



Direct and inverse problems of scattering theory in time-dependent electric fields

石田, 敦英

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2013-03-25

(Date of Publication)

2013-05-02

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲5708

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1005708>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



(別紙様式3)

論文内容の要旨

氏 名 石田 敦英

専 攻 数学専攻

論文題目 (外国語の場合は, その和訳を併記すること。)

Direct and inverse problems of scattering theory in time-dependent electric fields
(時間変動電場の下での散乱理論の順問題と逆問題について)

指導教員

足立 匡義 教授

本論文では, 時間変動電場が存在する量子力学系での散乱問題を議論する。テーマとしては大きく分けて2つあり, 第1章では Adachi-Ishida [2] で得られた順問題, 第2章では Adachi-Fujiwara-Ishida [1] で得られた逆問題を扱う。また, 第1章4節では [2] の応用として, Ishida [5] で扱った電荷輸送モデルの結果を拡張する。本論文を通して, free Hamiltonian は

$$H_0(t) = p^2/(2m) - q_0 E(t) \cdot x \quad (1)$$

で与えられ, $E(t) \in \mathbb{R}^d$ が時間変動電場である。また, $m > 0$, $q_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p = -i\nabla$ はそれぞれ, 対象となる粒子の質量, 電荷, 運動量である。以下簡単のため, $m = 1$ とし, 第1章4節を除いて $q_0 = 1$ としておく。さらに $H_0(t)$ によって生成される propagator を $U_0(t, s)$ とする。

第1章では, 変動電場 $E(t)$ に対して以下の仮定を置く。

$$E(t) = E + e(t), \quad e(t) = O(|t|^{-\eta}). \quad (2)$$

ここで, $E \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\eta > 0$ である。すなわち変動電場 $E(t)$ は $|t| \rightarrow \infty$ においてゼロでない定電場 E に近づくものとする。本章3節の終わりまで, ポテンシャル V は, $\rho_s > 1/2$ と $0 < \rho_l \leq 1/2$ に対して, $V = V^s + V^l \in \mathcal{V}_{\rho_s} + \mathcal{V}_{\rho_l}$ と和で表現されるものとし, 考える1体中心力系を支配する full Hamiltonian は,

$$H(t) = H_0(t) + V \quad (3)$$

で与えられる。ここで, $V \in \mathcal{V}_\rho$, $\rho > 0$ は, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ に属し, 多重指数 β に対して次の空間遠方での減衰を持つクラスである。

$$|\partial_x^\beta V(x)| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\rho-|\beta|/2}, \quad \langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}. \quad (4)$$

さらに, η の大きさが $0 < \eta \leq 2$ のときはもう1つ次の仮定が必要となる。

$$e_0 = |E| - \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \omega \cdot \nabla_x V(x) > 0, \quad \omega = E/|E|. \quad (5)$$

まず $V^l = 0$ の場合を考える。 $U(t, s)$ を $H(t)$ の生成する propagator として, 第一の主張は以下の通り。

Theorem 1. (Asymptotic Completeness [2]) $V^l = 0$ の場合, 波動作用素

$$W^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) \quad (6)$$

が存在し, 漸近的に完全である。

次に $V^l \neq 0$ の場合を考える。 V^l は長距離型と呼ばれるクラスの1つであり, 修正波動作用について議論する必要がある。

Theorem 2. (Asymptotic Completeness [2]) $V^1 \neq 0$ の場合, 修正波動作用素

$$W_D^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) e^{-i \int_0^t V^1((\nabla_\xi K)(\tau, p)) d\tau} \quad (7)$$

が存在し, 漸近的に完全である.

