Algorithms for the maximum weight clique problems

Shimizu, Satoshi

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
2018-09-25
(Date of Publication)
2019-09-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲第7301号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1007301

(別紙様式 3)

論文内容の要旨

氏　名　清水 悟司

専　攻　電気電子工学専攻

論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記すること。）

Algorithms for the maximum weight clique problems
(最大重みクリーク問題に対するアルゴリズムに関する研究)

指導教員　山口 一章 准教授

(注) 2，000字～4，000字でまとめること。

単純無向グラフにおいて，任意の 2 頂点間に辺が存在するような頂点集合またはそのような頂点集合による頂点誘導部分グラフをクリークと呼ぶ．与えられたグラフに要素数 k のクリークが存在するかどうかを判定する問題を k-clique 問題という．k-clique 問題は Richard Karp によって示された 21 の NP 完全問題の一つである．NP 完全性の理論は計算機科学において重要であり，未解決のミレニアム懸賞問題である P vs NP 問題に関連している．

k-clique 問題から派生し，与えられたグラフのうち要素数が最大のクリークを求める最適化問題を最大クリーク問題（MCP）という．MCP は NP 困難な問題として知られており，多項式時間アルゴリズムは発見されていない．MCP には多数の実応用があり，理論的にも計算機科学で重要な役割を持っているため，多数の研究が行われてきた．

本論文は最大重みクリーク問題に対する様々なアルゴリズムに関して述べたものである．実応用では何らかの性質を表現するために頂点や辺に重みが付与されたグラフを扱うことがある．頂点に重みが与えられた場合に，重みの和が最大のクリークを求める問題を最大重みクリーク問題(MWCP)と呼ぶ．辺に重みが付与された場合に，重みの和が最大のクリークを求める問題を最大辺重みクリーク問題（MEWCP）という．MWCP および MEWCP は MCP を一般化した問題であり，NP 困難である．

本論文は六つの章からなる．第一章では，研究の背景と，最大重みクリーク問題およびそれに関連する問題を紹介する．

第二章では，MWCP に対する厳密解法を提案する．提案法は分枝限定法に基づく．分枝限定法は分枝操作と限定操作からなる．分枝操作は問題を部分問題へと分割し，それらを再帰的に解く．生成される各部分問題に対し，限定操作は解の重みの上界を計算し，最適解が得られる見込みのない部分問題を枝刈りする．本論文では，新たな上界計算法を提案する．提案法は部分問題のグラフを多数の小さな部分グラフへと分割し，それらの最適解の重みの和を計算することで上界を得る．提案法は分枝限定法の前に最適解テーブルと呼ばれるテーブルを構築し，上界計算の準備をする．分枝限定法では，最適解テーブルを使うことで短時間で上界を計算する．計算機実験により，提案法が従来法よりも優れていることを示す．

第三章では，MEWCP に対する厳密解法を提案する．MEWCP に対する従来の厳密解法としては，MEWCP を数理計画問題へと定式化し，汎用のソルバを用いて解く方法しか研究されていなかった．本論文では，数理計画ソルバの計算時間を短くするための新しい定式化の工夫を提案する．混合整数計画問題(MIP)への定式化において，提案法は頂点のインデックスを付け替えることで変数の値域を調整する．さらに大規模な問題を解くために，本論文では分枝限定法に基づく MEWCP 専用の解法を提案する．頂点を結ぶ辺に重みが付与されているため，MEWCP の上界計算は MWCP よりも手間がかかる．各部分問題に対

し，提案法は辺の重みを三つのグループに分類し，各グループに対して上界を計算する．一つのグループの辺の重みは頂点に割り当て，仮の頂点重みとみなすことで MWCP の上界計算法を用いて上界を計算する．残りの辺重みについては，過去の探索で得た解の重みを利用し，上界を計算する．計算機実験により，提案法は既存の手法よりも優れていることを示す．

