



Some quantum scattering problems in external electromagnetic fields

Kiyose, Amane

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2019-03-25

(Date of Publication)

2020-03-01

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲第7432号

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1007432>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



(別紙様式 3)

論文内容の要旨

氏 名 清瀬 周

専 攻 数学

論文題目 (外国語の場合は, その和訳を併記すること。)

Some quantum scattering problems in external
electromagnetic fields

(外電磁場内での量子散乱問題について)

指導教員 高岡 秀夫

2 章はアクセプトされた論文 [3] に基づく。この章では、 $N \geq 2$ に対して、定電磁場を有する N 体ハミルトニアンによって生成される時間発展に対する Avron-Herbst 型公式の自然な派生公式を述べる。この公式によって、散乱問題が、定電場と定磁場とが互いに直交する場合に帰着できる事がある。公式の応用として、交差した定電磁場内のただ一つの荷電粒子といくつかの中性粒子を含む系に対する漸近完全性の結果を述べる。まず、2.1, 2.2 節で定電場 $E = (E_1, E_2, E_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ と定磁場 $B = (0, 0, B) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, $B > 0$, が印加された空間 $\mathbf{R}^3$ 内を運動している N 粒子からなる系の全ハミルトニアン $\tilde{H}(E)$ の生成する時間発展は、ユニタリ作用素 $\tilde{\mathcal{T}}(t)$ の族によって、磁場 B と磁場に平行な方向の電場 $E_{\parallel} = (0, 0, E_3) \parallel B$ だけが印加された場合の全ハミルトニアン $\tilde{H}(E_{\parallel})$ の生成する時間発展に変換されるという Avron-Herbst 型公式を証明する (定理 2.1.1) :

$$e^{-it\tilde{H}(E)} = \tilde{\mathcal{T}}(t)e^{-it\tilde{H}(E_{\parallel})}\tilde{\mathcal{T}}(0)^*,$$

$$\tilde{\mathcal{T}}(t) = e^{-itM\alpha^2/2}e^{iM\alpha \cdot x_{\text{cm}}}e^{-it\alpha \cdot k_{\text{total}}}.$$

この場合に対する公式は Skibsted 氏 [5] により既に得られているが、氏の公式が全ての粒子が荷電しているという前提で書かれているのに対し、今回の結果は系がいくつかの中性粒子を含んでいたとしても自然な形に表現されている事が特徴である。定理 2.1.1 の応用として (2.3 節)、もし系が $N - 1$ 個の中性粒子とただ一つの荷電粒子を含み、かつ磁場に平行な方向の電場が零の場合は、波動作用素は足立氏 [1],[2] によって既に漸近完全性が得られている、磁場だけが印加された場合の波動作用素とユニタリ同値になるから、漸近完全性は簡単に従う (定理 2.3.1)。また、空間次元が 3 でなく 2 の場合に対応する Avron-Herbst 型公式、すなわち、定磁場 B に直交する平面 $\mathbf{R}^2$ 内に横たわるように電場 $E = (E_1, E_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ が印加されている時、この平面内に制限された N 粒子系に対しては、全ハミルトニアン $\tilde{H}_{\perp}(E)$ の生成する時間発展は、ユニタリ作用素 $\tilde{\mathcal{T}}_{\perp}(t)$ の族によって、磁場 B だけが印加された場合の全ハミルトニアン $\tilde{H}_{\perp}(0)$ の生成する時間発展に変換される事も証明できる (定理 2.1.2) :

$$e^{-it\tilde{H}_{\perp}(E)} = \tilde{\mathcal{T}}_{\perp}(t)e^{-it\tilde{H}_{\perp}(0)}\tilde{\mathcal{T}}_{\perp}(0)^*,$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\perp}(t) = e^{-itM\alpha_{\perp}^2/2}e^{iM\alpha_{\perp} \cdot x_{\text{cm},\perp}}e^{-it\alpha_{\perp} \cdot k_{\text{total},\perp}}.$$

従って 3 次元の場合と同様に荷電粒子が一つだけならば足立氏の結果によって漸近完全性が従う (定理 2.3.4)。ここで注意しておくが、足立氏の結果は、荷電粒子は磁場に直交する方向では束縛されるが、中性粒子はそうではないという事実に強く関係しているため、今回特に粒子の運動が平面内に制限されている場合は、中性粒子が存在するという仮定は

