軸継手を介して駆動される回転体の安定性に関する研究

西郷, 宗玄

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
1988-04-22
(Date of Publication)
2014-03-04
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙1169
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001169

神戸大学博士論文

軸継手を介して駆動される回転体の安定性に関する研究

昭和６３年３月

西郷宗玄

正誤表

頁	行	誤	正
220		↑1行	↑2行
		↑2行	↑1行
223		↑1行	↑2行
		↑2行	↑1行
234	↓6	Iwatsub	Iwatsubo
	↓13	60-1	60-10
	↑6	61-1	61-11
	↑5	Iwatsub	Iwatsubo

目次

主な記号

k_a, k_b：軸受のα, β方向の回転ばね定数

K_{X0}, K_{Y0}：軸受のX_0, Y_0方向のばね定数

σ：支持軸受のばね定数異方性

C_e：軸受減衰係数

ζ_e：無次元外部減衰係数

C_i：継手内部の減衰定数

ζ_i：無次元内部減衰定数

I_p：ロータ軸の極慣性モーメント

I_t：ロータ軸の継手中心回りの横慣性モーメント

I_t^G：ロータ軸の重心回りの横慣性モーメント

A：慣性モーメント比（$=I_p/I_t$）

B：慣性モーメント比（$=I_p/I_t^G$）

m：ロータ質量

i^2：ロータ軸の重心回りの回転半径の二乗（$=I_t^G/m$）

λ：$=m l_0^2/I_t$

t：時間

T：無次元時間

ν：無次元回転速度

H：無次元のロータ軸角運動量（$=A\nu$又は$B\nu$）

α_0, α_0'：駆動軸及び負荷軸の初期交差角

a_0, a_0'：$=\tan(\alpha_0/2)$, $\tan(\alpha_0'/2)$

α, β：ロータ軸の横変位角

α_1, β_1, α_2, β_2：中間軸の横変位角

θ, θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5：継手で連結された各軸の回転角

$X_0Y_0Z_0$：静止座標

xyz：ロータ軸固定の動座標

T_0：駆動トルク

T_0'：負荷トルク

τ_0：無次元駆動トルク

τ_0'：無次元負荷トルク

ω_i：ｉ次の固有振動数

ω_0：傾き振動の平均の固有振動数

μ：回転速度変動率

ε_1：たわみ継手のトルク伝達方向

ε_2：負荷トルクの作用方向

l_i：本文中で定義する軸の長さ

l：ロータ軸長さ

l_0：継手中心から回転体取り付け位置までの長さ

k：たわみ継手のばね定数

κ：たわみ継手の無次元ばね定数

E：弾性ロータ軸の縦弾性係数

J：弾性ロータ軸の断面二次モーメント

$[\bullet]_{ijk}$：マトリクスのｉｊｋ成分表示

$[\bullet]^T$：マトリクスの転置

$d(\bullet)/d(\cdot\cdot)$：$(\cdot\cdot)$による$(\bullet)$の微分

$(\dot{\bullet})$：無次元時間Ｔによる微分

$(\bar{\bullet})$：l又はl_0で無次元化した表示

$[\vec{\bullet}]$：ベクトル表示

$(\vec{\bullet})\bullet(\vec{\bullet})$：ベクトルの内積を表す

$\mathrm{Re}(\bullet)$：$(\bullet)$の実数部

$\mathrm{Im}(\bullet)$：$(\bullet)$の虚数部

j：虚数単位（$=\sqrt{-1}$）

$\triangleq$：定義を表す

第1章　緒　論

最近の回転機械は高性能化の要求から、高速化、大容量化されてきており、振動的にはますます厳しい条件になってきている。そのため、従来、小型低速機械では余り問題にされなかった問題も高性能化、高負荷化のためクローズアップされてきている[1]。しかしながら、回転機械の防振技術も、大型コンピュータ、エレクトロニクス計測機器の進歩と共に近年目ざましく進歩しており、不つりあい振動を抑えるつりあわせ技術をはじめ各種の自励振動解析技術の進歩により、単体としてはかなりな精度で製作できるようになってきている。ところが、回転機械は発電プラントなどの定置型であっても、また車両などの移動型であっても必ず軸継手で連結されて構成されるものであるため、十分に振動が抑えられた単体どうしであっても、それらを連結するとしばしば連結したために振動が発生することがある。この原因は軸系のアライメントが十分取れていないことに起因することもあるが、従来、軸継手に起因する振動特性が十分明らかになっていないため適切な対策が取られていないことに大きな原因がある場合も多い。そのため、最近では、軸継手に起因する振動解析の必要性が注目されはじめ、いくつかの研究が発表されるようになってきている。

軸継手は表1·1に示すように、固定軸継手、たわみ軸継手、自在軸継手に大別される。固定軸継手にはフランジ形、筒形など、たわみ軸継手には歯車形、スプライン形、金属ばね形など、自在軸継手には等速形、十字軸形などがある。そのなかで、動力を伝達する定置型回転機械の軸継手としては、固定フランジ形、歯車形、金属ばね形（ダイアフラム式）などが主として用いられ、動力を伝達する移動型回転機械には自在軸継手が主として用いられている。

固定軸継手で連結された軸系の振動解析では、軸継手の製作誤差のロータ軸の応答振幅への影響とつりあわせ方法の問題[2]、軸継手剛性の異方性の応答振幅への影響の解析[3]、軸継手剛性が熱応力などで均一でない場合の解析[4]、さらに一般的な剛性評価の研究[5]などがなされている。また、振動論的には固定軸継手に近いが、継手の剛性が軸に比べて十分低いダイアフラム式や板ばね式継手で連

- 軸継手
  - 固定軸継手
    - フランジ形
    - 筒形
  - たわみ軸継手
    - 歯車形
    - スプライン形
    - 金属ばね形
      - ダイアフラム式
      - 板ばね式
      - ベローズ式
      - コイルばね式
    - ゴム形
    - チェーン形
  - 自在軸継手
    - 不等速形
      - 十字軸形
      - こま形
    - 疑似等速形
    - 等速形
      - ベンディクス型
      - バーフィールド型
      - トリポート型
      - トリポール型

表１・１　軸継手の種類

結された軸系の振動解析では、締め付けボルトによる剛性の不均一に起因する強制振動解析(6)、たわみ板の振動による応力の解析(7)、ミスアライメントによる軸方向振動解析(8)、(9)などが行われている。これらの研究はいずれも強制振動の解析であり、その振動は回転数のｎ倍か、１／ｎ倍（ｎ：整数）で発生するものであり機器設計上の対策は比較的たて易い。一方、歯車形継手、自在継手やスプライン継手では軸継手を構成する要素が相対運動をしたり不等速であるため、強制振動に加え種々の自励振動が発生する。歯車継手に関する研究は比較的多くの研究者によって行われている(10)-(15)。なかでも白木ら(10)は一連の振動実験を

行い、歯車継手の潤滑、負荷、ミスアライメント、工作誤差等の影響を調べ、定性的にではあるが、貴重なデータを示している。また、山内ら[11]、[12]は歯車のすべりを考慮した摩擦力による非線形振動を解析し、ミスアライメントが自励振動振幅を下げること、歯車荷重分布のばらつきが自励振動を増大させることなどを得ている。スプライン継手も軸振動に起因してスプライン部での相対すべりや荷重の不均一が発生するため非同期振動が発生し、それらの研究も行われている[16]、[17]。また、十字軸形継手を含む軸系の研究も比較的古くから行われており、とくに自動車については騒音との関連でよく研究されている[18]。さらに、軸継手部の摩擦力や不等速性に起因する強制振動解析がなされている[19]-[22]。

上述のような軸継手に関する振動解析がなされているにも関わらず、実際上のトラブル解決には未だに現場的なノウハウに頼っているのが実状のようである。その原因は、まだ実験結果を定量的に説明できる解析結果が得られていないことが最も大きいと考えられるが、従来の軸継手に関する振動解析が個別の軸系に対して行われており、軸継手系の一般的な特性が解明されていないことに一因があると考えられる。すなわち、ロータ軸系を形態別に分類して各々をモデル化し系統的に解析する必要があると考えられる。さらに、今後のより一層の高性能化を考えると重負荷時の振動特性の解明が重要である。また、従来の解析は回転軸に関するものがほとんどで回転軸上の回転体の運動に重点を置いた解析は比較的少ない。実際の発電プラントなどでは、軸に比べて非常に大きな回転体が取り付いており実用上は回転体に重点を置いた解析も重要であると考えられる。

これらの研究情勢に鑑み、本論文は、自在軸継手を介して駆動されるロータ軸系とたわみ軸継手を介して駆動されるロータ軸系について、動力を伝達する場合の安定解析を統一的に行おうとするものである。この場合のロータ軸系の振動現象は、ロータ軸の横運動に拘束を発生させない自在継手を介した場合に最も顕著に現れるので、第２章では等速形自在継手、第４章では十字軸形自在継手で連結されたロータ軸系を扱う。第２章、第４章ではロータ軸系の不安定特性を理論的に解釈するため、運動方程式が陽な形で表される剛性ロータモデルを用いる。ロータ軸系のモデルとしては、発電機、圧縮機や車両の終端部を表す一方の軸端が他の軸に結合されていないモデルと、一般の伝達軸を表す両端が軸継手によって他の軸に連結されているモデルを用いている。前者のモデルについては、まず軸

継手の特性を定性的に理解するため１つの継手を介した２自由度モデルロータ系を解析し、ついで一般のロータ軸のモデルを表す２つの継手を介した４自由度モデルを解析している。また、後者のモデルについては、継手の影響を理解するためのモデルとして３つの継手で連結された２自由度モデルを解析し、ついで一般のロータ軸のモデルである４つの継手を含む４自由度モデルを解析している。

第２章では、まず、等速形自在継手で連結されたロータ軸の横運動に伴う自転運動の関係を一般的な形で導き、動力を伝達している場合の軸継手のトルク伝達特性を導いている。ついで運動方程式を導き、その安定解析を行っている。運動方程式には継手内部の減衰力を考慮しその影響も調べている。安定解析はロータ軸で動力が吸収される場合と動力が加えられる場合に分けて行われている。

第３章では、第２章で明らかになった不安定特性を、ロータ軸系のみならず他の振動系で発生する不安定現象と比較検討している。さらに、運動方程式を一般化した微分方程式について安定性に関する一般的なパラメータ・スタディを行い、第２章で調べた不安定領域についてより広い視野から考察を加えている。

第４章では第２章と同じ手順で十字軸形継手を介して駆動されるロータ軸系を解析している。特に十字軸形継手は不等速継手であるので、その不等速性が不安定特性に及ぼす影響も解析されている。第２章、第４章とも安定解析では、継手部の減衰力、ジャイロモーメント、軸受剛性異方性、初期交差角などの不安定領域に及ぼす影響を調べている。

第５章ではたわみ軸継手を介して駆動される剛性ロータおよび剛な回転体を持つ弾性軸ロータ系について解析している。たわみ継手をモデル化して動力が伝達される場合の軸継手の特性を表し、モデル化の際のパラメータが不安定領域に及ぼす影響を調べるとともに第２章、第４章と同様な安定解析を行っている。

