Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations

Konnai, Shotaro

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2017-03-25
(Date of Publication)
2018-03-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲第6847号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1006847

論 文 内 容 の 要 旨

氏　　名　近内　翔太郎

専　　攻　数学

論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記すること。）

Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations

(大久保型常微分方程式系のあるクラスに対する接続係数とモノドロミー表現)

指導教員　野海　正俊

本論文では,論文[4], [5]に基づいて横山リストと呼ばれる大久保型微分方程式系のクラスに対して大久保標準解行列のモノドロミー行列と接続係数の明示的な表示を与える。微分方程式の全ての特異点が確定特異点である線型常微分方程式を Fuchs 型方程式と呼ぶ。この種の方程式系の解は様々な特殊関数を含むため、Fuchs 型方程式を分類し,さらにそれらの解を解析することは微分方程式における中心的な課題の一つである。その中でも,大久保[6]によって導入された大久保型方程式は,この分野では最も基本的な微分方程式の一つである。

大久保型方程式が持つ良い性質はいくつかある。例えば,大久保型方程式においては,各特異点における局所的な解の挙動やモノドロミーを方程式の係数を使って簡単に記述することができる。最も大きな特徴は,各有限特異点における非正則解を集めた大久保標準解行列と呼ばれる解行列の存在である。大久保[6]は,この大久保型方程式特有の解行列の基本的な性質を研究し,その行列式公式を明示的に導き,一般に大久保標準解行列が解の基本行列となることを導いた。この意味で,大久保標準解行列は大久保型方程式の大域解析に対し非常に有効な手段の一つである。

大久保型方程式の分類に関しては,横山による研究[11]がある。横山は既約リジッドかつ各有限特異点の解の非自明な特性指数が全て相異なる大久保型方程式の分類を行い,これが I, I*, II, II*, III, III*, IV, IV*の 8 つの型で尽くされていることを明らかにした。原岡は[1], [2]においてこの横山のリストに対して方程式の標準形を構成し,その大久保標準解行列に対するモノドロミー表現を,対角行列による共役変換を除いて決定した。しかし,その対角行列の因子を決定することは,未解決の問題として残されていた。本学位論文では,この対角行列の因子も含めて,大久保標準解行列に対するモノドロミー行列を明示的に決定する。この問題は,大久保型方程式の各特異点の非正則解の間の接続係数を決定することと同値であり,本論文ではそれを Schlesinger 型方程式に対する middle convolution を用いて解決する。

Middle convolution は,いわゆる Katz 理論において最も重要な変換である。Katz[3]は任意の既約リジッドな局所系は addtion と middle convolution を有限回組み合わせることで階数 1 の局所系に簡約される,ということを示した。これはその逆,つまり任意の既約リジッドな局所系が階数 1 の局所系から構成できることも意味しており,微分方程式の変換による構成を考える上で極めて重要な結果である。

この Katz の結果を受けて,Dettwiler-Reiter[7],[8]は Katz の 2 つの操作を Schlesinger 型方程式とそのモノドロミー表現に適用できるように定式化を行った。そして,Katz の結果の類似として,任意の既約リジッドな Schlesinger 型方程式とそのモノドロミー表現が階数 1 の対応物から addtion と middle convolution を有限回適用することで構成できることを示した。従って,本論文で考察する横山リストの微分方程式も,すべてこれらの操作によって 1 階の Schlesinger 型方程式から構成することができる。

本学位論文では,addition と middle convolution を用いて横山リストの大久保型方程式の標準形及びその大久保標準解行列を帰納的に構成し,次のような手続きによって非正則解の

間の接続係数を決定する。まず,一般の Schlesinger 型微分方程式及びその解の基本行列に対して middle convolution を施して,変換によって得られる微分方程式とその解の基本行列の具体的な構成方法を Dettweiler-Reiter[8]の方法に基づいて与える。次いで,大久保型方程式に対する addition と middle convolution について解析する。一般に,middle convolution を施した方程式とそのモノドロミー表現を明示的に表示することは困難である。本論文では横山リストがある特定の組み合わせによる addition と middle convolution の構成できることに注目して,その問題を解決し,構成される方程式とそのモノドロミー表現に対する明示的な公式を与える。そして,最後にこの方法を繰り返し適用することで,横山リストの方程式の標準形,その大久保標準解行列に対するモノドロミー行列,接続係数を帰納的に求める。

最後に本論文の内容に関連した研究のいくつかの注意を与えておく。Katz 理論やそれに関連する手法によって接続問題を解決する方法はいくつかある。横山[13]は彼の拡大と呼ばれる変換によって得られる大久保型方程式について,解の間の接続係数の変化を追跡する方法を提示している。本論文を含め,Dettweiler-Reiter や横山の結果は連立系の微分方程式に関する結果であるが,単独高階の微分方程式に関する Katz 理論については,解の接続問題を含めて大島[9]が詳しく論じている。

参考文献

[1] Y. Haraoka: Canonical forms of differential equations free from accessory parameters SIAM**25** (1994),1203-1226

[2] Y. Haraoka: Monodromy representations of systems of differential equations free from accessory parameters SIAM **25** (1994),1595-1621

[3] N.M. Katz: *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, Princeton, 1996.

[4] S. Konnai: Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations, to appear in Funkcial. Ekvac. (arXiv:1606.07187, 37 pages).

[5] S. Konnai: Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations, II (arXiv:1611.07200, 17 pages).

[6] K. Okubo: *On the Group of Fuchsian Equations*, Seminar Reports of Tokyo MetropolitanUniversity, 1987.

[7] M. Dettweiler and S. Reiter: An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761-798.

