Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-06-21

命題論理の充足可能性判定問題への符号化を用いた制約充足問題の解法に関する研究

丹生，智也

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
2012-03-25
(Date of Publication)
2014-01-15
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲5490
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1005490

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。

（別紙１）　　論文審査の結果の要旨

氏名	丹生 智也		
論文題目	命題論理の充足可能性判定問題への符号化を用いた制約充足問題の解法に関する研究		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	田村　直之
	副　査	教授	桔梗　宏孝
	副　査	教授	玉置　久
	副　査	准教授	番原　睦則
	副　査		印

要　　旨

制約充足問題 (CSP; Constraint Satisfaction Problem) は与えられた制約を満たす解を探索する問題であり，制約最適化問題 (COP; Constraint Optmization Problem) は制約を満たす解のうち与えられた目的関数に関する最適解を探索する問題である．人工知能分野等で生じる多くの組合せ問題は，制約充足問題あるいは制約最適化問題として定式化できる．以下では，制約充足問題および制約最適化問題をまとめて CSP と呼ぶ．

命題論理の充足可能性判定問題 (SAT 問題) は，与えられた命題論理式を真にする値割り当てが存在するか否かを判定する問題である．近年になって，SAT 問題を解くための非常に高速な SAT ソルバーが実現され，プランニング，ハードウェア検証，ソフトウェア検証，スケジューリング等の問題について，それらを SAT 問題に変換した後，SAT ソルバーに解かせることにより，元の問題に対する求解を実現する SAT 符号化 (SAT encoding) の研究が注目を集めている．

本研究は，CSP の SAT 符号化の新しい方法である**順序符号化** (order encoding) および**コンパクト順序符号化** (compact order encoding) を提案し，その性能を評価したものである．

「第 2 章 SAT と SAT ソルバー」，「第 3 章 制約充足問題」，「第 4 章 制約充足問題の SAT 符号化」において，既存の CSP の SAT 符号化方法である直接符号化 (de Kleer 89)，支持符号化 (Kasif 90)，対数符号化 (Iwama et al. 94)，対数支持符号化 (Gavanelli 07) について述べ，グラフ彩色問題をベンチマークとして比較を行うことで，それぞれの符号化法の利点・欠点を明らかにしている．この内容は学術論文「制約最適化問題と SAT 符号化」として公表されている．

「第 5 章 順序符号化」および「第 6 章 順序符号化の性能評価」では，整数の順序関係を用いて SAT 符号化を行う順序符号化 (order encoding) を提案し，その性能評価を行っている．特に順序符号化を用いた制約ソルバー Sugar は，国際制約ソルバー競技会の複数部門で 2 年連続優勝という優れた成績を収めている．またこの内容は 2 編の学術論文「SAT 変換に基づく制約ソルバーとその性能評価」，「SAT 符号化を用いた釣合い型不完備ブロック計画の構成」として公表されている．

「第 7 章 コンパクト順序符号化」および「第 8 章 コンパクト順序符号化の性能評価」では，コンパクト順序符号化 (compact order encoding) と呼ばれる全く新しい符号化を提案し，その性能評価を行っている．コンパクト順序符号化では，CSP の各整数変数を B 進数 ($B \geq 2$) で表現し，各桁を順序符号化で SAT 符号化する．すなわち，コンパクト順序符号化は，$B = 2$ の場合に対数符号化と同一，$B \geq d$ の場合に順序符号化と同一となり (d は整数変数の最大ドメインサイズ)，それらの符号化の一般化となっている．また，符号化で生成される SAT 問題のサイズは，順序符号化よりはるかに少なくなり，SAT 問題を解くために必要となるステップは，桁数に依存すると考えられるため，対数符号化よりも少なくなると予想される．したがってコンパクト順序符号化は既存の符号化の問題点を解決するものと評価できる．またこの内容は 3 編の国際会議論文「Towards a compact and efficient SAT-encoding of finite linear CSP」，「A compact and efficient SATencoding of finite domain CSP」，「Proposal of a compact and efficient SAT encoding using a numeral system of any base」として公表されている．

氏名	丹生 智也

以上のように，本研究は制約充足問題および制約最適化問題について，命題論理の充足可能性判定問題 (SAT) へ符号化し求解する手法を研究したものであり，制約充足問題および SAT について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める．よって，学位申請者の丹生智也は，博士（工学）の学位を得る資格があると認める．

(別紙様式 3)

論文内容の要旨

氏名　　丹生 智也

専攻　　情報知能学

論文題目

命題論理の充足可能性判定問題への符号化を用いた制約充足問題の解法に関する研究

指導教員　　田村 直之

要旨

制約充足問題 (Constraint Satisfaction Problems; **CSP**) は，変数の有限集合と各変数が取りうる値の集合 (ドメイン)，満たすべき条件が与えられたとき，条件を満たす変数への値割り当てを探索する問題である．また制約を満たす解のうち最適なものを求める問題を**制約最適化問題**(Constraint Optimization Problem; **COP**) という．スケジューリング問題やグラフ彩色問題をはじめとする多くの組み合わせ問題は CSP または COP として定式化できる．また 2005 年から国際 CSP ソルバー競技会が開催されており，制約ソルバーの高速化に関する研究が活発に行われている．

