Relations among Alexander-Conway polynomials of Turk’s head links

Takemura, Atsushi

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2018-03-25
(Date of Publication)
2019-03-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲第7116号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1007116

(別紙様式 3)

論 文 内 容 の 要 旨

氏　名　武村 敦

専　攻　数学

論文題目　Relations among Alexander-Conway polynomials of Turk's head links

(タークセット絡み目のアレクサンダー・コンウェイ多項式間の関係)

指導教員　中西 康剛

3 次元球面内に埋め込まれた複数の単純閉曲線を絡み目という。3 次元球面内に埋め込まれた torus 上で、メリディアンの方向に m 回、ロンジチュードの方向に n 回だけ回って戻ってくるような絡み目を (m,n)-torus 絡み目という。標準的な (m,n)-torus 絡み目の射影図を、交代絡み目になる様に交点の上下を交換した射影図を持つ絡み目を (m,n)-Turk's head 絡み目という。torus 絡み目と Turk's head 絡み目は射影図はよく似ているが、torus 絡み目と違い、(m,n)-Turk's head 絡み目と (n,m)-Turk's head 絡み目は異なる絡み目となっている事が知られている。この論文では、Turk's head 絡み目の多項式不変量の持つ二つの性質について述べる。

第 2 章から第 5 章までは、この論文の一つ目の定理について取り扱う。(m,n)-torus 絡み目は (n,m)-torus 絡み目と同じ絡み目になることはよく知られている。よって、(m,n)-torus 絡み目と (n,m)-torus 絡み目の多項式不変量は完全に一致する。一方、(m,n)-Turk's head 絡み目と (n,m)-Turk's head 絡み目は異なる絡み目でそれらの多項式不変量も異なる。だが、この二つの絡み目の Conway 多項式の間に特定の性質があることを発見した。それは以下のような性質である。$n=2,3$ のとき、(m,n)-Turk's head 絡み目と (n,m)-Turk's head 絡み目の Conway 多項式の z^i の項の係数は、$i \equiv 0,1 \pmod 4$ のとき一致し、$i \equiv 2,3 \pmod 4$ のとき符号が逆になる。ちなみにこの性質は Jones 多項式や Alexander 多項式では成立せず、今の所 Conway 多項式でのみ成立している性質であることが特徴である。

第 2 章は、結び目に関する基本的な定義を説明している。最初に、絡み目に関するブレイド表示について定義している。その定義を用いて Turk's head 絡み目をブレイド表示で表現している。そして、Conway 多項式をスケイン関係式を使って定義している。

第 3 章は、$n=2$ において一つ目の定理が成り立つことを証明している。証明の準備として、$(m,2)$-Turk's head 絡み目と $(2,m)$-Turk's head 絡み目の Conway 多項式を m に関する 3 項間漸化式で個別に表す。その漸化式を証明するためにスケイン関係式を用いている。その漸化式を用いて、それぞれの項の係数を確認すると一つ目の定理の内容を満たしていることが分かる。

第 4 章は、$n=3$ において一つ目の定理が成り立つことを証明をしている。証明の準備として、$(m,3)$-Turk's head 絡み目と $(3,m)$-Turk's head 絡み目の Conway 多項式を m に関する 3 項間漸化式で個別に表す。そして、第 3 章と同様に漸化式を用いて、証明を行っている。

第 5 章は、$n \geq 4$ のとき、一つ目の定理と同様の内容が成立するという予想を述べている。$n=3$ のときは、$n=2$ のときと比べて漸化式を求める過程が煩雑になっている。$n \geq 4$ のときはさらに複雑になると思われる。現在、同様の方法で漸化式を求める方法は判明していない。

第 6 章から第 9 章までは、この論文の二つ目の定理について取り扱う。torus 絡み目の Alexander 多項式の求め方はすでに知られている。その Alexander 多項式を用いて、次の結果が分かっている。任意の正の整数 a,b,m,n に対して、(am,bn)-torus 絡み目の Alexander 多項式は (m,n)-torus 絡み目の Alexander 多項式で割り切ることができる。これと似た内容の定理が Turk's head 絡み目で成立することを発見した。それがこの論文の二つ目の定理である。それは以下のようなものである。任意の正の整数 a,b,m,n に対して、(am,bn)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式は (m,n)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式で割り切ることができるというものである。ちなみにこの性質は Jones 多項式では成立していないが、変数を変換しただけの Conway 多項式では成立しているのが特徴である。

ここで、$a=1$ の場合に着目する。このとき、(m,bn)-Turk's head 絡み目は order b の periodic 絡み目となっている。periodic 絡み目の多変数 Alexander 多項式は因子となる絡み目の Alexander 多項式で割り切れ

ることが知られている。よって (m, bn)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式は (m,n)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式で割り切れることが分かる。この論文では、$a=1$ の場合は別の観点から証明を行っている。

第 6 章は、Turk's head 絡み目の Seifert 行列について述べている。(m,n)-Turk's head 絡み目の Seifert 行列は $(m-1)(n-1)$ 正方行列である。ここで特定のホモロジー群の基底をとることにより、次の章で扱いやすい Seifert 行列を作っている。

