるとき，その力は mv である。

9. 異なる物体が異なる速さで動くとき，それは異なる強さの力を持っている。1 単位の速度で動く物体の**質量** (*mass*) は，その力である。そこで，前文の m は物体の質量を表す。

10. 運動の方向にはたらく力によって，自由に運動する物体に伝達する力は，作用する力の強さとその時間との積であることがわかっている。そこで，一定の力 F が時間 t だけその運動の方向に作用した質量 m は，v だけ増加する。物体への力の追加は次式で与えられる。

$$mv = Ft.$$

作用する力が一定ではないとき，物体の力の増加は，以下で与えられる。

$$mD_v = F.$$

このように，D_t などの表記を $\frac{d}{dt}$ の代用として用いている。

このあとの節「運動物体の力」では (pp.4-5)，

$$F = \frac{dP}{ds} = D_s P.$$

とし，

$$P = \frac{1}{2}mv^2$$

などとしているが，P を Power としており，運動エネルギーとはしていない。単位質量あたりの力を F とした方が便利だとして，上記の定義を与えた後の最後に，

$$D_t v = F.$$

として，力を加速力として定義し直しているが，加速力という言葉はない。

44 ジョン・ブラッドフォード・シェリマン『力学の基礎：学士試験のための教科書』(1858)

John Bradford Cherriman, *An Elementary Treatise on Mechanics: Designed as a Text-book for the University Examinations for the Ordinary Degree of B.A.* (Toronto: Maclear & co., 1858)[Cherriman 1858].

２部構成（静力学，動力学）でそれぞれに表紙があるがページ番号は通し。92 ページ，八つ折り本

著者の肩書きは，ケンブリッジのセント・ジョンズカレッジ元フェローで，トロント大学の自然哲学教授 (Late Fellow of St. John's College, Cambridge, and Professor of Natural Philosophy in University, Toronto)。

第２版 (1870) の存在確認。

第 II 部 質点の動力学 (Dynamics of a Particle) の第 I 章が「幾何学的に考えた質点の運動」(THE MOTION OF A PARTICLE GEOMETRICALLY CONSIDERED.) であり，その次の第 II 章「一定の力が作用した質点の運動」(THE MOTION OF A MATERTAL PARTICLE ACTED ON BY UNIFORM FORCES.) の書き出しに，以下のようにある[156)]。

> 21. 前の節で，点の運動の幾何学的な条件を吟味した。〈これらの結果を実際の質点の運動に結びつけること〉，そして，〈これらの運動と質点に作用する力との関係〉について示すことがまだ残されている。これについて検討する学問が，**動力学**(*Dynamics*) である。
>
> この目的のためには，実験や観察が不可欠である。そして質点の運動に関するすべての原理は「ニュートンの運動の法則」として知られる 3 つの基本原理ないし法則にもとづくようである。これらの法則は，その本質から，直接の実験によって示すことができない。というのは，〈この法則によって条件つけられた状況〉の下でかつ，〈これを試すため以外の現象が生じない状況〉の下に厳密な実験を行うのは不可能であるからである。

3 つの法則はどれも，脚注にラテン語の原文が載せられており，ニュートンの表現をそのまま英訳したものとなっている[157)]。

> 23.運動の第 1 法則
>
> **質点に力が何も働かないとき，それが静止なら，静止のまま，運動していれば，一直線上を等速運動する。**

第 2 法則を導く過程を引用する。
3 つの法則を下に第 2 法則を導いている。最初の法則は，以下の通り[158]。

> (1.) 一定の力がその運動の直線上に連続的にはたらいているとき，速度は一様に加速される。

2 つめ[159]

> (2.) いくつかの力が同時に運動の直線上にはたらくとき，結果として生じる加速度はそれぞれの力が別々にはたらくときに生じる加速度の代数和である。

(3) は以下のように記述されている[160]。

> **ある時間に力によって生じる速度変化は力の方向であり，その大きさに比例する。**

そしてこの法則を直後に以下のように言い換えている[161]。

> 上記は言い換えれば，以下のように表現できる。**質点への力の動力学的効果は質点がもついかなる運動とも完全に独立であり，それが静止していた時と同じ作用をもたらす。**

(4) では，以下のように結論づけている[162]。

> **大きさが一定で方向が変化しないいくつかの力が一つの質点に働くとき，いかなる場合であっても，ある時間における速度変化はそれぞれの力の方向であり，その大きさはそれぞれの力の大きさに比例する。**

(5) は質量の定義である[163]。

> (5). 以上からもし f がある質点にはたらく力 P による加速度だとすると，この質点の比 P:f はその質点では一定の値である。しかしながらこの比は，質点ごとに異なる。そこで，〈測定値として与えられるこの量〉は，他の質点と識別する量であることに我々は気づく。**質量**($mass$) という名称は，そのために与えられ，**質量**が同じなら，同じ力による加速度は等しい。**質量**の単位は任意であり，固定する必要はないが，我々は力と，それによって**質点**に生じる加速度を表す数値の比で，**質量**を測定することにする。そこで，m を質点の**質量**,P,f を上記で定めた値とすると，
>
> $$\frac{\mathrm{P}}{f} = m$$
>
> である。
>
> すでに述べたように，重力による加速度 g は，地球表面の同じ場所ではすべて物体で等しい。したがって，W をその物体の重さ，m をその質量とすると次式を得る。

$$\frac{\mathrm{W}}{g} = m, \text{および}$$
$$\mathrm{W} = mg$$

したがって，ある場所における物体の重さはその質量の測定値とすることができる。

(6) で運動方程式に相当する式が導かれている[164]。

(6.) $P = mf$ より，f はある時間に与えられた速度変化なので (§5)，P はある時間における質量と速度変化の積に比例する。

この質量と速度の積（すなわちこれを意味する数値）を，質点の**運動量**(*momentum*) と呼ぶ。上記の結果を一文にまとめると，

運動の第 2 法則

ある時間に質点に一様ないくつかの力が連続して作用したとき，それぞれの力の方向に，その力に比例した運動量変化が起きる。

やはり，ラテン語の原文を脚注に引用している。
[165]

32.運動の第 3 法則

質点がもう一つの質点に作用するとき，2 つめが 1 つめの質点に及ぼす作用は，1 つめの及ぼす作用に対して大きさが等しく方向が反対である。

ここで述べられている作用とは，様々な種類がある。静止しているか運動しているかによらず接触する物体間の相互の静力だったり，伸縮するひもあるいは固い棒による他の物体への質点の作用だったり，引力あるいは反発の性質による作用だったり，衝突における衝撃だったりする。

これらの作用の測定は，静力学的な測定あるいは第 2 法則による測定による。

ときにこの法則は以下のような形式で記述される。

物体の作用は相互的であり，大きさが同じで反対方向である。

第 II 部 前書きではサンデマンに言及している[166]。

この基礎的な本の編集は，この主題に関する多くの英語の著者たちとは異なっており，主要な部分はサンデマン教授による『質点の運動論』によっている。〈質点運動の単純な場合についての通常の代数的な研究〉を微分計算している他言語からの翻訳本があるが，私はこのすばらしい本の原理と方法を全面的に採用することにより，そうした翻訳本に少しでも勝るものにすることを試みた。

第 I 部で述べた理由により，私は実例を加えることはしなかった。そして説明と解説をできるかぎり簡潔にすることに勤めた。

第 I 章 (Chapter I) は，幾何学的に考察した質点の運動 (The Motion of a Particle Geometrically Considered.) となっており，Kinematics とはなっていないが，実質運動学の内容となっている。

第 2 法則の解説で運動方程式

第 3 法則も今日のような形式である。

45　**ジョン・ロバート・ラン『運動論』**(1859)

John Robert Lunn, *Of Motion. An Elementary Treatise* (Cambridge: Deighton, Bell, and Co., 1859)[Lunn 1859].

本文 132 ページの八つ折り本。

著者の肩書きは，学芸修士 (M.A.) およびケンブリッジのセントジョンズカレッジのフェローおよびサドラー夫人講座講師とある。

本文で詳しく言及。

46　**ジョン・フランシス・トゥイスデン『実用力学の初等手本—基礎的命題の豊富な解説と証明を含む』**(1860)

John Francis Twisden *Elementary Examples in Practical Mechanics Comprising Copious Explanations and Proofs of the Fundamental Propositions* (London: Longman, Green, Longman, and Roberts, 1860)[Twisden 1860].

本文 319 ページ＋ 4 ページ（SELECT LIST）＋ 24 ページ（A CATALOGUE）の八つ折り本。

著者の肩書きはスタッフカレッジの数学教授 (Professor of Mathematics in the Staff College) とある。

所在が確認できたのは，

初版 (1860)，第 2 版 (1863, この版から， *Elementary Introduction to Practical Mechanics* と書名変更)，第 3 版 (1868）第 6 版 (1880)，第 9 版 (1886)

ポアッソン，ポンスレ，モーリン，ヤング，ヒューウェル，モーズレイ，ウィリス，ランキンらに謝意を表している。

第 II 部の chapter I は序論 (Introductory) と題されており，注釈に「学生はこの章を完全に習得した上で次の章に進むことを強く推奨する」[167) とあるが，この Chapter I はまさに Kinematics である。

この Chapter I で，速度や落下運動の方程式などが与えられているが，このなかで，以下の表現がある[168)。

> 110. **物体の加速度は，与えた静力 (presure) によって生じる** — 物体の重さを W ポンドとすると，すでに見たようにそれを自由落下させると毎秒 g ずつ速度が増えていく。言い換えると，この物体に W ポンドの静力を与えれば，その速度は毎秒 g ずつ増加する。一定の力 P がはたらく場合，たとえば，なめらかな水平面に

物体を隠岐，水平な静力 P で押す場合を考える。実験によって毎秒の速度増加が f だったとすると，以下の比例式が成り立つ。

$$\mathrm{W} : \mathrm{P} :: g : f$$

すなわち，**ある物体に生じる毎秒の加速度すなわち速度増加は，それを生じさせる静力に比例する。**

第 2 章は加速運動で，そこで，加速力の定義がされている[169]。

117. **加速力** — 物体の速度が一定の値で連続的に増加するとき，その速度を**等加速度**(*uniformly accelerated*) という。そして，その加速度をうみだす原因を**等加速力**(*uniformly accelerating force*) という。

第 3 章は，静力によって生じる運動 (On Motion produced by Pressure) である[170]。

120. **運動の第 1，第 2 法則** — 運動の第 1 法則の目的は，物体にはその静止ないし運動状態を変更する能力 (power) は全く有しておらず，そのような変化はすべてなんらかの外力によるということである。ガリレオの時代までは，ある種の運動—道にそって物体が転がるような運動—は，減速する性質があると考えられていた。一方別のある種の運動—落下する物体のような運動—は，増加する性質があると考えられていた。この主張を検討するとき，「減速」の場合は，減速力が作用している。すなわちそれは摩擦や空気抵抗であり，これらの抵抗をなくせば，こういった減速は無限に少なくすることができる。一方速度増加の場合は重力のような加速力の作用を考えることができる。この法則は以下のように述べることができる。「外力がはたらいていない物体は，静止しているものは静止し続け，運動しているものは等速直線運動をし続ける」第 2 法則の目的は，力による効果は力が働く前の物体の運動には無関係だということである。それは以下のように表現される—「力が運動している物体にはたらくとき，物体が静止しているときに力が働いた場合に生じる速度が，物体の元々の速度に**合成**される」 もし物体が力の作用と同じ直線上にんどうしていれば，合成というのは加速（減速）と理解できるし，もし物体が力の作用線に対して横向きに運動していたなら，合成とは 119 条のように理解される。この原理が述べているのは，第 2 法則は多くの明らかな事実から説明されると言うことである。たとえば，船が静止しているときも，安定して進行しているときも，船に乗っている人がボールを投げあげてキャッチするのは，同じくらいに容易だという事実である。

運動量の定義の後，起動力が以下のように定義され，運動方程式に近い記述があるが，加速力概念を使用している[171]。

定義—起動力，あるいは力の動的量は，それが 1 秒間に追加する運動量である。

加速力 (f) すなわち力による加速度は，1 秒間あたりに追加する速度である。そこで M を物体の質量とすると，

$$\text{起動力 (Moving force)} = \mathrm{M}f$$

である。

124. **運動の第 3 法則**— すでに見たように (10 条)，静力 (pressure)P が重さ W ポンドの物体にはたらくとき，その場所における重力の加速力は g である。そこで,

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{g} f$$

$$\text{すなわち } \mathrm{P} \propto \mathrm{M}f.$$

がなりたつ。

これを言葉で述べれば，運動の第 3 法則と通常呼ばれるものになる。すなわち，—**静力 (pressure) が運動を生み出すとき，それは起動力 (moving force) に比例している。**

47　アルチュール・ジュールス・モラン『力学の基礎概念と実験データ ジョセフ・ベネットによる翻訳と英国の測定単位への補正』(1860)

Arthur Jules Morin, *Fundamental Ideas of Mechanics and Experimental Data Revised, Translated, and Reduced to English Units of Measure by Joseph Benett* (New York: D. Appleton and Company, 1860)[Morin 1860].

訳者モランの肩書きは土木技師 (Civil Engineer) とある。

445 ページの八つ折り本。

運動方程式に関する記述は以下の通りである[172)]。

61. **力と速度の比例原理**—事実の観察から以下のことが容易にわかる。すなわち，**力が無限に小さな時間にある物体に生じさせる速度はその大きさに正比例し，その作用の方向に生じる。**これはすべての幾何学者 (geometricians) に認められたもっとも根本的な公理のひとつであり，その結果の正しさは厳密に証明されている。

そこでもし，ある物体に 2 つの力 F と F' が連続的にはたらいて，時間要素 t の間に速度 v および v' だけ与えるか奪うかしたとき，この原理から次の比例関係を得る。

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}' :: v : v'.$$

先に進む前に，別の場所における重力による作用を同じ原理に適用してみる。場所による重さをそれぞれ P および P' とすると，次式を得る。

$$\mathrm{P} : \mathrm{P}' :: gt : g't :: g : g',$$

力 F の式及び測定値を得るために，その効果が知られている別の力と比べることにする。たとえば重力は要素時間に思い物体に与える速度は $v' = gt$ である。物体の重さすなわち重力による力を P とすると，上記の式は以下のようになる。

$$\mathrm{F} : \mathrm{P} :: v : gt;$$

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{g} \cdot \frac{v}{t}.$$

したがって，比 $\dfrac{\mathrm{P}}{g} = \dfrac{\mathrm{P}'}{g'}$ は地球上のどこの場所でも一定である。

この，重力が作用する 1 秒間における〈物体の重さ〉と〈重力によって生じる速度〉との比の一定値が，質量と名付けたものであり，M で表す。

62. **起動力 (motive force) と慣性の測定** — 重さ P あるいは質量 M の物体に要素時間 t で，速度 v を加えるないし奪う能力を持つ力 F を表す式は以下のようになる。

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{g}\frac{v}{t} = \mathrm{M}\frac{v}{t}$$

この式により，物体の重さないし質量がわかれば，比 $\dfrac{v}{t}$ から力の値と測定をポンドで与えることができる。たとえば，加速ないし減速が一様でこの比が一定なら，力 F は一定ということになる。

しかしここで求めている式を基本方程式とはどこにも書いていない。

しかし，たとえば実際に運動を論じる場合にはこの式から出発している。

たとえば，「116. ある方向に作用する力の場合 (Case of the forces acting in the same direction.)」では，以下のようにこの方程式から出発している[173)]。

実際，質量 M の質点にはたらく同じ方向の力を F,F',F" とし，v, v', v'' を同じ時間に与えられる有限な速度だとすると，我々は次式を得る。

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{M}v}{t},\ \mathrm{F}' = \frac{\mathrm{M}v'}{t},\ \mathrm{F}'' = \frac{\mathrm{M}v''}{t};$$

慣性，および力の定義では，ニュートン『プリンキピア』から引用が見られる[174)]。

5. **物体の慣性—すべての物体は，外から何もその状態を変更するような作用をうけなければ，静止状態あるいは一定の運動を続ける。**(ニュートンの運動の第 1 法則)

(中略)

6. **力の定義—力**は，運動を生み出したり変えたり，あるいは生み出そう，変更しようとする原因にに名付けられている。たとえば引力，重力，動物，水，空気，蒸気，空気抵抗，摩擦からの作用などである。

p.13. には運動の第 3 法則が述べられている[175)]。

> このような相互作用は力学の基本原理あるいは公理の一つである。その著者ニュートンによって以下のように述べられている。「**作用と反作用は常に大きさが等しく反対方向である**」すなわち，「**2 つの物体間の作用は互いに，常に等しく反対方向である**」（第 3 法則）

しかし，第 2 法則に関する記述は見られない。また，しかし，Morin の原著と思われる書には，Newton に関する記述はみつけられない。

たとえば, *Leçons de Mécanique Pratique Notions Gómétriques Sur Les Mouvements et Leurs Transformations ou Élements de Cinématique*(Paris, 1857) での慣性の記述は以下の通りで，Newton の名はどこにも見られない[176)]。

> 18. 慣性—ここで一般的な物体の基本的性質を述べておく必要がある。物体はそれ自身では運動状態を変更することはできず，外からそれを変化させようとする原因が与えられない限り，その運動状態を保持しようとする。

48　スティーブン・パーキンソン『力学の基礎　大学の初学年および高校の上級学年向け，実例集つき』第 3 版改訂版 (1863)

Stephen Parkinson *An Elementary Treatise on Mechanics for the Use of the Junior Classes at the University and the Higher Classes in Schools. with A Collection of Examples* Third Edition Revised (London: Macmillan and co. 1863)[Parkinson 1863].

初版 (1855)，第 2 版 (1861)，第 3 版 (1863)，第 4 版 (1869)，第 5 版 (1874)

p.152 から Dynamics.

著者の肩書きは，ケンブリッジのセントジョンズカレッジのフェローおよび講演者 (Fellow and Prelector of St John's College, Cambridge) とある。345 ページの八つ折り本。

前書きを見ると，「大学の初年級および高等学校 (School) の高学年向けに微分の使用をのぞいた」とある。

第 1 法則は以下の通り[177)]

> 運動の第 1 法則
>
> **質点に何の外力もはたらかない限り，静止のままか，一直線上を等速で運動し続ける。**
>
> この法則は時々，**慣性の法則**あるいは**慣性の原理**と呼ばれる。これが述べている事実は，物体はその内部に自分自身の静止あるいは運動状態を変更する能力 (power) を持たないということである。

第 2 法則[178)]—

運動の第 2 法則

物体が何らかの力の作用の下に運動しているとき，質点の該当方向への加速度は，力のその方向に分解した成分に完全に負う。そしてその大きさは質点が静止していたときに力が単独で作用したときの大きさに等しい。

続けて次のように記述されている[179)]。

ある力の作用の元に質点が運動しているとき，任意の方向への質点の加速度はその方向へ分解した力に全面的に見積もられる。——そして，その強さはその方向へ分解した力があたかも単独で静止状態に働いているのと同様である。

第 3 法則[180)]—

運動の第 3 法則

42. **力 (force) ないし静力 (pressure) が質点にはたらくとき，質点の起動力 (moving force) はそれにはたらく力ないし静力に比例する。**

つまり，静力学的に（たとえば，それぞれを支えることができる重さによって）測定された 2 つの力 P ないし P' が，質量 m, m' の質点にはたらくとき，加速度 f, f' が生じたとすると，

$$P : P' \ :: \ mf : m'f',$$
$$\text{or} \quad P \propto mf.$$

力，質量，加速度の単位は自由に決められるので，$P' = 1, f' = 1, m' = 1$ とするのが便利である。そうすると，我々は式 $P = mf$ を得る。言い換えると，もし質量の単位を 1 単位の力が 1 単位の加速度を生じるものとして決めれば，**これらの単位によって**力の値は，質量の値と加速度の積に等しい。

49 スティーブン・パーキンソン『力学の基礎　大学の初学年および高校の上級学年向け，実例集つき』第 5 版改訂版 (1874)

Stephen Parkinson *An Elementary Treatise on Mechanics for the Use of the Junior Classes at the University and the Higher Classes in Schools. with A Collection of Examples* Fifth Edition Revised (London: Macmillan and co. 1874)[Parkinson 1874].