ここで, 修正因子 $e^{-i \int_0^t V^1((\nabla_\xi K)(\tau, p)) d\tau}$ における $K(t, \xi)$ は Hamilton-Jacobi 方程式の逐次近似解を用いて定義されるものである. 特に $1/4 < \rho_1 \leq 1/2$ のときの修正因子は

$$e^{-i \int_0^t V^1((\nabla_\xi K_0)(\tau, p)) d\tau} = e^{-i \int_0^t V^1(p\tau + \xi(\tau)) d\tau} \quad (8)$$

となり, Dollard 型修正因子と呼ばれる. さらに, ポテンシャルのクラス $V \in \tilde{\mathcal{V}}_\rho$ として, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり,

$$|\partial_x^\beta V(x)| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\rho-|\beta|} \quad (9)$$

をみたすクラスとする.

Theorem 3. (Asymptotic Completeness [2]) $0 < \rho_1 \leq 1/2$ に対して, $0 \neq V^1 \in \tilde{\mathcal{V}}_{\rho_1}$ の場合, 修正波動作用素

$$W_G^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) e^{-i \int_0^t V^1(\xi(\tau)) d\tau} \quad (10)$$

が存在し, 漸近的に完全である.

修正因子 $e^{-i \int_0^t V^1(\xi(\tau)) d\tau}$ は Graf 型 (または Zorbas 型) 修正因子と呼ばれる. なお $\xi(t)$ は

$$\bar{c}(t) = \int_0^t \bar{b}(\tau) d\tau, \quad \bar{b}(t) = \int_0^t E(\tau) d\tau \quad (11)$$

である.

先攻研究である Yokoyama [6] では, $V^1 = 0$ の場合のみを扱った. ただし, $V^s \in \tilde{\mathcal{V}}_{\rho_s}$, $\rho_s > 1/2$ である. また, $\eta > 1$ のとき, 仮定 (5) を仮定し, $\eta > 7/2$ のとき, 仮定 (5) を仮定しない, という結果であった.

上述したように, 1 章 4 節では, 上での結果を電荷輸送モデルに応用する. 電荷輸送モデルとは, 古典力学に従う N 個の重い粒子と量子力学に従う 1 つの軽い粒子の散乱を記述するモデルである. k 番目の重い粒子の比電荷を q_k , $1 \leq k \leq N$ とする. 重要な仮定として, 比電荷は全て異なる, とする. すなわち

$$q_k \neq q_l, \quad 0 \leq k < l \leq N \quad (12)$$

とする. 古典軌道 $\chi_k(t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ は Newton の運動方程式

$$\ddot{\chi}_k(t) = q_k E(t), \quad \chi_k(0) = w_k, \quad \dot{\chi}_k(0) = v_k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (13)$$

に従うとし, つまり

$$\chi_k(t) = q_k \bar{c}(t) + v_k t + w_k \quad (14)$$

で与えられる. 量子力学的粒子と k 番目の古典力学的粒子に働く相互作用ポテンシャル V_k^s は, $V_k^s \in \mathcal{V}_{\rho_s}$, $\rho_s > 1/2$ の短距離型を仮定し, 上の節と同じく, $0 < \eta \leq 2$ のときは (5) を課す. この系を支配する full Hamiltonian は次で与えられ, 生成する propagator を $U(t, s)$ で表すことにする.

$$H(t) = H_0(t) + V^s(t, x), \quad V^s(t, x) = \sum_{k=1}^N V_k^s(x - \chi_k(t)). \quad (15)$$

以上の仮定の下, 次の漸近完全性が得られる.

Theorem 4. (Asymptotic Completeness) 波動作用素

$$W^\pm = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) \quad (16)$$

が存在し, 漸近的に完全である.

比電荷が全て異なるという仮定 (12) から, N 個のクラスターに分解されることを示し, 2 体化された部分で [2] によって得られた伝播評価を利用するという方針によって証明される. 以前に著者自身によって得られた [5] では, $\eta > 7/2$ の場合のみで, また $V_k^s \in \tilde{\mathcal{V}}_{\rho_s}$, $\rho_s > 1/2$ であった.