決定的に重要である。最後に 2.4 節では電場が時間に依存している場合への拡張についていくつか所見を述べる。

3 章は投稿中の論文 [4] に基づく。時間周期的なポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素 $H(t) = p^2/2 + V(t, x)$ に対するスペクトル理論と散乱理論では、 $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアン $K = -i\partial_t + H(t)$ が、Howland-Yajima の方法によってたびたび重要な役割を果たす。この章では、 V についてのある種の滑らかさの条件を緩めるために、標準の Mourre 理論の中で K に対する新しい変形作用素を提起するが、これは横山氏によるものとは異なる (3.1 節)。横山氏 [7] は K に対する変形作用素として

$$\tilde{A}_1 = \frac{1}{2}\{x \cdot p(1+p^2)^{-1} + (1+p^2)^{-1}p \cdot x\}$$

を導入した。大雑把に言えば、通常の変形作用素

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{2}(x \cdot p + p \cdot x)$$

では、 $i[K, \hat{A}_0] = p^2$ となってしまうこれは K 有界でない。そこで予め $\hat{A}_0$ に p^2 のレゾルベントを掛けておけば $i[K, \hat{A}_1] = p^2(p^2/2 + 1)^{-1}$ は有界になる、というアイデアである。これに対し、この章では $\hat{A}_0$ に $D_t = -i\partial_t$ のレゾルベントを掛けた新しい変形作用素

$$A_{\lambda_0, \delta} = (\lambda_0 - \delta - D_t)^{-1} \otimes \hat{A}_0$$

を提案する。横山氏の場合と異なり、この場合はポテンシャル $V(t, x)$ に時間 t に関する微分の条件が必要となるが (条件 (V))、この事は谷島氏 [6] による解作用素の存在と一意性を保証するための仮定に照らしてより自然である。それだけでなく、横山氏は擬微分作用素の計算を用いるためポテンシャルの正則部分に無限回微分可能性を課したが、我々の条件 (V) ではこれを $V^{\text{reg}}(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ にまで緩める事ができる。本章の主結果は K に対する $A_{\lambda_0, \delta}$ を用いた Mourre 評価 (定理 3.1.1) である。3.2 節でその証明を与える。3.3 節では応用として、時間周期的な電場 $E(t) \in \mathbb{R}^d$ 内を運動する 1 粒子の系を考察する。この系のハミルトニアン

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + V(x), \quad \hat{H}_0(t) = \frac{1}{2}p^2 - E(t) \cdot x$$

の生成する時間発展は、あるユニタリ作用素の族によって、時間周期的な関数 $c(t)$ を用いてポテンシャルを時間周期的にし、自由ハミルトニアンを時間に非依存にしたハミルトニアン

$$H(t) = H_0 + V(x + c(t)), \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2$$

の生成する時間発展に、Avron-Herbst 型公式によって変換され、 V が短距離型ならば $V(x + c(t))$ は我々の条件 (V) を満たす。この時 H_0 と $H(t)$ に結び付けられた Floquet ハミルトニアンに対する波動作用素の漸近完全性の結果が 3.1 節の Mourre 理論から得られる。すると Howland-Yajima の方法によって H_0 と $H(t)$ に対する波動作用素も漸近完全性が得られるから、元の $\hat{H}_0(t)$ と $\hat{H}(t)$ に対する波動作用素の漸近完全性が従う。最後に 3.4 節では多体の場合についていくらか所見を述べる。横山氏の変形作用素 $\tilde{A}_1$ と異なり、 $A_{\lambda_0, \delta}$ は多体系への拡張が期待できる。しかしそれはまだ研究途上である。

参考文献

- [1] T. Adachi, Scattering theory for a two-body quantum system in a constant magnetic field, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 243–274.
- [2] T. Adachi, On spectral and scattering theory for N -body Schrödinger operators in a constant magnetic field, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 199–240.
- [3] T. Adachi and A. Kiyose, Remarks on the Avron-Herbst type formula for N -body quantum systems in constant electric and magnetic fields, submitted to New Horizons in Mathematical Physics on August 16th, 2018.
- [4] T. Adachi and A. Kiyose, On the Mourre estimates for Floquet Hamiltonians, submitted to Letters in Mathematical Physics on July 26th, 2018.
- [5] E. Skibsted, Asymptotic completeness for particles in combined constant electric and magnetic fields, II, Duke Math. J. **89** (1997), 307–350.
- [6] K. Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 415–426.
- [7] K. Yokoyama, Mourre theory for time-periodic systems, Nagoya Math. J. **149** (1998), 193–210.

