Integrable structures of the Killing equation

Miyamoto, Kentaro

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2018-03-25
(Date of Publication)
2019-03-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲第7121号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1007121

(別紙様式 3)

論 文 内 容 の 要 旨

氏　名　　宮本　健太郎

専　攻　　物理学

論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記すること。）

Integrable structures of the Killing equation

キリング方程式の可積分構造

指導教員　　早田　次郎

Abstract: Integrable structures of the Killing equation

The problem of determining whether a Hamiltonian system is completely integrable has been long discussed since the early days of development of celestial mechanics. A Hamiltonian system with N degrees of freedom is said to be completely integrable in the Liouville sense if there exist N smooth first integrals in involution which are functionally independent. In spite of the fact that we have a well-defined notion of complete integrability, the above problem still remains an open question.

Our purpose in this thesis is to construct a systematic method to enumerate first integrals of a given Hamiltonian system. The main idea is that many Hamiltonian systems can be captured through geodesic problems in curved space(-time)s: Euler's equations for a rigid body emerge from geodesic flow on the special orthogonal group with to a left-invariant metric; In general relativity, the motion of a free particle in a gravitational field can be formulated as geodesic flow on a curved spacetime; In general setting, the trajectories of a *natural Hamiltonian systems*, that are given as the sum of a curved kinetic and a potential energy with the kinetic term being quadratic in momenta, can always be described as geodesics in enlarged spaces, i.e. interactions are *geometrised* by introducing one or more extra dimensions.

In this thesis, we assume that first integrals of a geodesic flow are polynomial in momenta. In this setting, the Hamiltonian function is constructed out of the metric on a (pseudo-)Riemannian manifold, and thus the first integrals must be associated with *Killing tensor fields* obeying the *Killing equation*. It is a simple fact, usually known as Noether's first theorem, that if there is a first integral linear in momenta, then the metric admits a one-parameter group of isometries generated by a Killing vector field. In an analogous way, polynomial first integrals lead to Killing tensor fields whose orders are equal to the degree of the polynomials. A Killing tensor field generates a canonical transformation which maps the original Hamiltonian system into itself. In general relativity, Carter's constant in the Kerr black hole spacetime directly stems from a second order Killing tensor field.

Our assumptions reduce the integrability problem in Hamiltonian systems to the problem how to solve the Killing equation. Then it is natural to ask the following questions:

- Are there any solutions of the Killing equation for given metrics?
- If the answer is yes, then how many solutions are there?
- What quantities are sufficient to determine the number of solutions?

In this thesis, we study the above issues and give partial answers. In particular, we introduce a systematic method to analyse the Killing equation and to study its properties. A key ingredient here is projection operators called *Young symmetrisers*. Main results are as follows:

(i) We construct an effective way to analyse the Killing equation and to study its properties based on Young symmetrisers. We particularly establish a prolongation procedure which transforms the Killing equation of a specified order into a closed system dubbed the *prolonged system* by introducing new variables. Then the explicit form of the prolonged system was written out up to the third order.

(ii) We give a formula for the integrability conditions of the prolonged system that put tough restrictions on the Riemann curvature tensor and its derivatives. We also derive the concrete form of the integrability conditions up to the third order. Moreover, we make a

conjecture on the Young symmetries of the integrability conditions of a general order. Furthermore, we provide a method for computing the dimension of the solution space of the Killing equation with a specific example.

(iii) We characterise metrics which admit Killing vector fields by local curvature obstructions. The obstructions have been obtained by analysing the integrability condition and the original Killing equation. In particular, we provide the algorithm that tells us exactly how many Killing vector fields exist for a given metric.

(iv) Killing tensor fields arise out of an assumption that first integrals of a geodesic flow are polynomial in momenta. We relax this assumption and conceive of first integrals that are meromorphic in momenta. We then define gauged Killing tensor fields in order to describe first integrals that are meromorphic in momenta. We also study their properties in detail and construct several metrics admitting a nontrivial rational first integral.

This thesis is organised as follows:

Chapter 2 In order to introduce Young symmetrisers which give a diagrammatic method to decompose the irreducible repserentations of the general linear group, we begin with some basic concepts in representation theory. After then, we introduce Young symmetrisers and study their properties to keep this thesis readable independently of any reference. Young symmetrisers are the basic building block of the covariant tensor calculus in the subsequent chapters.