第 7 章は、Turk's head 絡み目の Alexander 多項式について述べている。第 6 章で求めた Seifert 行列は $(m-1)(n-1)$ 正方行列とサイズが大きい。この章では、この $(m-1)(n-1)$ 正方行列の行列式が、よりサイズの小さい $n-1$ 正方行列 P_{mn} の行列式で表すことができることを証明している。

第 8 章は、任意の正の整数 c に対して、(cm,n)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式が (m,n)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式で割り切れることを証明する。ここでは、P_{mn} が m に関する Fibonacci 数列に類似した性質を持つことを利用している。

第 9 章は、任意の正の整数 c に対して、(m,cn)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式が (m,n)-Turk's head 絡み目の Alexander 多項式で割り切れることを証明する。ここでは、P_{mn} がとある $n-1$ 正方行列 B_n を変数とする多項式で表現できることを利用する。これにより、P_{mn} が B_n の一次式の積に因数分解できる。ただし、個々の因数の定数項は非常に複雑になっているので、最後に基本対称式の性質を用いて証明を完了している。

（別紙１）　　　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	武村　敦
論文題目	Relations among Alexander-Conway polynomials of Turk's head links （タークセット絡み目のアレキサンダー・コンウェイ多項式間の関係）

審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	中西　康剛
	副　査	教授	福山　克司
	副　査	教授	佐藤　進
	副　査		
	副　査		印

要　旨

３次元球面内の有限個の単純閉曲線（＝円周の同相像）からなる部分図形を絡み目（link）と呼ぶ。特に、１個の単純閉曲線からなる部分図形を結び目(knot）と呼ぶ。３次元空間内で自己交叉することなく変形して移りあうときに、２つの絡み目は同型であるという。結び目理論の基本問題とは、「与えられた２つの結び目や絡み目が同型であるかないかを判別せよ」というものである。現在に至るまで、判別するアルゴリズムは知られていない。基本問題へのひとつのアプローチとして、不変量の研究がある。同型な絡み目には同じ値をとるような、絡み目の集合からの写像を不変量と呼ぶ。不変量の値が異なれば、絡み目が同型でないことが判別できる。こうした不変量の研究が結び目理論の中心的な課題のひとつとなっている。新しい不変量の開発も課題であるし、知られている不変量について絡み目のどのような代数的、幾何的、位相的性質が反映しているのかを究明することも課題である。本論文はこのような流れの枠組みの中で、Alexander-Conway 多項式と呼ばれる多項式不変量を扱っている。Alexander 多項式は、1920 年代に発見され、結び目理論において中心的な役割を果たしてきた不変量であり、今もなお、その役割は大きい。Conway 多項式は、1970 年頃に発見された不変量であり、Alexander 多項式とは変数変換で移りあうことが知られている。その後、1980 年代に多くの多項式不変量が発見された。その中には Jones 多項式があり、本論文では比較対象として扱われている。例えば、交代結び目であればその Alexander 多項式の係数は正負が交代的に現れることの発見は、こうした観点からの研究としてよく知られている。本論文では、タークセット絡み目（Turk's head link）の Alexander 多項式、Conway 多項式について下記の成果をあげている。

本論文は９つの章からなる。第１章はタークセット絡み目の定義とともに、２つの整数の対 m, n を用いて TH(m, n) で表せることや本論文の成果の紹介が簡潔に述べられている。

（別紙１）

氏名	武村　敦

第２章から第５章までは、ひとつ目の成果を取り扱っている。異なる整数 m, n について、タークセット絡み目 TH(m, n), TH(n, m) は同型でなく、その Conway 多項式も異なる。だが、その Conway 多項式の i 次の係数に注目すると、$i = 0, 1 \pmod 4$ のとき一致し、$i = 2, 3 \pmod 4$ のとき絶対値が一致するが符号が異なる。このことを $n = 2, 3$ のときに証明することに成功した (Theorem 1.1)。ちなみに、このようなことは Alexander 多項式や Jones 多項式では成立していない。証明について、 Conway 多項式が満たすスケイン関係式を用いて、それぞれの Conway 多項式を３項間漸化式で個別に表現し、それぞれの項の係数を確認して行っている。 n が４以上の場合にも成り立つことが予想され、実際に計算すると反例が見受けられない。今後に解決するべき問題として挙げられている。

第６章から第９章までは、ふたつ目の成果を取り扱っている。タークセット絡み目の Alexander 多項式 (Conway 多項式) を具体的に記述することは困難である。整数 a, b, m, n について、タークセット絡み目 TH(am, bn) の Alexander 多項式 (Conway 多項式) は、タークセット絡み目 TH(m, n) の Alexander 多項式 (Conway 多項式) で整除できることを証明した (Theorem 1.2)。ちなみに、トーラス絡み目の Alexander 多項式は容易に記述でき、同様の性質を持っていることがよく知られている。また、タークセット絡み目 TH(m, bn) の Alexander 多項式は、タークセット絡み目 TH(m, n) の Alexander 多項式で整除できることは、本論文とは異なるアプローチですでに証明がなされている。証明について、Seifert 行列を用いて Alexander 多項式が得られることから、特別な形の行列式で表現し、Fibonacci 型の性質を持つことを示すことを用いて行っている。

本論文は、絡み目の多項式不変量について、その係数に現れる性質を研究したものであり、結び目理論における重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者の武村敦は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。