第四章では，最小重み頂点被覆問題(MWVCP)に対する貪欲算法を提案する．MWVCP は計算複雑性の観点で MWCP と等価な問題である．本論文では，平均的性能が良い二つのヒューリスティックを提案する．提案法は線形時間で極小解を求める貪欲算法に基づいている．より良い解を得るために提案法は多数の解を生成し，最も評価値の良いものを出力する．一つはリストの巡回を利用し，もう一方は分枝を利用して解を生成する．提案法は解一つ当たりの時間計算量は線形に保つための工夫を含む．計算機実験により，提案法は従来法に比べて短い時間でより良い解を得られることを示す．第五章では，MEWCP に対する局所探索法で用いるためのデータ構造を提案する．局所探索法は MCP，MWCP および MEWCP でよく用いられるヒューリスティックである．局所探索法は各クリークに対し近傍と呼ばれる解の集合を定義する．局所探索法はなんらかの初期解から，近傍への遷移を繰り返すことでより良い解の探索を行う．局所最適解で停滞することを避けるために，様々な工夫が提案されている．近傍は遷移の度に走査されるため，局所探索法では近傍を計算する時間が重要である．本論文では，近傍管理のためのデータ構造を二つ提案する．一つはグラフが隣接リストで表現されている場合に用いることができ，各頂点に対しクリーク中に存在する隣接頂点の数を計算することで近傍を管理する．もう一つはグラフが隣接行列で表現されている場合に用いることができ，各頂点に対しクリーク中に存在する非隣接頂点の数を計算することで近傍を管理する．これらのデータ構造をいくつかの局所探索法と組み合わせて計算機実験を行った．実験結果より，提案法は従来法よりも優れていることを示す．

第六章では，本研究を総括する．

（別紙１）　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	清水　悟司		
論文題目	Algorithms for the maximum weight clique problems （最大重みクリーク問題に対するアルゴリズムに関する研究）		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	准教授	山口　一章
	副　査	教　授	増田　澄男
	副　査	教　授	沼　　昌宏
	副　査	教　授	寺田　　努
	副　査		

要　　旨

計算複雑性の分野において，R. M. Karp により示された 21 の NP 完全問題は非常に重要なものである．その 21 の問題の一つに最大クリーク問題と呼ばれるものがあり（以降，MCP と略す），当時から現在に至るまで様々な観点からの研究が行われている．近年は単なる MCP だけでなく，グラフの頂点に重みを付与した問題（MWCP）や辺に重みを付与した問題（MEWCP）といった，MCP を一般化した問題についての研究も行われている．

本論文は，MWCP や MEWCP に対する解法に関して行った研究成果をまとめたものであり，以下の 6 章よりなる．

第１章では，グラフに関するいくつかの用語の定義を示した後， MCP や MCP を一般化した問題，さらに数学的にほぼ等価である最大重み独立集合問題（MWISP），最小重み頂点被覆問題（MWVCP）に関する研究動向と本研究の意義について簡潔に述べられている．本章の末尾には本論文の構成が書かれている．

第２章では，分枝限定法に基づく MWCP の厳密解法が二つ提案されている．提案手法のうちの一つは頂点彩色を用いて上界を計算する．頂点彩色は MCP および MWCP の上界計算によく用いられる手法であるが，これを効率よく計算するために，提案手法はあらかじめ上界計算に必要な値を計算してテーブルに保持しておく．分枝限定法ではテーブルを利用して高速に上界を計算する．もう一方の提案手法は新しい上界計算法を提案している．新しい上界計算法はグラフを複数の部分グラフに分割し，それらの最適解の重みを足し合わせることで上界を計算する．論文中，単なる足し合わせで正しく上界が得られることの証明が示されている．提案する上界計算法は単に頂点彩色を用いた従来手法よりも精度のよい上界が得られるが，毎回計算すると時間がかかる．そこで，提案手法はグラフの分割ははじめに一度だけ行うものとし，分割したグラフに対しあらかじめ全ての部分グラフの最適解の重みを計算してテーブルに記憶しておく．分枝限定法ではテーブルを用い，ビット演算によって上界を計算するといった高速化の工夫がなされており，また，計算機実験により提案手法の有効性が示されている．

