



Algorithms for Computing Minimal Associated Primes of Polynomial Ideals

Aoyama, Toru

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2018-03-25

(Date of Publication)

2019-03-01

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲第7117号

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1007117>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



(別紙様式 3)

論文内容の要旨

氏名 青山 暢

専攻 数学専攻

論文題目 (外国語の場合は、その和訳を併記すること。)

Algorithms for Computing Minimal Associated Primes of Polynomial Ideals

(多項式イデアルの極小付属素イデアル計算アルゴリズム)

指導教員 高山 信毅

本論文は多項式イデアルの極小付属素イデアルを計算するアルゴリズムを2つ提案するものである。川添・野呂による準素分解アルゴリズムは、冗長成分を生じない高速なアルゴリズムであるが、極小付属素イデアル計算がボトルネックになる場合が多い。その解決を図ることが本研究の動機となっている。

第1章では本論文に用いられる基礎的事実として、多項式イデアルを定義するための多項式環、多項式間の計算に必要な不可欠な単項式順序、多項式イデアルに関する計算において有用な性質を持つグレブナー基底、それぞれに関する定義、定理、命題が記述されている。

第2章では本論文が対象とする極小付属素イデアルに関する定義を与え、極小付属素イデアル計算の基礎となる0次元イデアルの分解アルゴリズム、本論文が提案する2アルゴリズムが立脚する極小付属素イデアル計算アルゴリズムであるLaplagneのアルゴリズムを紹介している。

第3章では2項式イデアルを対象にした新しい極小付属素イデアル計算アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムはEisenbud-SturmfelsとKahleによって提案、実装された2項式イデアルの極小付属素イデアル計算アルゴリズムとLaplagneのアルゴリズムを組み合わせて構成されている。Eisenbud-SturmfelsとKahleのアルゴリズムはセルラー分解と呼ばれる比較的計算の容易な中間分解を用いているが、冗長成分を生じる可能性があり、またその後の計算で係数体の適当な拡大が必要になる場合がある。一方でLaplagneのアルゴリズムは一切の冗長成分を生じずに計算を完了することができるが、0次元化のために有理関数体を係数体として扱う部分が計算のボトルネックとなる場合がある。これらの特長を組み合わせ、改良したセルラー分解を中間分解に使い、計算の大部分がsaturation計算である冗長成分を生じないアルゴリズムを構成した。この新しいアルゴリズムに対し、入力を変形するサブルーチン、saturation計算に用いる多項式の選択法、saturation計算法の工夫、斉次イデアルを対象としたアルゴリズム、等の改良を加え、代数計算ソフトウェアを用いて実装し、Kahleのアルゴリズム、Laplagneのアルゴリズム、本アルゴリズム、3者による極小付属素イデアル計算の比較実験を行い、計算機上でのタイミングデータを示した。改良したセルラー分解は2項式イデアルに対して有用な中間分解を行い、本アルゴリズムは他アルゴリズムと比較しても高速に分解を行えることが観察できる。

第4章ではモジュラーアルゴリズムをLaplagneのアルゴリズムに適用して、有理数係数上の多項式イデアルの極小付属素イデアルを計算する新しいアルゴリズムを提案する。モジュラーアルゴリズムは多項式イデアルに関する計算が遅くなる原因の一つである係数膨張を避けるための計算技法であり、まず計算対象の環から別の環への射影を考える。その射影による計算対象の像について計算を行い、その計算結果から元の環上での計算結果を復元する。Idrees-Pfister-Steidelもまた有理数係数を有限体係数に移すモジュラーアルゴリズムを極小付属素イデアル計算に応用したが、本アルゴリズムはLaplagneのアルゴリズムの計算過程に現れる有理関数係数を代入操作により有理数係数に移すモジュラーアルゴ