第 3 版 (1863)（付録 238 ページ）の運動法則と同じ記述である。ただし，第 3 版にはない注釈がある（本論文 77 ページおよび注釈 100 ページ参照)。

著者の肩書きは，ケンブリッジ　セントジョンズカレッジのチューターおよび講師とある。前書きを見ると，「大学の初年級および高等学校 (School) の高学年向けに微分の使用をのぞいた」とある。

著者の肩書きが，第 3 版のフェローから，チューターに変更 (Tutor and Prelector of St John’s College, Cambridge)。

50　**トムソン＝テイト『自然哲学論』**(1867)

William Thomson and Peter Guthrie Tait *Treatise on Natural Philosophy. vol. 1.* (Oxford : Claredon Press, 1867) [Thomson 1867].

本文で詳しく言及。

51　**アイザック・トドハンター『初心者のための力学 数多くの実例つき』第３版** (1874)

Isaac Todhunter, *Mechanics for Beginners, with numerous examples*(London: Macmillan and co., 1874)

初版 (1867), 第３版 (1874)，第４版 (1878)，第５版 (1880)，新版 (New Edition, 1882)

著者の肩書きは，M.A.,F.R.S.，ケンブリッジ St John's College 前 (late) フェローおよび主任数学講師

この本は，十六折り本と小さな判型であるが，前書きには，

> 例題は，オリジナルものもあるし，College および University の練習問題から選択したものもある。

との文章がある[181)]ので，大学の入門教科書として使用されたと考えられる。

本論文 77 ページで言及。

52　**マクスウェル『物質と運動』**(1876)

文庫版，125 ぺである。Society for Promoting Christian Knowledge〔クリスチャン知識増進協会〕発行の〈Manuals of Elementry Science　シリーズ〉の〈1 シリング〉の小冊子の一冊として刊行されたもので，ほかに「生理学／地質学／天文学／植物学／動物学／電気／結晶学／分光学とその仕事」の巻が出ている。

1800			
1801			
1802			
1803			
1804			
1805			
1806	(1806グレゴリー『力学論』（初版）)		
1807	(1807グレゴリー『力学論』（２版）)		
1808			
1809			
1810	1810 マラット『力学の理論および実用入門』		
1811	1811エンフィールド『自然哲学講座』（米２版）（初版1785）		
1812	1812ウッド『力学の原理』（５版，初版1796）		
1813			
1814	1814ブリッジ『力学論』	1814 トプリス訳ラプラス『解析力学』	
1815	1815グレゴリー『力学論』（３版，初版1806）		
1816			
1817			
1818			
1819			
1820			
1821		1821 ヤング『ラプラスの天体力学』	
1822			
1823			1823 ブレイク『自然哲学の会話』米５版
1824			
1825	(1825エマーソン『力学の原理』（５版，初版1756）)	1825 ファラー『力学の基礎』	
1826	(1826グレゴリー『力学論』（４版）)		1826 ブレア『自然および実験哲学』
1827	1827ジャクソン『理論力学の基礎』		
1828			
1829	1829アーノット『物理学あるいは自然哲学の基礎』米初版，英３版（初版不明，２版1827）		
1830			
1831			
1832	1832 ヒューウェル『動力学入門』 1832 アーンショウ『動力学入門』初版	1832 レンウィック『力学の基礎』	
1833			
1834	1834 ヒューウェル『動力学論第２部』	1834 ヤング『力学の基礎』	
1835			
1836	1836 ヒューウェル『動力学論第1部』 (1836エマーソン『力学の原理』（新版）)	1836 ブシャルラ『力学の基礎』	
1837			
1838			
1839			
1840			
1841	1841 デニソン『力学新編』		
1842	1842 ポアソン『力学の基礎』 1842 プラット『力学哲学の数学的原理』	1842 ウォールトン『理論力学の原理の実例としての問題集』	
1843			
1844	1844 アーンショウ『動力学入門』３版		
1845			
1846	1846 ポッター『力学の基礎』		
1847	1847 ヒューウェル『力学の基礎』７版	1847 ハート『力学の基礎』２版	
1848			
1849			

1850	1850 ニュート『静力学，動力学，静水力学の基礎』1850 フィア『基礎力学』 1850 ウィルソン『力学論』 1850 サンデマン『質点の運動論』
1851	1851 ベイカー『静力学と動力学の原理と実践』 1851 ウォー『動力学』
1852	1852 ジャクソン『力学の基礎』
1853	1853 著者不明『静力学と動力学の基礎』 1853 テイト『機械哲学の原理』
1854	1854 ガルブレイス=ホートン『力学のマニュアル』２版
1855	
1856	
1857	
1858	1858 シェリマン『力学の基礎』
1859	1859 ラン『運動論』
1860	1860 トゥイスデン『実用力学の初等手本』 1860 モラン『力学の基礎概念』
1861	
1862	
1863	1863 パーキンソン『力学の基礎』３版
1864	
1865	
1866	
1867	1867 トムソン=テイト『自然哲学論』
1868	
1869	
1870	1870 ペック『力学の基礎』 1870 オルムステッド『自然哲学入門』 1870 ノートン『自然哲学の基礎』1870 ジョンストン『初等自然哲学』
1871	1871 クーレイ『自然哲学の教科書』 1871 シリマン『物理学の原理』
1872	1872 マクスウェル『熱の理論』
1873	1873 マーチンデール『初心者のための自然哲学の最初のレッスン』1873 トムソン=テイト『自然哲学の基礎』 1873 Rossiter『理論力学の基礎ハンドブック』1873 フッカー『学校および家庭のための科学』
1874	1874 トドハンター『初心者のための力学』 1874 パーキンソン『力学の基礎』５版
1875	1875 スチュアート『基礎物理学のレッスン』
1876	1876 ウォールトン『理論力学の問題集』1876 マクスウェル『物質と運動』 1876 デシャネル『自然哲学基礎論』 1876 グロス『運動学と力学の基礎』
1877	1877 ボトムレイ『動力学，理論力学』
1878	1878 テイト『質点の動力学論』 1878 スティール『物理の四週間』
1879	1879 トムソン=テイト『力学と動力学の原理』第１部
1880	1880 チェンバース『自然哲学の最初の本』 1880 クーレイ『自然物理学の新しいテキスト』
1881	
1882	1882 アルディス『剛体の動力学入門』 1882 ラウス『剛体の動力学論基礎編』第四版
1883	
1884	1884 アヴェリー『自然物理学の第一原理』 1884 スチュアート『基礎物理学のレッスン』 1882 ニュート『自然哲学の最初の本』 1884 カッケンボス『自然哲学』
1885	
1886	
1887	
1888	1888 スティール『通俗物理学』
1889	
1880	
1891	1891 ロック『初心者のための力学第１部　動力学と静力学』
1892	
1893	
1894	
1895	
1896	
1897	
1898	
1899	

注

1) [Emerson 1758], pp.3-4.

原文：
1. Every body perseveres in its present state, whether of rest, or moving uniformly in a right line, till it is compelled to change that state by some external force.
2. The alteration of motion, or the motion generated or destroyed in any body, is proportional to the force applied, and is made in the direction of that right line in which the force acts.
3. The action and re-action between two bodies are equal, and in contrary directions.
4. The motion of the whole body is made up of the sum of the motions of all the parts.
5. The weights of all bodies in the same place, are proportional to the quantities of matter they contain, without any regard to their bulk, figure, or kind. For twice the matter will be twice as heavy, and thrice the matter thrice as heavy; and so on.
6. The vis inertias of all bodies is proportional to the quantity of matter.
7. Every body will descend to the lowest place it can get to.
8. Whatever sustains a heavy body, bears all the weight of it.
9. Two equal forces acting against one another in contrary directions, destroy one another's effects.
10. If a body is acted on with two forces in contrary directions, it is the same thing as if it were only acted on with the difference of these forces, in direction of the greater.
11. If a body is kept in equilibrio, the contrary forces, in any one line of direction, are equal, and destroy one another.
12. Whatever quantity of motion any force generates in a given time, the same quantity of motion will an equal force destroy in the same time, acting in a contrary direction.
13. Any active force will sooner or more easily overcome a lesser resistance than a greater.
14. If a weight be drawn or pushed by any power, it pushes or draws all points of the line of direction equally. And it is the same thing, whatever point of that line the force is applied to.
15. If two bodies be moving the same way, in any right line their relative motion will be the same, as if one body stood still, and the other approached, or receded from it with the difference of their motions; or with the sum of their motions, if they move contrary ways.
16. If a body is drawn or urged by a rope, the direction of that force is the same as the direction of that part of the rope next adjoining to the body.
17. If any force is applied to move or sustain a body, by means of a rope, all the intermediate parts of the rope are equally distended, and that in contrary directions.
18. If a running rope go freely over several pullies, all the parts of it are equally stretched.
19. If any forces be applied against one end of a free lever or beam, the other end will thrust or act with a force, in direction of its length.
20. The parts of a fluid will yield, and recede towards that part where it is least pressed.

2) [Emerson 1758], pp.7-8.

原文：

SCHOLIUM.

Let b = *body or quantity of matter to be moved.*
f = *force of impulse acting on the body* b.
m = *momentum or quantity of motion generated in* b.
v = *velocity generated in* b.
s = *space described by the body* b.
t = *time of describing the space* s *with the velocity* v.

Then, by the three last Props, we shall have $m \propto bv, s \propto tv$, and $f \propto m$.

3) [Emerson 1758], p.6.

4) [Emerson 1758], p.6.

5) [Emerson 1758], p.7.

6) [Marrat 1810], p.6.

原文：
17. *Every body continues in its state of rest, or uniform motion in a right line, until a change is effected by some external cause.*
18. *Any change effected in the quiescence or motion of a body is in the direction of the force impressed, and is proportional to it in quantity.*
19. *Action and reaction ore equal and contrary: that is, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal and directed towards contrary parts.*

7) [Marrat 1810], p.6.

原文：
These general principles were first given by *Sir Isaac Newton* in the PRINCIPIA, and since his time they have been received as mechanical axioms, to which students might at all times appeal in the course of their researches.
They are not indeed self-evident truths, nor are they laid down as such, but as truths which result by legitimate induction from the testimony of our senses.
They are, all of them, reducible to the inertness of matter, not à priori, but by the method of induction.

8) [Marrat 1810], p.121.

原文：

245. Force generating velocity is called an *accelerating force*; generating motion it is called a *moving force*.
Thus, the accelerating force is measured by the velocity uniformly generated in a given time, without any regard to the quantity of matter moved ; and the moving force is measured by the *quantity of motion* uniformly generated in a given time.

9) [Marrat 1810], p.123.

原文：
250. *The moving forces acting upon bodies, and the momenta communicated to them in a given time, are as the quantities of matter moved, and the velocities communicated jointly.*
For, (art. 245.) when the velocity communicated in a given time is the same, the moving force is as the quantity of matter moved; and, by art. 18, when the quantity of matter is given, the moving force is as the velocity communicated in the same time: therefore, both the quantity of matter and the velocity communicated being different, the moving forces, and their effects, *viz.* the momenta produced, will be as the quantities of matter moved and the velocities communicated jointly.
That is, if m denote the momentum, b the body, f the force, and v the velocity: then, $f \propto m \propto bv$, and $v \propto \dfrac{f}{b}$.

10) [Blair 1826], p.16.

原文：

20. Primary Laws Motion are,
First, *That Body will continue in its state of rest, or uniform motion, in a right line, until it is compelled by some external force to change its state.*
Secondly, *That the change of motion is always proportinal to the moving force by which it is produced, and it is made in the line of direction in which that force is impressed.*
Thirdly, *That action and re-action are always equal and contrary.*

11) [Enfield 1811], pp.10-12.

原文：
PROPOSITION I. EVERY body will continue in its state of rest, or of uniform motion in a right line, until it is compelled, by some force, to change its state.
PROP. II. The change of motion produced in any body is proportional to the force impressed, and in the direction of that force.
PROP. III. To every action of one body upon another, there is an equal and contrary re-action : Or, the mutual actions of bodies on each other are equal and in contrary directions, and are always to be estimated in the same right line.

12) [Enfield 1811], pp.12-13.

原文：
SCHOL. These three laws of motion may be illustrated by experiments, but their best confirmation arises from hence, that all the particular conclusions drawn from them agree with universal experience. They were assumed by Sir Isaac Newton as the fundamental principles of mechanicks ; and the theory of all motions deduced from them, as principles, being found to agree, in all cases, with experiments and observations, the laws themselves are considered as mathematically true.

13) [Enfield 1811], p.15.

原文：
PROP. XIII. The force, or power of overcoming resistance, in any moving body, is as its momentum.
Since a body having a certain degree of motion is able to overcome a certain degree of resistance, it is manifest, that with an increased momentum, it will be able to overcome a greater resistance.

14) [Enfield 1811], p.14.

原文：
PROP. A. If bodies be acted upon by different constant forces, the velocities communicated will vary in a ratio compounded of the forces and times.
Let F, V, T, represent force, velocity and time, and be supposed variable; it is evident that the velocity will be increased and diminished in the same ratio with both force and time, and these being independent of each other, V will be as F $\times$ T.
COR. If, therefore, F be compared with any other known force f capable of generating a velocity equal to v in the time t, then V : v :: F $\times$ T : $f \times t$.

15) [Wood 1812], p.8.

原文：
Sir I.Newton has discovered that the moon is retained in her orbit by the agency of a cause similar to that by which a body falls to the ground, differing from it only in degree, and this in consequence of the greater distance of the moon from the earth's center.

16) [Wood 1812], p.16.

原文：
The effects produced by the actions of forces are of two kinds, velocity and momentum ; and thus we have two methods of comparing them, according as we conceive them to be cause of velocity or momentum.
(21.)The *accelerateing force* is measured by the *velocity* uniformly generated in a given time, no regard being had to the quantity of matter moved.
(22.)The *moving force* is measured by the *momentum* uniformly generated in a given time.

17) [Wood 1812], pp.1-2.

原文：
THE term *Mechanics* has at different times, and by different writers, been applied to branches of science essentially distinct from each other. It was originally confined to the doctrine of equilibrium, or the investigation of the proportion of powers when they balance each other.
Later writers, adapting the term to their discoveries, have used it to denote that science which treats of the nature, production, and alteration of motion; giving to the former branch, by way of contradistinction, the name of Statics.
Others, giving the term a still more comprehensive meaning, have applied it to both these sciences.
None of these definitions will exactly suit our present purpose ; the first being too contracted; and the others much too extensive, for a treatise which is intended to be an introduction only, to the higher branches of philosophy. Our system of Mechanics will comprise the doctrine of equilibrium, and so much of the science of motion as is necessary to explain the effects of impact and gravity.

18) [Wood 1812], p.10.

原文：
(9.) By the *quantity of matter* in a body, we understand the aggregate of it's particles, each of which has a certain degree of inertia. Or, in other words, if we suppose bodies made up of particles, each of which has the same inertia, the quantity of matter in one body, is to the quantity of matter in another, as the number of such particles in the former, to the number in the latter.

19) [Bridge 1814], p.12.

原文：
These are called LAWS of Motion, and have sometimes been considered as axioms in Natural Philosophy. They are, however, by no means self evident; nor are they capable of strict mathematical demonstration. The true light in which they ought to be considered, is that of fundamental principles in the science of Mechanics; the truth of which may be established, either by experiment, or by a just process of reasoning upon the circumstances universally connected with the GRAVITY and INERTIA of matter. They are as follow.
I. *A body continues always in its state of rest, or of uniform rectilinear motion, till, by some external force, it is made to change its state.*
II. *Motion, or change of motion, is proportional to the force impressed, and is produced in the right line in which that force acts.*
III. *When bodies act upon each other, action and re-action are equal, and in opposite directions.*

20) [Bridge 1814], pp.10-11.

原文：
Since matter, from its inertia, is incapable of changing its state of rest or motion, it is evident that whenever such change is produced, it must be by the agency of some external cause. This cause is denominated *force* or *power.* Before we proceed to the Laws of Motion, it will

be proper, therefore, to make a few observations upon the nature ot FORCES in general.
1. Forces are divided into two kinds, according to the manner in which they act.
I. If a force acts *instantaneously*, and then ceases, it is called an *impulsive* force. A ball, suddenly put in motion by the hand or any instrument, along an horizontal plane, is an instance of the effect produced by an impulsive force. If it moves with a uniform velocity, the space over which it passes in a given time, and the momentum communicated to it, may be estimated according to the rules stated above.
II. When a force acts incessantly, it is called a *constant* or *variable* force, according as the increments or decrements of velocity caused by it, in equal successive parts of time, are *equal* or *unequal*. The force of gravity near the Earth's surface is an example of a *constant* force; for it causes equal increments or decrements of velocity in equal portions of time, not by *impulses*, but by *incessant* action.

21) [Bridge 1814], p.11.

原文：
2. Forces also receive different denominations, according as the *momentum* or the *velocity* generated by them is the subject of consideration. With reference to the momentum generated, they are called *moving* forces; with reference to the velocity, *accelerative* forces.

22) [Bridge 1814], Vol.II., p.3.

原文
2. In order to estimate these effects, we have only to consider, that if a body be acted upon by *different* constant forces for the same time, the *velocity* generated will evidently be proportional to the *intensity* of those forces ; and that if it be acted upon by the *same* force for *different times*, the velocity will be proportional to the time for which the forces act; from which it follows, that if a body be acted upon by different constant forces for different times, the whole *velocity generated* will be as the *force and time conjointly*. Suppose now that the force of gravity is represented by unity, that $m = l6\frac{1}{12}$feet, and that $V =$ the velocity acquired in the *time* T whilst a body describes the *space* S acted upon by *some other constant force* F, then, from what has just been shewn, V : the velocity acquired by *gravity* in 1"$(2m)$ :: $F \times T$: 1×1, $\therefore$ $V = 2mFT$, and $T = \dfrac{V}{2mF}$.

23) [野村 2007].

24) [Laplace 1814]., p.30.

原文：
Thus we have two laws of motion, the law of inertia, and that of the force being proportional to the velocity, which are given from experience. They are the most natural and the most simple which it is possible to imagine, and are without doubt derived from the nature itself of matter; but this nature being unknown, they are with respect to us solely the consequences of observation, and the only ones which the science of mechanics requires from experience.

25) [Laplace 1814], p.36.

