



Flat braidzel surfaces for links

三浦, 嵩広

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2014-09-25

(Date of Publication)

2015-09-01

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲第6248号

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1006248>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



論文内容の要旨

氏 名 三浦 嵩広

専 攻 数学

論文題目 Flat braidzel surfaces for links
(絡み目の平坦組み紐状曲面)

指導教員 中西 康剛

3次元球面に埋め込まれたいくつかの単純閉曲線を絡み目といい、特に1つの単純閉曲線からなる絡み目を結び目という。ここで、3次元球面の全同位で移りあう絡み目は同じものとみなす。任意の絡み目は、あるコンパクトで向き付け可能な連結曲面の境界として表せることはよく知られており、このような曲面を Seifert 曲面という。Seifert 曲面から定義される絡み目不変量は種数、符号数、Alexander 多項式など数多く存在し、現在まで盛んに研究されており、Seifert 曲面の概念は絡み目研究において非常に重要なものとなっている。

Rudolph は、pretzel 曲面の一般化として、2つの disk をいくつかの band で繋いでできる braidzel 曲面の概念を導入した。これは、幾何的および代数的にもよく研究されている組み紐と、各 band のねじれの数を表す整数列によって表示される曲面である。Nakamura は、任意の絡み目は Seifert 曲面として braidzel 曲面をもつこと、すなわち braidzel 表示をもつことを示した。よって、すべての絡み目を対象とした研究を braidzel 曲面の観点から行うことが可能となった。Nakamura は、この結果を用いることにより、braidzel 種数という絡み目不変量を定義し、canonical 種数や free 種数など既存の絡み目不変量との関係について、いくつかの結果を得ている。また、braidzel 表示は、Seifert 行列との対応が比較的観察しやすいため、今後の更なる発展が期待される絡み目表示である。

本論文では、braidzel 曲面の band のねじれをすべて解消した flat braidzel 曲面の概念を導入する。これは braidzel 曲面における整数の情報をすべて 0 に制限させたものであり、組み紐だけで表示される曲面である。そして、任意の絡み目は Seifert 曲面として flat braidzel 曲面をもつ、すなわち flat braidzel 表示をもつことを示す。したがって、すべての絡み目を flat braidzel 曲面の観点から研究することが可能となる。本論文は、flat braidzel 曲面を通して行った、結び目および絡み目に関する研究をまとめたものである。本論文は以下の2章から構成される。

第1章では、flat braidzel 曲面を定義し、任意の絡み目が flat braidzel 表示をもつことを示す。先述したように、Nakamura は任意の絡み目が braidzel 表示をもつという結果から、braidzel 種数という絡み目不変量を定義し、既存の絡み目不変量との関係についていくつかの結果を得ている。ここで、絡み目の braidzel 種数とは、その絡み目を境界に持つ braidzel 曲面の最小種数として定義された絡み目不変量であり、絡み目を braidzel 曲面の境界として表すために必要な band の最小本数（すなわち絡み目の braidzel 表示を与える組み紐の紐の最小本数）の指標となるものである。これにならい、絡み目の flat braidzel 種数という絡み目不変量を同様に定義し、その性質や既存の絡み目不変量との関係について考える。また、flat braidzel 表示を与える組み紐から、絡み目の成分数、proper 絡み目からの距離、Seifert 行列を算出するアルゴリズムを与える。

第1章は以下の4節から成る。

第1節は本章の導入部分であり、flat braidzel 曲面、flat braidzel 種数を定義し、flat braidzel 曲面の例や、主な結果を述べている。

第2節では、任意の絡み目が Seifert 曲面として flat braidzel 曲面をもつことの証明を与えている。この証明は、まず任意の絡み目が Seifert 曲面として braidzel 曲面をもつこと、また、その境界にある絡み目型を保ちつつ braidzel 曲面の band のねじれを解消するアルゴリズムを構成することにより得られる。

第3節では、flat braidzel 種数を定義し、その性質について述べている。第2節の証明で用いた braidzel 曲面から flat braidzel 曲面を得るアルゴリズムは、一般に全同位な変形ではないため、flat braidzel 種数と braidzel 種数の間に差のあるような絡み目が本当に存在するのかという疑問が生じる。この問いの答えとして、任意の非負整数 m に対し、flat braidzel 種数と braidzel 種数の差が m となる絡み目が無限に存在することを示す。この結果は、braidzel 種数、proper 絡み目との距離を用いて、flat braidzel 種数の上下からの評価を与えることにより得られる。

第4節では絡み目の flat braidzel 表示を与える組み紐から、絡み目の成分数、proper 絡み目からの距離、Arf 不変量および Seifert 行列を求めるアルゴリズムを与える。成分数、proper 絡み目からの距離、Arf 不変量は、絡み目図式における pass move という局所変形で不変であり、これは flat braidzel 表示における組み紐の交差交換に対応している。そこで、組み紐から置換への自然な対応を考え、これを用いることによりこれらの不変量の値を得ることができる。また Seifert 行列は、組み紐のそれぞれの紐同士の交差符号和をみることにより得ることができる。本節の最後に、いくつかの計算例を挙げている。

