Higher Capelli elements for classical Lie algebras

Kawata, Shotaro

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2021-09-25
(Date of Publication)
2022-09-01
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲第8131号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1008131

(別紙様式 3)

論文内容の要旨

氏　名　河田祥太郎

専　攻　数学専攻

論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記すること。）

Higher Capelli elements for classical Lie algebras

(古典リー代数に対する高次カペリ元)

指導教員

太田泰広

Let $\mathfrak{g}$ be a classical Lie algebra, i.e. one of the Lie algebras $\mathfrak{gl}_N$(general linear), $\mathfrak{o}_N$(orthogonal) and $\mathfrak{sp}_N$(symplectic). It is fundamental in representation theory that the center $Z\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ of the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$ is isomorphic to the ring $\mathbb{C}[x]^W$ of Weyl group invariant polynomials in certain variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ through the Harish-Chandra isomorphism $\gamma : Z\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x]^W$. In this paper, we construct a class of central elements $C_\lambda(u) \in Z\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ with a parameter u, which we call the *higher Capelli elements*. They are parametrized by partitions $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, and correspond by the Harish-Chandra isomorphism to the factorial Schur functions $R_\lambda(x, u) \in \mathbb{C}[x]^W$ with parameter u. (The definition of $R_\lambda(x, u)$ will be given below). In the $\mathfrak{gl}_N$ case, the higher Capelli elements $C_\lambda(0)$ with $u = 0$ have been constructed by Okounkov [9] and expressed in the form of quantum immanants.

The main point of this article is an explicit construction of the Capelli elements $C_k(u)$ *of lower degrees* ($k = 1, \ldots, n$) which correspond to factorial Schur functions attached to the column partitions (1^k). The higher Capelli element $C_\lambda(u)$ for an arbitrary partition λ is then obtained by applying the Jacobi-Trudi formula to the Capelli elements $C_k(u)$ of lower degrees. It is constructed as the determinant of a matrix whose entries are Capelli elements of lower degrees. This method of construction of the higher Capelli elements from the Capelli elements of lower degrees has already been discussed in our previous paper [5]. In the present paper, we mainly investigate explicit formulas for the Capelli elements $C_k(u)$ of lower degrees which arise from the expansion of the Capelli element $C_n(u)$ of the highest degree with respect to the parameter u.

Following [7] and [10], we introduce the factorial Schur functions $R_\lambda^{(m)}(x, a)$ with a parameter a in m variables $x = (x_1, \ldots, x_m)$. We first define the symbol $\langle z, a\rangle$ by

$$\langle z, a\rangle = \begin{cases} z - a & (\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N) \\ z^2 - a^2 & (\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N, \mathfrak{o}_N) \end{cases}$$

depending on the choice of a classical Lie algebra, and the shifted factorials associated with $\langle z, a\rangle$ by

$$\langle z; a\rangle_k = \langle z, a\rangle\langle z, a+1\rangle \cdots \langle z, a+k-1\rangle \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Then for each partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ with $l(\lambda) \leq m$, we set

$$R_\lambda^{(m)}(x, a) = \frac{\det\left(\langle x_i, a\rangle_{\lambda_j + m - j}\right)_{1 \leq i,j \leq m}}{\det\left(\langle x_i, a\rangle_{m-j}\right)_{1 \leq i,j \leq m}}$$

We remark that these functions $R_\lambda^{(m)}(x, a)$ form $\mathbb{C}$-basis of $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]^{\mathfrak{S}_m}$ or $\mathbb{C}[x_1^2, \ldots, x_m^2]^{\mathfrak{S}_m}$ according as $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ or $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N, \mathfrak{o}_N$. We simply write $R_\lambda^{(m)}(x, a) = R_\lambda(x; a)$ when the number of variables are obvious from the context.

In order to outline the idea of this paper, we now explain the case of $\mathfrak{gl}_N$ $(N = n)$ for comparison with the cases of $\mathfrak{sp}_N$ and $\mathfrak{o}_N$. It is a classical result due to Capelli [1] that the central elements $C_k(u) \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$ attached to column partitions (1^k) $(k = 1, \ldots, n)$ are expressed as follows by column-determinants.