最後に、第６章では、軸継手を介して駆動される軸系で現れる伝達トルクによる不安定化力を最も基本的な場合について実験的に確認する。

第２章　等速形自在軸継手で連結された回転体の不安定振動

２・１　緒言

等速形自在継手は交差する二軸間で交差角が自由に変化しても回転運動を等速で伝達する継手であり、自動車の前輪駆動軸を始めプロペラシャフト、一般の産業機械の駆動軸などに広く使用されている。その機構学的な研究は従来から非常に数多くなされており提案された機構も数多い[23]、[24]。しかし、現在実際に使用されている等速形自在継手は機構上次の三つの形式に限られている[25]。

（ａ）二軸間の回転運動の伝達が二軸の交差角を二等分する平面上の複数の点で行われるもの。

（ｂ）二軸間の回転運動の伝達が一方の軸の中心線に直交する三本の直線と他方の軸に平行な三本の直線の交点で行われるもの。

（ｃ）不等速形自在継手（例えば十字軸形自在継手）を２個面対称に結合したもの。

これらのうち最もよく使用されるのは（ａ）の形式のものであるので、本章ではこの形式のものを扱う。なかでも二軸の二等分面上に中心が拘束されているボールを介して回転運動を伝達する、いわゆるドライブボール型のものが一般的である。この型はボールを二軸に設けたボール溝に沿って一義的に拘束するものと、ケージを併用してボールの位置決めをするものとがある。前者の例にはベンディックス・ワイス型やベロモ継手があり、後者の例ではツェッパ型、バーフィールド型などが実際に製作されている。前者は構造が簡単であるが、効率が悪い、寿命が短いなどの欠点があり、最近ではケージ付きが多く用いられているようである。

自在軸継手を含む駆動軸系の構成は、駆動系の終端部と両端が自在継手を含む軸系とに大別できる。前者は軸の回転エネルギと他の形のエネルギとを変換する系であり、例えば車両、自動車、航空機（ヘリコプタ）、船舶などの車輪やプロペラに連結される部分や圧延機などがある。一方、後者は単に動力を伝達してい

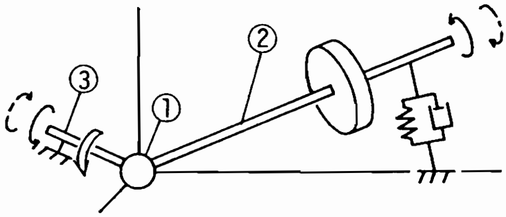
る軸部であり、例としては上記の例の中間軸部、各種産業機械や試験機などが考えられる。前者では駆動時と制動時では回転方向が同一であってもトルクの作用方向が逆になるため不安定条件式が異なり、不安定特性を解析する際にはトルクの伝達方向も考慮する必要がある。

本章では、これらの軸における動力伝達時の不安定特性を解析するため、図2・1に示す4つのロータモデルについて解析を行う。回転体の振動解析ではロータ軸モデルとして弾性軸受で支持された剛性軸モデルを用いる場合と弾性軸モデルを用いる場合とがあるが、剛性ロータモデルは運動方程式が陽な形で記述できるため、現象の理解、不安定傾向の見通しが容易である。そこで本章と第4章では剛性ロータモデルで解析を行う。図2・1のMR2とMR4ロータモデルは駆動系終端部の剛性ロータモデルを表し、SR2とSR4ロータモデルは駆動系中間軸の剛性ロータモデルを表す。MR2ロータとSR2ロータは軸継手を介して駆動されるロータ軸系の安定性を解析的に把握するための2自由度モデルであり，MR4ロータとSR4ロータは二つの軸受で支持された実際のロータ軸を模擬した4自由度モデルである（本論文では連結している継手の種類に関わらず、2自由度系と4自由度系の剛性ロータモデルをこのように呼ぶ）。4自由度系では解析的に不安定条件を書き下してもパラメータの不安定境界に及ぼす影響は簡単には把握できない。そのため、本論文では、まず、数式的取扱が容易な2自由度系での安定性を検討し、その後、実際のロータ軸系への適用を目的とした4自由度モデルの解析を主として数値的に行う。

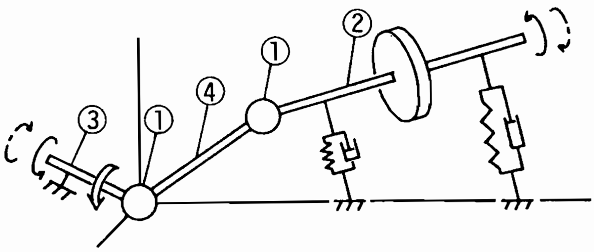
ところで、等速継手は等速で回転を伝達すると言われているが、それは二軸が固定されている場合であり、従動軸が横運動をする場合には横運動の影響が自転軸方向にも現れ従動軸の自転角速度は駆動軸のそれと同じではない。そこで、次節ではロータ軸系の解析に先立ち、まず等速自在継手の条件から従動軸の横運動と自転角速度との関係を導く。

2・2　ドライブボール型等速自在軸継手の機構

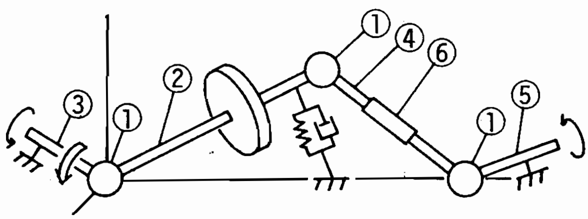
2・2・1　ドライブボール型等速自在軸継手の構造



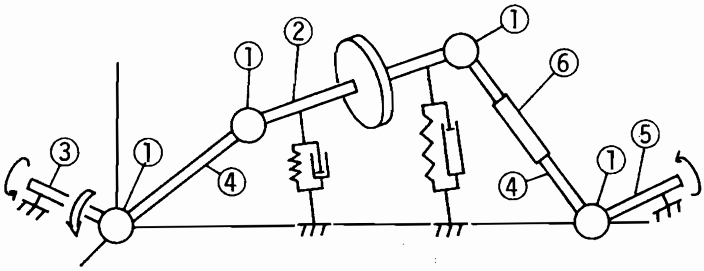
（ａ）ＭＲ２ロータ



（ｂ）ＭＲ４ロータ



（ｃ）ＳＲ２ロータ



（ｄ）ＳＲ４ロータ

① Universal or Flexible Joint ② Rotor Shaft ③ Driving Shaft
④ Intermediate Shaft ⑤ Loading Shaft ⑥ Sliding Element
Direction of Torque   Direction of Rotation

図２・１　　剛性ロータモデル

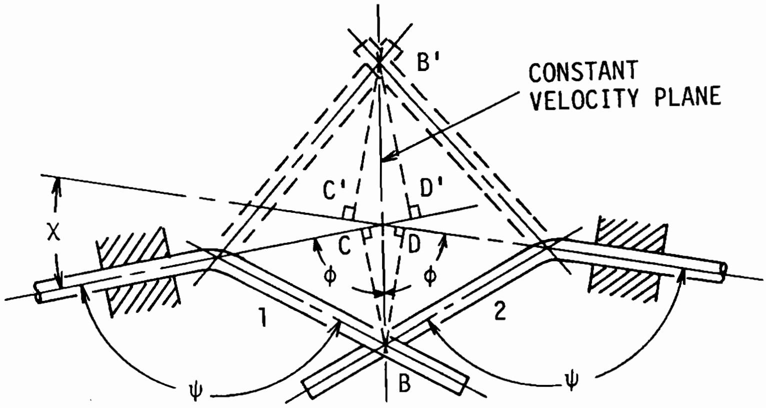
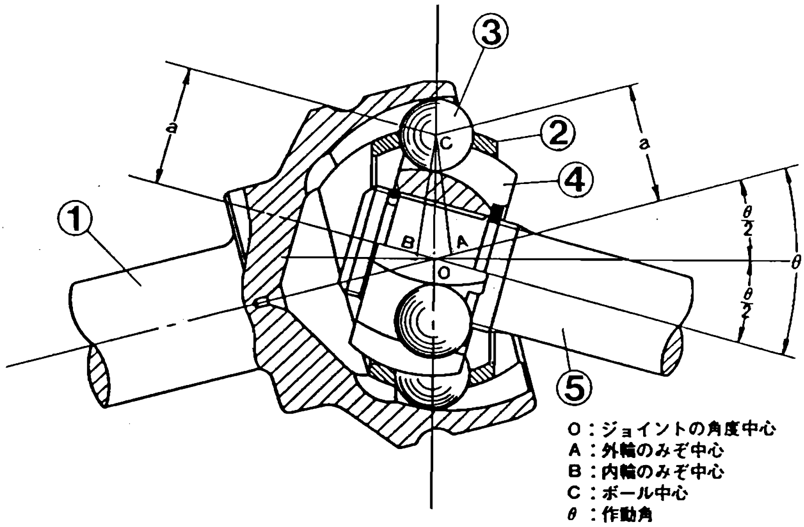
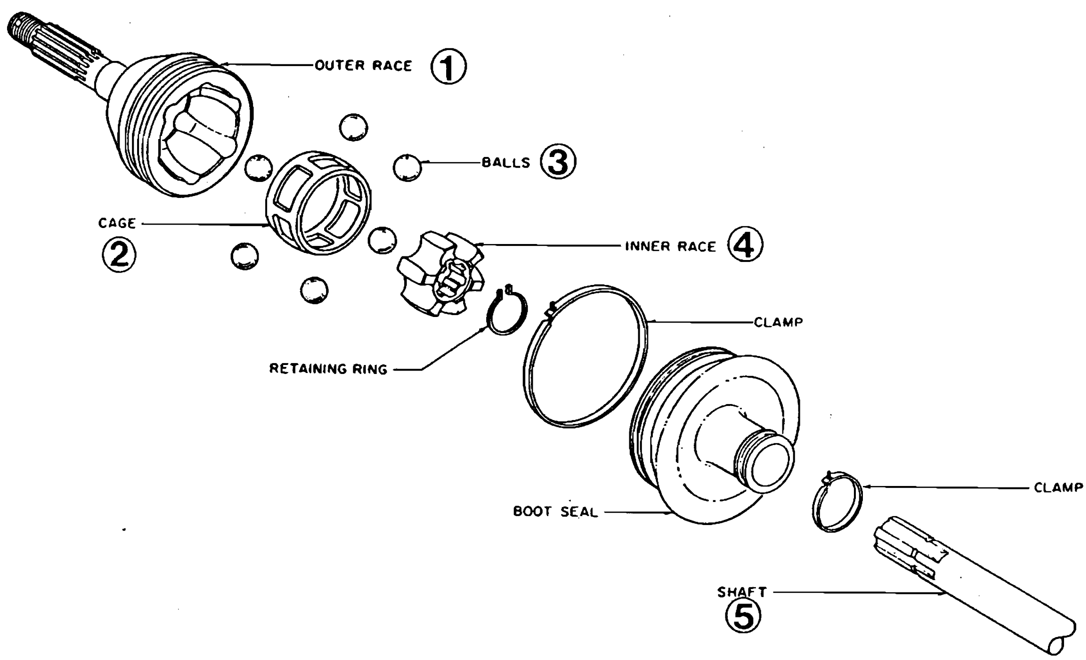