原文：
Thus denoting by $\delta x, \delta y$, and δz any variations whatever of the three co-ordinates x, y, and z, variations which it is not necessary to confound with the differentials dx, dy, and dz, that express the spaces whic the moving body describes parallel to the co-ordinates during the instant dt; the equation *(b)* of No.3 will become

$$0 = \delta x.\{d.\frac{dx}{dt} - P.dt\} + \delta y.\{d.\frac{dy}{dt} - Q.dt\}. + \delta z\{d.\frac{dz}{dt} - R.dt\} \quad (f)$$

If the point M be free, we shall equal the co-efficients of $\delta x, \delta y$, and δz separately to nothing, and, supposing the element δt of the time constant, the differential equations will become

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P; \frac{d^2y}{dt^2} = Q; \frac{d^2z}{dt^2} = R.$$

26) [Laplace 1814], p.70.

原文：
The mass of a body is the number of its material points, and the product ot the mass by its velocity is called its quantity of motion ; this is what is understood by the force of a body in motion.

27) [Laplace 1814], p.70.

原文：
The density of bodies depends upon the number of material points which are contained in a given volume. In order to have their absolute density, it would be necessary to compare their masses with that of a body without pores ; but as we know no bodies of that description, we can only speak of the relative densities of bodies; that is to say, the ratio of their density to that of a given substance. It is evident that the mass is in the ratio of the magnitude and the density, by naming M the mass of the body, U its magnitude, and D its densily, we shall have generally $M = DU$: an equation in which it should be observed that the quantities M, D, and U express a certain relation to the unities of their Species.

28) [Laplace 1814], p.140.

原文：
The forces which are destroyed during the motion of the system at any instant, will evidently form an equation of equilibrium for it at that instant. If in this equation of equilibrium the bodies undergo an indefinitely small change in their position, the moments of the forces according to the principle of virtual velocities will be equal to nothing; the the forces destroyed are mP, mQ, mR, $m'P'$ &c. $-m.\frac{d^2x}{dt^2}, -m.\frac{d^2y}{dt^2}, -m.\frac{d^2z}{dt^2}, -m'.\frac{d^2x'}{dt^2}$, &c. whose moments...

29) [Gregory 1815], pp.1-2.

原文：
2. *Matter* is a term by which we denote that substance of which every thing our senses perceive is imagined to be composed. So far as relates to Mechanics, its essence may be regarded as consisting in extension, impenetrability, and inertness.

3. *Body* is such a collected quantity of matter as is palpable, or obvious to some of the senses. We say that a body is *solid*, when it is composed of particles, or moleculæ, so adhering the one to the other that they cannot be separated without effort: such are metals, stone, wood, &c. The term *fluid* we apply to such substances as are composed of particles adhering very slightly, and which, yielding to any small effort, are easily moved among each other: such are water, wine, air, &c.
All bodies, it is manifest, are extended, and therefore are found existing under figure, or shape, which is the boundary of extension. It appears also essential to matter, that it prevents all other substances *of the same kind* from occupying its place; and that it requires the exertion of something *ab extra* to remove it from its situation, or to change its state. The former of these properties is called *Solidity*, or *Impenetrability* : the latter, *inertness* or *inertia*; of which we shall have occasion to say more. (18.)

30) [Gregory 1815], p.5.

原文：
18. Among other forces it has been customary to speak of the *vis inertia*, or *inert force*

of matter; applying the term to that property of bodies by which they tend to retain their present state (3.), or are indifferent to motion or rest. But while we admit that, much of the language which relates to powers, forces, actions, &c., is metaphorical, we must object to such use of it in the present case; this property being improperly called a force:

31) [Gregory 1815], pp.163-164.

原文：
211. The sum of the material particles of which a body is composed, is what we denote by the word *Mass*. This mass depends on the volume of the body and that which we call *Density*. We have already observed (art. 10.) that density is directly as the quantity of matter, and inversely as the magnitude of the body: but it will not be improper to deduce concisely the general theorem which comprises this relation. To this end it must be considered that as all bodies are penetrated with a great number of void spaces or pores, their quantity of matter is not proportional to their volume; but under the same volume there will be more or less matter as the particles are nearer or further asunder ; and we say that a body has a greater or less density, according as there subsists a greater or less proximity between its moleculae. Thus we say a body is more *dense* than another when in an equal volume the former contains more matter than the latter: we say, on the contrary, that it is less *dense* or more *rare* (for *density* and *rarity* are reciprocal qualities) when in an equal volume it comprises less matter. The density serves, therefore, to judge of the number of material particles when the volume is known: thus, we may regard the density as representing the number of equal moleculas in a de terminate volume; as when, for example, we say that gold is 19 times denser than water, we wish to be understood that gold contains 19 times the number of particles that water does in the same space.
Since we represent the density as expressing the number of moleculze in a determinate volume which we assume as the *unit of magnitude*; it is obvious that to obtain the mass, or the total number of moleculse, of any body of which the magnitude is known, we must take the rectangle of the density and magnitude.

32) [Laplace 1821], p.65.

原文：
SCHOLIUM 2. Now, the equality of times being thus estimated from any one motion, all other bodies, moving without disturbance, will describe equal successive parts of their lines of direction in equal times. And this is the second law of motion, which, with the former law, constitutes Newton's first axiom or law of motion ; " that every body perseveres in its state of rest or uniform rectilinear motion, except so far as it is compelled by some force to change it." This second law appears to be strictly deducible from the axioms and definitions which have been premised, and principally from the consideration of the relative nature of motion, and the total deficiency of any criterion of absolute motion : it is also confirmed by its perfect agreement with all experimental observations, although it is too simple to admit of an immediate proof.

33) [Laplace 1821], pp.70-71.

原文：
SCHOLIUM 6. In the laws of motion, which are the chief foundation of the Principia, their great author introduces at once the consideration of forces ; and the first corollary stands thus : " a body describes the diagonal of a parallelogram by two forces acting conjointly, in the same time, in which it would describe its sides, by the same forces acting separately."

34) [Laplace 1821], p.70.

原文：
SCHOLIUM 5. The law of motion, here established, differs but little, in its enunciation,

from the original words of Aristotle, as they stand in his Mechanical Problems. He says, that " if a moving body has two motions, bearing a constant proportion to each other, it must necessarily describe the diameter of a parallelogram, of which the sides are in the ratio of the two motions." It is obvious, that this proposition includes the consideration not only of uniform motions, but also of motions which are similarly accelerated or retarded : and we should scarcely have expected, that, from the time at which the subject began to be so clearly understood, an interval of two thousand years would have elapsed, before the law began to be applied to the determination of the velocity of bodies actuated by deflecting forces, which Newton has so simply and elegantly deduced from it.

35) [Laplace 1821], p.170.,

[D.] The mass of a body consists in the number of its material points, and the product of the mass by the velocity is called the quantity of motion of a body

36) [Farrar 1825], iii-iv.

原文：The works principally used in preparing this treatise are those of Biot, Bézout, Poisson, Francœur, Gregory, Whewell, and Leslie. In the portions selected it was found necessary to make considerable alterations and additions in order to give a uniform character to the whole. There has often been occasion, moreover, in appropriating the substance of a proposition or course of reasoning, to amplify or condense it, or to vary the phraseology. It became inconvenient, therefore, to distinguish by quotations the respective portions taken from different authors. Bézout has been adopted, in substance, as the basis in what relates to statics, dynamics, and hydrostatics, although the matter is arranged according to a different system; and Gregory, with many changes and substitutions, has been principally used in that which is comprehended under hydrodynamics.

37) [Farrar 1825], p.16.

原文：
The product of the mass of a body by its velocity is called *the quantity of motion* of this body. *Forces are therefore measured by the quantities of motion which they are capable of producing respectively.* Thus, if we designate the above product by p, the mass by m, and the velocity by v, we shall have $p = mv$. This equation gives $v = \dfrac{p}{m}$, and $m = \dfrac{p}{v}$; from which it will be seen that,

1. *The moving force of a body and its mass being known, we shall find the velocity by dividing the moving force by the mass ;*
2. *The moving force and the velocity being known, we shall find the mass belonging to this velocity and moving force, by dividing the moving force by the velocity ;*
3. *If the moving forces are equal, the velocities are inversely as the masses.*

The truth of these propositions is easily shown by putting successively the value of m equal to m', that of v equal to v', and that of p equal to p' ; the equations thus obtained, reduced and converted into proportions, form the several propositions above stated.

38) [Farrar 1825], p.17.

原文：
30. The mass or number of material parts of a body, depends upon its bulk or volume, and what is called its *density*, that is, the greater or less degree of closeness or proximity among its particles. As all bodies have more or less of void space within them, their quantities of matter are not proportional to their bulks ; since, under the same bulk, the quantity of matter is greater according as the parts are more crouded and compressed together. A body is said to be more *dense* than another, when under the same bulk it has more matter; and on the other hand to be more *rare* than another, when under the same bulk it has less matter. Accordingly, by means of the density of a body, we are able, when the bulk is known, to judge

of the number of material parts which compose it; so that the density may be considered as representing the number of material parts in a given bulk.

39) [Farrar 1825], p.165.

原文：
Any force, which acting upon a body causes it to vary its motion, is called an *accelerating* or *retarding* force. When it acts equally at equal intervals of time, it is called *a uniformly accelerating*, or *uniformly retarding force*, according as it tends to increase or diminish the actiual velocity of the body.

40) [Farrar 1825], p.173.

原文：
280. The principles necessary for determining the circumstances of this kind of motion are easily deduced from the principles that we have laid down with regard to uniform motion, and motion uniformly accelerated.

$$v = \frac{ds}{dt} \mathrm{or} ds = vdt$$

as the *first foundamental equation of varied motion*.

41) [Jackson 1827], p.136.

原文：
287. The most general of these, as laid down by Sir Isaac Newton in his Principia, are three :

1. "Every body continues, when at rest, in a state of rest, and, when in motion, in a state of uniform and rectilinear motion, unless it be affected by some force impressed."
2. " Change of motion is always proportional to the motive force impressed, and is made in the direction of that force."
3. "There is always a reaction equal and contrary to action ; or the actions of bodies are mutual, equal, and opposite."

42) [Jackson 1827], p.136.

原文：
288. Though these laws are few and simple, they are of most extensive application, reaching from the phenomena that we regard as the most familiar, to that sublime elevation of science from which the disciple of Newton contemplates with admiration, in the order of mechanical connection and harmonious dependence, the magnificent machinery of the solar system. It is of the highest importance then that we should carefully study them, and endeavour to acquire a clear and accurate conception of their import.

43) *ibid.*, p.148.

原文：
310. With regard to the term force, we may observe that it is not unfrequent in philosophical discussion to adopt the phraseology of common language, but generally in a restricted or more definite sense. In common language, for instance, we speak of greater force being required to put in motion two pounds of matter than to put in motion one, with the same velocity ; and we say that it requires more to give the velocity 10 feet per second, than to give the velocity 9, when the mass is the same. But we say this rather laxly perhaps, and without any very distinct reference to a measure of force. In reference to our own efforts, we may mean what appears to us a greater exertion continued for the same time, or an equal or even less exertion continued for a longer time; and we cannot pronounce with certainty that the exertions are in the one case as 2 : 1, or in the other as 10 : 9. In physical investigations, whenever the

magnitude of a motive force is concerned, we adopt, after Newton, as its definite measure, *the quantity of motion produced or expended* in a given time.

44) [Jackson 1827], p.150.

原文：
314. A motion uniformly varied is one that receives equal increments or equal decrements of velocity in any equal times during its continuance; and the rate of the variation, that is, the velocity produced or destroyed in a given time, commonly taken one second, is assumed as the measure of what we are to call accelerating and retarding force. Let this be denoted by ϕ; and, in a case of acceleration, let V be the final velocity acquired in the number of seconds T : then

$$1.V = \phi T,$$

or the final velocity is equal to the velocity acquired in one second multilied by the number of seconds employed in its acquisition.

45) [Jackson 1827], p.149.

原文：
In cases of impact, where the production of motion seems to depend on a repulsive force of unknown but variable intensity, according to the specific nature of the bodies concerned and the successive degrees of approximation, we seldom consider the progressive generation and extinction of motion, and we treat it as if it were, what it is to sense, instantaneous. Our measure of motive force impressed is, in this case, the quantity of motion expended ; and, on the authority of the third law of motion, we may state an absolute equation between this measure of force, and that of the motion which it produces. But, if in speaking of the force the reference be to any pressure by which a certain velocity, now continued uniformly, has been produced, we can only state a proportional equation between such force and the resulting quantity of motion.
311. Let V denote the velocity of an uniform motion.

S	the space described.
T	the time of the motion's continuance.
Q	the quantity of matter moved.
F	the motive force.

And the relations of all the quantities concerned may be expressed as in the following table :

$$S = VT = \frac{FT}{Q}$$
$$V = \frac{S}{T} = \frac{F}{Q}$$
$$T = \frac{S}{V}$$
$$F = QV = \frac{QS}{T}$$
$$Q = \frac{F}{V} = \frac{FT}{S}$$

46) [Renwick 1832], pp.43-44.

原文：
43. Although it is the tendency of matter, if once set in motion, to move forwards forever with uniform velocity, in the same direction, this if by no means the moost frequent case of motion that occurs in nature. There are in fact two distinct species of forces.
(1) Those which having acted for a time upon a body, abandon it and leave it to go forward, so far as they are concerned, in a right line with uniform velocity; these are called projectile forces.

(2) Those which act during the whole continuance of the body's motion. Such forces will cause changes in the direction and velocity of the body, and produce what in general terms, are called Variable Motions.

47) [Earnshaw 1832], p.3.

原文：
11. *A particle of matter cannot, by any action of its own upon itself, produce a change in its present state of rest or motion.*

48) [Jackson 1827], p.5.

原文：
17. *If a particle of matter be acted on by any number of forces, each one will produce its DUE effect, estimated in the direction in which it acts.*

49) [Jackson 1827], p.4.

原文：
12. COR. 1. Motion, and change of motion, can only be produced by the action of force.
13. COR. 2. and DEF. If the velocity of a particle continually *increases* or *decreases*, it is acted on respectively by an *accelerating* or *retarding* force; which is said to be *uniform* or *variable*, according as the increments or decrements of velocity in equal times, are *equal* or *unequal.*

50) [Whewell 1832c], xi-xii.

原文：

Section I. Introductory Attempts
Section II. The Third Law of Motion 101
Section III. Motion on the Inclined Plane 113
Section IV. Impact 114
Section V. Simple Pendulums 115

51) [Young 1834], p.3.

原文：
THE following Treatise is an attempt to exhibit, in small compass, the principles of Mechanical Science in its present improved state, and to supply the English student with a clear and comprehensive manual of instruction on this important branch of Natural Philosophy.
Our language already possesses some very valuable works in this department of science, as for instance, the treatises of Professors Gregory and Whewell ; works which, for the abundance of real information that they convey, are not, perhaps, to be equalled by any similar performances of our continental neighbours.

52) [Young 1834], p.119.

原文：We call the cause of variable motion, whatever it really be, force: an accelerative force if the velocity continually increase, and a retardive force if the velocity diminish. We shall, in our general reasonings, consider the force as accelerative, because in order to adapt our conclusions to retardive forces, it will be necessary merely to prefix to the expression for F the negative sign.

53) [Young 1834], p.120.

54) [Young 1834], pp.215-216.

原文：
WE propose in this chapter to investigate some very general and remarkable theorems which apply to the motion of a system of bodies acting in any arbitrary manner on each other, and each influenced by any accelerative forces.
Let m, m_1, m_2, & c. represent the masses of the different bodies in the system, x, y, z; $x_1 y_1, z_1$, &c. the rectangular co-ordinates which mark their position, X, Y, Z, the components of the accelerative forces on m, X_1, Y_1, Z_1, the components of those on m_1, & c. then the motive forces *applied* to any one, as m, will be mX, mY, mZ, and those which actually have place will be $m\frac{m}{d^2x}dt^2, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2}$; hence the differences of the impressed and effective forces resolved in the directions of the co-ordinates are

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - mX, m\frac{d^2y}{dt^2} - mY, m\frac{d^2z}{dt^2} - mZ;$$

and, in like manner, for each of the other bodies m_1, m_2, &c. we get similar expressions for the differences between the impressed and effective forces, and we know, from the principle of D'Alembert(154), that if these differences alone acted on the system it would be kept in equilibrium.

55) [Boucharlat 1836], p.193.

原文：
If, therefore, we denote this force by ϕ, we shall obtain for the second equation of varied motion,

$$\phi = \frac{dv}{dt}.....(149)$$

The *character* ϕ, will hereafter be used to designate the intensity of the force: the force being represented by the effect which produces.

56) [Boucharlat 1836], p.193.

原文：
391. From the preceding equation we obtain

$$\phi dt = dv;$$

thus, if the incessant force be given, the increment to the velocity in the time dt can be readily calculated.
392. By eliminating dt between the equation (148) and (149), we obtain a third equation of varied motion,

$$\phi = vdv.$$

57) [Boucharlat 1836], pp.289-290.

原文：
546. Let F represent a force which impresses a velocity V upon a mass M : if the same force be supposed to act upon a mass M times less, and which will consequently be represented by $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 1$, this force will communicate to the mass unity, a velocity M times greater than that communicated to the mass M : this velocity will therefore be expressed by MV. For a similar reason,the force F', which communicates to the mass M' a velocity V', would communicate to the mass $\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}'} = 1$, a velocity represented by M'V'.
The velocities represented by MV and M'V being communicated by the forces F and F' to the mass unity, it follows, from the principles enunciated in Art. 388, that we shall have the proportion

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}' :: \mathrm{MV} : \mathrm{M}'\mathrm{V}'.$$

The expressions MV and M'V' are called the *quantities of motion* communicated by the forces F and F' ; and it should be recollected that the characters M, V, F, M', V, and F' represent abstract numbers, which merely express the number of times which the quantity under consideration contains the unit of its own species.
547. The unit of force being arbitrary, we may represent it by the quantity of motion which it produces. Thus, by supposing F' to represent this unit, we can replace F' by M'V' in the preceding proportion ; and we thence infer that

$$\mathrm{F} = \mathrm{MV}.$$

548. When the force ϕ acts incessantly, it has been.shown, Art. 388, that this force will be represented by the velocity which it would communicate in a unit of time, if the value of the force should become constant ; hence we obtain, by substituting for V its value ϕ,

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}\phi.$$

If the mass M be supposed equal to unity, we shall have

$$\mathrm{F} = \phi;$$

consequently, ϕ represents the force exerted upon the unit of mass ; the quantity ϕ is usually called the *accelerating force*, and F is called the *moving force*. When F is given, the value of ϕ can be determined by simply dividing by M, the mass moved.

58) [Boucharlat 1836], p.192.

原文：
388. Before investigating the expression for the value of the incessant force, it will be necessary to discover the relation which exists between the force and the velocity.
If a force F be supposed to communicate a velocity v to any body, a force n times as great will communicate to the body a velocity equal to nv. The truth of this proposition might well be questioned, since the nature of forces being entirely unknown, we cannot affirm that a double force will necessarily produce a double velocity ; or, in general, that a single force

equal to the sum of two others, will necessarily produce a velocity equal to the sum of the velocities which the two forces would separately produce. But the fact being confirmed by universal experience, we adopt it as a principle. Thus, by supposing different forces applied to the same body or material point, their relative intensities can be estimated by comparing the velocities which they would severally communicate.
The proper measure of an incessant force will be the velocity which it can generate in a given time ; but the intensity of the force being constantly variable, we must suppose the force to become constant at the instant when we wish to estimate its value, and the measure of the force will then be the velocity generated in the unit of time succeeding this instant. The velocity communicated by this incessant force during the unit of time, when it is supposed to retain a constant value, will obviously be unequal to that which would have been communicated by the variable incessant force, in the same time.