第 2 章からは空間次元 $d \geq 2$ とし, [1] による Enss-Weder [4] の time-dependent method に基づく逆問題を議論する. 散乱作用素の情報からポテンシャルの一意性が導かれる. 時間変動電場 $E(t)$ には次の仮定を置く.

$$E(t) = E_0(1 + |t|)^{-\mu} + E_1(t). \quad (17)$$

ここで, $0 \leq \mu < 1$, $E_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ で, 摂動部分 $E_1(t)$ は $E_1(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ かつ, $\mu < \mu_1 \leq 1$ に対して次の評価をみたす.

$$\left| \int_0^t \int_0^s E_1(\tau) d\tau ds \right| \leq C \max\{|t|, |t|^{2-\mu_1}\}. \quad (18)$$

第 1 章とは異なり $E(t) \rightarrow 0$ の場合も許容するのが最大のポイントである. 相互作用ポテンシャル V は $V = V^{vs} + V^s + V^1 \in \mathcal{V}^{vs} + \mathcal{V}_{\mu, \alpha_\mu}^s + \mathcal{V}_{\mu, \gamma_\mu}^1$ と表され, それぞれのクラス $\mathcal{V}^{vs}$, $\mathcal{V}_{\mu, \alpha_\mu}^s$, $\mathcal{V}_{\mu, \gamma_\mu}^1$ は次の仮定をみたすものである.

まず, $V^{vs} \in \mathcal{V}^{vs}$ は特異性を許すが空間遠方での減衰は十分に速く, 以下を仮定する.

$$\int_0^\infty \|V^{vs}(x) \langle p \rangle^{-2} F(|x| \geq R)\|_{\mathcal{B}(L^2)} dR < \infty. \quad (19)$$

ここで, $F(|x| \geq R)$ は集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \geq R\}$ の定義関数である. 次に $\alpha_\mu > 0$ に対して, $V^s \in \mathcal{V}_{\mu, \alpha_\mu}^s$ は $C^1(\mathbb{R}^d)$ に属し, 空間遠方で

$$|V^s(x)| \leq C(x)^{-\gamma}, \quad |\partial_x^\beta V^s(x)| \leq C_\beta(x)^{-1-\alpha}, \quad |\beta| = 1 \quad (20)$$

の振る舞いを持つもの. ただし, $1/(2-\mu) < \gamma \leq 1$, $\alpha_\mu < \alpha \leq \gamma$ である. 最後に, $\gamma_\mu \geq 1/(2(2-\mu))$ に対して, $V^1 \in \mathcal{V}_{\mu, \gamma_\mu}^1$ は $C^2(\mathbb{R}^d)$ に属し, 空間遠方で

$$|\partial_x^\beta V^1(x)| \leq C(x)^{-\gamma_D - |\beta|/(2-\mu)}, \quad |\beta| \leq 2 \quad (21)$$

をみたすもの. ただし, $\gamma_\mu < \gamma_D \leq 1/(2-\mu)$ である.

まず $V^1 = 0$ の場合を考える. 本章 2 節で示してあるが, このとき波動作用素

$$W^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) \quad (22)$$

が存在し, 散乱作用素 $S = S(V)$ は

$$S = (W^+)^* W^- \quad (23)$$

によって定義される.

Theorem 5. (Uniqueness of Short-range Potentials [1])

$$\tilde{\alpha}_\mu = \begin{cases} \frac{7-3\mu - \sqrt{(1-\mu)(17-9\mu)}}{4(2-\mu)} & 0 \leq \mu \leq 1/2 \\ \frac{1+\mu}{2(2-\mu)} & 1/2 < \mu < 1 \end{cases} \quad (24)$$

とする. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^{vs} + \mathcal{V}_{\mu, \tilde{\alpha}_\mu}^s$ が $S(V_1) = S(V_2)$ をみたせば $V_1 = V_2$ である.