図２・２　　等速自在継手の原理

自在継手の等速条件は、前節（b）の型の自在継手を除いて駆動軸と従動軸が一定の交差角をとる場合、（i）駆動要素と従動要素の接触面が空間に一定に固定されており、（ii）その面は駆動軸と従動軸からなる面に垂直で、かつ（iii）駆動軸と従動軸に対して等しい角度で交差する[26]（図２・２、ＢＢ'面）ことである。（i）～（iii）の条件を満足すれば駆動要素と従動要素の回転角速度が等しくなることは図２・２より明かである。自在継手では任意の交差角でもこれらの条件を満足するように工夫されている。ドライブボール型等速自在継手ではボール中心移動線が二軸のなす角の二等分面に関して鏡像対称で、常にボールがその二等分面上に並ぶようになっている。このボール中心移動線が二軸のなす角の二等分面に関して鏡像対称であればボール中心移動線の形状に関わらず等速条件（i）～（iii）は満たされる[23]、[24]。例えば図２・３に示すツェッパ型継手では、軸交点（図２・３（a）、点Ｏ）を中心とした同心球を内外面とするケージと各軸に固定した軸交点から各軸上それぞれ等距離の点（図２・３（a）、点Ａ，Ｂ）に中心をもつ球面とを用いて、ボール中心移動線（円弧）が二軸のなす角の二等分面に関して鏡像対称となるようにしている。ドライブボール型等速自在継手はどの型のものを考えても基本的なトルク伝達特性は同じであるので、本論文では図２・３の型の等速継手で考察する。なお、この型のものは従動軸の横変位に伴って従動軸は軸方向にスライドしない。



（a）断面



（b）構成要素

図２・３　ツエッパ型等速継手の機構

2・2・2　一つの等速自在継手で連結された二軸の自転角の関係

等速継手を介して駆動される従動軸が横変位する場合の横変位と自転角との関係を導く。図2・4に座標系を示す。従動軸に固定した動座標系$O_0-x'y'z'$はX_0軸回りに角α、y軸回りに角β、z軸回りに角θ回転した座標系である。このとき駆動軸は従動軸の横変位のため角γ_0だけ回転したO_0x_0軸から角θ回転する。ここで、γ_0はx_0y_0面とxy面が駆動軸と従動軸のなす角の二等分面Sに関して鏡像対称の関係にある条件より、α、βの関数として表される角である。これは、前項で述べたように等速継手では各軸に固定されたボール中心移動線が面Sに関して鏡像対称であるから、各軸に固定した座標軸もやはり面Sに関して鏡像対称であることによる。

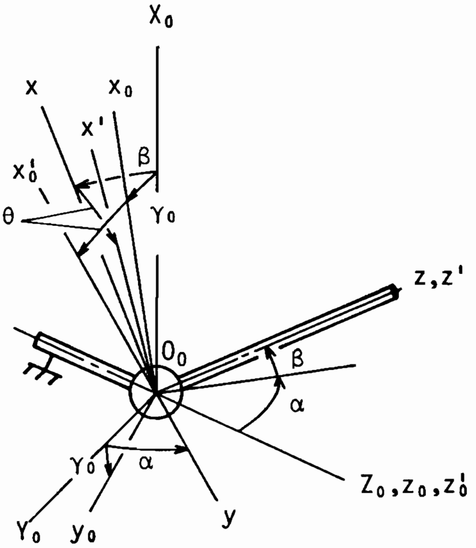


図2・4　一つの等速継手で連結された従動軸の自転角

O_0z_0, O_0z, O_0x_0, O_0xの各方向の単位ベクトルを$\overrightarrow{O_0z_0}$, $\overrightarrow{O_0z}$, $\overrightarrow{O_0x_0}$, $\overrightarrow{O_0x}$と表すと、二等分面に垂直な方向は$(\overrightarrow{O_0z_0}+\overrightarrow{O_0z})$であり、$x_0y_0$面と$xy$面が面Sに関して対称であるとすれば$(\overrightarrow{O_0x_0}+\overrightarrow{O_0x})$または$(\overrightarrow{O_0y_0}+\overrightarrow{O_0y})$はS面内にある。それゆえ

$$(\overrightarrow{O_0z_0}+\overrightarrow{O_0z})\cdot(\overrightarrow{O_0x_0}+\overrightarrow{O_0x})=0 \qquad (2\cdot1)$$

または、

$$(\overrightarrow{O_0z_0}+\overrightarrow{O_0z})\cdot(\overrightarrow{O_0y_0}+\overrightarrow{O_0y})=0 \qquad (2\cdot1)'$$

が成立する。 $\overrightarrow{O_0 X_0}=i$, $\overrightarrow{O_0 Y_0}=j$, $\overrightarrow{O_0 Z_0}=k$ と置けば、

$$\overrightarrow{O_0 x_0}=i\cos\gamma_0+j\sin\gamma_0,$$

$$\overrightarrow{O_0 y_0}=-i\sin\gamma_0+j\cos\gamma_0, \quad \overrightarrow{O_0 z_0}=k$$

$$\overrightarrow{O_0 x}=i\cos\beta+j\sin\alpha\sin\beta-k\cos\alpha\sin\beta$$

$$\overrightarrow{O_0 y}=j\cos\alpha+k\sin\alpha$$

$$\overrightarrow{O_0 z}=i\sin\beta-j\sin\alpha\cos\beta+k\cos\alpha\cos\beta$$

と表せる。これらを式（2・1）に代入すると（式（2・1）'も同じ結果を与える）

$$\sin\beta\cos\gamma_0=\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma_0+\cos\alpha\sin\beta \qquad (2\cdot 2)$$

となる。式（2・2）と $\cos^2\gamma_0+\sin^2\gamma_0=1$ の関係を用いると、

$$\sin\gamma_0=(\pm 1-\cos\alpha\cos\beta)\sin\alpha\sin\beta/(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)$$

が得られる。上式で複号が－の場合は $\alpha\to\pi/2$, $\beta\to\pi/2$ で $\sin\gamma_0\to\infty$ となり不合理である。それゆえ、複号が＋の場合が本モデルの場合であり

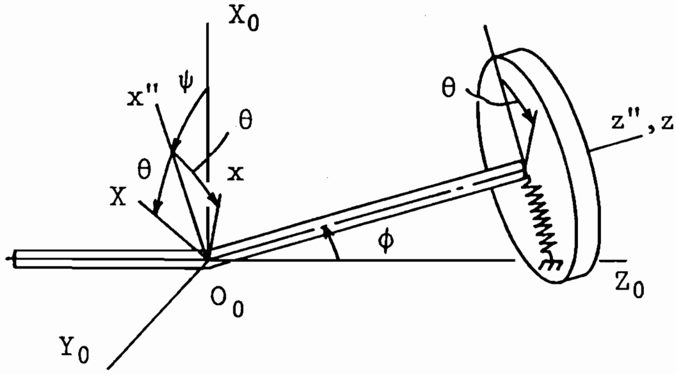
$$\sin\gamma_0=\sin\alpha\sin\beta/(1+\cos\alpha\cos\beta) \qquad (2\cdot 3)$$

である。このとき

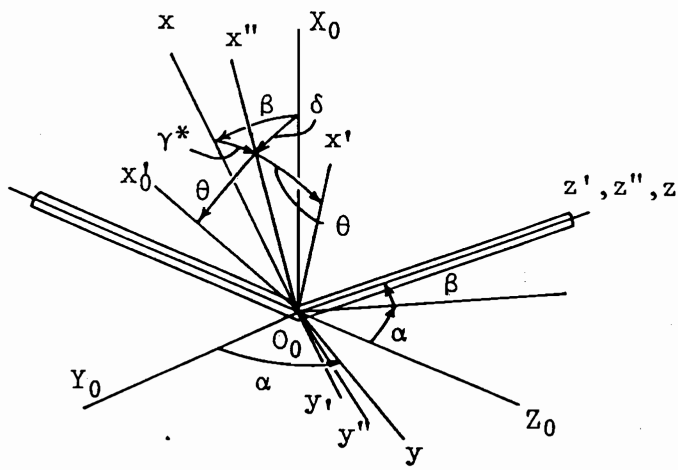
$$\cos\gamma_0=(\cos\alpha+\cos\beta)/(1+\cos\alpha\cos\beta) \qquad (2\cdot 4)$$

となる。

この自転角は自在継手に固定した座標系が面Sに対称であるという条件から求めたものであり、駆動軸と従動軸の自転角度に相対的にγ_0だけ差が発生すること



（a）



（b）

図2・5　従動軸横変位の他の表現方法

を意味する。座標系の取り方を変えると別の式で表現される。たとえば、駆動軸がθ回転し従動軸が$\theta+\gamma$回転したとすると式（2・3）、（2・4）で与えられるγ_0に対し $\gamma=-\gamma_0$ なるγが得られることになる。

ここで、この自転角度差γ_0についてその物理的な意味を考察してみる。弾性軸の2次元的な曲げ変形を表すのに図2・5（a）に示す座標系（オイラーの角）を用いることがある。すなわち、O_0Z_0軸回りに角ϕ回転したO_0x''軸回りにϕ回転した座標系$O_0-x''y''z''$からそれぞれの軸の自転角θを取る。この座標系は図2・5（b）のように考えると図2・4と同じような角γ^*を求めることができ

る。 $\phi=\delta$ と置き、図2・5（a）と（b）のO_0x''軸が同じ方向であると置くと、

$$\tan\gamma^* = \cos\alpha\sin\beta / \sin\alpha,$$
$$\tan\delta = \tan\beta / \sin\alpha \quad (=\tan\phi)$$

となり、従動軸の変位α, βにより駆動軸がδ回転し、従動軸がγ^*回転すると考えられる。さらに、

$$\tan(\gamma^* - \delta) = (\tan\gamma^* - \tan\delta)/(1+\tan\gamma^*\tan\delta)$$
$$= -\sin\alpha\sin\beta/(\cos\alpha+\cos\beta) = -\tan\gamma_0$$

となるから、

$$\gamma^* - \delta = -\gamma_0 \qquad (2\cdot5)$$

となる。　ここで、　$\gamma^* + \theta = \Theta$　とおくと、

$$\theta + \delta = \Theta - \gamma^* + \delta = \Theta + \gamma_0 \qquad (2\cdot6)$$

となり、図2・5（b）は図2・4と同じ関係にあることが分かる。つまり、材料力学で用いられる弾性軸の平面曲げの条件とドライブボール型等速自在継手のボール中心線が鏡像対称に配置される条件とは等価であることが分かる。別の表現をすれば、角γ_0は駆動軸と従動軸の間にねじりが発生しないための角であるとも言える。