リズムを利用している。極小付属素イデアル計算の計算過程では多項式の因数分解が行われるが、一般に有限体係数上での因数分解から有理数係数上での因数分解を復元することは困難である。実際に Idrees-Pfister-Steidel のアルゴリズムでは因数分解を行う前に復元を行うことでこの問題を解決している。本アルゴリズムでは既約な多変数多項式の変数に整数を代入して作られた 1 変数以上の多項式は高確率で既約性を保つという性質を利用してこの問題を解決し、高確率で復元可能なモジュラーアルゴリズムとなっている。また、代入操作により変数の数を減らすことでも計算の高速化を図っている。一般にモジュラーアルゴリズムでは用いた射影による像の計算結果が復元可能かどうかは事前に判断できない場合が多い。そのため射影を選ぶ基準として計算対象に合わせた luckiness を定義する必要がある。本論文では複数の先行研究で定義されたグレブナー基底計算に対する luckiness を参考に極小付属素イデアル計算に対する luckiness を定義し、lucky な射影は十分多く存在するためランダムな選択によっても高確率で lucky な射影が得られ、高確率でアルゴリズムは停止し、停止した場合には出力が正しいことを証明した。本アルゴリズムは代数計算ソフトウェアを用いて実装され、ソフトウェア上に汎用アルゴリズムとして組み込まれている Laplagne のアルゴリズムと極小付属素イデアル計算の比較実験を行い、計算機上でのタイミングデータを示した。汎用アルゴリズムでは実用的な時間内に分解が完了しないイデアルに対しても、本アルゴリズムは分解が可能である場合が少なくないことが観察できる。

氏名	青山暢		
論文題目	Algorithms for Computing Minimal Associated Primes of Polynomial Ideals (多項式イデアルの極小付属素イデアル計算アルゴリズム)		
審査委員	区分	職名	氏名
	主査	教授	高山 信毅
	副査	教授	青木 敏
	副査	准教授	谷口 隆
	副査	教授	野呂 正行
要 旨			
<p>本論文は、多項式イデアルの極小付属素イデアルの効率的計算法に関するものである。</p> <p>ネーター環のイデアルが有限個の準素イデアルの共通部分として表現できることはよく知られている。準素イデアルの根基は素イデアルである。イデアル I が $I = \cap Q_i$ と準素イデアル Q_i の共通部分として表され、$P_i = \sqrt{Q_i}$ がすべて相異なり、かつどの Q_i も省けないときこの表示を I の最短準素分解と呼ぶ。このとき Q_i は一般に一意性はないが $\{P_i\}$ は集合として一意に定まる。P_i を I の付属素イデアルとよび、それらの中で包含関係で極小なもののが極小付属素イデアル (以下極小素因子と呼ぶ) である。I の極小素因子を P_1, \dots, P_m とすれば $\sqrt{I} = \cap_{i=1}^m P_i$ となる。$V(I) = V(\sqrt{I}) = \cup_{i=1}^m V(P_i)$ より、I の共通零点 $V(I)$ を求めるには極小素因子を求めればよい。また、多項式イデアルに対し最短準素分解を求めるアルゴリズムはいくつか知られているが、いずれも途中で、あるイデアルの極小素因子を直接、間接に求める必要が出てくる。その計算は、もとの係数体、あるいはその上の有理関数体上での消去イデアル計算や多項式因数分解など計算量の大きい計算が必要となり、計算機上で実際に計算を行った場合に、極小素因子計算の部分で続行が困難になる場合がしばしば生ずる。故に、極小素因子計算を効率化することは応用上重要である。本論文においては、2 つの場合において、この計算を効率的に行う方法を提案している。</p> <p>第 1 章、第 2 章は準備である。第 1 章で多項式環における項順序、およびグレブナー基底に関する基本的事項について解説している。また、第 2 章以降で用いられる、イデアル操作のための基本ツールをまとめて紹介している。第 2 章では、まず 0 次元イデアルの極小素因子の計算法について述べ、Laplagne による、一般のイデアルに対する極小素因子計算アルゴリズムについて解説している。イデアルの極小素因子計算法としては、splitting tool $I = (I : f^\infty) \cap (I + \langle f^s \rangle)$ ($I : f^\infty = I : f^s$) に基づく方法が良く知られているが、この方法では $I + \langle f^s \rangle$ から冗長因子が生ずる可能性がある。これを防ぐため、$I : f^\infty$ のみを分解していく方法が Laplagne アルゴリズムである。この方法は第 3, 4 章で展開される新しいアルゴリズムの基礎であるため、ここで簡単に紹介している。</p> <p>第 3 章においては、2 項式で生成されるイデアル (2 項式イデアル) の極小素因子計算を効率よく行うアルゴリズムを提案している。2 項式イデアルは数多くの準素分解成分を持つ場合があり、極小素因子計算も、冗長成分を生じにくい、効率がよ</p>			

