



Instanton counting and Virasoro algebra

柳田, 伸太郎

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2012-03-25

(Date of Publication)

2012-04-17

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲5574

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1005574>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



本学位論文は Alday, Gaiotto, Tachikawa によって提案された予想に関する、いくつかのトピックを扱う。

概要

この予想は現在 AGT 予想と呼ばれている。元来は理論物理、特に超弦理論と呼ばれる分野で考え出された予想であり、その主張は、 $N=2$ の超対称性を持つ $SU(2)$ Yang-Mills 理論という 4 次元の量子場の理論と、2 次元共形場理論とが等価であるというものである。

AGT 予想は数学的な定式化も可能である。定式化にはいくつかの方法があるが、代表的なものとして次のものがある。即ち、4 次元ユークリッド空間上の $SU(2)$ インスタントンの枠付きモジュライ空間の同変ホモロジーの直和空間が、ピラソロ代数の表現空間になっており、その表現がある条件を満たすというものである。この定式化は、モジュライ空間の隠れた対称性として無限次元代数が現れるという、幾何学的表現論で度々登場する思想の一例となっている。

定式化として、より具体的なものも考えられる。4 次元の場の理論の対象としてネクラソフ分配関数というものがある。これは上記のモジュライ空間を用いて定義される。一方 2 次元共形場理論の対象として、ピラソロ代数のヴァーマ表現のホイタッカーベクトルのノルムが挙げられる。AGT 予想は、この 2 つの関数が一致することを预言する。この恒等式のことを AGT 関係式と呼ぼう。

主結果

AGT 予想の数学的定式化では、代数幾何学的な対象と無限次元代数の表現論の対象の 2 つが現れるので、大まかに言って、AGT 予想に対するアプローチも幾何学的なものと言表現論的なものに分けられる。

本学位論文で得られた知見は、主に表現論的なものである。主結果は以下の 3 つである。

(1) 第 10 章において、ピラソロ代数の logarithmic primary (対数的プライマリ場) のノルムに関する公式を証明した。これは Al. Zamolodchikov によって 1980 年代に提案

されている。この公式の証明により、(pure $SU(2)$ の場合の) AGT 関係式の証明は完成している。

(2) 第 3 章において、ピラソロ代数のホイタッカーベクトルの明示公式導出・証明した。公式にはジャック対称関数を用いられる。この公式は Awata と Yamada によって提案された変形ピラソロ代数のホイタッカーベクトルに関する予想の退化版にあたる。

(3) 第 11 章では、Awata と Yamada の提案した K 理論的 AGT 予想を扱う。ここでは上記項目 (1) で述べた Zamolodchikov 型の漸化式の変形版を提案する。そして、K 理論的 Nekrasov 分配関数がこの漸化式を満たすことを証明する。従って、K 理論的 AGT 予想の証明は、この変形版の漸化式の証明に帰着された。

構成

本学位論文の構成について述べる。本文は

イントロダクション

第 1 部 無限次元代数とその表現論の準備

第 2 部 幾何学的準備

第 3 部 AGT 予想

という構成になっている。

イントロダクションでは、AGT 予想の数学的定式化についてまとめた。モジュライ空間や無限次元代数については紹介程度で述べており、精密な取扱いは第 1 部や第 2 部で述べることになる。このイントロダクションでは、一般化された AGT 予想についても述べている。その際、現れる無限次元代数は W 代数と呼ばれるものになる。この代数については第 1 部の後半で取り扱うことになる。

第 1 部は AGT 予想の「2 次元パート」に現れる無限次元代数について扱う。章立ては以下の通りである。

第 1 章 ピラソロ代数

第 2 章 ピラソロ代数のボゾン化

- 第3章 ホイタッカーベクトルとジャック対称関数
- 第4章 W 代数
- 第5章 W 代数のヴァーマ加群

最初の2つの章でピラソロ代数を詳細に扱う。その準備のもと、第3章においてホイタッカーベクトルについて述べる。このホイタッカーベクトルは AGT 関係式の定式化に必要である。また、第3章ではその明示化公式の導出も行う。

第4章と第5章は、W 代数とヴァーマ加群の定式化を行う。これらは以降の内容には直接は関係しないが、イントロダクションで述べた一般的な AGT 予想を理解するのに必要である。また、W 代数のヴァーマ加群について述べてある文献が少ないので、本学位論文でまとめることにした。

第2部は幾何学的な準備を行う。章立ては以下の通り。

- 第6章 インスタントン・モジュライ空間
- 第7章 同変ホモロジー理論
- 第8章 ネクラソフ分配関数

AGT 予想の「4次元パート」の主対象はネクラソフ分配関数であった。第8章でその定義を述べるが、それに必要なのがモジュライ空間と同変ホモロジーである。各々を第6章と第7章で詳細に扱う。第6章ではゲージ理論的側面（微分幾何学的な取扱い）についても簡単にふれた。