59) [Willis 1841], vii.

原文：
Ampère, however, appears to have contemplated the formation of a system that would also include these latter objects; for in his Essay on the Philosophy of the Sciences, published in 1834, we find it distinctly asserted, "that there exist certain considerations which if sufficiently developed would constitute a complete science, but which have been hitherto neglected, or have formed only the subject of memoirs or special essays. This science, (which he terms *Kinematics*,) ought to include all that can be said with respect to *motion* in its different kinds, independently of the forces by which it is produced. It should treat in the first place of spaces passed over, and of times employed in different motions, and of the determination of velocities according to the different relations which may exist between those spaces and times. "

60) [Willis 1841], viii.

原文：
"After these general considerations relating to motion and velocity, this new science might pass on to the determination of the ratios that exist between the velocities of the different points of a machine, or generally of any system of material points, in all the movements of which the machine or system is susceptible; in a word, to the determination, independently of the forces applied to the material points, of what are called *virtual velocities*; a determination which is infinitely more comprehensible when thus separated from considerations of Force*."
* Vide Ampere, Essai sui la Philosophie des Sciences, 1835, p. 50.

61) [Willis 1841], ix.

原文：
It is much to be regretted that this distinguished writer did not attempt to follow up this clear and able view of the subject, by actually developing the science in question.
A similar separation of the principles of motion and force formed the basis of the Lectures on Mechanism which I delivered for the first time to the University of Cambridge, in 1837; and the same views were subsequently sanctioned by the high authority of Professor Whewell, who, in his Philosophy of the Inductive Sciences, has assigned a chapter to the Doctrine of Motion*, in which, under the title of Pure Mechanism, he has defined this science nearly in the above words of Ampère, whom he quotes.
* Whewell, Philosophy of the Inductive Sciences, 1840, p. 144.

62) [Denison 1841], p.1.

原文：
As motion is the passion of matter influenced by impulse, so a state of rest (which is the mere negation of motion) is the passion of matter not influenced by impulse.

First Law of Motion.—A body continues in its state of rest, or of uniform rectilinear motion, until, by some external force or impulse, its state is changed.
Second Law of Motion.—Motion, or the change of motion, is produced uniformly in the line of direction in which the impulse or force acts, and is proportional to the excess of the force applied above the resistance.
Third Law of Motion.—When a force applied to a body is resisted, the resistance reacts upon the body in a direction opposite to that of the force applied, and destroys pro tanto the action of the force applied.
[This law is generally stated as follows :—"Action and Reaction are equal, and in opposite directions."]

63) [Denison 1841], p.4.

原文：
1. In the first case, that in which one body only is a moving body and the other is at rest, the resistance of the body at rest consists of its weight and friction; if the weight and friction together are equal to, or greater than the force of the moving body, then the quantum of reaction of the resisting body is equal to the quantum of action of the moving body, and destroys it altogether. But, if the resistance of the body at rest is less than the action of the moving body, then the reaction of the body at rest is equal only to its own resistance, and is less than the action of the moving body, and destroys only so much of its action as is equivalent to the reaction. And in this manner is to be understood this law, as generally laid down by authors, viz. that "action and reaction are equal;" not that they are equal in point of quantum, but equal pro tanto in effect; as will be more apparent when we consider the case of two moving bodies acting on each other in opposite directions.

64) *denison*, p.91.

原文：
From these considerations it appears that *moving-force*, as a cause acting on a body in equilibrio, produces its equivalent effect in the momentum of the body in that state; so that the cause and effect being equal, the moving force is equal to the *momentum*. Yet, notwithstanding this equality between the two, both moving-force and momentum have each their peculiar properties which distinguish them from each other, and prevent their being altogether convertible or the converse of each other. Thus the product of the weight into the velocity is never equal to the momentum, but always exceeds it, whatever is the value of d; that is, M is always $= \dfrac{\mathrm{WV}}{d}$. On the contrary, F, or the moving force, is always = WV. For F has an auxiliary in that part of the force-applied which brings the body to an equilibrium, but which is not auxiliary to the momentum of the body.
Hence, the moving-force is applied to the body when it is *relieved* from its weight; which relief, therefore, is in aid of the moving force ; but this relief is in diminution of the momentum. In the state of equilibrium, the moving force impels the body to advantage. It moves the body possessing weight with the same facility as if it possessed no weight. Hence, when it moves the quantity of matter, it actually moves the weight; for it cannot move the one without the other. Hence in effect, with regard to moving force, $\frac{\mathrm{W}}{d} = \mathrm{W}$; and $\mathrm{F} = \mathrm{WV}$. And consequently, $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{W}}$; which formulae will determine all the cases of moving force with regard to any one body moving uniformly.

65) [Earnshaw 1844], p.3., p.5., p.12.

原文：
THE FIRST LAW OF MOTION.
8. *If a body in motion be not acted upon by any EXTERNAL force, it will move in a straight line with uniform velocity.*
THE SECOND LAW OF MOTION.

12. *If a particle of matter already in motion be acted on by any external force, the change of motion is in the direction of the force, and is in magnitude the same as if the particle had no previous motion.*

THE THIRD LAW OF MOTION

23. *The pressure (measured as in Statics by the weight which it can support) which produces motion in any body is equal to the product of the mass of the body into the accelerating force.*

66) [Earnshaw 1844], p.7.

原文：
Consequently, in variable accelerating forces,

$$\text{force} = \frac{\text{indefinitely small increment of velocity}}{\text{time of generating it}},$$
$$= \text{limit of } \frac{\text{increment of velocity}}{\text{time of generating it}}.$$

67) [Earnshaw 1844], p.13.

原文：
$\therefore$ pressure = (mass) · (accelerating force)

68) [Walton 1842], p.152.

原文：
THE determination of the circumstances of the motion of a material particle, which moves in a straight line under the action of a finite accelerating or retarding force, depends upon the two following differential equations, called the equations of motion of the particle

$$\frac{dx}{dt} = v, \frac{dv}{dt} = f,$$

where t denotes the time of the motion reckoned from an assigned epoch, x the distance of the particle at the end of this time from an assigned point in the line of its motion, v the velocity, and f the accelerating or retarding force.
From these two equations wo readily deduce the two following,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f, v\frac{dv}{dx} = f.$$

These equations, which constitute the complete expression of the circumstances of rectilinear motion in the language of the differential calculus for every condition of acceleration or retardation, are due to Varignon, and were published in the *Mḿ, de l' Acd. des Sciences de Paris,*, 1700, p.22. It may be observed however that long before this, geometrical investigations of rectilinear motion for variable forces had been given by Newton.

69) [Walton 1842], p.387.

原文：
Since the publication of D'Alembert's work, the term Vis Viva has been used to signify merely the algebraical product of the mass of a moving body and the square of its velocity, while the words Moving Force have been universally employed, agreeably to the definition given by Newton in the *Principia*, in the signification of the product of the mass of a body and the accelerating force to which it is conceived to be subject, no physical theory whatever in regard to the absolute nature of force being supposed to be involved in these definitions.

70) [Poisson 1842], p.170.

原文：

The laws of equilibrium do not imply any particular relation between the forces and the corresponding velocities; and to resolve the problems of statics, it is sufficient, if the numerical relations of forces, such as they have been defined in No. 5, be known. The laws of motion, on the contrary, depend on the relation which should exist between the magnitudes of the velocities produced by given forces; and this relation, the knowledge of which is indispensable for the solution of the dynamical problems, is the same as that of the forces, as we proceed now to demonstrate.

71) [Earnshaw 1844], p.175.

72) [Earnshaw 1844], pp.180-181.

原文：
This being established, let us consider a body of any magnitude and form whatever, all the points of which describe parallel lines with a common velocity, which may moreover vary with the time. Let this body be divided into an infinite number of material points equal in mass, such as they have been just defined. The motion of all these points may be ascribed to forces which are equal and parallel throughout the entire extent of the moveable; their resultant for any part of this body, is equal to their sum, and applied to the centre of gravity of this part. The forces corresponding to any two parts will be therefore to each other as their masses; consequently, if f be the entire force which acts on the moveable, m its mass, and ϕ the force which answers to a part of this mass, taken for unity, we shall have

$$f = m\phi.$$

With respect to the force ϕ, it will be proportional to the increase of the velocity of the moveable during an infinitely small portion of time; and if v denotes this velocity at the end of the time t, we may assume for its measure, as in No.118,

$$\phi\frac{dv}{dv}, \text{(原文ママ,} \frac{dv}{dt}\text{の誤植と思われる。)}$$

Hence there will result

$$f = m\frac{dv}{dt}$$

for the expression of the force in any motion whatever, the man of the moveable being taken into account, and all its points being supposed to be actuated by the same velocity.
This force f, which is the resultant or sum of all the infinitely small forces, with which all the pints of which the body is composed, are actuated, is termed the *motive force*, the factor ϕ of its value mϕ, is called the *accelerating force,* and is no other thing than the motive force referred to the unit of mass.

73) [Pratt 1842], viii.

原文：
After explaining the conventional method of measuring motion, I proceed to an enquiry into the laws that regulate the motion of bodies when uninfluenced by external causes: a variety of experiments and facts of ordinary occurrence point to the principle called the First Law of Motion. This leads to an explanation of the conventional method of measuring force dynamically. In explaining the means of estimating force, I have aimed at giving a distinct idea of the nature of forces that require a finite time to develop their effects, and those which generate velocity in an indefinitely short time. An investigation is then made into the laws which regulate the motion of bodies when acted on simultaneously by different causes, and this leads to the principle called the Second Law of Motion. This law enables us to introduce a method of referring the curvilinear motion of a body to three rectangular axes. The necessity is then shewn of obtaining a relation between the two arbitrarily assumed measures of force, viz. pressure, and velocity generated : this leads to the principle called the Third Law of Motion.

74) [Pratt 1842], p.3.

原文：7.In Statics force is estimated by the *pressure* it causes a body when at rest to exert against another with which it is in contact and is said to be estimated statically.

75) [Pratt 1842], p.182.

原文：
The reader is referred to Desaguliers' *Course of Experimental Philosophy*, 4to. 1734, Vol. I. Lecture V. for more experiments upon the motion of bodies.
Philosophers have assumed, then, as a fundamental principle of the motion of matter that *A body in motion, not acted on by any external force, will move uniformly and in a straight line. This is called the First Law of Motion.*

76) [Pratt 1842], pp.183-184.

原文：
DYNAMICAL MEASURE OF FORCE.
194. The First Law of Motion enables us to extend the definition of force given in Arts. 5 and 191 — We may now define it, not only as any cause, which produces or tends to produce motion in a body; but also as any cause, which changes the uniform and rectilinear motion of a body.
It appears then, that when a body moves with a variable velocity, force is acting on the body : and, conversely, when force acts upon a body, its velocity is continually changing. Now we take the magnitude of the change of velocity during a given time as the measure of the magnitude of the force which acts upon the body : and, for the sake of distinction, when force is measured in this manner it is termed *Accelerating Force.* We have already mentioned, that when force measured statically, it is called *Pressure* (Art. 7).

77) [Pratt 1842], p.189.

原文：
Hence, *if* f *be the accelerating force, uniform or variable, which generates the velocity* v *in a body in the time* t, *then* f, v, t *are connected by the equation*$\mathrm{f} = \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$.

78) [Pratt 1842], p.194.

原文：
For more facts and experiments we refer again to Lecture V. of Desaguliers' Experimental Philosophy.
These facts point out to us the following general principle:
When a force acts upon a body in motion, the changf of motion in magnitude and direction is the same as if the force acted on the body at rest.
This is called the Second Law of Motion.

79) [Pratt 1842], p.200.

原文：
214. The product of the mass of a body and the accelerating force is called by Newton the *Moving Force* of the body : and the product of the velocity and mass of a body he calls its *Momentum*, or quantity of motion. These experiments therefore shew, that *the pressure communicating the motion varies as the moving force, or as the momentum generated in the body in a given time:* for moving force must be measured by the momentum generated in a given time, since accelerating force is measured by the velocity generated in a given time.

80) [Pratt 1842], p.202.

原文：
The statical measure of force, whether finite or impulsive, varies directly as the product of the mass of the body upon which it acts, and the dynamical measure of the force.

81) [Pratt 1842], p.202.

原文：
218. This Law may be stated also in the following forms.
When *finite* pressure generates or destroys motion in a body, the moving force is proportional to the pressure: and when *impulsive* pressure generates or destroys motion in a body, the momentum generated or destroyed is proportional to the pressure.
Newton has given this Law under the more general form, that *Action and Reaction are equal and opposite.* If action and reaction in dynamics be measured by the quantity of motion gained and lost, this is an immediate deduction from our Third Law of Motion.

82) [Pratt 1842], pp.203-204.

原文：
220. We shall now choose the *units* of pressure, or statical force, and mass.
Let P be a finite pressure, f the accelerating force and M the mass, then P varies as Mf. Let the unit of pressure be that of a body of which the mass is M' and the accelerating force f' : then

$$P : 1 :: Mf : M'f';$$

$$\therefore P = \frac{Mf}{M'f'};$$

we shall choose M' and f' so as to simplify this formula as much as possible : let $M' = 1, f' = 1$; then

$$P = Mf \text{..................}(l),$$

the unit of pressure being the pressure of a body of a unit of mass and acted on by the unit of accelerating force.
When the pressure is impulsive *its unit is that of a body of mass unity moving with a unit of velocity :* if we, as above, suppose

$$P = Mv \text{..................}(2).$$

83) [Potter 1846], pp.118-119. 原文：

The first law of motion. When a body in motion is not acted on by any external force, it will move in a straight line, and with a uniform velocity.
The second law of motion. If several forces act upon a body at the same time, each produces its full effect in the direction of its action, whether the body be at rest or in motion.
The third law of motion. When a pressure acting on a body puts it in motion, the moving force, measured by the momentum generated in a unit of time, is proportional to the pressure.

84) [Potter 1846], pp.116-117.

原文：
We call a force an *accelerating force* whilst it continually increases the velocity of a body ; and a *retarding force* whilst it continually diminishes it. A uniform or constant *accelerating* force is one that increases the velocity of the body uniformly, or adds the same amount of velocity to the previous velocity of the body in every successive equal interval of time. A *uniform retarding* force is one that diminishes the velocity of a body according to the same law. *Variable* accelerating or retarding forces are those whose effects on the velocities of bodies are continually changing.
By the *moving force* acting on a body, we mean the *mass moved* multiplied by the *accelerating force,* which we shall shortly see, by the third law of motion, is proportional to the pressure

exerted on the body, by whatever means that pressure arises, whether by the unbending of a spring, by the attraction of other bodies upon it, by the explosion of gunpowder, &c.
By the *momentum* of a moving body, we mean the mass of the body multiplied by its velocity.
The mass multiplied into the square of the velocity is called the *vis viva* of a moving body.
As forces are measured by the effects they produce, the Dynamical measure of an accelerating force must be the velocity which it generates in the body in a given time, when uniform or constant. Let f represent the force, and let the given time be taken as the unit, we have $f=$ the velocity generated in a unit of time. Since the force is constant, the same velocity is added in every unit of time ; therefore, if v be the velocity acquired from rest by the action of the force in t units of time, we have $v = ft$.
From the above definitions we see that *moving force* is measured by the momentum generated in a unit of time.
From the expression $v = ft$, we have

$$f = \frac{v}{t} = \frac{\text{velocity generated in any time}}{\text{time}}$$

When the force is *variable*, and changing from one instant to another, we must take the time indefinitely small ; so that, for a variable force, we have

$$f = \frac{\text{velocity generated in an indefinitely small time}}{\text{time}}$$
$$= \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\delta v}{\delta v}$$

if $v=$ velocity of the body at the time t, and v' the velocity at the time t' indefinitely near to t.
In the above, it will be shortly seen, that we have anticipated the first law of motion.

85) [Potter 1846], p.158.

原文：
if $r=$ the radius of circle,

$$f = \frac{v^2}{r}$$

If m be the mass of the body at P, the centrifugal moving force
$= mf$
$= \dfrac{mv^2}{r}$
= the tension in the cord.

86) [Whewell 1847], p.132.

原文：
129. Dynamics is the science of Force, considered as producing or altering motion. If the forces which act upon any body or bodies be not such as produce equilibrium, some motion or other must be the result. Dvnamics is the science which has for its object to determine what the circumstances and properties of this motion will be.
Thus in Dynamics we consider Forces of the same kind as those which we considered in Statics; namely, *Pressures*. In Statics pressure produces equilibrium : in Dynamics pressure produces motion.

87) [Whewell 1847], p.137.

原文：
139. The consideration of the laws of velocity and direction of parts of machines in general, and of the modification of such laws in the communication of the velocity from one part to another, belongs to a separate science, which has been termed *Kinematics*, or *Mechanism*.

The subject of the present treatise is, motions considered with reference to the forces which produce or alter them.

88) [Whewell 1847], p.140.

原文：
144. DEF. *Accelerating force is force measured by the velocity which, in a given time, it would produce in a body.*

89) [Whewell 1847], p.141.

原文：
145. DEF. *Uniform Accelerating Force is measured by the velocity added (or subtracted) in a given time, as for instance, one second.*

90) [Whewell 1847], p.150.

原文：
154. When accelerating forces are variable, the reasonings respecting the motion must involve the conception of a *limit*; and the calculations will require some mathematical mode of applying this conception; for instance, the Differential Calculus.
By the fundamental principle of the Differential Calculus, the *differential coefficient* of s with regard to t, is the limit of the ratios of the increments of s and t; and is denoted thus, $\frac{ds}{dt}$; (Doct. Lim. B. v. Art. 5.)
PROP. *If* s *be. the space described in a time* t *by a point acted upon in the direction of its motion by an accelerating force* f *; and if* v *be the velocity at any moment, we have*

$$v = \frac{ds}{dt}, f = \frac{dv}{dt}.$$

It has already been shewn, Art. 135, that the velocity is the limit of the ratio of the increments of the space and time.
Also, in like manner, the accelerating force is greater as the increment of velocity in a given time is greater, and is measured by the ratio of the increment of the velocity to the increment of the time when this ratio is constant, as we have seen in Art. 146, Cor.
Therefore when this ratio is not constant, we measure the accelerating force by the limit to which this ratio tends when we diminish the time, for the same considerations as in the case of the velocity. Hence, by the definition of differential coefficients,

$$v = \frac{ds}{dt}, f = \frac{dv}{d}.$$

91) [Whewell 1847], p.163.

原文：
DEF. I. *The momentum of a body in motion is proportional to its velocity and quantity of matter jointly.*
DEF. II. *Moving force is force measured by the momentum which, in a given time, it would produce in a body.*

92) [Hart 1847], pp.59-60.

原文：
Axiom 1. A particle of matter, if at rest, will remain for ever at rest, or if in motion, will continue for ever to move uniformly in a right line, unless it be acted on by some force.
Axiom 2. If a particle of matter at rest be acted on by any force, the velocity produced will be proportional to, and in the direction of that force.