このことはさらに図2・6のよう

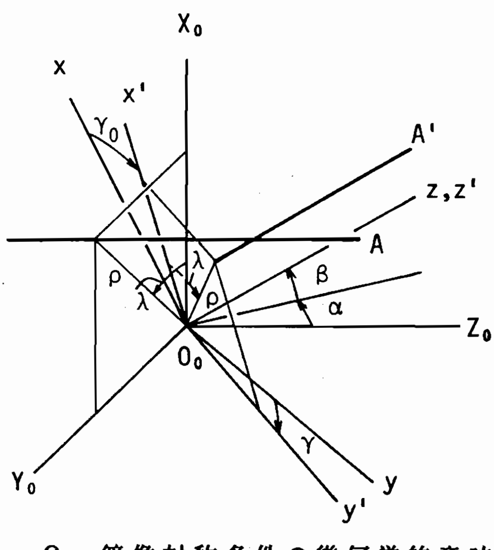


図2・6　鏡像対称条件の幾何学的意味

に考えても理解できる。静止座標系$O_0-X_0Y_0Z_0$に固定した直線

$$A:\ X_0=\rho\cos\lambda,\quad Y_0=\rho\sin\lambda,\quad Z_0=Z_0$$

に対して静止座標からX_0, Y_0, Z_0軸回りにα, β, γ_0回転した座標系$O_0-x'y'z'$に固定した直線

$$A':\ x'=\rho\cos\lambda,\quad y'=\rho\sin\lambda,\quad z'=z'$$

が交点を有するための座標系$O_0-x'y'z'$の回転角γ_0を求めると、

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cos\gamma_0-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_0\\&+\tan\lambda\ (\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_0+\sin\alpha\sin\gamma_0)=0\end{aligned}\qquad(2\cdot7)$$

となり、λにかかわらず式（２・３）、式（２・４）で与えられるγ_0が上式を満足する。この直線を金属の一本の繊維と見なすと、α，β回転したためのねじれが角γ_0によって解放されると理解することができる。

２・２・３　二つの等速自在継手で連結された二軸の自転角の関係

一つの自在継手で駆動される剛性ロータ軸は傾き運動しか許されないので、横変位も許容するためには二つの自在継手を直列につないで中間軸によって変位を吸収する必要がある。そこで、本項では前項と同じ方法で二つの等速継手を介した場合の駆動軸の回転角と従動軸の回転角の関係を導く。座標系を図２・７に示すようにとる。$O_0-X_0Y_0Z_0$座標に平行なロータ中心を原点とする動座標O_2-XYZをとりO_2-XYZにおける回転角α，β，θによってロータ軸の傾き及び自転を表す。中間軸の横変位角をα_1，β_1で表し、自転角を$\theta+\gamma_1$で表す。ここで、γ_1は第２継手の鏡像対称条件よりα，β，α_1，β_1を用いて表される。さらに、駆動軸の自転角を$\theta+\gamma_0$で表す。γ_0は第１継手の鏡像対称条件よりα_1，β_1，γ_1を用いて表される。第２継手および第１継手の鏡像対称条件は式（２・８）、式（２・９）である。

$$(\overrightarrow{O_2x}+\overrightarrow{O_0x_1'})\cdot(\overrightarrow{O_2z}+\overrightarrow{O_0z_1'})=0\qquad(2\cdot8)$$

$$(\overrightarrow{O_0x_1'}+\overrightarrow{O_0x_0})\cdot(\overrightarrow{O_0z_1'}+\overrightarrow{O_0z_0})=0\qquad(2\cdot9)$$

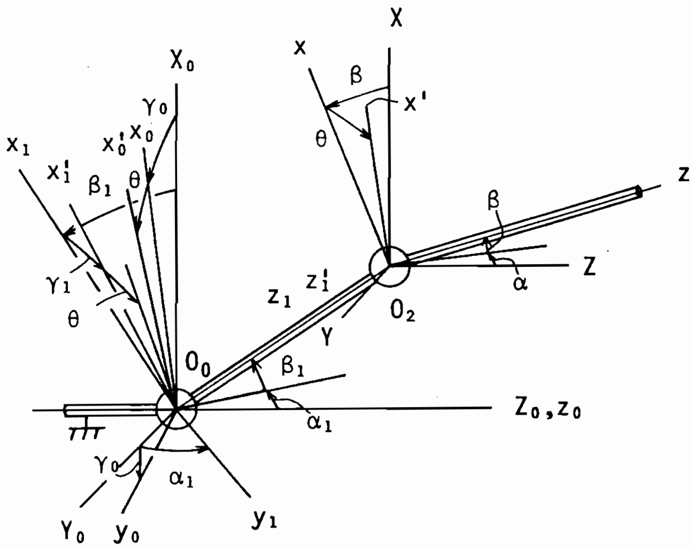


図２・７　二つの等速継手で連結された従動軸の自転角

i，　j，　k　を前項と同様に静止座標方向の単位ベクトルとすれば、

$$\overrightarrow{O_2 x} = i\cos\beta + j\sin\alpha\cos\beta - k\cos\alpha\sin\beta$$

$$\overrightarrow{O_2 z} = i\sin\beta - j\sin\alpha\cos\beta + k\cos\alpha\cos\beta$$

$$\overrightarrow{O_0 x_1'} = i\cos\beta\cos\gamma_1 + j\,(\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_1\sin\gamma_1)$$
$$+ k\,(-\cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 + \sin\alpha_1\sin\gamma_1)$$

$$\overrightarrow{O_0 z_1'} = i\sin\beta_1 - j\sin\alpha_1\cos\beta_1 + k\cos\alpha_1\cos\beta_1$$

と表される。これらを式（２・８）に代入すると、

$$\{\cos\beta_1\sin\beta - \sin\beta_1\cos\beta\cos(\alpha-\alpha_1)\}\cos\gamma_1$$
$$-\cos\beta\sin\gamma_1\sin(\alpha-\alpha_1) + \sin\beta_1\cos\beta - \cos\beta_1\sin\beta\cos(\alpha-\alpha_1) = 0 \quad (2\cdot10)$$

となる。式（２・１０）と $\sin^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$ の関係を用いれば、

$$\sin\gamma_1 = [\pm\cos\beta_1\{\sin\beta_1\cos\beta\cos(\alpha-\alpha_1)-\cos\beta_1\sin\beta\} + \cos\beta\{\sin\beta_1\cos\beta-\cos\beta_1\sin\beta\cos(\alpha-\alpha_1)\}]\sin(\alpha-\alpha_1) / [\cos^2\beta\sin^2(\alpha-\alpha_1)+\{\cos\beta_1\sin\beta-\sin\beta_1\cos\beta\cos(\alpha-\alpha_1)\}^2] \tag{2・11}$$

が得られる。上式において $\alpha_1=\beta_1=0$ と置けば式（２・３）と一致するはずであるから、式（２・１１）の複号は下号が図２・７の場合であることが分かる。これより

$$\sin\gamma_1 = (\sin\beta_1+\sin\beta)\sin(\alpha-\alpha_1) / \{1+\sin\beta_1\sin\beta+\cos\beta_1\cos\beta\cos(\alpha-\alpha_1)\}$$

$$\cos\gamma_1 = \{\cos\beta_1\cos\beta+(1+\sin\beta_1\sin\beta)\cos(\alpha-\alpha_1)\} / \{1+\sin\beta_1\sin\beta+\cos\beta_1\cos\beta\cos(\alpha-\alpha_1)\} \tag{2・12}$$

となる。　同様に、

$$\overrightarrow{O_0 x_0} = i\cos\gamma_0 + j\sin\gamma_0, \quad \overrightarrow{O_0 z_0} = k$$

であるから、式（２・９）より

$$-\sin\beta_1\cos\gamma_0+\cos\beta_1\sin\alpha_1\sin\gamma_0 + \sin\beta_1\cos\alpha_1\cos\gamma_1-\sin\alpha_1\sin\gamma_1=0 \tag{2・13}$$

が得られる。上式と $\cos^2\gamma_0+\sin^2\gamma_0=1$ の関係より

$$\sin\gamma_0 = \{\pm\sin\beta_1(\sin\alpha_1\cos\gamma_1+\sin\beta_1\cos\alpha_1\sin\gamma_1) - \cos\beta_1\sin\alpha_1(\sin\beta_1\cos\alpha_1\cos\gamma_1-\sin\alpha_1\sin\gamma_1)\} / (\sin^2\beta_1+\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_1)$$

となる。上式において $\gamma_1=0$ と置くと式（2·3）に一致しなければならないから複号は上号であることが分かる。すなわち、

$$\sin\gamma_0=\{\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1+(\cos\alpha_1+\cos\beta_1)\sin\gamma_1\}/(1+\cos\alpha_1\cos\beta_1)$$

$$\cos\gamma_0=\{(\cos\alpha_1+\cos\beta_1)\cos\gamma_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1\}/(1+\cos\alpha_1\cos\beta_1)$$

（2·14）

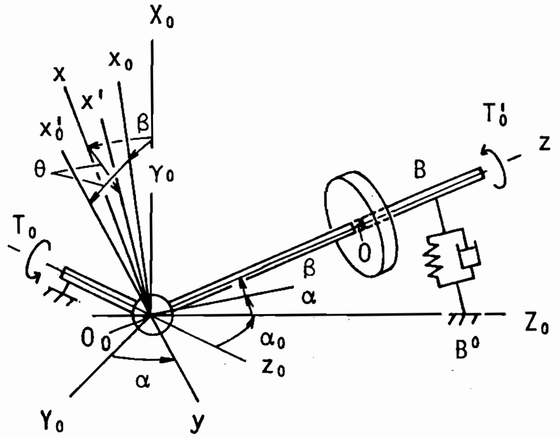
となる。

2・3　MR2ロータ系の安定性

解析モデルは図2·4の従動軸（ロータ軸）に軸受を付加した系である（図2·8）。系は従動軸支持軸受のばね以外はすべて剛体とし、重力の影響を無視する。軸受はそのばね定数が α 方向と β 方向で異なるものとする。駆動軸とロータ軸は静止時に初期交差角 α_0 で交差している。また、駆動軸にはトルク T_0、従動軸にはトルク T'_0 が作用しているとする。

2・3・1　運動方程式

まず、ロータ軸に作用する O_0 点回りの外部モーメントを O_0-xyz 成分で表す。作用する外部モーメントは、駆動トルクに起因するモーメント［M_x M_y M_z］、従動軸軸受のばね復元モーメント［R_x R_y R_z］と減衰モーメント［P_x P_y P_z］、負荷トルク［0　0　T_0'］および継手内部の減衰モーメント［Q_x



$O_0O=l_0$, $O_0B=O_0B^0$

図2・8　MR2ロータの座標系

Q_y Q_z] である。軸受部分の復元モーメント及び減衰モーメントはそれぞれ従動軸角および角速度に比例すると仮定し、継手部分の減衰モーメントは従動軸と駆動軸の相対角速度に比例すると仮定する。まず、駆動トルクに起因するモーメントを求める。駆動トルクだけが作用している軸系を考えて、仮想仕事の原理を適用すると、次式が成立する。

$$T_0(\delta\theta+\delta\gamma_0)=M_x\cos\beta\,\delta\alpha+M_y\delta\beta+M_z(\sin\beta\,\delta\alpha+\delta\theta) \tag{2·15}$$

