Connection problem for confluent hypergeometric differential equations

岸岡，広幸

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2010-03-25
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲4900
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1004900

氏　　名	岸岡　広幸
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学 位 記 番 号	博い第 4900 号
学位授与の 要 件	学位規則第 5 条第 1 項該当
学位授与の 日 付	平成 22 年 3 月 25 日

【 学位論文題目 】

Connection problem for confluent hypergeometric differential equations （合流型超幾何微分方程式の接続問題）

審 査 委 員

主 査	教 授	野海 正俊
	教 授	山田 泰彦
	教 授	高山 信毅
	青山学院大学教授	高野 恭一

In this paper we investigate the conection problem for *confluent generalized hypergeometric differential equations* ${}_pE_q[z]$, with a regular singular point at $z=0$ and an irregular singular point at $z=\infty$. We give in particular a complete description of the Stokes coefficients around $z=\infty$ as well as the two-point connection coefficients from $z=\infty$ to $z=0$. Following the ideas of

G.D. Birkhoff: Singular points of ordinary linear differential equations,
Trans. Amer. Math. Soc. **10** (1909), 436–470.

and

M. Kohno: *Global analysis in linear diffential equations*, Kulwer academic publishers, 1999. ,

we use the Laplace and the Mellin transformations as main tools to analyze these connection problems.

This paper is organized as follows. In Section 1, we introduce the confluent (generalized) hypergeometric differential equation

$${}_pE_q[z]\ :\ \{\vartheta_z(\vartheta_z+\beta_1-1)\cdots(\vartheta_z+\beta_q-1)-z(\vartheta_z+\alpha_1)\cdots(\vartheta_z+\alpha_p)\}f(z)=0,$$

and transform ${}_pE_q[z]$ by the change of variables $z=\zeta^r$ $(r=q+1-p)$ into another differential equation

$${}_pE'_q[\zeta]\ :\ [\vartheta_\zeta\{\vartheta_\zeta+r(\beta_1-1)\}\cdots\{\vartheta_\zeta+r(\beta_q-1)\}-r^r\zeta^r(\vartheta_\zeta+r\alpha_1)\cdots(\vartheta_\zeta+r\alpha_p)]\varphi(\zeta)=0$$

which has a regular singular point at $\zeta=0$ and an irregular singular point of Poincaré rank one at $\zeta=\infty$. We also describe the singular directions and the proper sectors around $\zeta=\infty$ for ${}_pE'_q[\zeta]$. By the theories of H. Poincaré and M. Hukuhara discussed in

M. Hukuhara: Sur les singuliers des équations différentielles linéaires II,
J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **5** (1937), 123–166.

and

M. Hukuhara: Sur les singuliers des équations différentielles linéaires III,
Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **2** (1941), 125–137. ,

on each proper sector we can specify a fundamental system of holomorphic solutions which are asymptotically expanded to the canonical fundamental system of formal solutions. From Section 1 through Section 6 we consider the case where $p\geq 1$; the case $p=0$ will be discussed separately in Section 7. In Section 2, we apply the Mellin transformation to the connection problem for ${}_pE'_q[\zeta]$ from $\zeta=0$ to $\zeta=\infty$ in each sector. We construct the Mellin transform of each solution $\zeta^{1-\beta}\varphi(\zeta)$ at $\zeta=0$ of ${}_pE'_q[\zeta]$ as

$$a_k(s)=-\frac{r\sin(\pi s)}{\pi e^{\pi\sqrt{-1}s}}\int e^{-re(k/r)\zeta}\varphi(\zeta)\zeta^{-rs-1}d\zeta,$$

and through the inverse transform such that

$$\Phi_k(\zeta)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int a_k(s)\zeta^{rs}\frac{\pi e^{\pi\sqrt{-1}s}}{\sin(\pi s)}ds$$

we obtain its asymptotic expansion as $\zeta\to\infty$ in the sector (Theorem 2.1). We additionally take the meromorphic function

$$a_0(s)=\prod_{j=1}^{p}\frac{\Gamma(\alpha_j+s)}{\Gamma(\alpha_j)}\prod_{i=0}^{q}\frac{\Gamma(\beta_i)}{\Gamma(\beta_i+s)},$$