$$C_k(u) = \sum_{|I|=k} \det(\Pi_I - u) \in Z\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n),$$

$$\Pi_I = \begin{pmatrix} E_{i_1,i_1} + k - 1 & E_{i_1,i_2} & & E_{i_1,i_k} \\ E_{i_2,i_1} & E_{i_2,i_2} + k - 2 & \ldots & E_{i_2,i_k} \\ \vdots & \cdot & & \cdot \\ E_{i_k,i_1} & E_{i_k,i_2} & & E_{i_k,i_k} \end{pmatrix},$$

where E_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ denote the elements of $\mathfrak{gl}_n$ corresponding to matrix units. According to Schur's lemma, each $C_k(u)$ acts on the irreducible representation (V_μ, π_μ) attached to a partition μ by scalar (eigenvalue). We can calculate the eigenvalue as follows:

$$\pi_\mu(C_k(u)) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \prod_{m=1}^{k} (\mu_{i_m} + k - m - u).$$

This eigenvalue corresponds to the factorial Schur function $R_{(1^k)}(x; u) \in \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ $(W = \mathfrak{S}_n)$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ under the identification of variables $x_i = \mu_i + n - i$ $(1 \le i \le n)$. This means that $\gamma(C_k(u)) = R_{(1^k)}(x; u)$. We remark that the Capelli elements $C_k(u)$ of lower degrees are obtained as the coefficients in the expansion

$$C_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \langle z; u\rangle_k C_{n-k}(u)$$

of the Capelli element $C_n(z)$ of highest degree in terms of the shifted factorials. As we proved in [5], for an arbitrary partition λ, the higher Capelli element $C_\lambda(u)$ with Harish-Chandra image $\gamma(C_\lambda(u)) = R_\lambda(x; u)$ is then constructed by means of the Jacobi-Trudi determinant

$$C_\lambda(u) = \det\left(C_{\lambda'_i - i + j}(u + j - 1)\right)_{i,j=1}^{m}$$

of Capelli elements of lower degrees, where $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ denotes the conjugate partition of λ. It is known by Okounkov [9] that $C_\lambda(0)$ with parameter $u = 0$ is expressed as a quantum immanant

$$C_\lambda(0) = \frac{\chi_\lambda(1)}{p!} \sum_{I \in \{1, \ldots, n\}^p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \langle \sigma \cdot \xi_T, \xi_T \rangle E_{i_1, i_{\sigma(1)}}(-c_T(1)) \cdots E_{i_p, i_{\sigma(p)}}(-c_T(p)),$$

where $|\lambda| = p$.

As for the symplectic Lie algebra $\mathfrak{sp}_{2n}$, Itoh [3] has constructed the Capelli element $C^{\mathfrak{sp}}(u) \in Z\mathcal{U}(\mathfrak{sp}_{2n})$ of the highest degree with a parameter u. This $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ corresponds to $C_n(u)$ in the $\mathfrak{gl}_n$ case, and is expressed by a symmetrized determinant. To be more precise, $(-1)^n u^{-1} C^{\mathfrak{sp}}(u)$ corresponds to the factorial Schur function $R^{(n)}_{(1^n)}(x; u)$ by the Harish-Chandra isomorphism, in this case of $\mathfrak{sp}_{2n}$, $\mathbb{C}[x]^W = \mathbb{C}[x_1^2, \ldots, x_n^2]^{\mathfrak{S}_n}$. In Section 1, we deal with the Capelli elements of lower degrees for $\mathfrak{sp}_{2n}$. We give in Subsection 1.1 an alternative expression (Theorem 1.4) of Itoh's Capelli element $C^{\mathfrak{sp}}(u)$, putting the parameter u out of the symmetrized determinant. In Subsection 1.2, we expand the expression of Theorem 1.4 in terms of the shifted factorials $\langle u, a\rangle_k$ in order to construct the Capelli elements $C_k(a)$ of lower degrees. In this way, we obtain an explicit formula (Theorem 1.9) for the central elements $C_k(a)$ which correspond to the factorial Schur functions $R^{(n)}_{(1^k)}(x; a)$ by the Harish-Chandra isomorphism. Explicit formulas of Theorems 1.4 and 1.9 are the main results of this paper for the case of $\mathfrak{sp}_{2n}$. In Subsection 1.3, we construct the higher Capelli elements $C_\lambda(u)$ for an arbitrary partition λ by applying the Jacobi-Trudi formula for the factorial Schur functions to $C_k(a)$. This method of construction of the higher Capelli elements is already included in our previous paper [5]. It would be an interesting problem to find an expression of the higher Capelli elements $C_\lambda(u)$ in terms of quantum immanants.