氏名	清瀬 周		
論文 題目	Some quantum scattering problems in external electromagnetic fields (外電磁場内での量子散乱問題について)		
審 査 委 員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教 授	高岡 秀夫
	副 査	教 授	福山 克司
	副 査	教 授	高山 信義
	副 査	京都大学教授	足立 匡義
			印

要 旨

本論文では、空間的には一様な外電磁場が存在する空間における量子力学系に対する散乱理論を研究している。前半で考察しているのは、空間に定電場と定磁場の双方が印加されている状況下にある N 体量子力学系である。粒子が運動する空間としては 2 次元平面あるいは 3 次元空間を考慮しており、2 次元平面の場合には、定電場はその平面に横たわるように、また定磁場はその平面に直交するように印加されているとしている。例えば平面内を運動する荷電粒子を考えると、定磁場だけが印加されている場合には、それは古典力学的にはサイクロトロン運動と呼ばれる等速円運動をし、その円運動の中心は不動である。そこに定電場が横たわるように印加されると、円運動の中心は定電場にも定磁場にも直交する方向に、電場と磁場だけから定まる速度（ドリフト速度と呼ばれる）で等速直線運動をする。これはドリフトと呼ばれている。このドリフトを多体量子力学系に対して取り扱うのが前半の主要な目的である。後半では、時間周期的に変動する電場で、その時間平均が 0 であるものを考え、それが印加されている空間内の 1 体量子力学系を考察している。1 体中心力系として定式化されているが、その系は重心座標系における 2 体系とも見做せることに注意しておく。それぞれの系に対して、波動作用素の存在とその漸近完全性に関する問題を考えることができるのであるが、その考察に有用な道具を提供することを目的としている。

波動作用素の漸近完全性に関する問題は、多くの数理物理学者によって研究されてきている。特に、外電磁場がないという条件の下での研究は先行しており、1990 年代前半までに、一般の多体量子力学系に対する漸近完全性の問題は望ましい形で解決されている。その後、1990 年代半ばには、定電場内の多体系 (Adachi-Tamura, Herbst-Møller-Skibsted)、定磁場内の多体系 (Gérard-Laba) に対しても、漸近完全性の問題が考えられるまでになった。これらの結果を受けて、1997 年の Skibsted による研究では、定電場と定磁場の双方が印加されている空間内の多体系に対する散乱問題が取り扱われた。Skibsted は定磁場の影響を考慮した Galilei 変換を導入することで、元の定電場の代わりに、その電場の、定磁場に直交する成分を 0 にして得られる新たな定電場が印加されている空間内の多体系に対する問題に解釈し直せることを示した。そして、短距離型散乱について、電場の、磁場に平行な成分が 0 でない場合には、定電場内の多体系に対する結果と同様のものが得られることも示した。この考察で重要な役割を果たした Galilei 変換は、荷電粒子に対しては、ドリフト速度による磁氣的並進を用いて定められ、そのドリフトを表現するものとなっている。一方、非荷電粒子に対しては、同じドリフト速度による通常の並進を用いて定められている。ところが、非荷電粒子は外電磁場の影響を受けることなく自由に運動し、その運動はドリフト速度とは一般に無関係である。そのため、系の粒子が全て荷電している場合にはその Galilei 変換の導入は自然であるが、非荷電粒子が存在する場合には人工的である、という欠点があった。その欠点を解消するのが第 2 章の主要な目的である。具体的には、2012 年の Adachi-Kawamoto による研究で 1 体系に対して導出された Avron-Herbst 型の公式を N 体系に拡張している。この論文で得られた Avron-Herbst 型の公式は、考えている系を支配するハミルトニアンによって生成される時間発展作用素