ここで、δ（·）は（·）の変分を表し、

$$\delta\gamma_0=\{\sin\beta\,\delta\alpha+\sin(\alpha_0+\alpha)\delta\beta\}/\{1+\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\}$$

である。変分$\delta\alpha$、$\delta\beta$、$\delta\theta$の各係数は零でなければならないことから、

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}=T_0\begin{bmatrix} -\cos(\alpha_0+\alpha)\sin\beta/\{1+\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\} \\ \sin(\alpha_0+\alpha)/\{1+\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2·16}$$

が得られる。このモーメントの方向は駆動軸と従動軸のなす角の２等分方向$\overrightarrow{O_0z_0}+\overrightarrow{O_0z}$と一致している。これは、一般に交差角を介してトルクを伝達すると軸方向トルクだけでは継手部分でつりあいが取れず横方向モーメントが発生することを表しており、等速継手ではこの合モーメントがちょうど二軸の２等分方向にあることを意味している。

ばね復元モーメントおよび減衰モーメントは前述の仮定より次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} k_a\alpha\cos\beta \\ k_b\beta \\ k_a\alpha\sin\beta \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}=-C_c\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = C_i \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_0+\alpha)\sin\beta\, d\theta/dt - \omega_x \\ \sin(\alpha_0+\alpha)\, d\theta/dt - \omega_y \\ \cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\, d\theta/dt - \omega_z - d\theta/dt \end{bmatrix}$$

（２・１７）

ここで、C_iは継手内部の摩擦力の減衰係数、C_oは支持軸受の減衰係数、k_a, k_bは支持軸受のα, β方向回転ばね定数である。また、$[\omega_x\ \ \omega_y\ \ \omega_z]^T$は従動軸固定の座標系$O_0-xyz$の角速度の$xyz$成分であり、

$$[\omega_x\ \ \omega_y\ \ \omega_z]^T = [\cos\beta\, d\alpha/dt\quad d\beta/dt\quad \sin\beta\, d\alpha/dt]^T$$

である（$[\cdot]^T$は転置を表す）。

以上の外部モーメントの総和を$[\tau_x\ \ \tau_y\ \ \tau_z]$で表すと、運動方程式は次式となる[27]。

$$\tau_x = I_t d\omega_x/dt + I_p\omega_y(\omega_z + d\theta/dt) - I_t\omega_z\omega_y$$

$$\tau_y = I_t d\omega_y/dt - I_p\omega_x(\omega_z + d\theta/dt) + I_t\omega_z\omega_x$$

$$\tau_z = I_p(d\omega_z/dt + d^2\theta/dt^2)$$

（２・１８）

ここで、I_pは従動軸のz軸回りの極慣性モーメント、I_tは従動軸のz軸に垂直なO_0点を通る軸回りの慣性モーメント を表す。

上式右辺をα, β, θで表し、外部モーメントに式（２・１６）および式（２・１７）を代入し、以下に示す無次元量を用いて無次元化を行うと次式系が得られる。

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha}\cos\beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta + A\dot{\beta}(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\theta}) \\ &+ \zeta_i\{\dot{\alpha}\cos\beta + (\dot{\theta} - \dot{\gamma}_0)\cos(\alpha_0+\alpha)\sin\beta\} \\ &+ \zeta_o\dot{\alpha}\cos\beta + (1+\sigma)\alpha\cos\beta \\ &+ \tau_0\cos(\alpha_0+\alpha)\sin\beta / \{1+\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\} = 0\end{aligned}$$

$$\ddot{\beta}+\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta-A\dot{\alpha}\cos\beta\left(\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\theta}\right)$$
$$+\zeta_i\{\dot{\beta}-(\dot{\theta}-\dot{\gamma}_0)\sin(\alpha_0+\alpha)\}$$
$$+\zeta_e\dot{\beta}+(1-\sigma)\beta$$
$$-\tau_0\sin(\alpha_0+\alpha)/\{1+\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\}=0$$

$$\ddot{\alpha}\sin\beta+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+\ddot{\theta}$$
$$+\zeta_i[\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\gamma}_0\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta$$
$$+\{1-\cos(\alpha_0+\alpha)\cos\beta\}\dot{\theta}]$$
$$+\zeta_e(\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\theta})+(1+\sigma)\alpha\sin\beta-\Delta\tau_0=0$$

（2・19）

ここで、

$\sigma=(k_a-k_b)/(k_a+k_b)$：支持軸受のばね定数異方性、

$A=I_p/I_t$：慣性モーメント比、$T=\omega_0 t$：無次元時間、

$\zeta_e=C_e/I_t\omega_0$：無次元外部減衰係数、$\zeta_i=C_i/I_t\omega_0$：

無次元内部減衰係数、$\tau_0=T_0/(I_t\omega_0^2)$：無次元駆動トルク、

$\Delta\tau_0=(T_0-T_0')/(I_t\omega_0^2)$：無次元加速トルク、

$\omega_0=\sqrt{(k_a+k_b)/(2I_t)}$：平均ばね定数による固有振動数、

$(\dot{\ })$：無次元時間Tによる微分。

上式の厳密解を求めるのは困難であるので解析を容易にするためにα，βに関する線形近似運動方程式を求める。$\alpha<<1$，$\beta<<1$と仮定して、$\cos(\alpha_0+\alpha)\fallingdotseq\cos\alpha_0-\alpha\sin\alpha_0$，$\sin(\alpha_0+\alpha)\fallingdotseq\sin\alpha_0+\alpha\cos\alpha_0$，$\cos\beta\fallingdotseq 1$，$\sin\beta\fallingdotseq\beta$と近似し、$\alpha$，$\beta$とその導関数の二乗以上の項を無視すると、

$$\ddot{\alpha}+A\dot{\beta}\dot{\theta}+(\zeta_e+\zeta_i)\dot{\alpha}+\zeta_i\cos\alpha_0\beta\dot{\theta}$$
$$+(1+\sigma)\alpha+\tau_0\beta\cos\alpha_0/(1+\cos\alpha_0)=0$$

$$\ddot{\beta}-A\dot{\alpha}\dot{\theta}+(\zeta_e+\zeta_i)\dot{\beta}-\zeta_i(\sin\alpha_0+\alpha\cos\alpha_0)\dot{\theta}$$
$$+(1-\sigma)\beta-\tau_0\alpha/(1+\cos\alpha_0)=\tau_0\sin\alpha_0/(1+\cos\alpha_0)$$

$$\ddot{\theta} + \{\zeta_0 + \zeta_1 (1 - \cos\alpha_0 + \alpha\sin\alpha_0)\}\dot{\theta}$$
$$-\sin\alpha_0 / (1 + \cos\alpha_0)\ (\ddot{\beta} + \zeta_0\dot{\beta} + \zeta_1\dot{\beta}) = \Delta\tau_0 \tag{2・20}$$

となる。さらに、上式の第３式において$\dot{\theta}$の変動が無視できると仮定し、$\dot{\theta} = \Delta\tau_0 / \{\zeta_0 + \zeta_1(1 - \cos\alpha_0)\} = \nu$（＝一定）とおくと、以下に示す$\alpha$，$\beta$に関する線形近似運動方程式（２・２１）が得られる。同式では $a_0 \neq 0$ のときは伝達トルクτ_0は強制力成分も発生させるが一定値であるため振動的には問題はない。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_0 + \zeta_1 & A\nu \\ -A\nu & \zeta_0 + \zeta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 + \sigma & \begin{array}{c} \zeta_1 \nu (1 - a_0^2)/(1 + a_0^2) \\ + (+1 - a_0^2)\tau_0/2 \end{array} \\ \begin{array}{c} -\zeta_1 \nu (1 - a_0^2)/(1 + a_0^2) \\ + (-1 - a_0^2)\tau_0/2 \end{array} & 1 - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\zeta_1 \nu\, a_0/(1 + a_0^2) + \tau_0 a_0 \end{bmatrix} \quad ;\ a_0 = \tan(\alpha_0 / 2) \tag{2・21}$$

２・３・２　安定性解析

式（２・２１）から右辺強制項を除いた式に解 $\alpha = a_1 e^{ZT}$，$\beta = a_2 e^{ZT}$ を代入し、非自明解が存在する条件より特性方程式を求めると、

$$Z^4 + 2Z_0 Z^3 + (2 + Z_0^2 + H^2) Z^2 + (2Z_0 + 2Z_1 H + \tau_0 H) Z$$
$$+ 1 - \sigma^2 + Z_1^2 + Z_1 \tau_0 + (1 - a_0^4)\tau_0^2 / 4 = 0 \tag{2・22}$$

ただし、

$$Z_e=\zeta_e+\zeta_i,\quad Z_i=\zeta_i\nu(1-a_\theta^2)/(1+a_\theta^2),\quad H=A\nu$$

となる。上式にラウス・フルヴィッツの安定判別条件[28]を適用すると不安定条件は、

$$1-\sigma^2+Z_i^2+Z_i\tau_\theta+(1-a_\theta^4)\tau_\theta^2/4<0 \tag{2・23}$$

$$\tau_\theta<-2(Z_e/H+Z_i) \tag{2・24}$$

$$\tau_\theta<\tau_{cr2},\qquad \tau_{cr1}<\tau_\theta \tag{2・25}$$

$$\tau_{cr1}=(-b_1+\sqrt{b_1^2-b_2b_\theta})/b_2$$

$$\tau_{cr2}=(-b_1-\sqrt{b_1^2-b_2b_\theta})/b_2$$

$$b_2=Z_e^2(1-a_\theta^4)+H^2,$$

$$b_1=2Z_e^2Z_i-Z_e^3H+2Z_iH^2-Z_eH^3,$$

$$b_\theta=4\{Z_e^2(Z_i^2-Z_e^2-\sigma^2)-Z_e^3Z_iH+(Z_i^2-Z_e^2)H^2-Z_eZ_iH^3\}$$

となる。

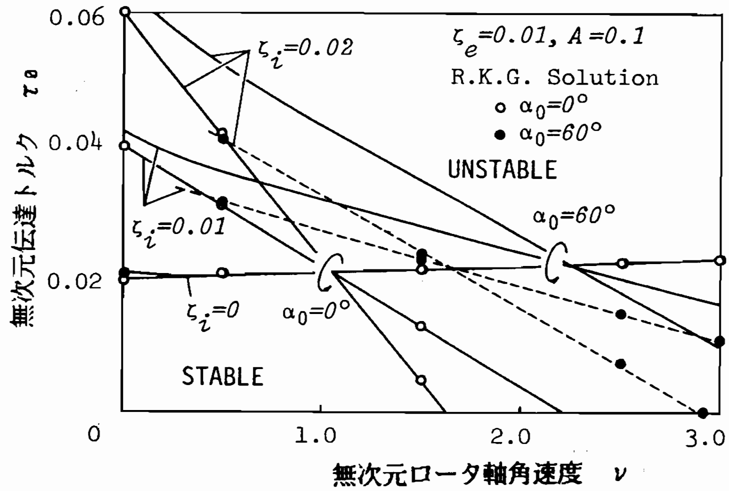
実際の継手では $\alpha_\theta<90°$ であるから $a_\theta^2<1$ であり、式(2・23)の条件は満足しない。また、式(2・25)の条件では軸受剛性異方性が安定化作用を持つことが容易に分かる。不安定条件式(2・24)、(2・25)より$\tau_\theta\nu$の符号によって不安定条件が異なることが分かる。そこで、次項では $\tau_\theta\nu>0$ の場合と $\tau_\theta\nu<0$ の場合に分けて安定性を考察する。