Adachi-Kamada-Kazuno-Toratani [3] は $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^{vs} + \mathcal{V}_{\mu, 1/(2-\mu)}^s$ の仮定の下, 同じ主張を得ている. $\tilde{\alpha}_\mu < 1/(2-\mu)$ より $\mathcal{V}_{\mu, 1/(2-\mu)}^s \subseteq \mathcal{V}_{\mu, \tilde{\alpha}_\mu}^s$ であるから, 一意性が導かれるポテンシャルのクラスが広がったことが分かる.

次に $V^1 \neq 0$ の場合を考える. 条件 $\gamma_D > 1/(2(2-\mu))$ により, $V^1 \in \mathcal{V}_{\mu, \gamma_\mu}^1$ のとき, Dollard 型修正波動作用素

$$W_D^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0) M_D(t), \quad M_D(t) = e^{-i \int_0^t V^1(pr + \tilde{c}(\tau)) d\tau} \quad (25)$$

が存在する (これも本章 2 節で示してある). そして Dollard 型修正散乱作用素 $S_D = S_D(V^1, V^{vs} + V^s)$ は

$$S_D = (W_D^+)^* W_D^- \quad (26)$$

で定められる.

Theorem 6. (Uniqueness of Short-range Potentials [1])

$$\tilde{\gamma}_\mu = \frac{1}{2(2-\mu)} + \frac{1-\mu}{2(2-\mu)} \quad (27)$$

に対して $V^1 \in \mathcal{V}_{\mu, \tilde{\gamma}_\mu}^1$ とする. また,

$$\tilde{\alpha}_{\mu, D} = \begin{cases} \frac{15-5\mu - \sqrt{(1-\mu)(41-25\mu)}}{8(2-\mu)} & 0 \leq \mu \leq 5/7 \\ \frac{1+\mu}{2(2-\mu)} & 5/7 < \mu < 1 \end{cases} \quad (28)$$

とおく. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^{vs} + \mathcal{V}_{\mu, \tilde{\alpha}_{\mu, D}}^s$ が $S_D(V^1, V_1) = S(V^1, V_2)$ をみたせば $V_1 = V_2$ である.

この定理も [3] で得られた結果の改良となっている. [3] では, $0 < \mu \leq (7 - \sqrt{3} - \sqrt{60 - 22\sqrt{3}})/4$ のとき $\tilde{\gamma}_\mu = (-1/2 + \sqrt{1/4 + (1-\mu)^2/(1+\mu)})/(2-\mu)$ とし, $(7 - \sqrt{3} - \sqrt{60 - 22\sqrt{3}})/4 < \mu < 1$ のとき $\tilde{\gamma}_\mu = -(3-\mu)/8 + \sqrt{(3-\mu)^2/64 + (2\mu^2 - 7\mu + 7)/(4(2-\mu)^2)}$ としていた. また $\tilde{\alpha}_{\mu, D} = 1/(2-\mu)$ であった.

References

- [1] Adachi, T., Fujiwara, Y. and Ishida, A., On multidimensional inverse scattering in time-dependent electric fields, preprint.
- [2] Adachi, T. and Ishida, A., Scattering in an external electric field asymptotically constant in time, J. Math. Phys. **52**, 062101 (2011).
- [3] Adachi, T., Kamada, T., Kazuno, M. and Toratani, K., On multidimensional inverse scattering in an external electric field asymptotically zero in time, Inverse Problems **27**, 065006 (2011).
- [4] Enns, V., and Weder, R., The geometric approach to multidimensional inverse scattering, J. Math. Phys. **36**, 3902-3921 (1995).
- [5] Ishida, A., Scattering theory for a charge transfer model in a time-dependent electric field, MS thesis, Kobe University, 2010.
- [6] Yokoyama, K., Asymptotic completeness for Hamiltonians with time-dependent electric fields, Osaka J. Math. **36**, 63-85 (1999).

