Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2024-06-05

An Integrable Systems Approach to Constant Mean Curvature Surfaces and their Singularities

Ogata, Yuta

(Degree)
博士 (理学)
(Date of Degree)
2017-03-25
(Date of Publication)
2018-03-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲第6846号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1006846

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。

（別紙様式 3）

論 文 内 容 の 要 旨

氏　名　　緒方　勇太

専　攻　　数学

論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記すること。）

An Integrable Systems Approach to Constant Mean Curvature Surfaces and their Singularities

和訳：平均曲率一定曲面に対する可積分系的アプローチとその特異点

指導教員　　ラスマン・ウェイン

本論文は、平均曲率一定（CMC）曲面の構成法とその特異点論に関するものであり、可積分系の手法である DPW 法や Lax 対を用いて、曲面の解析を行ったものである。本論文の一つのキーワードである CMC 曲面は、シャボン玉の数学モデルとして広く知られ、その研究は古くから行われており、今もなお活発に研究が行われている。1866 年に K. T. Weierstrass は、正則関数を用いた積分公式によってユークリッド空間内の平均曲率一定 0 曲面（極小曲面）が構成できることを示した。この公式は「Weierstrass の表現公式」と呼ばれている。その後、ユークリッド空間内の「0 でない平均曲率一定曲面」の構成について研究が行われ、1998 年に J. Dorfmeister と F. Pedit と H. Wu の 3 人によって、Weierstrass の表現公式の一般化にあたる構成法が与えられた。彼らは、ある種の条件を満たす「正則関数のデータ」と無限次元リー群の行列分解である「岩澤分解」などを用いて、任意の CMC 曲面が構成できることを示した。この構成理論は「DPW 法」と呼ばれている。この DPW 法は、近年では様々な空間内の曲面の構成に応用され始めている。

本論文では、前半部分で、セミリーマン空間形であるローレンツ空間やドジッター空間、アンチドジッター空間内の空間的な CMC 曲面への DPW 法の応用を考え、構成理論の整備を行っている。また、これらの曲面が特異点を持つ場合に、「特異点の型判定法」を与えた。また、後半部分では、CMC 曲面を含めた曲面に関する「特異点の考察」、「変形理論」、「離散化」などの研究にも触れている。

本博士論文は、以下のように構成されている。

第一章では、Brander-Rossman-Schmitt によって与えられた「3 次元ローレンツ空間内の空間的な CMC 曲面」に対する DPW 法を、「3 次元ドジッター空間内やアンチドジッター空間内の空間的な CMC 曲面」の場合に応用し、一般化している。ただし、支配している可積分系の違いから、本章ではドジッター空間の場合は「平均曲率が 1 より大きい」という制限がある。

第二章では、第一章で考えた CMC 曲面が特異点を持つ場合について、特異点の解析を行っている。セミリーマン空間形内では、CMC 曲面は「特異点」をもつことが知られているが、本論文では、DPW 法で構成した CMC 曲面が特異点をもつ場合に「特異点の型判定法」を与えている。空間的な CMC 曲面上の特異点では、曲面の extended frame は定義できないが、本論文内では「s-スペクトラル変換」と呼ばれるフレーム変換を用いて、「カスプ状曲面」、「ツバメの尾」、「カスプ的交叉帽子」の特異点に対し、判定法を与えている。また、具体例の考察も行い、「Smyth 型曲面」の構成、特異点の解析を行っている。Smyth 型曲面の構成については、Painleve III 方程式との関係を示すことで、具体的な構成法を与えている。また、Smyth 型曲面の特異点については、Smyth 型曲面がカスプ状曲面、ツバメの尾、カスプ的交叉帽子を持っていることを示した。

第三章では、第一章で除外していた「平均曲率が 1 より小さい」ときの「ドジッター空間内の空間的な CMC 曲面」への DPW 法について考察している。第一章での DPW 法が sinh-Gordon 方程式の場合であるのに対し、このケースは cosh-Gordon 方程式の場合に相

当する。ここでは、第一章で用いた岩澤分解とは別の岩澤分解を用いることで、DPW 法が応用でき、平均曲率が 1 より小さい「ドジッター空間内の空間的な CMC 曲面」に対して、構成理論を与えた。

