The convergence of the exploration process for critical percolation on the k-out graph

太田, 陽喬

(Degree)
博士 (理学)
(Date of Degree)
2012-03-25
(Date of Publication)
2016-10-07
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲5572
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1005572

太田陽香 1

ランダムグラフ $G(n,p)$ とは，n 個の頂点について，各頂点間に対し一定の確率 p で独立に辺をつないで得られるグラフモデルのことである．$\mathcal{C}_j$ を j 番目に大きなサイズ（頂点数）を持つ連結成分，$|\mathcal{C}_j|$ を $\mathcal{C}_j$ のサイズとする．確率 p に対し，ランダムグラフはダブルジャンプと呼ばれる相転移を持ち，その臨界確率は $p_c = \frac{1}{n}$ である．つまり，$G(n,c/n)$ について，最大の連結成分 $\mathcal{C}_1$ のサイズ（頂点数）が，$c<1$ ならば $\log n$ のオーダー，$c=1$ ならば $n^{2/3}$ のオーダー，$c>1$ ならば n のオーダーを持つ．さらに，"スケーリングウインドウ"と呼ばれる臨界確率 p_c 付近 $p = p_c(1+\lambda n^{-1/3})$（$\lambda$ は実数）において，連結成分のサイズの列が，ある反射壁のドリフト付きブラウン運動の excursion の列に収束することが知られている．同様の結果は，ランダムグラフに近い別のモデルでも見られる．例えば，ランダム正則グラフ上におけるパーコレーションであり，このモデルにおける相転移確率は $p_c = \frac{1}{d-1}$ である．パーコレーションの相転移確率は，ネットワークの堅牢さに関する指標の一つである．よってネットワークの耐久性を高めるための効率的な構成法を探るという問題について，これらの研究は役に立ち得る．また，探索過程の解析は確率過程論の計算手法を主に用いており，これによってランダムグラフの性質が詳しく分かるということは，非常に意義深い．

本論文では，k-アウトグラフ上におけるパーコレーションに関して，ランダムグラフなどと同様のダブルジャンプという相転移が起こることを示した．論文は，以下のような章によって構成されている．

第 1 章には，k-アウトグラフの構成法やこれまでに知られている結果が記述されている．n 個の頂点を持つ k-アウトグラフ $G_{\mathrm{out}}(n,k)$ の構成は，以下のようにして行われる．(i) 各頂点 v について，他の $n-1$ 個の点から k 個 $v_1,\dots,v_k$ を一様の確率で選び，有向辺 $(v,v_1),\dots,(v,v_k)$ を結ぶ．これにより，有向グラフ $\vec{G}_{\mathrm{out}}(n,k)$ を得る．(ii) 各頂点間について，一方向でも有向辺が伸びているとき，有向辺の代わりに無向辺を一本結ぶ．これによって得られる無向グラフを k-アウトグラフ $G_{\mathrm{out}}(n,k)$ と呼ぶ．この k-アウトグラフ $G_{\mathrm{out}}(n,k)$ 上でパーコレーションを考える．すなわち，各辺に対して独立に，確率 p で open，つまり辺を残し，確率 $1-p$ で closed，つまり辺を取り除くという操作を行う．$G_{\mathrm{out}}(n,k)$ は，相転移確率 $p_c = \frac{1}{k+\sqrt{k^2-k}}$ を持ち，この臨界点でダブルジャンプが起こる．これらの定理の証明は，exploration process（探索過程）X_t の解析によって得られる．これは，各時刻に一つの頂点を探索し，open な辺でつながる頂点を数え上げる確率過程である．一つの連結成分の探索が終了するとき，X_t は最小値を更新する．よって，X_t の最小値の更新時刻区間の長さを調べることが，連結成分のサイズを求めることにつながる．

第 2 章では，我々が示した以下の主な結果について述べている．

Theorem 1 (critical phase). 実数 λ について，$p = p(\lambda) = \frac{1+\lambda n^{-1/3}}{k+\sqrt{k^2-k}}$ とする．このときある正の定数 $c(\lambda,k)$，$C(\lambda,k)$ が存在し，十分大きな n と