93) [Hart 1847], p.60.

原文：
Axiom 3. If a particle of matter in motion be acted on by any force, the resulting velocity will be the same as that which would have been produced in the same particle, if at rest, by the resultant of this force and the force due to the velocity with which it had been moving.

94) [Hart 1847], p.61.

原文：
This axiom and the second are usually comprised in one which is called the second law of motion, and is thus expressed: "Motion, or change of motion, is in the direction of the force impressed and proportional to it." This law is here divided into two, for the purpose of avoiding any difficulty in understanding the phrase " change of motion."

95) [Hart 1847], p.61.

原文：
Axiom 4. The weights of equal particles of matter are equal.
Axiom 5. Action and reaction are equal and opposite(a).

96) [Hart 1847], p.61.

原文：
a) The fifth axiom, which was called by Newton the third law of motion, has been more generally stated by D'Alembert thus: If any forces act on different points of a body, or system of bodies, the motion of these points may, in consequence of their mutual connexion, be different from those which would have taken place if they were unconnected; but if forces be applied to all the particles equal and opposite to the forces due to the velocities actually produced, these forces will make equilibrium with the forces which produced them. In Newton's statement of the third law of motion, the change of motion in any particle caused by its connexion with another, is called the action of that particle; and the corresponding change in the second particle is called the reaction; and since these two are equal and opposite, the forces to which they are due will make equilibrium; and since this is true of all the particles, the forces due to all the changes of motion throughout the system make equilibrium; but these forces are all evidently equal and opposite to the resultants of the forces between which there is equilibrium, by the principle of D'Alembert; whence it is evident that the two principles are identical.

97) [Sandeman 1850], v.

原文：
At the period of entering on the consideration of the laws of motion, we have the means of measuring motions and changes of motion, and we have from Statics the means of measuring forces. The object of the laws then becomes clear and definite ; it is to connect the kinematical measures of motions and motional changes of particles, with the statical measures of the forces acting on the particles. Everything therefore with respect to measures is now fixed, except of course the mere optional units of space, time, and statical force. Such being the case, it is evidently incorrect to represent (as is frequently done), that the purpose of the laws is to seek for measures of force derived from the motions of bodies. In point of fact however the laws of motion do furnish such measures ; but this is, as it were, accidental, and arises from the circumstance that the accelerations of motion produced by forces acting on a particle happen to be proportional to the measures of the forces which have been already adopted.

98) [Sandeman 1850], vii-viii.

原文：
It may be remarked that there is, strictly speaking, only one law of motion, viz., that which

asserts the proportionality of the statical and accelerating effects of forces acting on a given particle. This law manifestly includes in it the law of uniformity of motion when no external forces act; the law that the constant of the proportionality of statical to accelerating effect of force is not necessarily the same for different particles—is a law of matter rather than of motion, since it connects force with matter rather than with motion; and the law of the equality of action and reaction is a law of force rather than of motion, since it connects force with force and not force with motion. Even the principle called D'Alembert's is only a generalization of the second Newtonian law, since it hangs immediately on the principle that two systems of forces, which produce the same moving effects in a system of particles, are statically equivalent.

99) [Sandeman 1850], viii.

原文：
My chief aim in the following treatise has been to exhibit plainly the true fundamental relationships in the science of motion, by avoiding defects and errors such as have just been pointed out. It is scarcely possible to over-estimate the importance of a sound philosophy relative to the principles of motion, whether they be regarded as leading to valuable results in their own especial province, or as forming the groundwork of all physical science, or as furnishing rich materials for philosophizing on the nature of human knowledge.

100) [Sandeman 1850], vii.

原文：
In the books referred to, the law of the proportionality of the statical and moving effects of forces is represented to be the same as the law of the equality of action and reaction, but under a different form; in other words, Newton's second and third laws are represented to be identical. It is difficult to see how such a confusion of ideas could have arisen; the latter law compares the forces which two particles exert on one another (that is, the statical effect of the one with the statical effect of the other, or the moving effect of the one with the moving effect of the other), while the former law compares the statical with the moving effect of a force acting on a single particle. An indistinct perception of the principle —that all forces arise from the actions on one another of material bodies—may have had something to do in producing this strange jumbling together of essentially different laws.

101) [Newth 1850], p.79.

原文：
98. *The first law of motion.* A body in motion, not acted on by any external force, will continue to move in a straight line and with a uniform velocity.

102) [Newth 1850], p.81.

原文：
100. *The second Law of motion.* When a force acts upon a body in motion, the change of motion produced is the same, both in magnitude and direction, as if the force acted on the body at rest.

103) [Newth 1850], p.82.

原文：101. *The third law of motion.* When pressure communicates motion to a body, the accelerating force varies as the ratio of the pressure and mass.

104) [Newth 1850], p.83.

原文：
102. Since $\quad f \ : \ f' \ :: \ \dfrac{P}{A} \ : \ \dfrac{Q}{B}$

it follows that $fA : f'B :: P : Q.$
The product of the accelerating force and mass is termed *moving force.* Hence the third law of motion may be enunciated as follows : — When pressure communicates motion to a body, the moving force is proportional to the pressure.
103. Let a pressure P communicate motion to a body whose weight is W ; let f = the accelerating force, and g = the force of gravity. If W falls freely under the action of gravity, the pressure communicating motion is the weight itself; and therefore by the third law of motion

$$f : g :: \frac{P}{\text{mass}} : \frac{W}{\text{mass}}$$

but the mass moved is the same in both cases ; therefore

$$f : g :: P : W$$

Hence when pressure communicates motion to a body

$$\text{accelerating force} = g\frac{\text{pressure}}{\text{weight moved.}}$$

105) [Phear 1850], p.175.

原文：
First Law of Motion,
A material particle if at rest will remain at rest, and if in motion will continue to move uniformly in the same straight line, unless it be acted upon by some external force.

106) [Phear 1850], p.177.

原文：
When any number of forces act simultaneously upon a material particle in motion, the instantaneous quality of each force as regards its intensity and direction remains the same as if it had acted alone upon the particle at rest.

107) [Phear 1850], p.216.

原文：
39. If we define *the momentum of a body at any time to be the product of its mass into the velocity which it has at that time,* the results of the experiments alluded to can be easily enunciated in the form which is known as,
The Third Law of Motion. Forces are proportional to the momentum which they generate in any mass in the same time.

108) [Phear 1850], p.216.

原文：
Hence, if a force represented by F generate a velocity V in a mass M in a unit of time, we have

$$F = CMV,$$

where C is some constant whose value depends upon the convention which we make with regard to the units of force, mass, and velocity.
It is convenient to assume these units, so that $C = 1$, and therefore

$$F = MV$$

This makes $M = 1$, when F and V are put each equal to 1 ; which implies that the unit of mass is the mass of that body in which a unit of force will generate a unit of velocity in a unit of time.

109) [Phear 1850], p.217.

原文：
41. In the formula

$$F = MV,$$

V is the velocity which the force generates in 1", in the body whose mass is M ; it is therefore, according to Art. (6), the measure of the accelerating force which F exerts upon M ; F itself is called the measure of the *moving force*. This accelerating force may very well, in consistency with the symmetry of our notation, be represented by f, so that

$$F = Mf$$

therefore

$$f = \frac{F}{M}.$$

110) [Phear 1850], p.176.

原文：
Force when uniform is proportional to the velocity which it either generates or destroys in a given time in the particle to which it is applied.

111) [Phear 1850], p.176.

原文：
6. This assertion shews us that if we chose to consider forces simply with reference to the effect which they produce in altering the velocity of a material particle, we could very correctly *measure* them by the velocity which they respectively generate or destroy in that particle in a unit of time: and this is in fact the convention which is usually made; but then force so measured receives the distinctive appellation of *accelerating force*.

112) [Phear 1850], pp.233-234.

原文：
Suppose a force represented by F to generate in a given time a velocity v in a mass M; also in the same time let a force F' generate a velocity v' in a mass M': F and F' are estimated upon the consideration that forces are equal when in a given time they generate the same velocity in the same material particle.
The velocity generated in M *is the same as would be generated in any one of its units of mass separated from it by a force equal to* $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{M}}$ *, acting alone upon that unit for the given time.*
The same may be said with regard to a unit of mass separated from *M'*.
Hence, since the unit of mass is the same for both, these velocities must be proportional by the Second Law of Motion to the forces which generate them; therefore

$$v : v' :: \frac{F}{M} : \frac{F'}{M'},$$

or

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'};$$

and therefore

$$F \propto Mv.$$

The assumption here made is distinguished by being written in italics; it is simply the same thing as that which the definition of mass asserts, *i.e.* the strict proportionality between masses and the forces which generate in them the same velocity. But this measure is, as remarked in Art. (38), only justified by the Third Law of Motion, itself or some other assertion equivalent to it: in the same manner as the Second Law of Motion proves the propriety of our measure of accelerating force, does the Third Law prove the correctness of our measure of mass: as, therefore, it does not seem that this law can be deduced from the preceding laws without an accurate idea of the measure of mass, it can only stand alone as an experimental fact, unless it be conceived that the measure of mass can be deduced from the Second Law of Motion.

113) [Wilson 1850], p.11.

原文：
If then we take as our unit that particular degree of acceleration for which $\frac{\delta v_1}{\delta t_1} = 1$,we have the equation

$$a = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

This unit is always adopted.
The letter f will in future be used to denote the numerical representation of the acceleration, so that our equation is

$$f = \frac{\delta v}{\delta t}.$$

114) [Wilson 1850], p.18.

原文：
It is found, however, that it will move in obedience to the following law, which is called the First Law of Motion.
A body in motion not acted on by any extertial force will move in a straight line with uniform velocity.
This law assures us of two facts.
First, that matter has no property inherent in itself which enables it to change the direction of its motion, or to alter or destroy its velocity; and
Secondly, that the molecular forces which keep together the ultimate atoms of which our particle is composed have no such tendency.

115) [Wilson 1850], pp.18-19.

原文：
16. Before proceeding farther, we will make a remark which must never be lost sight of. It is this. Force, by whatever means exerted, or from whatever cause arising, is always necessarily essentially of the same nature.
Forces may differ from one another in their intensity, and in their directions, and in the points at which they are exerted, but they are always forces, and as such are always magnitudes of the same kind.
Thus, a force may be exerted by means of a string, in which case it is called tension. It may be exerted by pushing one body against another, in which case it is called pressure or reaction. We may have the force of friction, pressure exerted by a spring, by a body's weight which arises from the attraction of the earth, by any other attraction or repulsion whatever, but still all are the same.
Forces may produce equilibrium, or they may produce motion, but still the force itself is the same.
When, therefore, we use the term "force," we always mean such a force as a pressure or tension.
Two forces are equal to one another when a point on which they act in opposite directions continues at rest under their action.
Two equal forces acting on the same point in the same direction, constitute together a force double of either of them.
From these two definitions we are able to represent a force numerically, by referring it to some standard force as a unit.

116) [Wilson 1850], pp.19-20.

原文：
17. We will now consider the effect of a force when acting on a material point.
Suppose the point at rest originally; when the force acts it will generate a velocity in the particle, and if the force acts for a certain time and then ceases, we know from the first law of motion that the particle will continue to move in a straight line with the velocity which it had when the force ceased acting.
Now suppose a force exactly equal to this one to act for exactly the same time on another particle originally at rest, exactly similar and equal to the other one; by the end of the time this particle will have acquired the same velocity as the other, and will continue to move on with this same velocity when the force ceases acting.
Or, in other words, when a given force acts on a given particle, originally at rest, for a given time, there is always some definite velocity which it will generate in the time.
Now suppose that a force acts for a certain time on a particle and produces a certain velocity, if it goes on acting for another equal time in the same direction, it will increase the velocity, but we cannot, *à priori*, say by how much. Here then we are stopped again.
Also, suppose that together with our force another equal force acts on the body for the time specified, in the same direction with it, thus amounting to a double force, we cannot say, *à priori*, what proportion the velocity generated in any given time, by these two forces, will bear to that which would have been generated in the same time by one only.
To meet these two difficulties we have another rule to guide us, called The Second Law of Motion, which may be thus stated.
When any number of forces act upon a particle in motion, the effect of each force on the velocity of the particle is the same in magnitude and direction as if it acted singly on the particle at rest.
The best commentary on this law will be the manner in which it is applied. When a force is designated by a letter (as P) that letter must be considered as representing numerically the intensity of the force, estimated by reference to some standard unit. All forces whose intensities are equal and which act in the same direction will be considered as the same force, from whatever different causes they may arise. For instance, a body pulled by a string, and another attracted by a magnet in the same direction and with the same intensity, would be considered as acted on by the same force. Forces of different intensities, even though they arise from the same cause (as from the attraction of the same body at different distances), are considered different.

117) [Wilson 1850], p.28.

原文：
Let u, v, w be the components at time t of the velocity of the particle in the direction of three axes ; X, Y, Z the sums of the components in directions of the axes of all the forces which act on the particle at time t.
$X+\delta X, Y+\delta Y, Z+\delta Z$, the same quantities at time $t+\delta t$. $\delta X, \delta Y, \delta Z$ may depend on δt explicitly, and also on the change of position and velocity of the particle, but in all cases they will vanish with δt.
Now we are told by the second law of motion, that each of these forces will produce the same effect on the velocity of the particle during the time δt as if the particle were at rest at the commencement of δt, and that force were the only one acting.
Hence the variable force X will produce in that time a velocity δu which lies between $\dfrac{X\delta t}{M}$ and $\dfrac{(X+\delta X)\delta t}{M}$, and the other forces will produce effects in their own directions, namely,

$$\delta v \text{ between } \frac{Y\delta t}{M} \text{ and } \frac{(Y+\delta Y)\delta t}{M},$$

$$\text{and } \delta w \text{ between } \frac{Z\delta t}{M} \text{ and } \frac{(Z+\delta Z)\delta t}{M}.$$

so that the components of the velocity at the time $t+\delta t$ will be $u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w$, where

$\delta u, \delta v, \delta w$ are properly the increments of u, v, and w.
Hence, passing to the limit, we have

$$M\frac{du}{dt} = X, M\frac{dv}{dt} = Y, \qquad \text{and } M\frac{dw}{dt} = Z.$$

If x, y, z are the coordinates of the particle at time t,

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt},$$

$$\text{and } M\frac{d^2x}{dt^2} = X, M\frac{d^2y}{dt^2} = Y, M\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

These equations must be considered as the fundamental equations of dynamics where the motion of a particle only is considered.

118) [Wilson 1850], pp.28-29.

原文：
28. It may be objected to what has preceded, that we have used terms which have in themselves a meaning in ordinary language, and that we have assigned to these terms a sense differing from, or only partially agreeing with, their ordinary meaning, and that this sense has been assigned arbitrarily.
To this we reply that we are perfectly at liberty to give any arbitrary definitions that we please, provided only that we adhere to them throughout the subject.
The Science of Mechanics, however, is particularly unfortunate in this respect, that the terms used in it have, in addition to the meaning given them by definition, a meaning in common conversation. It arises from the fact, that in the early ages of the science erroneous, very erroneous notions were entertained of the principles of the science, and the phraseology adopted expressed those erroneous notions. When the true principles of the science were gradually developed, it was found convenient to retain the old names expressing the same analytical combinations and numerical quantities as before, though all idea of the name expressing any principle was given up.
In popular language, however, the old notions still cling to the words.
Such terms are "momentum," "accelerating-force," "vis viva," &c.
We caution the student, once for all, to take the words in the sense assigned them by definition and in no other.

119) [Goodwin 1851], p.3.

原文：
P. What put it in motion then ?
T. The question for us is not, what originally put it in motion, but what force is acting upon it *now* ; and inasmuch as no force is acting upon it during its actual course from A to B, its motion between those points involves no considerations of the nature and action of force. The science of the motion of bodies, which does not introduce any considerations of force, is sometimes distinguished as the science of *kinematics*.

120) [Warr 1851].

121) [Warr 1851], p.3.

原文：

14.) The principle we have here deduced forms part of the first of the celebrated laws of motion, as stated by Sir Isaac Newton in his *Principia*, which is, that all bodies will continue in their state of rest or motion ; that is, if they be in motion they have no tendency or power to stop, and if at rest no power to move; the latter assertion is easily acknowledged, as we find that every body resists our efforts to move it, but the former cannot, as we have seen, be so plainly shown to the physical senses; indeed many of the old philosophers supposed that rest was the natural state of matter, which it always sought when in motion, and accordingly termed this passiveness of matter inertia, or idleness.

122) [Warr 1851], p.5.

原文：

25.) What we have stated in the preceding articles follow from the second law of motion. In the first treatise the principle was referred to statically, that is, showing that two or more pressures might be equilibrated by a pressure in the direction of the resultant of all the pressures ; in the present case we suppose no equilibrium to be established, but use the same means to find the resulting motion.

123) [Baker 1851].

124) [Baker 1851], pp.64-65.

125) [Baker 1851], p.65.

原文：

NEWTON'S LAWS OF MOTION.

129. *First.* A body in motion, and not acted upon by any external force, will move with a uniform velocity in a straight line.
130. *Second.* When a force acts upon a body in motion, the change of motion in quantity and distance, is the same as if the force acted upon the body at rest.
131. *Third.* When pressure produces motion in a body, the momentum generated in a given short time is proportional to the pressure.

126) *ibid.*, p.66.

原文：

133. PROP.— *When the force accelerates uniformly, the velocity generated in a given time is equal to the product of the force and time.*
Let f be the accelerating force ; then f = velocity generated in one second of time; and, since the force is uniform, f will also be the velocity to be added in the end of the next second; hence $2f$ will be the whole velocity generated in two seconds. Similarly $3f$ will be the velocity at the end of three seconds ; and generally tf will be the velocity at the end of t seconds; therefore, putting v = velocity, there results

$$v = ft, \qquad \text{hence} \ \ t = \frac{v}{f}.$$

Thus, if f = force of gravity at the earth's surface = $32\frac{1}{6}$ feet, and the time of motion be three seconds, then

$$v = ft = 32\tfrac{1}{6} \times 3 = 96\tfrac{1}{2}\text{feet}.$$

127) [Jackson 1852], 前文.

原文：

ADVERTISEMENT.

THE following exposition of the elementary principles of rational mechanics, is intended to be sufficiently brief and free from difficulties to be thoroughly mastered by students of ordinary capacity, in the time usually allotted to the subject, and yet comprehensive enough to be made the basis of a course of general physics and practical mechanics. It has no claims to originality; the methods employed being generally those which have been long in use, and which may be found in many of the best treatises on the same subject.

Of the works consulted in the preparation of this volume, most assistance has been derived from those of POISSON and BOUCHARLAT : occasional use has also been made of those of EARNSHAW, POTTER, SAURI, and PUISSANT.
In the present emission, the subject of solids only is considered. The few sections on fluids, necessary to complete the plan, will soon be published.

128) [Jackson 1852], p.2.

原文：
I. *The law of inertia.*
The motion of a body, when left to itself, is rectilinea and uniform.

129) [Jackson 1852], p.3.

原文：
II. *The law of the coexistence or independence of motions.*
The relative motions of a system of bodies are not affected by any motion which is common to all the points of the system.

130) [Jackson 1852], p.4.