第2章では、絡み目の flat braidzel 表示から定義される flat braidzel length という絡み目不変量を導入し、その性質について述べる。この値は、絡み目を flat braidzel 曲面の境界として表すために必要な band の交差数（すなわち、flat braidzel 表示を与える組み紐の length）の最小値として定義される不変量である。Flat braidzel length に対し、flat braidzel 種数と canonical 種数を用いることで、下からの評価を与える。この結果の系として、任意の絡み目の flat braidzel length は Alexander 多項式の span 以上であることを示す不等式が得られる。また、これを用いることにより、flat braidzel length が決定できる絡み目の例を無限に与えることができる。さらに、flat braidzel length が 5 までの結び目の表を与える。

第2章は以下の5節から成る。

まず第1節は本章の導入部分であり、flat braidzel length を定義し、主な結果を述べている。

第2節では、flat braidzel length は canonical 種数、flat braidzel 種数および成分数を用いて下から評価できることの証明を与えている。この系として、flat braidzel length は Alexander 多項式の span 以上であるという結果が得られる。

第3節では、flat braidzel length が決定できる絡み目の例を無限に与えている。第2節で示した定理の系として、絡み目がある組み紐による flat braidzel 表示で与えられており、その組み紐の length が Alexander 多項式の span と等しいとき、その絡み目の flat braidzel length はその組み紐の length と等しいことがいえる。これは、flat braidzel length が決定可能であるための十分条件であり、また、この条件をみたす組み紐の必要十分条件を与えることができた。さらに、この結果から、 $(2, q)$ -torus 結び目とその鏡像との連結和の flat braidzel length が $4q$ であると決定でき、Alexander 多項式が monic でない絡み目に対しては、flat braidzel length は Alexander 多項式の span より大きいという結果も得られる。

第4節では、第3節で挙げた命題に証明を与えている。十分性は、命題の条件をみたす組み紐によって与えられる flat braidzel 曲面を考え、その Seifert 行列を観察することにより得られる。必要性は、まず仮定をみたす Seifert 行列の特徴づけを行い、そこから組み紐の特徴づけを行うことにより得られる。

最後に第5節では、flat braidzel length が 5 までの結び目を決定し、その証明を与えている。

氏名	三浦 嵩広		
論文 題目	Flat braidzel surfaces for links (絡み目の平坦組み紐状曲面)		
審査委員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教授	中西 康剛
	副 査	教授	福山 克司
	副 査	准教授	佐藤 進
	副 査		
	副 査		
要 旨			
本研究は、結び目理論において、特別な Seifert 曲面を用いた手法による研究を与えたものである。 3次元球面に埋め込まれたくつかの単純閉曲線を絡み目といい、特に1つの成分からなる絡み目を結び目という。空間の全同位でうつりあう結び目や絡み目は同一視する。任意の結び目や絡み目は連結でコンパクトな有向曲面の境界になることが知られており、これを結び目や絡み目の Seifert 曲面とよぶ。Seifert 曲面は結び目理論における重要な研究対象である。 Rudolph は、pretzel 曲面の一般化として、2つの円板をいくつかの帯でつないでできる組み紐状曲面の概念を導入した。これは、組み紐と帯のねじれを表す整数列で決定される。その後、Nakamura により、任意の結び目や絡み目は Seifert 曲面として組み紐状曲面を持つことを示した。すなわち、組み紐状曲面は、結び目や絡み目のひとつの表示といえる。組み紐状曲面の観点から結び目理論の研究が可能となる。 第1章において、三浦嵩広君は、組み紐状曲面を特殊化し、帯のねじれをすべて解消した平坦組み紐状曲面の概念を導入した。Nakamura の結果を精密化することにより、任意の結び目や絡み目は Seifert 曲面として平坦組み紐状曲面を持つことを示した。すなわち、平坦組み紐状曲面も、結び目や絡み目のひとつの表示といえる。平坦組み紐状曲面の観点からも結び目理論の研究が可能となる。組み紐状曲面の最小種数や平坦組み紐状曲面の最小種数は、結び目や絡み目の不変量になり、両者には自然な大小関係が成り立つ。ここで、proper 絡み目との距離を用いることにより両者の値を決定し、両者の間に任意に大きな差をもつような絡み目の構成に成功した。その他、平坦組み紐状曲面を用いることにより、絡み目の成分数、proper 絡み目からの距離、Arf 不変量、および Seifert 行列などをもとめるアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは通常のものより容易になっている。 第2章において、平坦組み紐状曲面から定義される flat braidzel length という結び目や絡み目の不変量を導入した。これは結び目や絡み目の複雑さを			

氏名	三浦 嵩広
表すひとつの指標になる。これの下からの評価を、canonical genus, flat braidzel genus, および成分数で与えた。これにより、flat braidzel length は Alexander 多項式の径間以上であることがわかった。この結果を用いて、無限個の絡み目について、flat braidzel length を決定することに成功した。具体的には、$(2, q)$ 型トーラス結び目とその鏡像の連結和の flat braidzel genus が $4q$ であることを決定した。また、Alexander 多項式が monic でない絡み目については、flat braidzel genus が Alexander 多項式の径間より大きいというより精密な評価を得ている。さらに、flat braidzel genus が5以下の結び目を決定した。 本研究により、結び目や絡み目の Seifert 曲面に関する新しい知見が得られている。また、今後の研究にも応用されるだろう新しい手法が開発されている。 本研究は、Seifert 曲面を用いたアプローチにより、結び目や絡み目の位相的構造を研究したものであり、結び目理論について重要な知見を得たものとして価値のある集積であると認める。よって、学位申請者の 三浦 嵩広 は、博士(理学)の学位を得る資格があると認める。	