第３章では MEWCP の厳密解法が二つ提案されている．MCP，MWCP と異なり，従来 MEWCP の厳密解法としては MEWCP を数理計画問題として定式化する方法しか示されていなかった．本論文では汎用の数理計画ソルバに効率よく問題を解かせるための新しい定式化の工夫が提案されている．提案手法では頂点のインデックスを変更することで変数の取りうる範囲を調整し，ソルバが問題を解くのに必要な時間を短くする．さらに，より大規模な問題を解くために，本論文では MEWCP に対する分枝限定法に基づく解法が提案されている．数理計画ソルバを用いる方法とは全く別の方針であり，分枝限定法による既存研究は今のところこの研究しか知られていない．
辺に重みがあるため，MEWCP の上界計算は MWCP の上界計算に比べて複雑になる．提案手法は一部の辺の重みを仮の頂点重みとして頂点に割り当て，MWCP の上界計算法を応用して上界を計算する．残りの辺の重みに対しては，すでに探索済みの部分問題の最適解の重みを利用して上界を計算する．提案手法はそれら２つの上界の和を計算することで部分問題の実行可能解の重みの上界を得る．これにより正しく上界が計算されることの証明が示されている．また，提案手法の有効性は計算機実験により示されている．

氏名	清水　悟司

第４章では MVWCP に対する発見的手法が二つ提案されている．MVWCP は MWCP とほぼ等価な問題である．MCP，MWCP，MEWCP，MWISP は定数倍の近似は困難であると知られているが，MWVCP に対してはいくつかの近似アルゴリズムが提案されている．実用では平均的振る舞いが重要であるため，既存研究にてそれらの平均的性能について計算機実験による調査が行われている．また，それらの近似アルゴリズムの平均的性能を向上させるために，頂点被覆を極小化するための後処理が提案されている．２つの提案手法は極小性が保証された線形時間の貪欲算法に基づいており，多数の解を探索しその中で最も良い解を出力する．与えられたグラフに対し，はじめに頂点のリストを構築し，提案手法の一方はリストを巡回させることで，もう一方は分枝操作を行うことで多数の解を探索する．提案手法では探索する解一つあたりの計算時間を線形時間に保つ工夫を行っており，多数の解を探索した場合でも従来法より計算時間が短い．提案手法の有効性は計算機実験により示す．

第５章では MEWCP に対する発見的手法のための新たなデータ構造が二つ提案されている．従来，MCP，MWCP，MEWCP に対しては，局所探索法に基づくヒューリスティックがよく研究されている．局所探索法では各クリークに対し近傍を定義する．近傍はクリークの集合族である．局所探索法はなんらかのクリークから開始し，近傍に含まれるクリークへの遷移を繰り返すことで良い解を探索する．局所最適解へと捉われることを防ぐために，様々な工夫が提案されている．局所探索法は解の遷移のたびに近傍を走査し次の遷移先を決定するため，近傍を効率よく計算することが重要である．本論文の提案手法の１つはグラフが隣接リストで表現されている時に用いるもので，各頂点に対するクリーク中の隣接点の個数を提案データ構造で管理する．提案データ構造ではクリーク中の隣接点の個数ごとに頂点をリストで管理し，近傍を効率よく求める．もう１つの提案手法は隣接行列で表現されている時に用いるもので，各頂点に対するクリーク中の非隣接点の個数を提案データ構造で管理する．各頂点のクリーク中の非隣接点の個数から，近傍を効率よく管理する．従来法および提案手法のデータ構造と， MEWCP に対する２つの局所探索法のすべての組み合わせで計算機実験を行い提案手法の有効性が示されている．

第６章では第２章から第５章までで示した提案手法の特徴や従来手法に対する優位性について簡潔にまとめられている．

以上のように，本研究は最大重みクリーク問題に対する効率的な新たな手法を提案し，その有効性を示したものであり，組合せ最適化問題に対する解法について重要な知見を得たものとして価値ある集積である．
提出された論文は工学研究科学位論文評価基準を満たしており，学位申請者の清水悟司は，博士（工学）の学位を得る資格があると認める．