In Sections 2 and 3, we treat the cases of $\mathfrak{o}_{2n}$ (type D) and $\mathfrak{o}_{2n+1}$ (type B) cases respectively. As for the orthogonal Lie algebra $\mathfrak{o}_N$, Wachi [11] has constructed the Capelli element $C^{\mathfrak{o}}(u) \in Z\mathcal{U}(\mathfrak{o})$ of the highest degree with a parameter u. Similarly to the case of $\mathfrak{sp}_{2n}$ (type C), we construct the Capelli elements of lower degrees by expanding Wachi's Capelli element $C^{\mathfrak{o}}(u)$ with respect to the parameter u. Explicit formulas for the Capelli elements of lower degrees in Theorems 2.2 and 3.1 are our main results for the case of $\mathfrak{o}_N$. In Section 4, we include the corresponding explicit formula for the Capelli elements of lower degrees of the case of $\mathfrak{gl}_n$ for comparison with those of the cases of $\mathfrak{sp}_{2n}$ and $\mathfrak{o}_N$.

References

[1] A Capelli: Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques. Math Ann. **37** (1890), 1–37

[2] M Itoh· Capelli elements for the orthogonal Lie algebras. J. Lie Theory **10**(2) (2000), 463–489.

[3] M. Itoh· Capelli identities for the dual pair (O_M, Sp_N). Math. Z **246** (2004), 125–154.

[4] M Itoh. Extensions of the tensor algebra and their applications Comm Algebra **40** (2012), 3442–3493.

[5] S Kawata and M Noumi· Jacobi-Trudi formula for the higher Capelli elements of classical Lie algebras, to appear in Kyushu J Math.

[6] I.G Macdonald: Schur functions theme and variations, in Séminaire Lotharingien de Combinatoire. (Saint-Nabor, 1992), Publ. Inst. Rech. Math Av **498** (1992), 5–39 Univ Louis Pasteur, Strasbourg

[7] J Nakagawa, M Noumi, M Shirakawa and Y Yamada· Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions *Physics and Combinatorics 2000 (Nagoya)*, pp. 180–195, World Scientific, 2001.

[8] M. Noumi Elliptic Schur functions Seminar talk at the University of Sydney, August 24, 2011.

[9] A. Okounkov: Quantum immanants and higher Capelli identities Transform Groups 1 (1996), 99–126

[10] A. Okounkov and G Olshanski: Shifted Schur functions. II. The binomial formula for characters of classical groups and its applications *Kirillov's Seminar on Representation Theory*, pp 245–271, Amer Math Soc Transl Ser 2, **181**, Amer Math Soc , 1998.

[11] A Wachi· Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras LMP **77** (2006), 155–168.

(別紙 1)　　　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	河田 祥太郎
論文題目	Higher Capelli elements for classical Lie algebras （古典リー代数に対する高次カペリ元）

審査委員 区分	職名	氏名	
主査	教授	太田　泰広	
副査	教授	山田　泰彦	
副査	教授	谷口　隆	
副査	名誉教授	野海　正俊	
副査			印

要旨

リー代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心を記述する問題は，表現論の中心的な課題の一つである．有限次元リー代数の中で，一般及び特殊線型リー代数 ($\mathfrak{gl}_N$, $\mathfrak{sl}_N$)，直交リー代数 ($\mathfrak{o}_N$)，斜交リー代数 ($\mathfrak{sp}_N$) は総称して「古典型リー代数」と呼ばれ，これらは，単純リー代数のカルタンの分類における A_{n-1} 型 ($\mathfrak{sl}_n$)，B_n 型 ($\mathfrak{o}_{2n+1}$)，C_n 型 ($\mathfrak{sp}_{2n}$)，D_n 型 ($\mathfrak{o}_{2n}$) の 4 つの無限系列に対応する．古典リー代数の普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ は，ハリシュ・チャンドラ同型 γ を通じてワイル群不変式環 $\mathbf{C}[x]^W$ と同型となる．即ち，中心元 $C \in ZU(\mathfrak{g})$ の各々に対して，ある変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の多項式で，$\mathfrak{g}$ のワイル群 W の作用で不変な $\gamma_C(x) \in \mathbf{C}[x]^W$ が定まり，$\mathfrak{g}$ の任意の既約表現 $(V(\lambda), \pi_\lambda)$ に対して $\pi_\lambda(C) = \gamma_C(\lambda + \rho)\mathrm{id}_{V(\lambda)}$ が成立する．ここで，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ は成分数が n 以下の分割を表す．このハリシュ・チャンドラ同型: $\gamma : ZU(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{C}[x]^W$ の存在は，表現論の様々な局面で重要な役割を果たす．