第四章では、第三章で考えた CMC 曲面が特異点を持つ場合について、特異点の解析を行っている。第二章で用いた「s-スペクトラル変換」が第三章で考えた CMC 曲面についても同様に応用できると証明し、「カスプ状曲面」、「ツバメの尾」、「カスプ的交叉帽子」の特異点に対し、判定法を与えている。また、第二章同様に、具体例の考察も行い、「Smyth 型曲面」の構成、特異点の解析を行っている。

第五章では、双曲空間内のカスプ状曲面について、その Gauss 写像の考察を行った。双曲空間内のカスプ状曲面の Gauss 写像が非退化特異点を持つ場合、その点が峰点であるか否かで、Gauss 写像自体もまた「カスプ状曲面」や「ツバメの尾」などの特異点をもつことを証明している。また、応用例として「Enneper 型平坦波面」を考え、「第一種峰点の有無」、「その Gauss 写像の特異点との関係」を考察している。

第六章では、リーマン空間形内の CMC 曲面や、セミリーマン空間形内の空間的な CMC 曲面の「孤立特異点」の研究を行っている。CMC 曲面や空間的な CMC 曲面の孤立特異点、特に「D4 型特異点」に注目し、解析した。本章内の結果として、リーマン空間形内の CMC 曲面やセミリーマン空間形内の空間的な CMC 曲面は、D4－特異点を持つことがあるが、D4+特異点は持たないことが証明されている。

第七章では、Enneper、Eisenhart、Nitsche らによって古典的に知られていた 3 次元ユークリッド空間内の「平面的曲率線をもつ極小曲面」の構成、変形理論を Liouville 方程式などを使った現代的な可積分系の立場から再考察した。また、その共役面である「Thomsen 曲面」に対しても同様の手法が適用でき、より簡潔な構成法を与えている。

第八章では、リーマン空間形内の CMC 曲面の離散版である「離散 CMC 曲面」に対し、その構成法である「離散 DPW 法」の応用や、新しい「離散 CMC 曲面」の構成を行っている。

（別紙１）

論文審査の結果の要旨

氏名	緒方　雄太		
論文題目	An Integrable Systems Approach to Constant Mean Curvature Surfaces and their Singularities（平均曲率一定曲面に対する可積分系的アプローチとその特異点）		
審査委員	区　分	職　名	氏　　　名
	主　査	教授	ラスマン　ウェイン
	副　査	教授	野海　正俊
	副　査	准教授	佐治　健太郎
	副　査		印
	副　査		印

要　旨

本論文は、平均曲率一定（CMC）曲面の構成法とその特異点論に関するものであり、可積分系の手法である DPW 法や Lax 対を用いて、曲面の解析を行ったものである。本研究は、非常に独創的であり、国内外の研究者がこの研究に深い興味を示しており、特に国立台湾大学とミュンヘン工科大学などの研究者が強い関心を示している。

本論文の一つのキーワードである CMC 曲面は、シャボン玉の数学モデルとして広く知られ、その研究は古くから行われており、今もなお活発に研究が行われている。1866 年に K. T. Weierstrass は、正則関数を用いた積分公式によってユークリッド空間内の平均曲率一定 0 曲面（極小曲面）が構成できることを示した。この公式は「Weierstrass の表現公式」と呼ばれている。その後、ユークリッド空間内の「0 でない平均曲率一定曲面」の構成について研究が行われたが、約 100 年間研究は進展しなかった。しかし、1998 年に J. Dorfmeister と F. Pedit と H. Wu の 3 人によって、Weierstrass の表現公式の一般化にあたる構成法が与えられた。彼らは、ある種の条件を満たす「正則関数のデータ」と無限次元リー群の行列分解である「岩澤分解」などを用いて、任意の CMC 曲面が構成できることを示した。この構成理論は「DPW 法」と呼ばれている。この DPW 法は、近年ではユークリッド空間だけではなく、球面や双曲空間内の CMC 曲面の構成に応用され、最新の研究では、セミリーマン空間型などにも DPW 法が応用され始めている。

本論文では、前半部分で、セミリーマン空間型であるローレンツ空間やドジッター空間、アンチドジッター空間内の空間的な CMC 曲面への DPW 法の応用を考え、構成理論の整備を行っている。また、これらの曲面が特異点を持つ場合に、特異点をもつ場合に「特異点の判定法」を与えた。また、後半部分では、CMC 曲面を含めた曲面に関する「特異点の考察」、「変形理論」、「離散化」などの研究にも触れている。