氏名	清瀬 周
を、定磁場と、それに直交する成分を 0 にして得られる新たな定電場の双方が印加されている空間内の系を支配するハミルトニアンによって生成される時間発展作用素と、元の定電場が印加されることによって生じる系の重心のドリフトを表現するユニタリー作用素との積で表したものである。ここで注意しておきたいのは、系内に非荷電粒子があってもその導出法は通用するということである。また、見かけ上の違いはあるが、この Avron-Herbst 型の公式は Skibsted による公式と同じものであることにも注意しておく。そして、この公式を応用して、荷電粒子が 1 個のみで、残りは全て非荷電粒子であるような量子力学系に対する漸近完全性の結果を得ている。この系は、空間に定磁場のみ印加されている場合には、Skibsted による研究よりも後の、2001 年・2002 年の Adachi による研究で初めて取り扱われた。よって、この論文で得られた漸近完全性の結果は、Skibsted によって既に示されていたものではなく、新たなものである。 ここまでは、系を支配するハミルトニアンが時間に依存しない、すなわち定常的である場合であった。その場合にはエネルギー保存則が利用できる。一方、ハミルトニアンが時間に依存する場合には、エネルギー保存則の破れが解析の障害となることはよく知られている。それでも、時間周期的に変動する電場内の系などに対する解析はある程度進展し、満足のいく結果が得られる場合もいくつかあることは知られている。特に鍵となったのは Howland-Yajima method の確立である。この手法は、時間変数も空間変数と同等と見做して、考える Hilbert 空間を拡張し、その Hilbert 空間に作用するハミルトニアンとして、時間に関する微分作用素 D_t も含めて定められる Floquet ハミルトニアンを導入することで、エネルギー保存則を利用できるようにする、という Howland のアイデアに基づくものである。このアイデアと、散乱理論における定常的な方法とが結びついてできたのが Howland-Yajima method である。しかし、定常的な方法は、2 体系に対しては満足のいく結果を与えるものの、多体系に対しては、Faddeev method のように少数体系に限られるものしかないというのが現状である。その後、定常的な多体ハミルトニアンに対する散乱理論の研究で編み出された正交換子の方法を Floquet ハミルトニアンに適用する試みが Yokoyama や Møller 等によってなされ、特に、時間周期的に変動する電場が 0 でない時間平均を有する場合には、一般の多体系であっても漸近完全性の問題が解決されるまでに至った (Adachi)。しかし、時間周期的に変動する電場が 0 である時間平均を有する場合には、3 体系であっても解決は未だ部分的である。それは、1998 年の Yokoyama による研究で導入された、時間周期的ポテンシャルをもつ 2 体シュレーディンガー作用素に付随する Floquet ハミルトニアンに対する conjugate operator の定義に含まれる p^2 のレゾルベント $(p^2+1)^{-1}$ を、部分系の配位空間の作用素と、クラスター間の配位空間の作用素とに分解することが容易でないため、多体系への自然な拡張が得られていないことに起因している。そこで、2004 年の Møller-Skibsted による研究では、定常的な多体シュレーディンガー作用素と同様、伸長作用素の生成作用素そのものを多体 Floquet ハミルトニアンに対する広義の conjugate operator として採用して、スペクトル理論の構築が試みられている。極限吸収原理などの成果はそれで得られているが、残念ながら散乱理論で有用となる伝播評価が得られるところまでは行っていない。そこで、多体 Floquet ハミルトニアンに対する狭義の conjugate operator の候補を模索するべく、2 体 Floquet ハミルトニアンに対する別の conjugate operator を提唱するのが第 3 章の目的である。具体的には、$(p^2+1)^{-1}$ の代わりに D_t のレゾルベント $(c-D_t)^{-1}$ を採用して得られた conjugate operator を用いて、Mourre 評価の成立を示し、Floquet ハミルトニアン of the スペクトルの性質などを調べている。現状では、その定義であっても多体 Floquet ハミルトニアンに対する conjugate operator が得られている訳ではない。しかし、Yokoyama による conjugate operator とは違い、ポテンシャルが定常的であるならば、多体系であっても Mourre 評価の成立が示されるので、多体系への拡張の可能性を有した定義であると言える。 本研究は、外電磁場内の量子力学系に対する散乱理論に関して、重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者の清瀬周は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。	