また命題論理式の充足可能性判定問題 (Boolean satisfiability testing; **SAT**) は，与えられた命題論理式を真にする値割り当てを探す組み合わせ問題であり，Cook により最初に NP 完全性が示された問題である．近年，監視リテラルや矛盾からの節学習をはじめとする SAT 求解の高速化技術が発展したことで，DPLL 手続きに基づく SAT ソルバーにより，実問題から得られる構造的な SAT 問題を高速に求解することが可能となった．これに伴い，有界モデル検査，プランニング，スケジューリング，自動テストパターン生成，ソフトウェア検証等の分野においては，問題を SAT に符号化し，高速な SAT ソルバーを用いて元の問題の解を探索する **SAT 型システム**が成功を収めている．特に，CSP や COP を解く SAT 型システムは **SAT 型制約ソルバー**と呼ばれ，活発に研究が行われている．

SAT 型制約ソルバーでは，SAT ソルバーの性能だけでなく，SAT への符号化法も同様に重要であることが知られている．CSP から SAT への符号化は直接符号化，支持符号化，対数符号化等数多く提案されているが，既存の符号化にはそれぞれ欠点がある．例えば，d を各変数のドメインサイズとすると，直接符号化と支持符号化では各 3 項制約が $O(d^3)$ 個の節に符号化されるため，ドメインサイズが 10^2 未満の小規模の問題にしか実用上適用できない．対数符号化は整数の表現に 2 進法を用いるため，制約を非常に少ない節数に符号化することができる (加算制約の場合は $\log d$ に比例)．しかし単位伝播によって最上位ビットでの範囲伝播しか実現できず，矛盾の検出のために桁数 $\log_2 d$ に比例する変数の値を決定する必要があるため，効率が悪いという問題がある．

本論文では DPLL 手続きに基づく系統的 SAT ソルバーを用いることを前提とし，既存の SAT 符号化の問題点を解決する以下の 2 つの SAT 符号化の提案を行う．

- **順序符号化**
  この符号化は，Crawford と Baker がジョブショップ・スケジューリング問題に適用した方法を CSP に適用可能なように一般化したものである．SAT ソルバーでの単位伝播が CSP ソルバーの範囲伝播に対応しており，直接符号化，支持符号化，対数符号化等の他の符号化と比較して，効率の良い求解が可能である．また，各 3 項制約は $O(d^2)$ 個の節に符号化されるため，ドメインサイズが 10^3 以下の小規模および中規模な問題に対しても適用可能である．
- **コンパクト順序符号化**

ドメインサイズが 10^2 以下から 10^7 までの広い範囲の問題へ適用可能かつ効率的であることを目指して設計した方法である．コンパクト順序符号化の基本アイデアは以下の 2 つである．

- 各整数変数を B 進法を用いて表す ($B \geq 2$)．すなわち，各整数変数 x を $m = \lceil \log_B d \rceil$ 桁の変数で表現する．
- 各桁を順序符号化を用いて SAT に符号化する．

したがって，コンパクト順序符号化は基底 $B = 2$ の場合には対数符号化と等価であり，$B \geq d$ の場合には順序符号化と等価となる．その意味で，コンパクト順序符号化は両方の符号化の一般化であるとみなせる．コンパクト順序符号化は，SAT ソルバーの単位伝播が最上位桁での範囲伝播に対応しているため，一般に対数符号化よりも効率が良い．また各整数を $m = \lceil \log_B d \rceil$ 桁で表すと，3 項制約 $z = x + y$ と $z = xy$ はそれぞれ $O(mB^2)$ 個と $O(mB^3 + m^2B^2)$ 個の節に符号化され，順序符号化よりもはるかに少なくなるため，ドメインサイズが 10^7 程度の大規模な問題に対しても適用可能である．

グラフ彩色問題による実験結果，順序符号化を採用した SAT 型制約ソルバー Sugar の 2008 年度の国際制約ソルバー競技会の結果，釣合い型不完備ブロック計画構成問題による実験結果等により，最先端の制約ソルバーと比較しても順序符号化を採用した SAT 型制約ソルバーが有効であることを示した．

また，コンパクト順序符号化の有効性を検証するため，様々なドメインサイズの問題による性能評価を行い，以下の結果が得られた．

- コンパクト順序符号化が，ドメインサイズが 10^2 未満の小規模な問題から，ドメインサイズが 10^7 程度の大規模な問題までの広い範囲の問題に対して適用可能であることを確認した．
- 順序符号化や既存の SAT 符号化，最先端の制約ソルバーである Mistral と choco がほとんど解くことのできない大規模な問題であっても，コンパクト順序符号化は平均的に高速な求解を行えることを確認した．

最後に，今回提案した順序符号化およびコンパクト順序符号化は既存の SAT 符号化の欠点を解消したものであり，これにより SAT 型システムの適用範囲をさらに広げることができると考えている．