本論文の主題は，古典型リー代数の普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ の $\mathbf{C}$ 基底を構成することである．主結果は，それぞれの型に応じてパラメータ u をもつ 階乗型シューア函数 (補間多項式) $R_\lambda(x; u) \in \mathbf{C}[x]^W$ を指定し，それをハリシュ・チャンドラ像にもつ中心元 $C_\lambda(u) \in ZU(\mathfrak{g})$ を構成する具体的な手続きを明らかにしたことである．表題の「高次カペリ元」とは，$C_\lambda(u)$ のように $ZU(\mathfrak{g})$ の良い $\mathbf{C}$ 基底を構成する中心元を意味する．この構成法の要点は次の 2 つである．

(a) 列分割 (1^r) $(r = 1, \ldots, n)$ の各々に対して「次数 r のカペリ元」$C_{(1^r)}(u)$ を構成すること．
(b) 一般の分割 λ に対応する高次カペリ元 $C_\lambda(u)$ を，列分割に対応するカペリ元を成分とするヤコビ・トルーディ型の行列式を用いて構成すること．

(b) は階乗型シューア函数 $R_\lambda(x; u)$ がヤコビ・トルーディ型の行列式公式をもつことから従う事実であり，これについては既に論文 [5] (Kyushu J. Math. より

氏名	河田 祥太郎

出版予定) として公表している. 本論文は, [5] の内容を踏まえた上で (a) の内容を中心に, この構成法の詳細を論じたものである. 以下で, 本論文の概要を述べる.

$U(\mathfrak{g})$ の中心元で, ハリシュ・チャンドラ像が

$$(\mathfrak{gl}):\quad (x_1-u)\cdots(x_n-u),\qquad (\mathfrak{o}),(\mathfrak{sp}):\quad (x_1^2-u^2)\cdots(x_n^2-u^2)$$

となるものは,「基本カペリ元」と呼ぶべきもので, その構成については, $\mathfrak{g}$ の $\mathbf{C}$ 基底を成分にもつ非可換行列式によって表されることが, 先行研究により知られていた. $(\mathfrak{gl})$ の場合は古典的なカペリ (1890) の結果であり, $(\mathfrak{so}),(\mathfrak{sp})$ の場合は, 伊藤 (2004), 和地 (2006) の研究による. 上記の多項式は階乗型シューア函数 $R_{(1^n)}(x;u)$ に他ならないので, 最高次数のカペリ元 $C_{(1^n)}(u)$ は非可換行列式で表されることになる. 本論文の主結果は, 低次数 r の階乗型シューア 函数 $R_{(1^r)}(x;u)$ が最高次の $R_{(1^n)}(x;u)$ の, u についての階乗冪による展開係数として得られることに基づいて, $C_{(1^n)}(u)$ を u の階乗冪で展開することにより低次数 のカペリ元 $C_{(1^r)}(u)$ $(r=1,\dots,n)$ を構成したこと, また, この構成法により $C_{(1^r)}(u)$ に対して, $\mathfrak{g}$ の $\mathbf{C}$ 基底を成分とする標準的な非可換行列の小行列式の和として表示する明示公式を与えたことである. これは, $\mathfrak{gl}_N$ の場合に知られていた低次数のカペリ元の構成法と明示公式を $\mathfrak{o}_N$, $\mathfrak{sp}_N$ の場合に拡張した新しい, 重要な結果である. 本論文は, 序節と 4 つの節からなる. 序節においてこの構成法の概要を説明した後, 第 1 節から第 4 節では, それぞれ $\mathfrak{sp}_{2n}$, $\mathfrak{o}_{2n}$, $\mathfrak{o}_{2n+1}$, $\mathfrak{gl}_n$ の場合について, 次数 r のカペリ元の構成とその明示公式の導出の詳細を与えている.

普遍包絡環の中心の記述の問題は, $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ の生成系を行列空間に作用する多項式係数の不変微分作用素を用いて表示する「カペリ恒等式」に由来する. ワイル (1936) はこのカペリ恒等式に基づいて, 不変式論の表現論的基礎付けを行なった. ハウ・梅田 (1991) は, これを無重複表現の現代的観点から定式化し, 新しい発展の契機を与えた. 本論文は, 上記の伊藤, 和地の研究とともに, この流れに沿って, $U(\mathfrak{g})$ の中心についての理解を深化させたものであり, 高く評価できる.

本研究は, 古典型リー代数の普遍包絡環の中心元の記述に関して, 階乗型シューア函数の観点から新しい, 重要な知見を得たものとして, 価値ある集積であると認める. よって, 学位申請者の河田 祥太郎は, 博士 (理学) の学位を得る資格があると認める.

- 特記事項
- 特許登録数 0 件
- 発表論文数 1 件