and through the inverse Mellin transform of $a_0(s)$ such that

$$\Phi_0(\zeta)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int a_0(s)\zeta^{rs}\prod_{i=0}^{q}\left(\frac{\pi e^{\pi\sqrt{-1}s}}{\sin(\pi(\beta_i+s))}\right)ds$$

we obatin the asymptotic expansion as $\zeta\to\infty$ in the sector for a linear combination of solutions at $\zeta=0$ of ${}_pE'_q[\zeta]$ (Therorem 2.2). From Section 3 on, we apply the Laplace transformation to the connection problem

for ${}_pE'_q[\zeta]$ from $\zeta=\infty$ to $\zeta=0$ and the study of Stokes coefficients for ${}_pE'_q[\zeta]$ around $\zeta=\infty$. By the Laplace transformation our differential equation ${}_pE'_q[\zeta]$ such that

$$\varphi(\zeta)=\int e^{-\zeta x}\psi(x)dx$$

is transformed into a Fuchsian differential equation

$$\begin{aligned}{}_{q+1}\mathscr{E}'_q[x]\ :\ \Big[&\vartheta_x(\vartheta_x-1)\cdots\{\vartheta_x-(r-1)\}(\vartheta_x+1-r\alpha_1)\cdots(\vartheta_x+1-r\alpha_p)\\&-\left(-\frac{x}{r}\right)^r(\vartheta_x+1)\{\vartheta_x+1+r(1-\beta_1)\}\cdots\{\vartheta_x+1+r(1-\beta_q)\}\Big]\psi(x)=0.\end{aligned}$$

It can be transformed further by the change of variables $\xi=(-x/r)^r$ into a *generalized hypergeometric differential equation*

$$\begin{aligned}{}_{q+1}\mathscr{E}_q[\xi]\ :\ \Big[&\vartheta_\xi\left(\vartheta_\xi-\frac{1}{r}\right)\cdots\left(\vartheta_\xi-\frac{r-1}{r}\right)\left(\vartheta_\xi+\frac{1}{r}-\alpha_1\right)\cdots\left(\vartheta_\xi+\frac{1}{r}-\alpha_p\right)\\&-\xi\left(\vartheta_\xi+\frac{1}{r}\right)\left(\vartheta_\xi+\frac{1}{r}+1-\beta_1\right)\cdots\left(\vartheta_\xi+\frac{1}{r}+1-\beta_q\right)\Big]g(\xi)=0,\end{aligned}$$

for which the connection problem has been studied by

N.E. Nørlund: Hypergeometric function , Acta Math. **94** (1955), 289–349. ,

K. Okubo, K. Takano and S. Yoshida: A connection problem for the generalized hypergeometric equation,
Funkcial. Ekvac. **31** (1988), 483–495.

and

E. Winkler: Über die hypergeometrische differentiagleichung n^{ter} ordnung mit zwei endlichen singulären
punkten, Iaugural-Dissertation, München, 1931. .

After constructing the holomorphic solutions of ${}_pE'_q[\zeta]$ on each proper sector by the Laplace integrals, from the connection formulas for the generalized hypergeometric differential equation we derive the two-point connection coefficients in Section 5 (Theorem 5.1) and the Stokes coefficients in Section 6 (Theorem 6.1) for ${}_pE'_q[\zeta]$.

(別紙 1)　　　　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	岸岡 広幸	
論文題目	Connection problem for confluent hypergeometric differential equations (合流型超幾何微分方程式の接続問題)	

審査委員 区分	職名	氏名
主査	教授	野海　正俊
副査	教授	山田　泰彦
副査	教授	高山　信毅
副査	教授(青山学院大学)	高野　恭一
副査		

要　旨

本論文は合流型の一般超幾何微分方程式の接続問題に関する研究である．

接続問題は，特異点をもつ常微分方程式において，各特異点の近傍で標準的に構成された解が解析接続によってどのように結びつけられるかを記述する問題であり，複素領域の常微分方程式の大域的理論の基本課題である．2 階の Gauss の超幾何微分方程式とその合流で得られる微分方程式の接続問題は，古典的によく研究されているが，高階の常微分方程式については，一般超幾何微分方程式のようにアクセサリパラメータを持たない確定特異点型常微分方程式の場合を除くと，接続係数が完全に決定されている例は殆どない．本論文は，不確定特異点をもつ微分方程式の典型的で重要な例である合流型一般超幾何微分方程式を対象として，Laplace 変換と Mellin 変換を利用して，その不確定特異点の周りの Stokes 係数，原点・無限遠点の 2 点接続係数を具体的に決定し記述したもので，学術的価値の高い研究論文である．