氏名 | 青山暢

いものが必要となる。2項式イデアルの極小素因子計算法としては Eisenbud らによる Cellular 分解とよばれる中間分解を用いる方法が知られているが、冗長性を生ずる可能性があり、また最終的に極小素因子を得るには係数体の代数拡大が必要となる場合がある。また、Laplagne による方法は冗長成分は生じないが、途中で、変数のいくつかをパラメタとして係数体に回す 0 次元化を行う必要がある。本論文では、冗長性を生じないよう、ベースとなるアルゴリズムとしては、saturation のみを用いる Laplagne タイプのものとし、改良した Cellular 分解による中間分解のみ行う、という両者を組み合わせたものを提案した。中間分解の結果からさらに Laplagne アルゴリズムで極小素因子計算をする必要があるが、中間分解の結果がそのまま素イデアルを与えることが多いため、結果として高速化する。実際には、入力に対する前処理、saturation の計算法の工夫、斉次イデアルの場合の改良など細かい工夫によりいくつかの例に対し実際に高速に計算できることを実証している。

第 4 章においては、有理数体上の多項式環の一般のイデアルの極小素因子を、イデアルの生成系に対し、いくつかの変数に値を代入して得られる多項式集合を生成系とするイデアルの極小素因子から、中国剰余定理による貼り合わせ、および多項式-有理式変換アルゴリズムによってもとのイデアルの極小素因子の候補を計算するアルゴリズムを提案している。このように、係数環から別の係数環への準同型による像を用いたアルゴリズムを一般にモジュラーアルゴリズムと呼んでいる。既存のアルゴリズムとしては、整数環から有限体への射影を用いる方法が知られているが、この方法では多項式の既約性が多くの場合で保存されないため、像イデアルを分解してから貼り合わせることが困難であった。本論文で提案するように、0次元化により変数のいくつかをパラメタとして有理関数体上の 0 次元イデアルと見たうえで、それらのパラメタに値を代入する射影を用いれば、多くの場合で多項式の既約性が保存され、高い確率で像イデアルの極小素因子が、もとのイデアルのその像となる。より詳しく言えば、このためには、もとのイデアルの極小素因子の像が相異なる素イデアルとなり、かつそれらの共通部分がもとのイデアルの像の根基と等しくなることが必要となるが、射影を定める代入値の範囲を大きくしていくとき、これらをすべて満たすような代入値を得る確率が 1 に近づくことが示される。このアルゴリズムを計算代数ソフトウェア Singular 上に実装し、通常 Laplagne アルゴリズム実装では計算が困難ないくつかの例について、実際に高速に極小素因子が計算できることを実証した。

以上のように、本研究は、係数膨張は生じないが素因子を多数持つ場合が多い 2 項式イデアル、および、係数膨張により計算が困難になる場合が多い一般のイデアルという異なる二つの場合に対しそれぞれ有効な計算方法を提案しており、価値ある集積と認められる。よって、学位申請者 青山 暢は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。