氏名	石田 敦英		
論文 題目	Direct and inverse problems of scattering theory in time-dependent electric fields (時間変動電場の下での散乱理論の順問題と逆問題について)		
審査 委員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教 授	足立 匡義 印
	副 査	教 授	山田 泰彦 印
	副 査	教 授	太田 泰広
	副 査		印
	副 査		印

要 旨

本論文では、空間的には一様で、時間に依存する外電場が存在する空間における量子力学系に対する散乱理論を研究している。前半は、時間が経つにつれて定電場に収束するような、時間に依存する外電場内での順問題を取り扱っている。より具体的には、中心力ポテンシャルを自由ハミルトニアンと見做したとき、波動作用素の存在とその漸近完全性に関する問題を考察している。ここで、時間反転により、時間が遡るにつれて定電場に収束する場合も取り扱うことができることに注意しておく。後半は、時間が経つにつれて、また時間が遡るにつれて、零に収束するような、時間に依存する外電場内での量子力学系に対する散乱逆問題を取り扱っている。より具体的には、散乱作用素から、摂動としてのポテンシャルが一意的に定まるかどうかという一意性の問題を考察している。順問題、逆問題ともに、一体中心力系として考察されているが、その系は重心座標系における二体系とも見做せることに注意しておく。

波動作用素の漸近完全性に関する問題は、多くの数理論理学者によって研究されてきている。特に、外電磁場がないという条件の下での研究は先行しており、1970年代半ばには、短距離型摂動に対して、定常的な方法で肯定的に解決された (Agmon)。しかし、物理的に重要な Coulomb ポテンシャルは、短距離型摂動と見做すことはできず、長距離型摂動として取り扱わなければならない、ということとはよく知られたことである。短距離型摂動だけでなく、長距離型摂動に対しても適用する、相空間での解析を駆使した時間依存の方法は、Enss により 1970 年代末に提唱された。Enss method と呼ばれるこの方法は、外電磁場が存在する場合に拡張されたり (Simon)、三体系を取り扱えるまでにはなかった (Enss)。しかし、一般の多体問題に対して適用されるまでにはなかなか至らなかった。そのうち、Enss method が提唱されたのと同時期に現れた、Mourre による正值交換子に関する理論が、系の時間発展の特徴を表す伝播評価の導出に対して有効であることが見出され、1980 年代半ばには、Sigal-Soffer による、短距離型摂動をもつ多体系の漸近完全性の問題の解決として結実する。その後も、この正值交換子の方法の改良は進み、1990 年代半ばには、長距離型摂動をもつ多体系 (Derezinski)、定電場内での多体系 (Adachi-Tamura, Herbst-Møller-Skibsted)、定磁場内での多体系 (Gérard-Laba) などに対しても、漸近完全性の問題が考えられるまでにいった。

ここまでの話は、系を支配するハミルトニアンが時間に依存しない場合のものである。その場合にはエネルギー保存則が利用できる。それに対して、ハミルトニアンが時間に依存する場合には、エネルギー保存則の破れが解析の障害となることはよく知られている。それでも、時間周期的に変動する電場内での系や、charge transfer model に対する解析はある程度進展し、満足のいく結果が得られる場合もいくつかあることは知られている。特に、時間周期的なハミルトニアンが系を支配している場合には、1970 年代末に Howland-Yajima method が確立され、二体系、三体系などの少数体系に対しては解析が進んだ。これは、時間変数も空間変数と同等と見做して、考える Hilbert 空間を拡張し、その Hilbert 空間に作用するハミルトニアンとして、時間に関する微分作用素も含めたもの (Floquet ハミルトニアン) を導入することで、エネルギー保存則を利用できるようにする、という Howland のアイデアに基づくものである。このアイデアと、散乱理論における定常的な方法とが結びついてきたのが Howland-Yajima method である。しかし、定常的な方法は、二体系に対しては満足のいく結果を与えるものの、多体系に対しては、Faddeev の方法のように少数体系に限られるものしかないというのが現状である。その後、Sigal-Soffer による正值交換子の方法を、Floquet ハミルトニアンに適用する試みがなされ (Yokoyama, Møller)、特に、時間周期的に変動する電場が零でない時間平均を有する場合に、一般の多体系であっても漸近完全性の問題が解決されるまでに至った (Adachi)。このように、時間周期的なハミルトニアンが支配する系に対しては、ある程度の研究の進展が見られ、現在もさかんに研究されているのであるが、その他の、時