本論文の研究対象である合流型一般超幾何微分方程式

$$ {}_pE_q[z]:\quad [\vartheta_z(\vartheta_z+\beta_1-1)\cdots(\vartheta_z+\beta_q-1)-z(\vartheta_z+\alpha_1)\cdots(\vartheta_z+\alpha_p)]\,f(z)=0 $$

$(q\geq p)$ は，原点 $z=0$ に確定特異点, 無限遠点 $z=\infty$ に $1/r$ 級の不確定特異点をもつ (但し $r=q-p+1$)．本論文では，この微分方程式の構造を明確にする為に $z=\zeta^r$ なる変数変換で得られる微分方程式 ${}_pE'_q[\zeta]$ を主に考察している．こちらは $\zeta=0$ に確定特異点, $\zeta=\infty$ に 1 級の不確定特異点をもつ微分方程式である．第 1 節では，この ${}_pE'_q[\zeta]$ の不確定特異点 $\zeta=\infty$ の周りの特異方向及び固有角領域を具体的に記述し，福原理論により，各固有角領域で標準的な形式解に漸近展開される解析的な解が一意的に定まることを注意している．第 2 節は，Mellin 変換の方法を用いて ${}_pE'_q[\zeta]$ の $\zeta=0$ から $\zeta=\infty$ への 2 点接続問題を論じたもので，$\zeta=0$ での特性冪指数で指定される解に対し，各固有角領域の内部から ζ を無限遠に近づけるときの漸近展開の具体形を与えたものである．また，Mellin 変換を用いて原点側の解で，無限遠側で指数因子なしに漸近展開される解が構成できるという興味深い事実を示している．第 3 節から第 6 節は，Laplace 変換の方法を用いて，$\zeta=\infty$ から $\zeta=0$ への 2 点接続係数，及び不確定特異点 $\zeta=\infty$ の周りの Stokes 係数，即ち隣り合う固有角領域の間の接続係数を完全に決定したものである．${}_pE'_q[\zeta]$ に Laplace 変換を施すと確定特異点型の微分方程式 ${}_{q+1}\mathcal{E}'_q[x]$ が得られる．この方程式は $x=0,\infty$ 及び 半径 r の円周上に等間隔に並ぶ r 個の点 σ_k $(k=1,\ldots,r)$ に確定特異点をもつが, 変数変換 $\xi=(-x/r)^r$ を施すと，${}_{q+1}\mathcal{E}'_q[x]$ が (特別な) 一般超幾何微分方程式 ${}_{q+1}\mathcal{E}_q[\xi]$ に変換され, $\xi=0,1,\infty$ のみに確定特異点をもつ微分方程式となることが分かる．一般超幾何微分方程式 ${}_{q+1}\mathcal{E}_q[\xi]$ の接続問題について知られている結果から，${}_{q+1}\mathcal{E}'_q[x]$ の解の接続関係式を導くことができる．さらに Laplace 変換を経由すると，${}_{q+1}\mathcal{E}'_q[x]$ についての $\xi=\infty$ と $\xi=\sigma_k$ の間の接続関係式から ${}_pE'_q[\zeta]$ の $\zeta=\infty$ から $\zeta=0$ への 2 点接続係数が決定され (第 5 節)，${}_{q+1}\mathcal{E}'_q[x]$ の円周上の確定特異点 σ_k の間の接続係数から ${}_pE'_q[\zeta]$ の Stokes 係数が決定される (第 6 節)．以上の議論は $p\geq 1$ の場合であるが，$p=0$ の場合は事情がやや異なるため，結果のみを別個に纏めたのが最後の第 7 節である．

本研究は，不確定特異点をもつ高階の常微分方程式の重要な例である合流型一般超幾何微分方程式について，Laplace 変換及び Mellin 変換の方法を用いて Stokes 係数と 2 点接続係数についての完全な記述を与えたものであり，複素領域の常微分方程式の大域理論における重要な知見を得た価値ある集積である．よって，学位申請者 岸岡 広幸は，博士 (理学) の学位を得る資格があると認める．