Chapter 3 We give a procedure which transforms the Killing equation into a closed system called the prolonged system by introducing new variables. Young symmetriser plays essential roles in the procedure. It will be a first step towards better understanding of the integrability of the Killing equation. In particular, the closed system serves to put a maximum upper bound on the number of linearly independent solutions to the Killing equation.

Chapter 4 We formulate the integrability conditions of of the prolonged system. It provides a concrete way to enumerate the number of the solutions to the Killing equation. Our analysis here is also based on Young symmetrisers. We also demonstrate a method for computing the dimension of the space of KTs with a specific example.

Chapter 5 We characterise metrics which admit Killing vector fields by local curvature obstructions. The obstructions will be obtained by analysing the integrability condition and the original Killing equation. As a consequence, the algorithm that tells us exactly how many Killing vector fields exist for 3-dimensional Riemannian metrics will be formulated.

Chapter 6 Killing tensor fields arise out of an assumption that first integrals of a geodesic flow are polynomial in momenta. It is then natural to relax this assumption and conceive of first integrals that are meromorphic in momenta. We call them the rational first integrals. As a consequence, we are naturally led to introduce gauged Killing tensor fields.

Chapter 7 We summarise this thesis and conclude our study with a summary and outlook.

（別紙１）　　論文審査の結果の要旨

氏名	宮本　健太郎		
論文題目	Integrable structures of the Killing equation　（キリング方程式の可積分構造）		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	早田次郎
	副　査	教授	山田泰彦
	副　査	特命助教	野海俊文
	副　査		
	副　査		印

要　　旨

本論文の要旨は以下のとおりである。

本論文の骨子は、第１章では研究の背景が明確に述べられており、第２章では数学的な準備としてヤング図を用いたテンソルの既約分解法が説明されている。第３章から第６章ではオリジナルな解析が行われている。第７章で結論が述べられている。

第１章では導入として、ポアンカレの提唱した問題の概説がなされ、Killing 方程式研究の動機付けがなされている。可積分系の標準的な理論であるパンルベ解析が説明された後、本論文の幾何学的方法の位置付けが明確になされている。

第２章では、ヤング図形の導入に始まり、ヤング図形を用いたテンソルの既約分解について簡潔にまとめられている。特に、本論文で主要な役割を果たすヤング対称化演算子が解説されている。

第３章では、Killing 方程式の Prolongation という概念が導入され、その幾何学的な解釈が述べられている。Killing 方程式は過剰決定系であり、そのままでは取り扱いにくい。こうした過剰決定系に対して、新たな従属変数を導入することにより、方程式を閉じた方程式系に変換する操作を Prolongation という。Prolongation 自体は，偏微分方程式論の分野でカルタンや倉西によって発展させられた古典的な方法である。ヤング対称化演算子を導入し、カルタンや倉西による Prolongation の手続きをより体系化した部分は本論文のオリジナルな業績と認められる。

第４章では、本論文の主要な結果であるヤング対称化演算子を用いた Killing 方程式の可積分条件が導出されている。これを応用することでこれまで知られていた時空の Killing ベクトルと Killing テンソルの個数を導出することに成功している。これまでこれらの個数だけ解が存在することは知られていたが、これ以上存在しないと証明したことは重要な成果である。また、Killing-Yano 方程式への拡張も論じられている。

第５章では、Killing ベクトルの個数を数えるためのカルタンテストが論じられている。２次元空間では、リーマンテンソルやその微分によって構成された曲率不変量がゼロかどうか確かめることで、Killing ベクトルの個数を厳密に判定することができる。これは 19 世紀後半にダルブーによって確かめられた結果である。一方、３次元以上の場合、曲率不変量のみで Killing ベクトルの個数を判定することはできない。実際、曲率不変量が全てゼロになるが、Killing ベクトルの個数はそれほど多くない空間が存在する。本論文は，曲率不変量だけでなく、Killing ベクトルの可積分条件から誘導されるスカラー量に着目し、３次元であっても Killing ベクトルの個数を厳密に判定することができるアルゴリズムを構築している。

第６章では、有理型の保存則への拡張可能性が論じられており、本論文で開発された手法の普遍性が示されている。これまでの可積分系の研究は多項式で表される保存量を仮定したものがほとんどであり、本論文の成果は将来への展望を拓く可能性を秘めている。

第７章で結論が述べられている。

本研究はハミルトン系について，その可積分性を研究したものであり，Killing 方程式の解の個数について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。

よって，学位申請者の宮本健太郎氏は，博士（理学）の学位を得る資格があると認める。

- 特記事項　なし
- 特許登録数　０件
- 発表論文数　　査読付き　４編