太田陽香 2

$A = O(n^{1/10})$ について，

$$\mathbb{P}\Big(|\mathcal{C}_1| \ge An^{2/3}\Big) \le \frac{C(\lambda,k)e^{-c(\lambda,k)A^3}}{A}.$$

さらに標準ブラウン運動 $\{\mathcal{B}(s): s\in[0,\infty)\}$ について，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{\lambda}(s) \;&=\; \mathcal{B}\Big(2\big(k-\sqrt{k^2-k}\big)s\Big)\\ &\quad +2\big(k-\sqrt{k^2-k}\big)\lambda s - \big(\sqrt{k^2-k}-k+1\big)s^2\end{aligned}$$

でドリフト付きブラウン運動 $\mathcal{B}^{\lambda}$ を定義する．そして，$\mathcal{B}^{\lambda}$ の反射壁 W^{λ} を $W^{\lambda}(s) = \mathcal{B}^{\lambda}(s) - \min_{0\le s'\le s}\mathcal{B}^{\lambda}(s')$ とする．W^{λ} の excursion γ とは，W^{λ} が 0 を離れてから次に 0 になるまでの部分 path のことをいう．excursion γ の時間を $|\gamma|$ と書き，γ の始まる時刻から終わる時刻までの時間間隔のことと定義する．$(|\gamma_j|)_{j\ge1}$ を，$|\gamma_1| \ge |\gamma_2| \ge \dots$ を満たす excursion の長さの列とする．

Theorem 2 (scaling window). $c=1$ のとき，

$$n^{-2/3}\cdot\big(|\mathcal{C}_j|\big)_{j\ge1} \xRightarrow{d} \big(|\gamma_j|\big)_{j\ge1}$$

が成り立つ，ここで，収束は l^2-ノルムに関するものである．

$p = \frac{c}{k+\sqrt{k^2-k}}$ とおく．

Theorem 3 (subcritical phase). $c<1$ のとき，十分大な A について，

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}_1| > A\log n) \to 0, \quad as\ n\to\infty.$$

Theorem 4 (supercritical phase). $c>1$ のとき，十分小な $\delta>0$ について，

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}_1| < \delta n) \to 0, \quad as\ n\to\infty.$$

これらの結果から，臨界確率 p_c について，最大連結成分のサイズのオーダーが二段階に変化するという，ダブルジャンプが起こっていることが分かる．

第 3 章では，探索過程の具体的な構成法について述べている．各頂点は，active，neutral，explored のいずれかの状態を持つとする．各時刻 t に対し，active な点があればその中から一つを，なければ neutral な点の中から一つを選び，それを探索点 w_t とする．そして w_t と open な辺でつながる neutral な点を active に変え，その後で w_t を explored にし，時刻 t の探索を終える．直感的には，三つの状態はそれぞれ以下の通りである．active な点とは，それまでの探索時に探索点と open な辺でつながっている点で，まだ探索されていない点である．neutral な点とは，open な辺でつながっておらず，まだ探索もされていない点である．explored な点とは，既に探索が終了している点である．k-アウトグラフでは，まず探索点を始点とする高々 k 本の有向辺

太田陽喬 3

によって active に変わる点があるか，各辺一本ずつ調べていく．この際，まだ終点を調べていない有向辺の本数が探索する点によって異なることが大きな問題である．これを解決するために，arm stretch process というものを導入した．これにより，探索過程の解析が可能となる．その後，探索点を終点とする有向辺によって active に変わる点があるかを調べる．以上で，探索点とつながる全ての辺の探索が終了する．X_t は時刻 t で新しく増える active な点の数を数えている．

第4章では，定理1，3，4の証明を述べている．前述の通り，探索過程 X_t の計算によってこれらの証明は得られる．

第5章では，定理2の証明を述べている．ここではマルチンゲール確率変数列に関する中心極限定理を用いて，探索過程 X_t のスケーリング極限がドリフト付きブラウン運動 B^λ となることを示す．これによって，連結成分のサイズの列がブラウン運動の excursion の列に収束することを見る．

証明の構成は，Asaf Nachmias と Yuval Peres によるランダム正則グラフのパーコレーションに関する論文を参考にしている．しかし，探索過程の構成法にも見られるとおり，k-アウトグラフ特有の問題が多く存在し，それらをこの論文の中で解決している．