[8] M. Dettweiler and S. Reiter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, J. Algebra **318** (2007), 1-24.

[9] T. Oshima: Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs **28**, Mathematical Society of Japan, 2012.

[10] T. Oshima: Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation, Opuscula Math **35** (2015), 665-688

[11] T. Yokoyama: On an irreducibility condition for hypergeometric systems, Funkcial. Ekvac. **38** (1995), 11-19

[12] T. Yokoyama: Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy, Math. Nachr. **279** (2006),No. 3 327-348

[13] T. Yokoyama: Recursive Calculation of Connection Formulas for Systems of Differential Equations of Okubo Normal Form, J. Dyn Control Syst. **20** (2014), 241-292

（別紙１）　論文審査の結果の要旨

氏名	近内 翔太郎		
論文題目	Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations (大久保型常微分方程式系のあるクラスに対する接続係数とモノドロミー表現)		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	野海 正俊
	副　査	教授	山田 泰彦
	副　査	教授	ラスマン ウェイン
	副　査	准教授	小池 達也
	副　査		印

要　旨

リーマン球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の有理的な線型常微分方程式で，特異点が全て確定特異点であるものを Fuchs 型微分方程式と呼ぶ．その中でも，Schlesinger 型方程式

$$(S)\qquad \frac{d}{dx}Y=\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-t_i}Y;\quad A_i\in\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})\ \ (i=1,\dots,r)$$

や，大久保型方程式

$$(O)\qquad (xI_n-T)\frac{d}{dx}Y=AY;\quad T=\mathrm{diag}(t_iI_{n_i})_{i=1}^{r},\ \ A\in\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$$

は，種々の代数的操作を許容する Fuchs 型微分方程式のクラスとして重要である．このような微分方程式では，各特異点における局所的な解の挙動や多価性を，方程式の係数を用いて簡明に記述することができる．本学位論文の研究対象である大久保型方程式においては，有限特異点 $x=t_i$ $(i=1,\dots,r)$ の各々から非正則解を集めて標準的な解行列を構成することができる．この大久保標準解行列の存在は，大久保型方程式を特徴的付ける性質であって，微分方程式の大域解析における大久保型方程式の重要性の根拠でもある．

Fuchs 型微分方程式には，原理的にはモノドロミー表現 (局所系) から元の微分方程式を復元できるという著しい性質がある．これに関連して，Katz (1995) は，リジッドで既約な局所系は，「中間畳込み」と呼ばれる操作の繰返しで，1 次元の局所系から帰納的に構成できることを示した．また Dettweiler–Reiter (2007) は，この構成法を Schlesinger 型微分方程式とそのモノドロミー表現の枠組みで再定式化した．これは原理的には，リジッドで既約な Schlesinger 型方程式はすべて，Euler 積分変換を繰返すことで 1 階の方程式から帰納的に得られることを意味する．しかし，解の基本系の構成に中間畳込みを適用する具体的な方法は，必ずしも明確にされていなかった．

大久保型方程式 (O) において，ブロック行列 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{r}$ の各対角ブロック A_{kk} が n_k 個の相異なる固有値をもつという条件を課すと，リジッドかつ既約なものは，ブロック分けを指定する分割 $(n_1,\dots,n_r)$ と，A の固有値の重複の型を表す分割 $(m_1,\dots,m_q)$ によって，$(\mathrm{I})_n, (\mathrm{I}^*)_n, (\mathrm{II})_{2n}, (\mathrm{II}^*)_{2n}, (\mathrm{III})_{2n+}, (\mathrm{III}^*)_{2n+1}, (\mathrm{IV})_6, (\mathrm{IV}^*)_6$ の 8 つの型に分類できることが知られている (横山 1995，本論文の §2, (2.2))．この横山のリストの方程式の各々に対して，原岡 (1994) は，係数行列 A とモノドロミー表現の標準形を構成した．しかし，

氏名	近内 翔太郎

大久保標準解行列のモノドロミー行列を決定するには，有限特異点の非正則解の間の接続係数を決定する困難を克服する必要があり，この基本問題は未解決の状態であった．

本学位論文の主結果は，横山リストの大久保型方程式の全てに対して，非正則解の間の接続係数のガンマ函数による明示公式を構成し，それによって大久保標準解行列のモノドロミー行列を完全に決定したことである (§2, Theorems 2.7–2.12)．本論文では，横山リストの大久保型方程式が中間畳込みの方法を用いて帰納的に構成できることに着目して，非正則解の間の接続問題を，中間畳込みの各段階で接続係数がどのように変更されるかを追跡することによって解決している．

本論文の構成は以下の通りである．§1 で大久保型方程式と大久保標準解行列，その接続行列とモノドロミー行列について基本事項を整理した後，§2 で横山リストに対する本論文の主結果が述べられている．§3 では，一般の Schlesinger 型方程式 (S) に中間畳込みを施して新しい Schlesinger 型方程式 (S') を構成する際，(S) の解の基本系から (S') の解の基本系を積分変換によって具体的に構成する方法を考察し，§4 では，その応用として，大久保型方程式 (O) を中間畳込みと加法の組合せで大久保型方程式 (O') に変換する場合に，(O') の非正則解の間の接続係数を元の (O) の非正則解の間の接続係数から帰納的に決定する方法を論じている．その方法を横山リストの大久保型方程式に適用して，接続係数とモノドロミー行列を決定する具体的な手続きを示したのが §5 である．

以上のように本学位論文は，Fuchs 型微分方程式の解析的研究を大幅に進展させ，大久保型微分方程式に係わる基本問題の一つを解決した学術的価値の高いものである．よって学位申請者 近内翔太郎 君は，博士 (理学) の学位を得る十分な資格を有すると認める．