原文：
III. *The law of the equality of action and reaction.*
To every action, there is always opposed an equal reaction.

131) [Jackson 1852], II-p.4.

原文：
We assume as the measure of a constant accelerating force, the velocity which it generates in the unit of time.

132) [Jackson 1852], II-p.43.

原文：
4 ° If in proportion [d] we suppose m' to become the unit of mass, and v' the unit of velocity, F' will become the force which will communicate to the unit of mass a velocity equal to the unit of velocity; and if we take it for the unit of force, we shall have

$$F = mv \ldots\ldots \tag{e}$$

mv being the ratio of the force F to the unit of force.

133) [Jackson 1852], II-p.44.

原文：
6 ° . The preceding relations are evidently true, whatever the value of v : whether it be a finite velocity, due to a force of the kind called impulsive ; or an infinitely small velocity, such as we conceive a force acting at infinitely small intervals, like gravity, to communicate at the commencement of each interval ; or, lastly, whether it be the finite velocity produced by the latter kind of force (that is, an accelerating force) acting during a given time.
Reserving v to denote the velocity due to an impulsive force, and employing ϕ to denote the velocity due to an accelerating force acting uniformly during the unit of time, we shall have, for the two cases,

$$F = mv, \ldots\ldots\ldots \tag{k}$$

$$F = m\phi. \ldots\ldots\ldots \tag{k'}$$

If in these equations we make $m = 1$, we get

$$F = v, F = \phi;$$

and F becomes in each case the force which acts upon a material particle, or the unit of mass. For the sake of brevity, ϕ is commonly called *the accelerating force* ; and $m\phi$ the general expression of F in equation [k'], is called *the moving force.*

134) [Bartlett 1853], pp.20-21.

原文：

FORCE.

§7.—Whatever tends to change the actual state of a body, in respect to rest or motion, is called a *force.* If a body, for instance, be at rest, the influence which changes or tends to change this state to that of motion, is called *force.* Again, if a body be already in motion, any cause which urges it to move faster or slower, is called *force.*

Of the actual nature of forces we are ignorant; we know of their existence only by the effects they produce, and with these we become acquainted solely through the medium of the senses. Hence, while their operations are going on, they appear to us always in connection with some body which, in some way or other, affects our senses.

135) [Bartlett 1853], p.43.

原文：

The mass remaining the same, the velocities generated in equal successive portions of time, by a constant force, must be equal to each other. However a force may vary, it may be regarded as constant during the indefinitely short interval dt ; in this time it will generate a velocity dv, and were it to remain constant, it would generate in a unit of time, a velocity equal to dv repeated as many times as dt is contained in this unit; that is, the velocity generated would be equal to

$$dv.\frac{1}{dt} = \frac{dv}{dt};$$

and denoting the intensity of the force by P, and the mass by M, we shall have

$$P = M.\frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

Again, differentiating Equation (11), regarding t as the independent variable, we get,

$$dv = \frac{d^2s}{dt};$$

and this, in Equation (12), gives

$$P = M.\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{13}$$

From Equation (11), we conclude that in varied motion, *the velocity at any instant is equal to the first differential co-efficient of the space regarded as a function of the time.*

From Equation (12), that the intensity of any motive force, or of the inertia it develops, at any instant, is measured by *the product of the mass into the first differential co-efficient of the velocity regarded as a function of the time.*

And from Equation (13), that the intensity of the motive force or of inertia, is measured by *the product of the mass into the second differential co-efficient of the space regarded as a function of the time.*

136) [anonymous 1853], p.74.

原文：

(102.) There is a very important part of mechanics in which motion is considered geometrically, as it were, without any reference whatever to force. This includes everything relating to the various forms and movements of machines, the construction of the teeth of wheels, of link work, clock work, &c. Professor Willis of Cambridge has written a valuable treatise on this part of mechanics, which he designates by the title, *The Principles of Mechanism*, Another name has been proposed, derived from the Greek word signifying to *move*, namely, *Kinematics*.

137) [anonymous 1853], p.75.

原文：
(106.) We shall divide the mechanical sciences into three, namely, *Statics*, *Dynamics*, and *Hydromechanics*. In Dynamics we shall include *Kinematics*, or the *Principles of Mechanism.*

138) [anonymous 1853], p.387.

原文：
FIRST LAW OF MOTION.
When a body is not acted upon by any force, if at rest, it remains at rest; and if in motion, it continues to move uniformly in the same direction.

139) [anonymous 1853], p.391.

原文：
SECOND LAW OF MOTION.
When a body, moving in a certain direction, is acted on by a force oblique to that direction, the deflection produced in any time is equal to the space which the body would have described in that time, if it had been originally at rest.

140) [anonymous 1853], p.395.

原文：
THIRD LAW OF MOTION. *The velocity produced by a force acting on a given body, during a given time, is proportional to the force.*

141) [anonymous 1853], pp.406-407.

原文：
GENERAL REMARKS ON THE LAWS OF MOTION.
Action and Reaction.—The laws of motion above enunciated are not exactly those given by Newton, to whom chiefly we owe all our knowledge on this subject. It is customary with many writers to divide the laws of motion as above, and perhaps it is on the whole a better division. Newton's *second* law virtually includes the second and third laws as we have stated them, and his third law is this:—*Action, and Reaction are equal and opposite.* That is, if one body A exerts a force upon another body B, by contact, by tension or thrust, by attraction or repulsion, or otherwise; then B exerts the very same force on A in the opposite direction; in other words, the *return pressure or reaction* (see Part I. page 32) of B on A is equal and opposite to the *original pressure,* or action of A on B. This is a most important mechanical law, but it belongs as much to Statics as Dynamics, and is not properly therefore to be regarded as a special law of motion. As an example of this law, we may quote the case of the mutual attractions of the sun and planets; thus the actual force of attraction which the sun exercises on the earth, is equal to that which the earth exercises on the sun. This may appear strange, considering how much smaller the earth is than the sun, but it is nevertheless the fact.

142) [anonymous 1853], pp.411-412.

原文：
Accelerating Force.—It is usual, in Mechanical Treatises, to designate the velocity produced in a second by the term " *Accelerating Force ;*" but we consider this to be a very bad term for the purpose, and it generally misleads the student as to the real nature of the quantity denoted. We shall never use this term, but speak of f simply as the "*velocity generated per second,*" or

“ *rate of acceleration.*”

Mass.—The term mass is used to denote the quantity of matter in a body, as indicated by its weight. It is generally measured with reference to a peculiar unit in Mechanical Treatises, for the purpose of making the above expression for f as simple as possible. The unit of mass is considered to be a body weighing 32.2 lbs., or more correctly, $g$lbs., g, as we have stated, being (at Greenwich) 32.1908. The quantity of matter in a body weighin $g$lbs. is therefore assumed to be 1, in a body weighing $2g$ lbs. it is assumed to be 2, $3g$lbs., 3, and soon; and in general, the mass of a body whose weight is Mglbs. is assumed to be M. If, then, W be the weight of a body, and its mass, we have,

$$W = Mg.$$

Now, in the formula, $f = \frac{P}{W}g$, put this value of W, and we obtain,

$$f = \frac{P}{M}, \qquad \text{and} \qquad \therefore \quad P = fM.$$

That is, the velocity per second is found by dividing the force by the mass, and the force is found by multiplying the velocity per second by the mass.

143) [Tate 1853], p.13.

原文：24. The truth of the three following laws of motion is based upon observation and experiment:
FIRST LAW OF MOTION—*A body in motion mil move continually in a straight line and with a uniform velocity, if it is not acted on by any external force.*

144) [Tate 1853], p.14.

原文：
SECOND LAW OF MOTION.—*If any number of forces act at the same instant upon a body in motion, each force produces its full effect in the direction of its action, just as if it had acted alone upon the body at rest.*

145) [Tate 1853], p.14.

原文：
Thus, if a ball be dropped from the top of the mast of a ship moving uniformly, the ball strikes the deck at the bottom of the mast, and falls precisely in the same time as if the ship were at rest.

146) [Tate 1853], pp.14-15.

原文：
THIRD LAW OF MOTION. *When a pressure acting on a body puts it in motion, the momentum generated in a unit of time is proportional to the pressure.*
This law is proved in Arts. 19. and 20.

147) [Galbraith 1854], p.48.

原文：

3. **Laws of Motion.** — The laws of motion are simple statements of observed facts, from which can be deduced, without any further appeal to experiment, the laws of the most complicated motions. They are summed up by Sir Isaac Newton in three laws, with the first two of which only we are here concerned. These two laws of motion are the following :—

LEX I.

“*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum ilium mutare*”—
Princip. Math. Jes. Edit. torn. i. p. 15.

A body will continue in its state of rest, or state of uniform motion in a right line, unless compelled to alter that state by force impressed upon it.

148) [Galbraith 1854], p.49.

原文：

LEX II.

"*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresseæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis ilia imprimilur.*"—Princip. Math. Jes. Edit.,tom. i. p. 15.
The change in the quantity of motion produced is proportional to the force applied, and takes place in the direction of that force.

149) [Galbraith 1854], p.49.

原文：

This law of motion contains three distinct statements, which, for greater clearness, we shall give separately; the first relates to direction, the second and third to magnitude.
FIRST STATEMENT.— *The motion produced in a body by the application of a force takes place in the direction of the force, and is independent of any previous motion existing in the body.*

150) [Galbraith 1854], p.52.

原文：

SECOND STATEMENT.— *The velocities produced in the same body by different statical forces acting for one second, are proportional to those forces.*
THIRD STATEMENT.—*If the same statical force be applied to move different bodies, the velocities produced in one second will be inversely proportional to the quantities of matter in the bodies moved.*
Both these statements may be expressed algebraically in a single formula, as follows:— Let F represent the Statical force in pounds, ounces, &c., and let f represent the Dynamical force, i. e. the velocity of the body at the end of one second, expressed in feet per second; and let in represent the Quantity of matter in the body moved.
The equation,

$$F = mf, \tag{2}$$

expresses that the Dynamical force f is directly proportional to the Statical force F, and inversely proportional to the Quantity of matter m; or that *the Statical force applied to move a body is directly proportional to the Quantity of motion produced in a given time.*

151) [Smith 1855], p.132.

原文：

216. Matter at any given moment must be in one of the two states, motion or rest. The inertia of matter is the entire absence of power in itself to change this state. It implies equally a disability, when in motion, to change its rate or its direction. Hence
A body, when not acted on by any external forces, if at rest, will remain so, or, if in motion, will continue to move in a straight line and with a uniform velocity.
This is called the first law of motion.

152) [Smith 1855], p.135.

原文：

All motion or change of motion in a body is proportional to the force impressed and in the direction of that force.

153) [Smith 1855], p.135.

原文：
Action and reaction are equal and in opposite directions.

154) [Smith 1855], p.135.

原文：
225. In estimating the effects of incessant forces, we have considered only the acceleration or velocity which each force will produce when acting on a free material point or a unit of mass. When so measured, they are called *accelerating* forces. If the mass moved differs from that which we have called the unit of mass, and it is taken into consideration in estimating the effects of the forces, they are then called *moving forces*. Let ϕ be the acceleration, or velocity generated in a unit of time, M the number of units of mass ; then Φ, the moving force, will be measured by the quantity of motion generated in the unit of time, or

$$\Phi = \phi \mathrm{M}. \tag{VI.}$$

Hence $\phi = \dfrac{\Phi}{\mathrm{M}}$ or the accelerating force, is equal to the moving force divided by the mass.

155) [Peirce 1855], pp.2-3.

原文：

II

MEASURE OF FORCE.

7. Experiments have shown that the exertion which is required to move any body, is proportional to the product of the intensity of the effort into the space through which it is exerted. This product is, then, the proper measure of the whole amount of force which is necessary to the production of the motion ; long established custom has, however, limited the use of the word *force* to designate the *intencity* of the effort, and the *whole amount of exertion* may be denoted by the term *power*. Hence, if the power P is produced by the exertion of a constant force F, acting through the space s, the expression of the force is

$$F = \frac{P}{s}$$

But if the force is variable in its action, the expression of its intensity at any point is

$$F = \frac{dP}{ds} = D_s P.$$

8. It is found by observation that the force of a moving body is proportional to its velocity. Thus, if m is the force of a body when it moves with the unit of velocity, its force, when it has the velocity v, is mv.
9. Different bodies have different intensities of force when they move with the same velocity. The *mass* of a body is its force, when it moves with the unit of velocity ; thus, m in the preceding article, denotes the mass of the body.
10. The force communicated to a freely moving body, by a force which acts in the direction of the motion, is found to be the product of the intensity of the acting force, multiplied by the time of its action. Thus, if the mass m, acted upon by the constant force F, for the time t, in the direction of its motion, has its velocity increased by v, the addition to the force of the moving body is

$$mv = Ft.$$

In case the acting force is not constant, the rate at which the force of the body increases is

$$mD_v = F.$$

156) [Cherriman 1858], p.72.

原文：
21. In the foregoing chapter the geometrical conditions of the motion of a point have been examined. It now remains to exhibit the connection of these results with the actual motions of

material particles, and the relation between these motions and the forces acting on the particles, and this investigation constitutes the science of *Dynamics*.
For this purpose it is necessary to appeal to experiment and observation, and it appears that all the phenomena of the motions of material particles can be referred to three elementary principles or laws, which are commonly known as "Newton's Laws of Motion." These laws, from their nature, are incapable of being demonstrated by direct experiment, for it is impossible to make experiments under the precise circumstances conditioned by the Laws, and which would not involve other phenomena besides those which it is desired to test.

157) [Cherriman 1858], p.73.

原文：
23. FIRST LAW OF MOTION.
A material particle, when not acted on by any force, if at rest, will so remain ; and, if in motion, will move in a straight line with uniform velocity.

158) [Cherriman 1858], p.74.

原文：
(1.) When a uniform force acts continuously upon a particle in the line of its motion, the velocity is uniformly accelerated.

159) [Cherriman 1858], p.75.

原文：
(2 .) *When several uniform forces are acting simultaneously in the line of motion, the resulting acceleration is the algebraic sum of the accelerations which would be produced by each force acting separately.*

160) [Cherriman 1858], p.76.

原文：

The change of velocity produced by the force in a given time is in direction of the force and is proportional to it in magnitude.

161) [Cherriman 1858], p.76.

原文：
The above, in other words, expresses that *the dynamical effect of a force on a particle is wholly independent of any motion which the particle may have, and is the same as if it were exerted on the particle originally at rest.*

162) [Cherriman 1858], p.77.

原文：
When forces act on the same particle under any circumstances, provided each force be uniform and always preserve the same direction, the change of velocity in a given time due to each force is in direction of that force, and is proportional to it in magnitude.

163) [Cherriman 1858], p.77.

原文：
(5). It follows from the preceding that if f be the acceleration due to a force P acting on a certain particle, then the particle the ratio P : f is invariable for this particle. This ratio is found, however, to be different in different particles, and we thus discover a quality which distinguishes one particle from another, of which this ratio will serve as a measure. The name of *mass* is given to it, and one particle has the same *mass* as another when the same force

produces in each the same acceleration. The unit of mass is arbitrary and it is not necessary to fix it, but we shall take as the measure of *mass* the above ratio of the numbers expressing a Force and the acceleration it produces on the particle. Thus, if m be the *mass* of a particle, and P, f as above,

$$\frac{\mathrm{P}}{f} = m.$$

It has been mentioned that the acceleration produced by gravity (g) is the same for all bodies at the same place on the Earth's surface. Hence, if W be the weight of a body, m its mass, we have

$$\frac{\mathrm{W}}{g} = m, \text{and}$$
$$\mathrm{W} = mg.$$

Hence, for a given place, the weights of bodies may be taken to measure their masses.

164) [Cherriman 1858], p.78.

原文：
(6.) Since $P = mf$, and f is proportional to the change of velocity in a given time (§5), it follows that P is proportional to the product of the mass and the change of velocity in a given time.
The product of the mass and the velocity (that is, of the numbers expressing these,) is called the *momentum* of the particle, and the preceding results can now all be combined in one statement, which constitutes :

THE SECOND LAW OF MOTION.

When uniform Forces act continuously for a given time on material particles, each produces in its own direction a change of momentum proportional to itself in magnitude.

165) [Cherriman 1858], p.83.

原文：
32. THIRD LAW OF MOTION.
When one material particle acts on another, the second exerts on the first an action equal in amount and opposite in direction to that which the first exerts on it.
The actions here spoken of may be of various kinds; such as the mutual pressures between bodies in contact whether at rest or in motion ; or the action of one particle on another by means of a stretched string or a rigid rod; or the action may be of the nature of attraction or repulsion; or finally of an *impulsive* character, as in cases of collision.
The measures of these actions are either their statical measures or those furnished by the second law of motion.
Sometimes the law is stated in the form :
The actions of bodies are mutual, equal, and opposite.

166) [Cherriman 1858], p.57.

原文：

PREFACE.

The arrangement of this elementary work differs from that of most of the recent English writers on the subject, and is in the main the same as that employed by Professor Sandeman in his "Treatise on the motion of a Particle." Adopting in full the principles and method of that admirable treatise, I have attempted little more than to translate out of the language of the Calculus into ordinary algebra the investigations there given of the simpler cases of particle-motion.
For the reason stated in PART I., I have not added any *examples*, and have endeavored to be as concise as possible in any explanations or illustrations that have appeared necessary.

UNIVERSITY COLLEGE,
TORONTO,
April 1, 1858.

167) [Twisden 1860], p.207.

原文：
The student is particularly recommended to make himself thoroughly master of this Chapter before proceeding further.

168) [Twisden 1860], p.215.

原文：
110. *The acceleration of the motion of a given body produced by a given pressure.* — Let the weight of the body be W Ibs; we have seen that if it falls freely it acquires in every second an additional velocity g. In other words, if this body is acted on by a pressure of W Ibs., its velocity is increased every second by g. Now suppose it to be acted on by a constant pressure P; for instance, suppose it to be placed on a smooth horizontal plane and to be pushed by a horizontal pressure of P Ibs., it appears from experiment that its velocity will be increased in every second by a certain constant amount f, given by the proportion

$$\mathrm{W} : \mathrm{P} :: g : f,$$

that is to say, *the accelerations, or the increments of velocity of the same body, in each second are proportional to the pressures that produce them.*

169) [Twisden 1860], p.225.

原文：
117. *Accelerating force.* — If the velocity of a body is continually increased by equal amounts in equal times, that velocity is said to be *uniformly accelerated;* and the cause which produces this acceleration is said to be a *uniformly accelerating force.*

170) [Twisden 1860], pp.235-236.

原文：
120. *The first and second laws of motion.* — The object of the first law of motion is to assert that a body has no power of changing its own state of rest or motion, and that every such change is due to the action of some external force ; up to the time of Galileo it was supposed that certain kinds of motion — such as the rolling of a body along a road — have a natural tendency to decay ; while certain other kinds — such as that of falling bodies — have a natural tendency to increase ; when this opinion came to be examined, it was found that every case of "decay" could be referred to the action of retarding forces, *e.g.* friction and resistance of the air, and that the "decay" could be made indefinitely slower by diminishing these resistances; on the other hand every case of increased velocity could be referred to the action of an accelerating force such as gravity. The law is stated as follows : "A body not acted on by any external force, if at rest, will continue at rest, and if in motion will continue to move uniformly on a straight line." The object of the second law of motion is to assert that the effect produced by a force is irrespective of the previous motion of the body: it is enunciated thus : —" When a force acts on a body in motion, the velocity it would produce in the body moving from rest is *compounded* with the previous velocity of the body." If the body is moving along the line of action of the force, the term *compounded* must be understood to mean added (or subtracted); if the body is moving transversely to the line of action of the force, the word compounded must be understood as in Art. 119. The principle asserted in the second law of motion is illustrated by many obvious facts, such as the following: — a person, on board a ship, can throw up a ball and catch it with equal facility whether the ship is at rest or in a state of steady motion.