2・3・3　安定性の数値計算例と考察

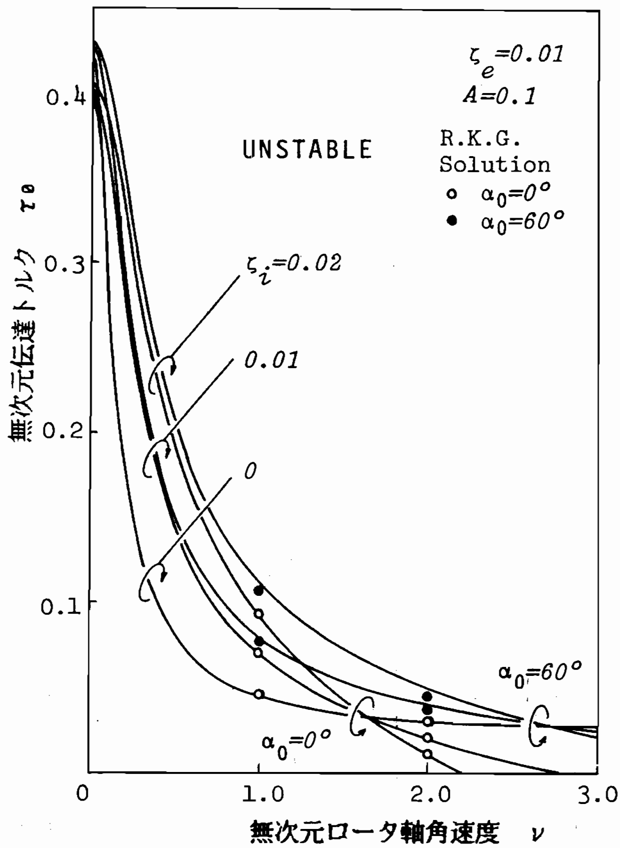
(I) ロータ軸が外部に仕事をする場合($\tau_\theta\nu>0$の場合)

この場合、式(2・24)は満足せず、式(2・25)の $\tau_{cr1}<\tau_\theta$ が不安定条件となる。不安定領域の数値計算例を図2・9図～2・11に示す。図2・9は回転数に対する限界トルクを$\zeta_e=0.01$, $A=0.1$の場合について示したものである。同図(a)は$\sigma=0$, (b)は$\sigma=0.2$の場合でそれぞれζ_i, α_θをパ

ラメータとしている。図中○●印は非線形の運動方程式（２・１９）をルンゲ・クッタ・ギル（ＲＫＧ）法で直接数値積分したときの不安定境界である。ＲＫＧ法による数値積分は初期値 $\alpha=0.01$, $\dot{\beta}=\dot{\alpha}=\beta=0$, $\dot{\theta}=\nu$ とし、きざみ幅を高いほうの固有振動周期の１／３００として行ったものである。図２・９（ａ），同図（ｂ）を比較すると σ の安定化作用が確認できる。また、α_{B} についてはその値が大きいほど安定であることも分かる。$\zeta_{I}=0$ ではごく低速域を除いて α_{B} の安定化作用がほとんどなくなるが、$\zeta_{I}>0$ の場合には高速側での α_{B} の安定化作用は顕著である。図２・９（ａ），（ｂ）とも不安定境界は α_{B} が一定の時 ζ_{I} にかかわらずほゞ一定点を通っている。この定点より低い回転数域では ζ_{I} が大きいほど安定であるが、定点より高い回転数域では逆に ζ_{I} が小さいほど安定であることが分かる。図２・１０にこの ζ_{I} が不安定作用をもたらし始める限界の回転数をＡ、σ をパラメータとして示している。同図は $\zeta_{I}=0$ の τ_{or1} と $\zeta_{I}=0.02$ の τ_{cr1} の交点の回転数を求めたものである。同図より、σ が大きいほど限界回転数が高速側に移り、またＡが小さいほど σ の効果が大きいことが分かる。さらに、α_{B} が６０°付近を越えると限界回転数が急速に高速側に移り実際上 ζ_{I} の不安定化作用が消失することが分かる。ただし、この限界回転数はここで用いたパラメータの数値の範囲内ではほゞ一定であるが、厳密には一定でなく若干のずれがある。図２・１１（ａ）および（ｂ）にはＡによる不安定領域の変化の例を示す。同図（ａ）は $\sigma=0$ の場合、（ｂ）は $\sigma=0.2$ の場合である。ごく低速域を除いて、$\sigma=0$ の場合は $A=0.3$ の方が安定であり、$\sigma=0.2$ の場合は逆に $A=0.03$ の方が安定である。これは $\zeta_{I}=0$ の場合の境界特性によるものと考えられる。すなわち、$\zeta_{I}=0$ の場合は式（２・２５）より限界トルクが $H=A\nu$ の関数となりＡの影響は回転速度軸（横軸）の拡大／縮小と同じになる。$\sigma=0$ では $\zeta_{I}=0$, $A=0.3$ の境界が右上がりであるので $A=0.03$ にすると境界曲線の傾きが緩くなり ν が大きいほど不安定になる。$\sigma=0.2$ では逆の関係になる。一方、$\zeta_{I}\neq0$ の場合にはこのような関係は成立せず、特に $\sigma=0$ では $A=0.3$ の境界が右下がりになっているのに $A=0.03$ とすると $A=0.3$ の場合より不安定化している。この場合はジャイロモーメントの不安定化作用よりも内部減衰の不安定化作用が相対的に目立ってくるためではないかと考えられる。また、$\sigma=0.2$ では $A=0.03$ の場合の方が $A=0.3$ の場合よりも安定化しているが、この場



（a） $\sigma = 0$ の場合



（b） $\sigma = 0.2$ の場合

図2・9　MR2ロータの不安定領域（$\tau_\theta \nu > 0$；$\zeta_e = 0.01$）

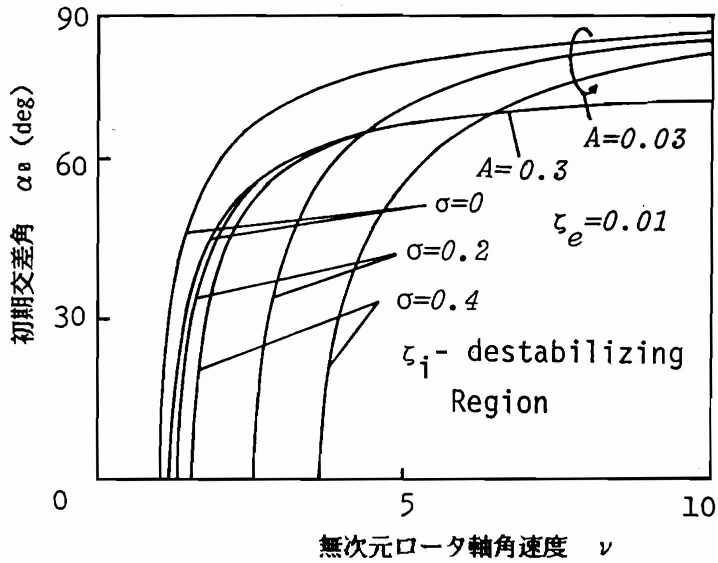
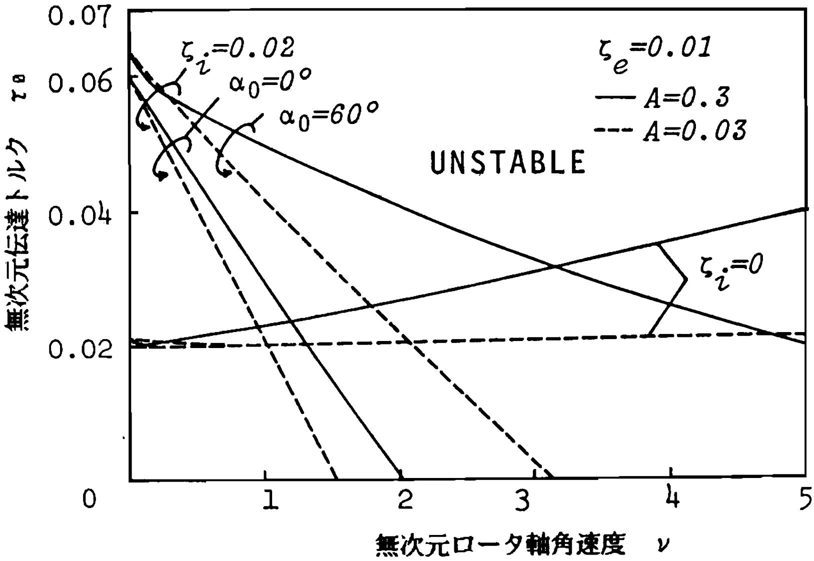


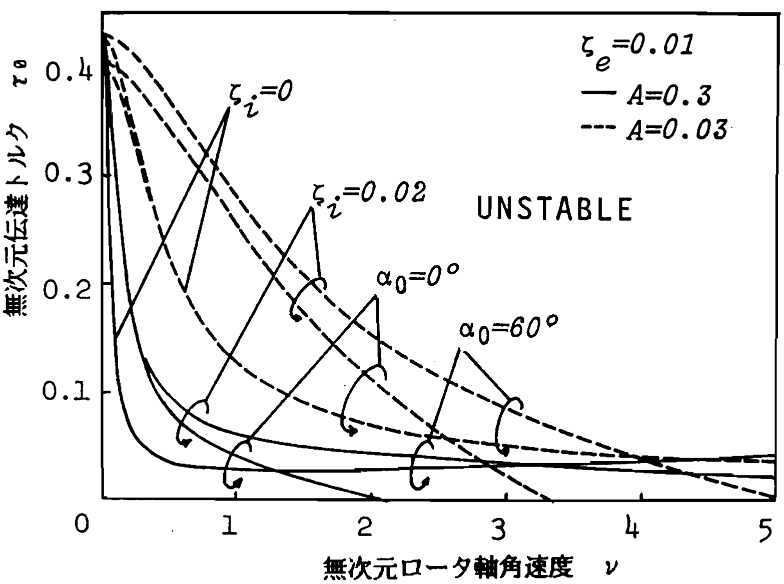
図２・１０　ＭＲ２ロータの内部減衰の不安定化作用（$\tau_\theta \nu$＞０）