氏名	石田 敦英
----	-------

間に依存するハミルトニアンが支配する系に対しては、研究する余地がまだかなり多く存在するのも事実である。

この論文で考えられている、時間的に定電場に漸近するような電場内での散乱理論については、1999 年の Yokoyama による先行研究がある。その研究では明確にならなかった、時間発展に沿ってのエネルギーの有界性と、定電場への漸近オーダーとの関係を明らかにしたことが、この論文の大きな成果の一つである。また、この論文では、一体中心力系に対して得られた伝播評価 (これは先行結果からの大きな改良となっている) を、charge transfer model に対して適用し、石田君本人が修士論文で得ていた結果を改良することにも成功している。

後半の逆問題については、1990 年代半ばに Enss-Weder によって提唱された、高速度極限の方法が基礎となっている。特に、定電場内では Coulomb ポテンシャルが短距離型摂動と見做せることはよく知られているので、電場内での量子散乱逆問題の研究が進められることには大きな意義がある。実際、1996 年の Weder による研究では、Coulomb ポテンシャルも散乱作用素から一意的に定められることは示された。しかし、その研究では、順問題で知られている短距離型ポテンシャルの減衰度全てを取り扱うまでには至らなかった。それは、ポテンシャルの再構成公式を導く際の評価が弱かったためである。その後、2003 年の Nicoleau による研究で、Dollard 型修正因子を用いて件の評価を改良する試みがなされた。2007 年の Adachi-Maehara による研究では、より適切な修正因子として Graf 型修正因子を導入することが提唱され、件の評価の更なる改良がなされた。この手法は、2011 年の Adachi-Kamada-Kazuno-Toratani による研究で、時間的に零に漸近する電場の場合にも適用された。端的に言えば、Adachi-Maehara の方法では、Enss-Weder の方法と同様に、高速度に局所化されるように波動関数を取り、それに応じて時間発展を見たとき、電場による加速の影響が大きく現れる時間帯と、それ以外の時間帯とを分けるパラメータを、与えられた電場と高速度の性質だけから定め、その二つの時間帯において、時間発展に沿ってのポテンシャルの評価を導出し、それら二つの評価を時間に関して積分することで現れる、高速度に依存する減衰度を比較して、同じ減衰度になるときが「最良」の評価が得られるときである、としている。これで、順問題において知られている短距離型ポテンシャルの減衰度全てを扱えることになるのである。しかし、この手法からは、そのポテンシャルの一階微分に関して条件が加わるという問題が生じることが知られている。従って、この手法で得られた評価は、先行研究で得られたものより良くなっているとは言えるけれども、最良であることを保証するものではないことがわかる。

この論文では、件のパラメータを、ポテンシャルの減衰度をも考慮に入れて調整することで、得られる評価が更に改良されることを示している。これによって、考えられるポテンシャルのクラスは拡張される。この方法でも、最良の評価が得られているという保証はできないのであるが、これまでに示されていた指数を単純化することには成功しており、今後の研究の発展に資するものであると考えられる。また、この手法は、時間周期的変動をする電場で、その時間平均が零でない場合にも適用可能であり、これにより 2005 年の Nicoleau による研究成果が大きく改良されることも示されている。

本研究は、時間的に定電場に漸近する電場内での量子力学系の散乱理論に関して、順問題、逆問題双方について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者の石田敦英は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。