171) [Twisden 1860], p.242.

原文：
Def.—Moving force, or the moving quantity of a force, is the additional momentum which it communicates in each second to a body.
The accelerating force (f), or the acceleration produced by a force, is the additional *velocity* it communicates in each second; consequently if M is the mass of the body,

$$\text{Moving force} = \mathrm{M}f.$$

124. *The third law of motion.*—We have already seen (Art. 110) that when a pressure P acts upon a body which weighs W lbs. at a place where the accelerating force of gravity is g ; then ,

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{g}f$$
$$i.e.\ \mathrm{P} \propto \mathrm{M}f.$$

This variation when verbally enunciated becomes what is commonly called the third law of motion, viz. — *when pressure produces motion it is proportional to the moving force.*

172) [Morin 1860], pp.61-63.

原文：
61. *Principle of the proportionality of forces to their velocities.*—The observation of facts shows, and it seems quite natural to admit, that *forces are really proportional to the degrees of velocity which they impress in equal infinitely small times, upon the same body, yielding freely to their action and in the proper direction of this action.* This is one of the fundamental axioms admitted by all geometricians, and is proved in the exactitude of consequences deduced from it. If, then, we call F and F' two forces which, acting successively upon the same body, impress it with or deprive it of infinitely small degrees of velocity, v and v', in an element of time t, we shall have from this principle the proportion

$$\mathrm{F} : \mathrm{F}' :: v : v'.$$

To get the expression and measure of the force F, we may compare it with another force, whose effect upon the body is known ; with gravity, for example, and as we know that the velocity imparted to heavy bodies in an element of time is $v' = gt$, and as we designate by P, the weight of the body, or the force exerted by gravity, the above proportion will then become

$$\mathrm{F} : \mathrm{P} :: v : gt;$$
$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{g} \cdot \frac{v}{t}.$$

Before proceeding farther, we remark that the same principle applied to actions exerted by gravity upon the same body in different places, where the weight of the body is respectively P and P', gives us the proportion

$$\mathrm{P} : \mathrm{P}' :: gt : g't :: g : g',$$

whence it follows that the ratio $\dfrac{\mathrm{P}}{g} = \dfrac{\mathrm{P}'}{g'}$ is constant for all places upon the earth.
This constant ratio of the weight of a body to the velocity communicated to it by gravity, in the first second of its action, is what we term its mass, and is designated by the letter M.
62. *The measure of motive forces and of inertia.*—We have, then, for the expression of the force F capable of imparting to or taking from a body of the weight P or mass M an element of velocity v, in an element of time t .

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{g}\frac{v}{t} = \mathrm{M}\frac{v}{t}.$$

We see, by this expression, that when the weight of a body is given, or its mass, we shall have the value and measure of its force in pounds, when we know the ratio $\dfrac{v}{t}$. If, for example, this ratio is constant, which is the case with motion uniformly accelerated or retarded, the force F is constant.

173) [Morin 1860], p.132.

原文：
In fact, calling F, F', F" the forces acting in the same direction upon a material point with a mass M; v, v', v'', the finite or elementary velocities imparted by them in the same time, we have

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{M}v}{t},\ \mathrm{F}' = \frac{\mathrm{M}v'}{t},\ \mathrm{F}'' = \frac{\mathrm{M}v''}{t};$$

174) [Morin 1860], pp.8-9.

原文：
5. *Inertia of Matter.—All bodies maintain the state of rest, or of uniform motion in which they are found, provided no foreign cause by its action constrains them to change that state.* (Newton's first law of motion.)
(中略)
6. *Definition of forces.—Force* is the name given to any cause which produces or modifies, or tends to produce or modify motion. Such are attraction, gravity, the action of animals, of water, of air, of steam, the resistance of air, friction, &c.

175) [Morin 1860], p.13.

原文：
These reciprocal effects constitute one of the fundamental principles or axioms of Mechanics, and we declare, in the words of their author Newton, "*that action and reaction are always equal and opposite,*" that is to say, "the action of two bodies upon each other, are always equal and in opposite directions." (Third Law).

176) [Morin 1860], p.14.

原文：
18. *De l'inertie.*— Pour cela il est nécessaire d'énoncer ici une propriété fondamentale de la matiere ou des corps en général. C'est qu'un corps ne peut, par lui-même, changer son étal de mouvement, et qu'il tend à persévérer dans le mouvement qu'il possède , tant qu'une cause étrangère n'agit pas pour l'en faire changer.

177) [Parkinson 1863], p.168.

原文：
FIRST LAW OF MOTION.
27. *A particle if at rest will continue at rest, and if in motion will move in a straight line with uniform velocity unless it is acted on by an extraneous force.*
This law is sometimes referred to as the *law of Inertia* or the *principle of Inertia*. It expresses the fact that a particle of matter has no power within itself of altering or influencing its own state of rest or motion.

178) [Parkinson 1863], pp.168-169.

原文：
THE SECOND LAW OF MOTION.
29. *When a particle is in motion under the action of any force, the acceleration of the particle estimated in any assigned direction is wholly due to the force resolved in that direction,— and is the same in intensity as if that resolved force alone acted on the particle at rest.*

179) [Parkinson 1863], pp.171-172.

原文：
When a particle is in motion under the action of any force, the acceleration of the particle

estimated in any assigned direction is wholly due to the force resolved in that direction,— and is wholly due to the force resolved in that direction,— and is the same in intensity as if that resolved force alone acted on the particle at rest.

180) [Parkinson 1863], p.176.

原文：
THIRD LAW OF MOTION.
42. *When a force or pressure acts on a particle, the moving force on the particle is proportional to the force or pressure acting upon it.*
That is, if P, P' be two forces measured statically (viz. by the weights they would respectively support) acting on two particles whose masses are m, m', and if f, f' be the consequent accelerations of the two particles, then

$$P : P' \;::\; mf : m'f',$$
$$\text{or} \quad P \propto mf.$$

Since our units of force, mass, and acceleration are arbitrary, we may for convenience make $P' = 1, f' = 1, m' = 1$, and we shall then obtain $P = mf$. In other words, if we take our unit of mass to be such that a unit of force acting upon it would produce in it a unit of acceleration, then *referred to these units* the number expressing the force will be equal to the product of the numbers which express the mass and acceleration.

181) [Todhunter 1874], v.

原文：
Some of these exapmple are original, and others have been selected from College and University Examination papers.

引用文献および参考文献

[anonymous 1853] anonymous (The Committee of General Literature and Education), *The Elements of Natural Philosophy. Vol. I. Elementary Statics and Dynamics* (London: Society for Promoting Christian Knowledge, 1853).

[Baker 1851] Thomas Baker, *The Principles and Practice of Statics and Dynamics, Embracing a Clear Development of Hydrostatics, Hydrodynamics, and Pneumatics: with Central Forces and Super-Elevation of Exterior Rail for the Use of Schools and Private Students* (London: John Weale, 1851).

[Bartlett 1853] William Holms Chambers Bartlett, *Elements of Analytical Mechanics*(NewYork, 1853).

[Becher 1980] H. Becher, 'William Whewell and Cambridge mathematics',*Historical Studies in the Physical Sciences*, **11**(1980), pp.1-48.

[Belanger 1847] J. B. Belanger, *Cours de Mécanique, ou Résumé de Leçns sur la Dynamique, la Statique, et Leurs Applications a L'art de L'ingénieur* (Paris, 1847).

[Blair 1826] David Blair, *A Grammar of Natural and Experimental Philosophy: including physics, dynamics, mechanics, hydrostatics, pneumatics, acoustics, optics, astronomy, electricity, galvanism, magnetism, according to the latest discoveries : with one hundred engravings on wood* Eighth Americam ,From the Twelfth London Edition, Improved and Enlarged(Hartford, 1826).

[Blewster 1830] David Blewster, *The Edinburgh Encyclopædia* Volume VIII. (Edinburgh, 1830).

[Boucharlat 1836] Jean-Louis Boucharlat, *Elementary Treatise on Mechanics. Translated from the French of M. Boucharlat with Additions and Emendations Desingned to Adapt it to the use of the Cadets of the U. S. Military Academy by Edward H. Courtenay* (New York: Published by Harper & Brothers, 1836).

[Brown and Stratton 1897] James D. Brown and Stephen S. Stratton, *British Musical Biography; a dictionary of musical artists, authors, and composers born in Britain and its colonies*(Birmingham, S.S. Stratton, 1897) ／マイク・モラスキー

編『イギリス人名資料事典』第 6 巻（日本図書センター 2004）所収.

[Bridge 1814] Bewick Bridge, *A Treatise on Mechanics: Intended as an Introduction to the Study of Natural Philosophy* (Printed for T. Cadell and W. Davis, Strand, London, 1814).

[Butts 1965] R. E. Butts, 'Necessary truth in Whewell's Theory of Science', *American Philosophical Quarterly*, **2**(1965), pp.1-21.

[Chandrasekhar 1995] S.Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader* (Oxford Univ. Press, 1995)[中村誠太郎 監訳『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義　一般読者のために」（講談社 1998）].

[Cherriman 1858] John Bradford Cherriman, *An Elementary Treatise on Mechanics: Designed as a Text-book for the University Examinations for the Ordinary Degree of B.A.* (Toronto: Maclear & co., 1858).

[Clement 1982] J . Clement, 'Students' preconceptions in introductory mechanics', *Am. J. Phys.*, **50**(1982), pp.66-71.

[Cohen 1999] Isaac Newton, *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy,* trans. by I. Bernard Cohen and Anne Whitman with the assistance of Julia Budenz, preceded by A Guide to Newton's *Principia* by I. B. Cohen (Berkele-Los Angeles-London: University of California Press, 1999).

[Colioris 1844] Colioris, *Traité de la Mécanique des Corps Solides et du Calcul de L'effect des Machines.*Seconde édition. (Paris, 1844)

[Denison 1841] Joseph Denison, *A New Treatise on Mechanics, by the Author of "A New Introduction to the Mathematics," "A New Supplement to Euclid's Elements of Geometry,"&c. &c.* (London: Whittaker & Co. Ave Maria Lane., 1841).

[Duff 1921] A.Wilmer Duff, *A Text-Book of Physics* (Philadelphia P. Blakiston's son & co.1921).

[Dugas 1958] R. Dugas, *Mechanics in the seventeenth century* (1958).

[Earnshaw 1832] Samuel Earnshaw, *Dynamics, or an Elementary Treatise on Motion; with a Great Variety of Examples illustrative of the General Principles and Formulæ: to Which is Added, A Short Treatise on Attractions.* (Cambridge, 1832).

[Earnshaw 1844] Samuel Earnshaw, *Dynamics, or an Elementary Treatise on Motion; with a Great Variety of Examples illustrative of the General Principles and Formulæ: to Which is Added, A Short Treatise on Attractions*Third Edition, Revised (Cambridge, 1844).

[Emerson 1758] William Emerson, *The Principles of Mechanics. Explaing and Demonstrating The general Laws of Motion, The Laws of Gravity, Motion of Descending Bodies, Projectiles, Mechanical Powers, Pendulums, Centres of*

Gravity, &c. Strength and Stress of Timber, Hydrostatics, and Construction of Machines. A Work very necessary to be known, by all Gentleman, and Others, that desire to have an in sight into the Works of Nature and Art. And extremely useful to all Sorts of Artificers; particularly to Architects, Engineers, Shipwrights, Millwrights, Watchmakers, &c. or any that work in a Mechanical Way.(London:Printed for J. R. Richardson, 1758).

[Euler 1750] Leonhard Euler, 'Découverte d'un nouveau principe de Mécanique', *Mémoires de l'academie des sciences de Berlin*, **6**(1750(1752)), pp. 185-217., *Leonhardi Euleri Opera Omnia* (Lausanne), Ser.2, Vol.5, pp.81-108.

[Enfield 1811] William Enfield, *Institutes of Natural Philosopy, Theoretical and practical with some Collections; Change in the order of the Order of the Branches; and the Addition of An Appendix to the Astronomical Part, Selected from Mr Ewing's Practical Astronomy. by Samuel Webber* Second American Edition (Boston: Published by Thomas & Andrews, 1811).

[Farrar 1825] John Farrar, *An Elementary Treatise on Mechanics, Comprehending the Doctrine of Equilbrium and Motion, as Applied to Solids and Fluids, Chiefly Compiled, and Designed for the Use of the Students of the University at Cambridge, New England.*(Cambridge, N. E. Printed by Hilliard and metcalf, at the University Pres., 1825).

[Fobes 1963] R.J.Forbes and E.J. Dijksterhuis, *A History of Science and Technology* (Penguin books, 1963).

[Fuller 1937] Robert W. Fuller, Raymond B. Brownlee, *First Principles of Physics*, (Allyn and Bacon, 1937).

[Galbraith 1854] Joseph Allen Galbraith and Samuel Haughton, *Manual of Mechanics* Second and Improved Edition. (London: Longman, Brown, Green, and Longmans., 1854).

[Goodwin 1851] Harvey Goodwin, *Elementary Mechanics Designed Chiefly for the Use of Schools. Part I. Statics.* (Cambridge: John Deighton. London: Simpkin, Marshall & Co., and George Bell. Liverpool: Deighton & Laughton., 1851).

[Goldstein 1980] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics* Second Edition.(Adison-Wesley, 1980).

[Grattan-Guiness 1985] I.Grattan-Guiness, 'Mathematics and mathematical Physics from Cambridge, 1815-40: a survey of the achievements and of the French influences', *Wranglers and Physicist*, (Manchester University Press 1985), pp.84-111.

[Green 1969] V.H.H. Green, *The Universities* British Institutions Series (Pelican Books, 1969)[安原義仁，成定薫 訳『イギリスの大学 その歴史と生態』(法政大学出版局 1994)].

[Gregory 1815] Olinthus Gregory, *A treatise of Mechanics : Theoretical, Practical,* *and Descriptive, Vol.1. Containing The Theory of Statics, Dynamics, Hydrostatics, Hydrodynamics, and Pneumatics.* The Third Edition, Corrected and Improved. (London: printed for F. C. and J.Rivington, etc., 1815).

[Gross 1983] D.Gross, W.Hauger, J. Schröder and W.A.Wall, *Technische Mechanik Band3: Kinetik* (Springer, 1983-2006).

[Gross 1876] E.J.Gross, *An Elementary Treatise on Kinematics and Kinetics* (Rvingstons, 1876).

[Griffin 1847] William Nathaniel Griffin, *A Treatise on the Motion of a Rigid Body* (Cambridge, 1847).

[Halliday 2002] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, *Fundamentals of Physics 6th edition* (john wiley & Sons, inc., 2002)[ハリディ・レズニク『物理学の基礎 1 力学』(培風館 2002), 野崎光昭 監訳].

[Halloun 1985a] I. Halloun and D. Hestenes, 'The Initial Knowledge State of College Physics Students', *Am.J.Phys.*,**53**(1985), pp.1043-1055.

[Halloun 1985b] I. Halloun and D. Hestenes, 'Common Sense Concepts about Motion', *Am. J. Phys.*, **53**(1985), pp.1056-1065.

[Haris 1833] W. Harris, J. A. Stewart, C. Butler, and J. H. Hinton, *The Oxford Encyclopædia Or Dictionary of Arts, Sciences, and general Literature.*Vol. II.(Oxford, 1833).

[Hart 1847] Andrew Searle Hart, *An Elementary Treatise on Mechanics* Second Edition, enlarged. (Dublin; James McGlashan, 1847).

[Harman 1982] P.M.Harman, *Energy,Force,and Matter*(Cambridge University press 1982)[杉山滋郎訳『物理学の誕生』(朝倉書店 1991)].

[Harman 1985a] P.M.Harman, 'Introduction', *Wranglers and Physicists Studies on Cambridge mathematical physics in the nineteenth century* (Manchester University Press, 1985).

[Harman 1985b] P.M.Harman, 'The natural philosophy of James Clerk Maxwell', *Wranglers and Physicist*, (Manchester University Press, 1985), pp.202-224.

[Harman 1988] P.M.Harman, 'Newton to Maxwell: The Principia and British Physics', *Notes and Records of the Royal Society of London*, **42**(1988), pp.75-96.

[Harman 1995] P.M.Harman, *The scientific letters and papers of JAMES CLERK MAXWELL Volume II 1862-1873*(1995).

[Harman 1998] P.M.Harman, *The Natural Philosophy of James Clerk Maxwell*, (Cambridge University Press, 1998).

[Hestenes 1992] D. Hestenes, M.Wells, and G. Swackhamer, 'Force concept Inventory', *The Physics Teacher* ,**30**(1992), pp.141-158.

[Holzner 2007] Steven Holzner, *Physik für Dummies* (WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.KGaA, 2007).

[Holbrow 1999] Charles H. Holbrow, 'Archaeology of a Bookstack: Some Major Introductory Physics Texts of the Last 150 Years', *Physics Today* **52**(1999), pp.50-56.[板倉聖宣，塚本浩司訳「書架の考古学—過去 150 年の主要な基礎物理学教科書」『パリティ』(丸善 2000)，**14**,No.12, pp.12-21].

[Jackson 1827] Thomas Jackson, *Elements of Theoretical Mechanics: Being the Substance of a Course of Lectures on Statics and Dynamics* (Edinburgh: Printed for W. & D. Laing and Longman, Rees, Orme, Brown, & Green, London, 1827).

[Jackson 1852] Isaac Wilber Jackson, *An Elementary Treatise on Mechanics* (Albany: Published by Gray, Sprague & co., 1852).

[Laplace 1814] Pierre Simon Laplace, *Treatise upon Analytical Mechanics; being the first book of the Mécanique céleste of P.S. Laplace, Member of the Institute and of the Bureau of Longitude of Frace, &c., &c. Translated and elucidated with explanatory notes by The Rev. John Toplis.*(London: Longmans & Brown Co., 1814)

[Laplace 1821] Pierre Simon Laplace, Thomas Young, *Elementary Illustrations of the Celestial Mechanics of Laplace Part the First, comprehending the First Book*(London: Printed for John Murray ,1821).

[Lightman 2007] Bernard Lightman, *Victorian Popularizers of Science: Designing Nature for New Audience* (Chicago: University of Chicago Press, 2007).

[Loney 1891] Loney, *A Treatise on Elementary Dynamics* (Cambridge at the University Press, 1891).

[Losee 1972] John Price Losee, *A Historical Introduction to the Philosophy of Science*(Oxford University Press, 1972).

[Love 1897] Love, *Theoretical Mechanics,an elementary treatise on the Principle of Dynamics with applications and numerous examples* (1897).

[Lunn 1859] John Robert Lunn, *Of Motion. An Elementary Treatise* (Cambridge: Deighton, Bell, and Co., 1859).