合はσによる安定化作用がかなり影響をもつので（σは外部減衰ζ_eと同じ効果を持ち、かつ、その値はζ_eの１０倍以上である）、σ＝０のときの特性は隠れてしまうものと考えられる。

次に理論境界式とＲＫＧ解の結果との差異について考察する。図２·９よりＲＫＧ法による不安定境界はα_θ＝０の場合は十分理論境界式（２·２５）に一致していることが分かる。α_θ＝６０°の場合はζ_i＝０では十分理論境界式に一致しているが、ζ_i＝０.０１，０.０２では理論境界式より多少不安定側になっている。この差異は不安定境界近傍における解の$\dot{\theta}$の変動の影響と考えられる。すなわち、α_θ＝０ではζ_iの値に関わらず$\dot{\theta}$の変動がほとんどなく（ＲＫＧ解の例を図２·１２（ａ）に示す）、線形近似式を導いたときの仮定がほぼ満たされる。α_θ＝６０°の場合は$\dot{\theta}$の変動は存在するが、ζ_i＝０の場合は、$\dot{\theta}$のνからのずれも少なく（図２·１２（ｂ））、また、$\dot{\theta}$がジャイロモーメントの項に含まれるのみであるので誤差は少ないものと考えられる。一方、$\zeta_i \neq 0$の場合は$\dot{\theta}$のνからのずれも大きく（図２·１２（ｃ））、かつ、$\dot{\theta}$が内部減衰項にも含まれるため誤差が大きくなるものと考えられる。



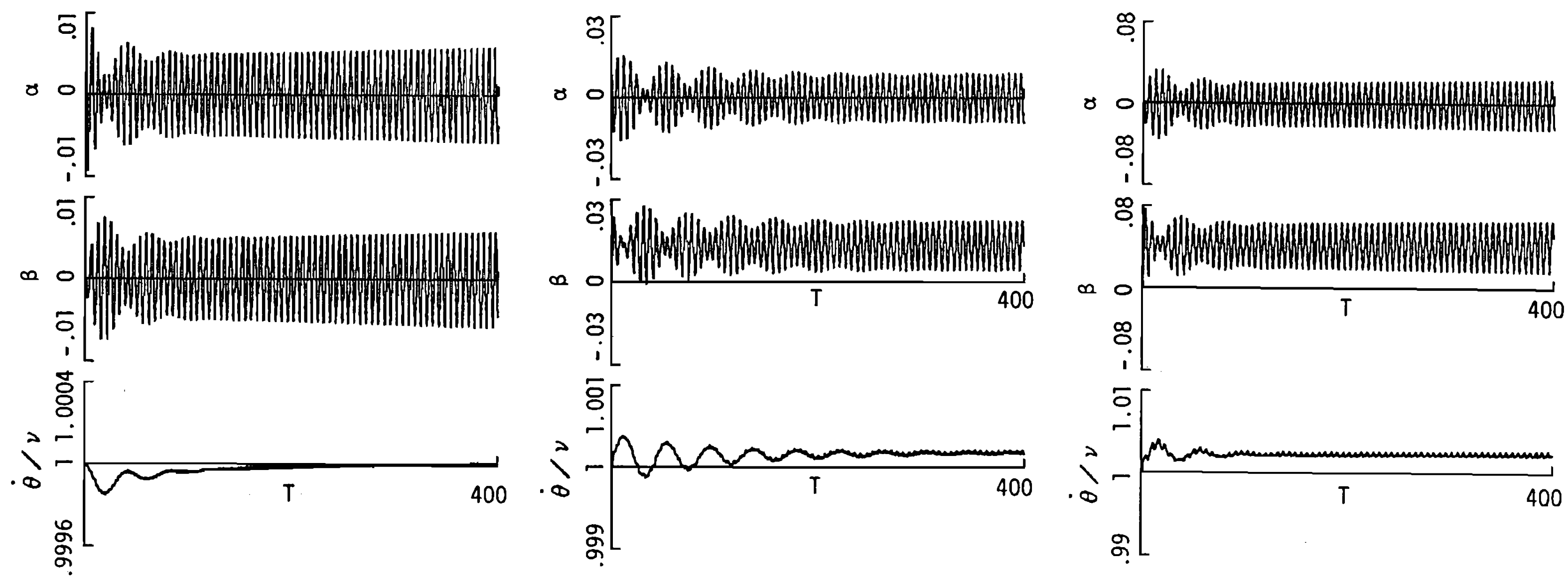
（ａ） σ ＝ ０ の 場 合



（ｂ） σ ＝ ０．２ の 場 合

図２・１１　ＭＲ２ロータの慣性モーメント比による不安定領域の変化

（$\tau_0\nu$ ＞ ０； ζ_e ＝ ０．０１）



(a) $\alpha_0=0°$, $\zeta_i=0.02$, $\tau_0=0.007$　　(b) $\alpha_0=60°$, $\zeta_i=0$, $\tau_0=0.023$　　(c) $\alpha_0=60°$, $\zeta_i=0.02$, $\tau_0=0.026$

図2・12　ＲＫＧ解の例（$\zeta_e=0.01$，$A=0$，$\sigma=0$，$\nu=1.5$）

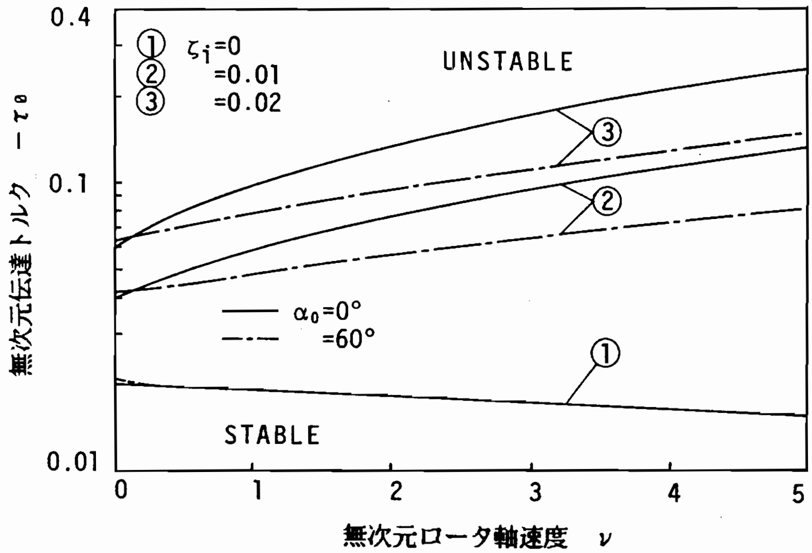
このように式（２・２５）はパラメータの値によっては若干の誤差を有しているが、定性的には十分な結果を与えていることが分かる。また、ＭＲ２ロータではＲＫＧ解からも分かるように不安定は動的不安定（フラッタ型不安定）[29]である。

（ＩＩ）ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_{\theta}\nu<0$の場合）

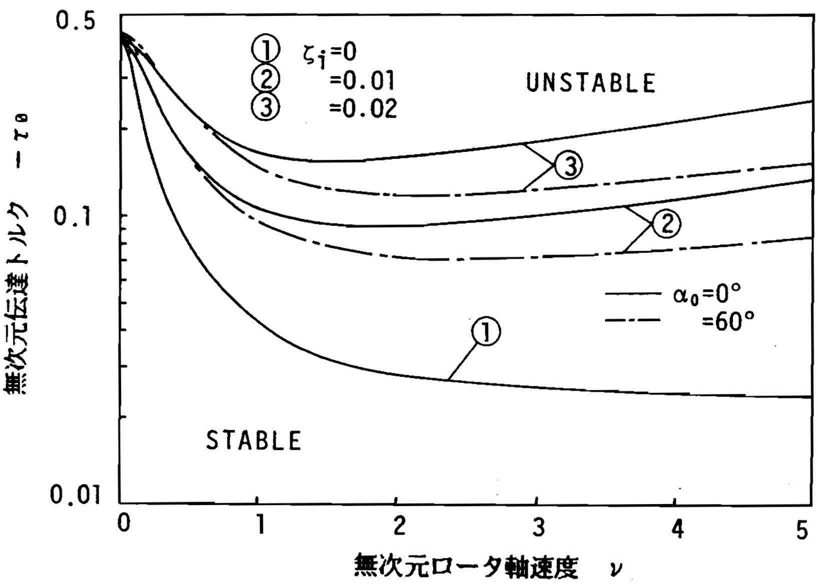
この場合はロータ軸に作用するトルクが回転方向と逆の場合である。不安定条件式は式（２・２４），式（２・２５）から

$$\tau_{\theta}<-2\left(Z_{o}/H+Z_{i}\right),\qquad \tau_{\theta}<\tau_{or2} \tag{2·26}$$

で与えられる。このときの不安定領域の数値計算例を図２・１３、図２・１４に示す。図２・１３は$\tau_{\theta}\nu>0$の図２・９に対応するもので、回転数に対する限界トルクを$\zeta_{o}=0.01$，$A=0.1$について計算したものである。同図（ａ）は$\sigma=0$,（ｂ）は$\sigma=0.2$，（ｃ）は$\sigma=0.6$の場合である。ここで計算したパラメータの値の範囲内では不安定条件式は常に式（２・２６）の第２式であった。図２・１３によると不安定境界に及ぼすσ，α_{θ}，ζ_{i}の影響は$\tau_{\theta}\nu>0$の場合とかなり異なっている。$\tau_{\theta}\nu>0$ではα_{θ}は常に安定化作用を持っていたが、$\tau_{\theta}\nu<0$では、α_{θ}はごく低速域で安定化作用を持つが、それ以外の回転数域では安定化作用を持たないか（$\zeta_{i}=0$の場合）、不安定化作用を持つ（$\zeta_{i}\neq0$の場合）。これは同図（ａ），（ｂ），（ｃ）に共通した傾向でありσには関係しない。ζ_{i}は$\tau_{\theta}\nu>0$では不安定化作用も示したが、同図①，②，③を比較すると$\tau_{\theta}\nu<0$ではζ_{i}は安定化作用のみ示すことが分かる。このこともσには関係しない。ジャイロモーメントの影響は、$\tau_{\theta}\nu>0$の場合（図２・９）と全く逆になっている。$\sigma=0$では、$\zeta_{i}=0$の場合、$\tau_{\theta}\nu>0$ではジャイロモーメントはわずかな安定化作用を持つのに対し、$\tau_{\theta}\nu<0$では不安定化作用を示す。$\zeta_{i}\neq0$の場合では、$\tau_{\theta}\nu>0$ではジャイロモーメントが不安定化作用を示すが、$\tau_{\theta}\nu<0$では安定化作用を示している。$\sigma\neq0$では、$\tau_{\theta}\nu>0$の場合ジャイロモーメントが常に不安定化作用を持っていたが、$\tau_{\theta}\nu<0$の場合、$\zeta_{i}=0$では不安定化作用を持ち、$\zeta_{i}\neq0$ではある回転数から低速側では不安定化作用、高速側では安定