本博士論文は、以下のように構成されている。

第一章では、Brander-Rossman-Schmitt によって与えられた「3 次元ローレンツ空間内の空間的な CMC 曲面」に対する DPW 法を、「3 次元ドジッター空間内やアンチドジッター空間内の空間的な CMC 曲面」の場合に応用し、一般化している。ただし、支配している可積分系の違いから、本章ではドジッター空間の場合は「平均曲率が 1 より大きい」という制限がある。

氏名	緒方　勇太

第二章では、第一章で考えた CMC 曲面が特異点を持つ場合について、特異点の解析を行っている。ドジッター空間などのセミリーマン空間型内では、CMC 曲面は「特異点」をもつことが知られているが、本論文では、DPW 法で構成した CMC 曲面が特異点をもつ場合に「特異点の判定法」を与えている。空間的な CMC 曲面上の特異点では、曲面の extended frame は定義できないが、本論文内では「s-スペクトラル変換」と呼ばれるフレーム変換を用いて、特異点の情報を引き出すことで「カスプ状曲面」、「ツバメの尾」、「カスプ的交叉帽子」の型判定法を与えている。また、具体例の考察も行い、「Smyth 型曲面」の構成、特異点の解析を行っている。Smyth 型曲面の構成については、Painleve III 方程式との関係を示すことで、具体的な構成法を与えている。また、Smyth 型曲面の特異点については、Smyth 型曲面がカスプ状曲面、ツバメの尾、カスプ的交叉帽子を持っていることを示した。

第三章では、第一章で除外していた「平均曲率が 1 より小さい」ときの「ドジッター空間内の空間的な CMC 曲面」への DPW 法について考察している。第一章での DPW 法が Sinh-Gordon 方程式の場合であるのに対し、このケースは Cosh-Gordon 方程式の場合に相当する。ここでは、第一章で用いた岩澤分解とは別の岩澤分解を用いることで、DPW 法が応用でき、平均曲率が 1 より小さい「ドジッター空間内の空間的な CMC 曲面」に対して、完全な構成理論を与えた。

第四章では、第三章で考えた CMC 曲面が特異点を持つ場合について、特異点の解析を行っている。第二章で用いた「s-スペクトラル変換」が第三章で考えた CMC 曲面についても同様に応用できると証明し、特異点の情報を引き出すことで「カスプ状曲面」、「ツバメの尾」、「カスプ的交叉帽子」の型判定法を与えた。また、第二章同様に、具体例の考察も行い、「Smyth 型曲面」の構成、特異点の解析を行っている。

第五章では、双曲空間内のカスプ状曲面について、その Gauss 写像の考察を行った。双曲空間内のカスプ状曲面の Gauss 写像が非退化特異点を持つ場合、その点が峰点であるか否かで、Gauss 写像自体もまた「カスプ状曲面」や「ツバメの尾」などの特異点をもつことを証明している。また、応用例として「Enneper 型平坦波面」を考え、「第一種峰点の有無」、「その Gauss 写像の特異点との関係」を考察している。

第六章では、リーマン空間形内の CMC 曲面や、セミリーマン空間形内の空間的な CMC 曲面の「孤立特異点」の研究を行っている。これまでの先行研究の多くでは、corank1 特異点の研究が活発に行われ、「極大面」や「extended CMC 曲面」などクラスが考えられてきた。しかし、孤立特異点についてはあまり研究が進んでいなかった背景がある。ここでは、CMC 曲面や空間的な CMC 曲面の孤立特異点、特に「D4 型特異点」に注目し、解析した。本章内の結果として、リーマン空間形内の CMC 曲面やセミリーマン空間形内の空間的な CMC 曲面は、D4ー特異点を持つことがあるが、D4+特異点は持たないということが証明されている。

第七章では、Ennper、Eisenhart、Nitsche らによって古典的に知られていた 3 次元ユークリッド空間内の「平面的曲率線をもつ極小曲面」の構成、変形理論を Liouville 方程式などを使った現代的な可積分系の立場から再考察した。また、その共役面である「Thomsen 曲面」に対しても同様の手法が適用でき、より簡潔な構成法を与えている。

第八章では、リーマン空間形内の CMC 曲面の離散版である「離散 CMC 曲面」に対し、その構成法である「離散 DPW 法」の応用や、新しい「離散 CMC 曲面」の構成を行っている。

本研究は、CMC 曲面の構成法とその特異点論に関し、多岐に渡り、興味深い結果を与えたものであり、CMC 曲面に関して重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者　緒方　勇太は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。