[Mach 1883] Ernst Mach, *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung* (1883)[青木一郎訳『マッハ 力学の発展とその歴史的批判的考察』(内田老鶴圃 1931) ／岩野秀明訳『マッハ・力学史—古典力学の発展と批判』(公輪社 1976，ちくま学芸文庫 2006) ／伏見譲訳『マッハ力学—力学の批判的発展史』(講談社 1869)].

[Marrat 1810] William Marrat, *An Introduction to the Theory and Practice of Mechanics: In Five Books, for the Use of Schools, Illustrated by Examples*(Boston: Printed and sold by J. Hellaby; Sold also by Lackington, Allen, and co. London, 1810).

[Maxwell 1870] J.Clerk Maxwell, *Theory of Heat* (Longman, Green, 1870).

[Maxwell 1873] J.C.Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (1873).

[Maxwell 1876] J. C. Maxwell, *Matter and Motion* (Dover reprint edition,

1876,1991)[一戸直蔵 訳『マックスエル物理學原論』(大鐙閣 1917) ／三石巖・田中一 訳『物質と運動』(学術図書出版社 1950)].

[Millburn 1976] J.R.Millburn, *Benjamin Martin—Author, Instrument-maker, and 'Courtry Showman'*, Noordhoff International Pub.(1976).

[Millburn 1988] J.R.Millburn, *Wheelwright of the Heavens—The Life & work of James Ferguson, F.R.S.*, Vade-Mecum Press(1988).

[Morin 1860] Arthur Jules Morin, *Fundamental Ideas of Mechanics and Experimental Data Revised, Translated, and Reduced to English Units of Measure by Joseph Benett* (New York: D. Appleton and Company, 1860).

[Motte 1729] Motte's translation revised by Cajori, *Sir Issac Newton's Mathematical principles of natural philosophy and his system of the world.* (University of California press Berkeley and Los Angeles,1962(original 1729)).

[Newth 1850] Samuel Newth, *The Elements of Statics, Dynamics, and Hydrostatics, with an Appendix on the Laws of Light, the Formation of Images by Lenses, and the Nature of Sound.* (London: Taylor, Walton, and Maberly, 1850).

[Newton 1687] Issac Newton, *Phiiosophiae Naturalis Principia Mathematica.* (Londini, 1687).

[Parkinson 1863] Stephen Parkinson, *An Elementary Treatise on Mechanics for the Use of the Junior Classes at the University and the Higher Classes in Schools. with A Collection of Examples* Third Edition Revised (London: Macmillan and co., 1863).

[Parkinson 1874] Stephen Parkinson, *An Elementary Treatise on Mechanics for the Use of the Junior Classes at the University and the Higher Classes in Schools. with A Collection of Examples* Fifth Edition Revised (London: Macmillan and co., 1874).

[Perry 1898] John Perry, *Applied Mechanics* (Cassell and Company, 1898).

[Peirce 1855] Benjamin Peirce, *Physical and Celestial Mechanics* (Boston: Little, Brown and Company, 1855)

[Phear 1850] John Budd Phear, *Elementary mechanics* (Cambridge; Macmillan and co., 1850).

[Poisson 1842] Siméon-Denis Poisson, *A Treatise of Mechanics, Translated from the French, and Elucidated with Explanatory Notes by H. H. Harte.*in Two Volumes. Vol.I, (London: Longman and co. Dublin: A Miliken; and Hodges and Smith, 1842).

[Potter 1846] Richard Potter, *An Elementary Treatise on Mechanics. For the Use of Junior University Students.* (London: Taylor and Walton, 1846).

[Pratt 1842] John Henry Pratt, *The Mathematical Principles of Mechanical Philosophy and Their Application to Elementary Mechanics and Architecture, but chifly* *to the Theory of Universal Gravitation. Second Edition, revised and improved.* (Cambridge: J, & J. J. Deighton, Cambridge; etc., 1842).

[Raman 1972] V.V.Raman, 'Where Credit is Due; The Second Law of Motion and Newton's Equations', *The Physics Teacher*, **10**(1972), pp.136-137, 1972.

[Renwick 1832] James Renwick, *The Elements of Mechanics* (Philadelphia: Carey & Lea, Chesnut-Street., 1832).

[Sandeman 1850] Archibald Sandeman, *A Treatise on the Motion of a Single Particle and of Two Particles Acting on One Another* (Cambridge, 1850).

[Stafford 1994] Barbara Maria Stafford, *Artful Science*(MIT Press., 1994)[高山宏訳『アートフル・サイエンス』(産業図書 1997)].

[Smith 1855] Augustus William Smith, *An Elementary Treatise on Mechanics: Embracing the Theory of Statics and Dynamics, and its Application to Solids and Fluids. Prepared for the Undergraduate Course in the Wesleyan University* (New York: Harper &Brothers, Publishers, 1855).

[Smith and Wise 1989] Crosbie Smith ,and M.Norton Wise, *Energy and Empire* (Cambridge, 1989).

[Séverine 2006] Séverine Bagard, Nicolas Simon, *Physique—Visa pour la Pépa*(Dunod, Paris,2006).

[Tait 1856] Peter Guthrie Tait , and William John Steele, *Treatise on the Dynamics of a Particle*(Cambridge : Macmillan and Co., 1856).

[Tait 1865] Peter Guthrie Tait, and William John Steele, *A Treatise on the Dynamics of a Particle with numerous examples* (Cambridge and London : Macmillan and co., 1865).

[Tate 1853] Thomas Tate, *The Principles of Mechanical Philosophy Applied to Industrial Mechanics: forming a sequel to author's "Exercises on Mechanics and Natural Philosophy"* (London: Longman, Brown, Green, and Longmans., 1853)

[Thomson 1867] William Thomson and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy. vol. 1.* (Oxford : Claredon Press, 1867).

[Todhunter 1874] Isaac Todhunter, *Mechanics for Beginners, with numerous examples*(London: Macmillan and co., 1874).

[Truesdell 1960] C. Truesdell, 'A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason', *Archive for History of Exact Sciences*,**1**(1960), pp.4-36.

[Tsukamoto 2002] Koji Tsukamoto, Kiyonobu Itakura, and Makoto Kano, 'Mechanics Demonstrated with the Use of Darts', *International Newsletter on Physics Education* **44**(2002), International Commission on Physics Education, pp.7-10.

[Tsukamoto 2008] Koji Tsukamoto, Masanori Uchino, 'The Blowgun Demonstration Experiment', *The Physics Teacher*,**46**(2008), pp.334-336.

[Truner 1990] Gerard L'E Turner, *Scientific Instruments and Experimental Philosophy 1550-1850*(VARIORUM, 1990).

[Twisden 1860] John Francis Twisden, *Elementary Examples in Practical Mechanics Comprising Copious Explanations and Proofs of the Fundamental Propositions* (London: Longman, Green, Longman, and Roberts, 1860).

[Walton 1842] William Walton, *A collection of problems in illustration of the principles of Theoretical Mechanics* (Cambridge: W. P. Grant, 1842).

[Warr 1851] George Finden Warr, *Dynamics, Construction of Machinery, Equilibrium of Structures and the Strength of Materials* (London: Robert Baldwin, 1851).

[Whewell 1819] William Whewell, *An Elementary Treatise on Mechanics. Vol.I.Containing Statics and part of Dynamics* (Cambridge, 1819).

[Whewell 1828] Wlliam Whewell, 'On the Principle of Dynamics as stated by French writers', *Edinburgh Journal of Science*, **8**(1828), 27-38.

[Whewell 1823] William Whewell, *A Treatise on Dynamics Containing a Considerable Collection of Mechanical Problems*(Cambridge: J. Deighton; London: G. & W.B. Whittaker, 1823).

[Whewell 1832a] William Whewell, *An Introduction of Dynamics, Containing The Laws of Motion and The First Three Section of The Principia*(Cambridge: Printed by John Smith Printer to the University; for J. and J. J. Deighton; and Whittaker, Trecher, & Arnot, London., 1832).

[Whewell 1832b] William Whewell, *On the Free Motion of Points, and on Universal Gravitation, Including the Principal Propositions of Books I. and III. of the Principia; the First Part of A Treatise on Dynamics* (Cambridge, 1832).

[Whewell 1832c] Willam Whewell, *First Principles of Mechanics: With Historical and Practical Illustrations* (Cambridge, 1832).

[Whewell 1834a] William Whewell, *On the Motion of Points Constrained and Resisted, and on the Motion of a Rigid Body. The Second Part of a New Edition of A treatise on Dynamics* (Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John Smith, Printer to the University. for J. J. Deighton, Trinity Street: and Whittaker & co. London., 1834).

[Wewell 1834b] William Whewell, 'On the Nature of the Truth of the Laws of Motion', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **5**, Pt.II (1834). Reprinted as an appendix in The Philosophy of the Inductive Sciences, 2d. ed. (London, 1847), Vol.I.

[Whewell 1836] William Whewell, *On the Free Motion of Points, and on Universal Gravitation, Including the Principal Propositions of Books I. and III. of the Principia; the First Part of A Treatise on Dynamics*Third Edition. (Cambridge:

Printed at the Pitt Press, by John Smith, Printer to the University. for J. J. Deighton, Trinity Street: and Whittaker & co. London., 1836).

[Whewell 1840] William Whewell, *The Philosophy of The Inductive Sciences* (London:John W. Parker, 1840).

[Whewell 1847] William Whewell, *An Elementary Treatise on Mechanics: Intended for the Use of Colleges and Universities* The Seventh Edition, with Extensive Corrections and Additions (Cambridge: Deightons; and Whittaker & co. London., 1847).

[Wilson 1850] William Parkinson Wilson, *A Treatise on Dynamics* (Cambridge: Macmillan and Co., London: George Bell. Dublin: Hodges and Smith., 1850).

[Wilson 1985] David B. Wilson, 'The Educational Matrix: Physics Education at Early-Victorian Cambridge, Edinburgh and Glasgow Universities', *Wranglers and Physicists Studies on Cambridge mathematical physics in the nineteenth century* (Manchester University Press, 1985).

[Willis 1841] Robert Willis, *Principles of Mechanism, Designed for the Use of Students in the Universities, and for Engineering Students Generally* (London: John W. Parker, 1841).

[Wood 1812] James Wood, *The Principle of Mechanics: Designed for the Use of Students in the University* The Fifth Edition (Cambridge, 1812).

[Wood 1815] James Wood, *The Elements of Algebra: Designed for the Use of the Students in the University*6th Edition, (Cambridge 1815).

[Young 1834] John Radford Young, Revised and Corrected by John D. Williams, *The Elements of Mechanics, Comprehending Statics and Dynamics. with a Copious Collection of Mechanical Problems. intended for the Use of Mathematical Students in Schools and Universities. with Numerous Plates* (Philadelphia, 1834).

[Ziwet 1898] Alexander Ziwet, *An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Part I. Kinematics.* (London; Macmillan, 1898).

[Ziwet 1897] Alexander Ziwet, *An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Part II. Introduction to Dynamics; Statics.* (London; Macmillan, 1897).

[Ziwet 1894] Alexander Ziwet, *An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Part III. Kinetics.* (London; Macmillan, 1894).

[飯盛 1879] 飯盛挺造編訳『物理学』上編（島村利助・丸屋善七，明治 12 年 5 月 22 日版権免許，同年 12 月第一版発行）．

[板倉 1961] 板倉聖宣「ニュートンの質量の定義とガリレイ・ニュートンの原子論」『科学史研究』(岩波書店）**59**, 29-31, 1961

[板倉 1965] 板倉聖宣・久保舜一「物理学の基礎的な考え方の理解の実情——日本の高校生・大学生とフランスのリセの生徒を調査した結果」『国立教育研究所紀要第 46 集』（国立教育研究所 1965 年 8 月）．

[板倉 1972] 板倉聖宣『ぼくらはガリレオ』(岩波書店 1972).

[板倉 1974] 板倉聖宣『仮説実験授業—〈ばねと力〉によるその具体化』（仮説社 1974）.

[板倉 1980] 板倉聖宣「知的エンターテイメントとしての科学教育の伝統」『月刊民放』1980 年 5 月号（民間放送連盟研究所 1980）初出／『私の発想法』（仮説社 1995).

[板倉 1987] 板倉聖宣『かわりだねの科学者たち』（仮説社 1987).

[板倉 1992] 板倉聖宣『17〜19 世紀に於ける世界の物理学の概説書・啓蒙書・教科書の系譜：平成 3 年度科学研究費補助金 (一般研究 B) 研究成果報告書』（国立教育研究所 1992）.

[板倉 2000] 板倉聖宣『科学と科学教育の源流』（仮説社 2000).

[板倉 2002] 板倉聖宣・佐藤重範「力と運動の原理」(仮説実験授業研究会内部資料（未公刊） 2002).

[板倉 2005] 板倉聖宣・塩野広次『吹き矢の力学』(仮説社 2005).

[伊藤 2000] 伊藤和行「古典力学における運動法則の歴史性—ニュートンの第二法則を巡って—」『哲學研究』京都哲學會〔編〕, **570**, 53-78(2000)

[伊藤 2006] 伊藤和行「オイラーの運動方程式」『科学哲学科学史研究』, 第 1 号 (2006), pp.153-169.

[川崎 1990] 川崎勝「化学という営為をめぐって」『科学史・科学哲学』**9**(1990), pp.35-45.

[川島 1987] 川島慶子『エミリー・デュ・シャトレとマリー・ラヴワジエ—18 世紀フランスのジェンダーと科学 』（東京大学出版会 2005）.

[河辺 1971a] 河辺六男責任編集『世界の名著 26 ニュートン 自然哲学の数学的諸原理』（中央公論社 1971）.

[河辺 1971b] 湯川秀樹，井上健，河辺六男「世界の名著付録 57 ニュートンの虚像と実像〈鼎談〉」（中央公論社 1971）.

[菅野 1983] 菅野礼司『物理学の論理と方法（上）』（大月書店 1983).

[木村 1890] 木村駿吉著『新編物理学・上巻』（内田老鶴圃，明治 23 年 10 月 5 日初版発行。明治 28.5/15,3 訂 10 版刊）.

[グリーン 1994] ヴィヴィアン.H.H. グリーン『イギリスの大学 その歴史と生態』(法政大学出版局 1994）, 安原義仁，成定薫 訳.

[ゴールドスタイン 1983] ゴールドスタイン『新版古典力学（上）』（吉岡書店 1983)，瀬川富士，矢野忠，江沢康生 訳.

[サイモン 1977] B. サイモン『イギリス教育史 I』（亜紀書房 1977）.

[薩摩 1869]『薩摩辞書』(1869).

[佐藤 2006] 佐藤英二『近代日本の数学教育』（東京大学出版会 2006）.

[スタフォード 1997] バーバラ・M・スタフォード『アートフル・サイエンス』（産業図書 1997), 高山宏訳.

[高橋 2003] 高橋秀裕『ニュートン 流率法の変容』（東京大学出版会 2003）.

[田中 2008] 田中啓介・植松秀穂「教科書に見る物理学用語の調査」『物理学史ノート』（物理学史通信刊行会編 2008）, pp. 59-72.

[ダニエル 1892] Alfred Daniel『(物理学参考書) 物理学原論』(1892), 木村駿吉訳.

[田村 1948] 田村松平『大物理学者』(弘文堂書房 1948).

[チャンドラセカール 1998] S. チャンドラセカール『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義　一般読者のために」(講談社 1998), 中村誠太郎 監訳.

[塚本 2005] 塚本浩司・樋口幸江・加納誠,「大学生の力学基礎概念」,『日本物理学会誌』, 日本物理学会,Vol.**60**(2005), No.4, pp.294-297.

[長尾 2001] 長尾伸一『ニュートン主義とスコットランド啓蒙』(名古屋大学出版会 2001).

[永田 2004] 永田英治『たのしい講座を開いた科学者たち―科学と科学教育の源流』(星の環会 2004).

[中村 1911] 中村誠二校閲・田辺尚雄著『(実用) 大物理学講義・第一巻 (力学・物性論・音響学)』(内田老鶴圃 明治 44 年 5/18 日刊).

[中村 2007] 中村英二他,『高等学校 改訂物理 I』(第一学習社 2007).

[野村 2007] 野村恒彦『チャールズ・バベッジの数学記号に関する研究』(神戸大学総合人間科学研究科 博士論文 2007).

[ハーマン 1991] P.M. ハーマン『物理学の誕生』(朝倉書店 1991 年), 杉山滋郎訳.

[ハリデイ他 2002] ハリディ・レズニク『物理学の基礎 1 力学』(培風館 2002), 野崎光昭監訳.

[物理学訳語会 1888] 物理学訳語会『物理学述語対訳字書』(明治 21 年刊).

[堀 1862] 堀龍之助『英和対訳袖珍辞書』(1862).

[堀内 1997] 堀内達夫『フランス技術教育成立史の研究』(多賀出版 1997).

[ホルブロウ 2000] チャールズ・ホルブロウ「書架の考古学—過去 150 年の主要な基礎物理学教科書」『パリティ』, 丸善, **14**(2000),No.12, pp.12-21, 板倉聖宣, 塚本浩司訳.

[マクスウェル 1917] マックスエル『マックスエル物理學原論』(大鐙閣 1917), 一戸直蔵訳.

[マクスウェル 1950] マクスウェル『物質と運動』(学術図書出版社 1950), 三石巌・田中一訳.

[マッハ 1931] エルンスト・マッハ『マッハ 力学の発展とその歴史的批判的考察』(内田老鶴圃 1931), 青木一郎訳.

[マッハ 1976] エルンスト・マッハ『マッハ・力学史—古典力学の発展と批判』(公論社 1976, ちくま学芸文庫 2006), 岩野秀明訳.

[マッハ 1969] エルンスト・マッハ『マッハ力学—力学の批判的発展史』(講談社 1969), 伏見譲訳.

[三守 1893] 三守守著『普通物理学・上巻』(敬業者 明治 26 年 9 月 23 日初版発行).

[森 1905] 森総之助『(実験及び理論) 物理学——重学及び物性論』(1905).

[森 1908] 森総之助『(最新) 物理学講義』(1908).

[森 1913] 森総之助『(中等) 物理学教科書』(1913).

[森 1915] 森総之助『力学 A Treatise on Dynamics』(1915).

[文部省 1948] 文部省『高等学校の学習指導要項 (試案)』(1948).

[山本 1997] 山本義隆『古典力学の形成 ニュートンからラグランジュへ』（日本評論社 1997）.

[吉田 1982] 吉田忠「18 世紀オランダにおける科学の大衆化と蘭学」吉田忠編『東アジアの科学』（勁草書房 1982）, pp.50-108.

[吉仲 1982] 吉仲正和『ニュートン力学の誕生』（サイエンス社 1982）.

[リッテル 1874] リッテル述／平岡盛三郎訳『物理日記』(明治 7(1874) 年 3 月序).

[ロゼー 1974] J.P. ロゼー『科学哲学の歴史』（紀伊國屋書店 1974 年）, 常石敬一訳.

[独和 2000]『独和大辞典第 2 版コンパクト版』（小学館 2000）.

[物象 1944]『物象 (中学校用） 4・第一類』（中等学校教科書（株） 1944）.

[英和 1996]『リーダーズ＋プラス (EPWING CD-ROM 版)』（研究社 1996）.

[PSSC 1669] 山内恭彦ほか監訳『PSSC 物理・第 2 版』（岩波書店 1967）.