また、K 理論的ネクラソフ分配関数についても第8章で定式化した。必要になる同変 K 理論についても第7章で簡単にまとめた。

第3部で AGT 予想を詳細に扱う。章立ては次の通り。

- 第9章 SU(2) AGT 予想
- 第10章 SU(2) AGT 関係式の証明
- 第11章 K 理論的 AGT 予想

第9章と第10章で、SU(2) AGT 予想について詳しく記述し、証明を与える。第1部と

第2部で準備した内容を縦横に用いるが、ここから読み始めてもある程度理解できるように配慮している。第11章では K 理論版を扱う。詳しい内容については主結果の(1)、(3)を参照されたい。

付録の章では本文中で使っている分割や Young 図形の記号についてまとめて述べてある。また、iv ページに各章の論理関係を図示してあるので、参考にされたい。

氏 名	柳田 伸太郎		
論 文 題 目	Instanton counting and Virasoro algebra (インスタントンの数え上げと Virasoro 代数)		
審 査 委 員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教 授	吉 岡 康 太
	副 査	教 授	齋 藤 政 彦
	副 査	教 授	山 田 泰 彦
	副 査		印
	副 査		印
要 旨			
研究内容 4次元ユークリッド平面（あるいはその1点コンパクト化である4次元球面）上のインスタントンは複素平面（あるいはそのコンパクト化である射影平面）上のある種の正則ベクトル束と対応する。Donaldson は1980年代に無限遠直線での自明化（枠という）を考えることによりインスタントンのモジュライ空間が代数多様体として構成されることを示したが、中島啓は1990年代初頭、枠付き torsion free 層を考察することにより自然に部分的コンパクト化を得た。Donaldson 理論に代表されるコンパクト空間上のインスタントンのモジュライ空間の交点理論は超対称ゲージ理論と関連するが、Seiberg と Witten はゲージ理論のプレポテンシャルが楕円曲線の周期積分 (Seiberg-Witten プレポテンシャルと呼ぶ) として求められることを発見し、とくに Seiberg-Witten プレポテンシャルにより Donaldson 理論が理解できることを示した。Witten らによるこの発見は物理的議論に基づいたものであり、数学的に十分正当化されたものではなかったが、2002 年 Nekrasov は射影平面上の枠付き torsion free 層のモジュライの基本類（あるいはモジュライ空間上の自然なベクトル束の特性類）の母関数 (Nekrasov 分配関数と呼ぶ) から Seiberg-Witten プレポテンシャルが得られることを予想し、その後この予想は3つのグループにより示されたので、ゲージ理論とくに Donaldson 理論をプレポテンシャルを使って数学的厳密さをもって書き表すことが期待できるようになった。ところで複素平面は可縮でありそのままではホモロジー理論は自明である。そこで自然なトラス作用を導入しトラス作用に関する同変ホモロジー群を考察することが重要な点である。このように枠付き torsion free 層のモジュライとその同変ホモロジー群（したがって Nekrasov 分配関数）は大変重要な対象であるが、Nekrasov 分配関数について最近無限次元代数 (Virasoro 代数や W 代数) の表現論との関連が3人の物理学者により予想され (AGT 予想)、活発に研究されている。AGT 予想はゲージ群のとり方や物質場の導入などいくつかの version があるが、柳田君はそのうちのもっとも単純だが基本的な SU(2)-純ゲージ理論の場合にこの			

氏 名	柳田 伸太郎
予想の最後の詰めを行った。この場合の予想は Nekrasov 分配関数が Virasoro 代数の Whittaker vector のノルムになっていることを主張している。まず Whittaker vector のノルムはある種の漸化式 (Zamolodchikov 型漸化式) を満たすことが以前より物理学者により知られていた。AGT 予想を証明するのに Nekrasov 分配関数がこの漸化式を満たすことを言うのは自然な考えであり、ロシアの研究者によりこのことが示されていた。そこで数学的に完全な証明を得るには Whittaker vector のノルムも同じ漸化式を満たすことを厳密に証明する必要があった。柳田君はまさにこの部分を解決した。AGT 予想はインスタントンのモジュライ空間のホモロジー群上に無限次元代数が作用することを示唆し幾何学と表現論を結び興味深い予想である。柳田君の仕事は純代数的なもので幾何学とは遠いところにあるが、もっとも簡単な場合ではあるが、AGT 予想をきちんと確かめたことは高く評価できる。2つ目の業績は、AGT 予想で重要な役割を果たす Whittaker ベクトルをジャック多項式を使って明示的に書き下したことである。 幾何学的には、モジュライ空間のホモロジー群に付随する Nekrasov 分配関数を K 理論に持ち上げることは自然であり、K 理論的 Nekrasov 分配関数も定義されその重要性が認識されている。栗田英資と山田泰彦はこの K 理論的 Nekrasov 分配関数についても AGT 予想を定式化した。柳田君は K 理論的 Nekrasov 分配関数について Zamolodchikov 型漸化式を示すことに成功した。これが柳田君の3つ目の業績である。この業績により K 理論的 AGT 予想の証明は表現論側の変形 Virasoro 代数についての Zamolodchikov 型漸化式の証明に帰着された。 結論 本研究は複素平面上のインスタントンのモジュライについて、その無限次元代数の表現論との結びつきについて研究したものであり、SU(2) 純ゲージ理論の AGT 予想の厳密な証明など柳田君の3つの業績は幾何学および表現論の発展に十分貢献することを認める。よって、学位申請者の柳田伸太郎は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。	