(別紙 1)　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	太田 陽喬		
論文題目	The convergence of the exploration process for critical percolation on the k-out graph (k-アウトグラフ上のパーコレーションにおける臨界値での探索過程の収束)		
審査委員	区分	職名	氏名
	主査	教授	樋口　保成
	副査	教授	福山　克司
	副査	教授	高山　信毅
	副査		
	副査		印

要　旨

ランダムなネットワークのつながり方に関する研究は、既に１９６０年に出た Erdős と Renyi の論文で様々な面白い現象が議論されている。n 個の点を各辺独立に一定の確率 p でつなぐとすると、$p=\frac{1}{n}$ を境として連結成分のサイズに関する分布が劇的に変化する事はその典型的な例である。この論文には、$p=\frac{c}{n}$ とかくとき、$c<1$ ならばそれぞれの連結成分はたかだか $\log n$ のオーダーのサイズにとどまり、$c>1$ ならば サイズが n のオーダーの巨大成分が一つだけ現れ、後は $\log n$ サイズの連結成分のみとなることが書かれている。その後、さらに、臨界点 $p=\frac{1}{n}$ を中心として、$n^{-4/3}$ のオーダーのいわゆる「スケーリング窓」と呼ばれる領域では、いくつもの $n^{2/3}$ のオーダーのサイズの連結成分が現れることが分かってきた。

２０世紀終盤になってこの臨界点近傍での挙動を更に詳しく調べる動きが出てきて、サイズが $n^{2/3}$ のオーダーの連結成分達の同時分布が収束する事がわかり、さらに、Aldous によって、この極限分布が２次のドリフトをもつブラウン運動を反射壁にした時に現れる周遊過程の周遊時間の同時分布に収束する事が明らかにされた。

一方、ほぼ同時期に、実在するネットワークがランダムな特徴と規則的な特徴の中間の特徴をもつことが実験的に分かり始め、いわゆるスモールワールドのモデルがいろいろ提唱された。 Watts と Strogatz により提唱されたモデルはそのうちの一つとして有名である。このモデルでは、各点から出る辺の数が一定数以上という性質がある。この様なモデルは必然的に連結になるが、そのネットワークのつながり方の強さを測る一つの指標としてこのグラフ上でパーコレーション

氏 名	太田 陽喬

を考えるという方法がある。

Peres と Nachmias はランダムだが各点の次数一定 (k) のグラフでパーコレーションを考えた。すなわち、各辺を確率 p で残し、$1-p$ で取り除く。この結果できたランダムなグラフでは臨界点 $p=\frac{1}{k-1}$ の近傍で Aldous と同じタイプの極限定理が成り立つ事を示している。その解析は基本的に Aldous の手法を採用しているが、モデルにより、解析が大きく変わる部分が多々ある事を示している。極限のブラウン運動は時間変形を受け、ドリフトもグラフの特徴を反映して変わる。本論文は、それよりも Watts と Strogatz が提唱したモデルに近い k-アウトグラフ（各点から k 本は有向辺を出し、最後にすべてを無向辺にするモデル）について Aldous の結果と同様の極限定理を示している。もちろんこのモデルに特有の問題をいくつも解決することによりできた成果といえる。

本論文の構成は以下のようになっている。

第 1 章ではこれまでのランダムグラフの研究について、上述した点を中心にして概括している。

第 2 章では本論文の結果がまとめられている。k-アウトグラフでは、パーコレーションの臨界確率も求められていなかったので、その値を与えている。また、スケーリング窓の外の事情もランダムグラフに良く似ていることを示した結果も述べている。

第 3 章では、研究の中心となる探索過程の構成について述べている。この部分はモデルによる違いが大きく出る部分である。

第 4 章ではスケーリング窓の外で、臨界値より下では連結成分のオーダーが高々 $\log n$ のサイズであること、上では n オーダーのサイズの巨大連結成分が現れていることを示している。

第 5 章では、スケーリング窓の中の極限定理を述べている。ブラウン運動は時間変形を受け、ドリフトも複雑になる。

本研究は確率論の相転移理論および極限定理に関して重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者 太田 陽喬は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。