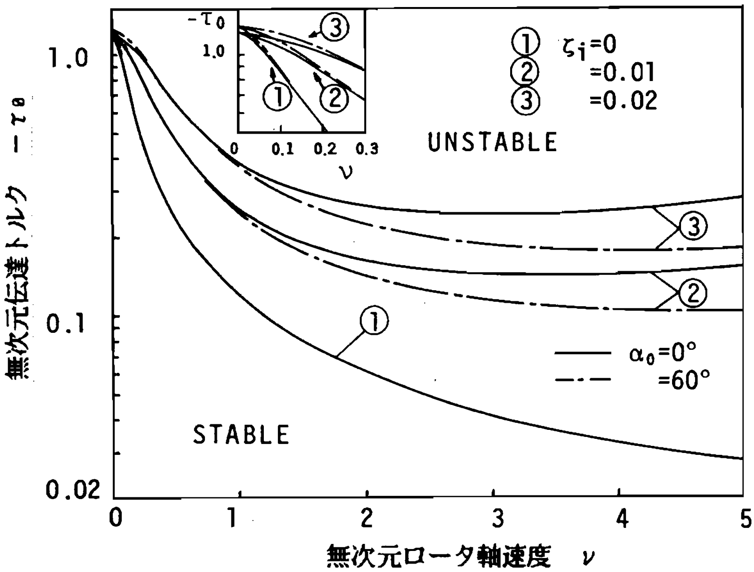
（ａ）σ＝０の場合



（ｂ）σ＝０．２の場合

図２・１３　ＭＲ２ロータの不安定領域

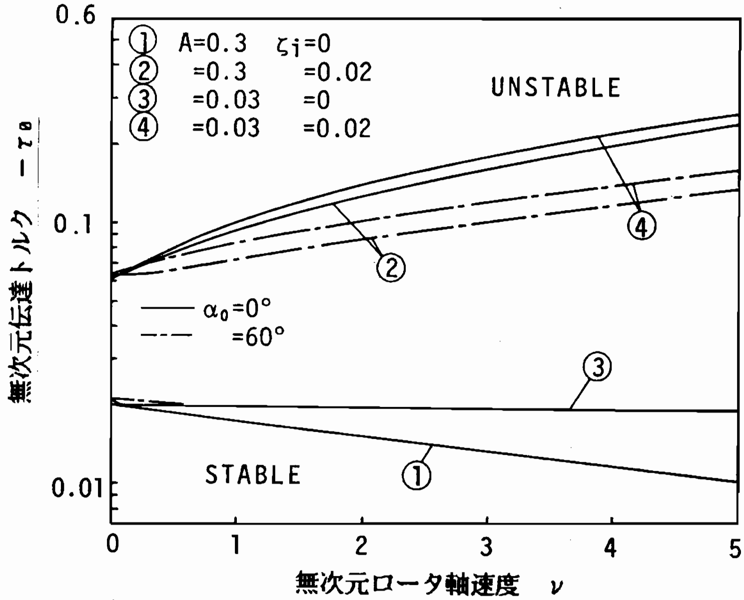
（$\tau_\theta \nu$＜０；Ａ＝０．１，ζ_e＝０．０１）



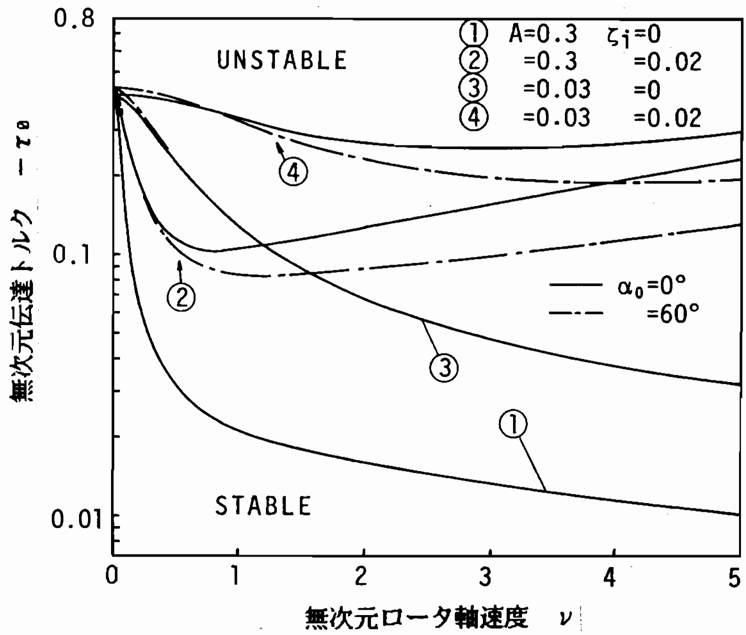
（ｃ）σ＝０．６の場合

図２・１３　ＭＲ２ロータの不安定領域（続き）

化作用を示す。同図（ｂ），（ｃ）よりこの変曲点はσが大きいほど高速側にずれることが分かる。$\tau_\theta\nu>0$の場合と同様に、$\sigma\neq0$の場合はσの安定化作用が大きいため$\sigma=0$の場合の特性が隠れ$\sigma=0$の場合と同じ傾向を示さない。図２・１４は不安定境界に及ぼすＡの影響を示したものである。同図は$\tau_\theta\nu>0$の場合の図２・１１に対応する。同図（ａ）は$\sigma=0$、（ｂ）は$\sigma=0.2$の場合である。同図（ａ）、（ｂ）で①と③、②と④をそれぞれ比べると、σ，ζ_iに関わらずＡの小さい方が安定であることが分かる。$\zeta_i=0$の場合にＡが小さい方が安定になることは、$\tau_\theta\nu>0$の場合で述べたと同じように、運動方程式にＡがＡνの形でしか含まれずＡ＝０．０３の境界の方がＡ＝０．３の境界より傾きが緩くなるためと考えられる。ところが、$\zeta_i\neq0$，$\sigma=0$の場合、不安定境界の傾きが他の場合と逆で右上がりであるにも関わらずＡが小さい方が安定化している。これはジャイロモーメントの不安定化作用が右上がりの不安定境界に対しては逆であることを示している。$\zeta_i\neq0$，$\sigma\neq0$の場合は低速域と高速域で境界曲線の傾きが異なるが何れの領域でも上述の傾向が現れてＡが小さい方が安定化するものと考えられる。



（ａ） σ＝０の場合



（ｂ） σ＝０．２

図２・１４　ＭＲ２ロータの慣性モーメント比による不安定領域の変化

（$\tau_\theta \nu$＜０； ζ_e＝０．０１）

2・4 MR4ロータ系の安定性

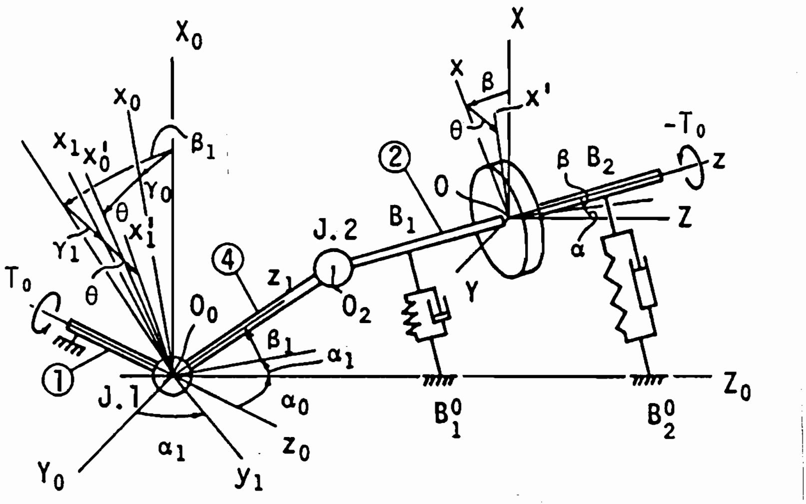
解析系は図2・7でロータ軸に二つの軸受と円板を付加した系である。駆動トルクT_0、負荷トルク$-T_0$を受け、駆動軸とロータ軸は静止時に初期交差角α_0で交差している（図2・15）。MR2ロータと同様に系はロータ軸支持ばね以外はすべて剛とし、重力の影響は無視する。さらに本節では継手内部の摩擦力も無視する。ロータ軸に作用するモーメントと力は、伝達トルクに起因するモーメントと力、軸受力による復元モーメントと復元力、および負荷トルクの総和である。

2・4・1 運動方程式

まず、伝達トルクに起因するモーメントと力を求める。これらをO－xyz成分で［M_x M_y M_z］，［F_x F_y F_z］と表し、軸受を除いた図2・15の系に仮想仕事の原理を適用すると、

$$T_0(\delta\theta+\delta\gamma_0)-T_0(\delta\theta+\sin\beta\,\delta\alpha)=M_x\cos\beta\,\delta\alpha+M_y\delta\beta$$
$$+M_z(\sin\beta\,\delta\alpha+\delta\theta)+F_x\delta x_G+F_y\delta y_G+F_z\delta z_G \qquad (2\cdot27)$$

となる。ここで、δx_G, δy_G, δz_Gは円板中心の変位



$O_0O_2=l_1$, $O_2O=l_0$, $OB_1=l_3$, $OB_2=l_4$

図2・15 MR4ロータの座標系

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\sin\beta_1 + l_\theta\sin\beta \\ -l_1\sin\alpha_1\cos\beta_1 - l_\theta\sin\alpha\cos\beta \\ l_1\cos\alpha_1\cos\beta_1 + l_\theta\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

l_1：中間軸長さ、l_θ：第２継手中心から円板中心までの長さ

の変分を表す。式（２·１２）、式（２·１４）から求められる$\delta\gamma_\theta$と上式から求められるδx_G，δy_G，δz_Gを式（２·２７）に代入し、その式の両辺の$\delta\alpha$，$\delta\beta$，$\delta\alpha_1$，$\delta\beta_1$，$\delta\theta$の係数を等置する。得られた関係式に置いてα，β，α_1およびβ_1について線形近似すると式（２·２８）が得られる。ただし、$F_z=0$ はロータ軸の微小運動の仮定より後述の運動方程式から得られる関係である。

$$M_x = T_\theta\{(1-a_\theta{}^2 l_\theta/l_1)\beta_1/2-(1-l_\theta/l_1)\beta/2\}$$

$$M_y = T_\theta\{-a_\theta l_\theta/l_1-(1+a_\theta{}^2 l_\theta/l_1)\alpha_1/2 +(1-l_\theta/l_1)\alpha/2\}$$

$$M_z = 0$$

$$F_x = T_\theta(a_\theta+a_\theta{}^2\alpha_1/2+\alpha/2)/l_1$$

$$F_y = -T_\theta(a_\theta{}^2\beta_1/2-\beta/2)/l_1$$

$$F_z = 0$$

（２·２８）

線形近似した軸受の復元モーメント［R_x R_y R_z］と復元力［P_x P_y P_z］は$O-xyz$成分で

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Y\theta}f_1 + C_{Y\theta}df_1/dt \\ K_{X\theta}f_2 + C_{X\theta}df_2/dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{X0} f_3 + C_{X0} df_3/dt \\ K_{Y0} f_4 + C_{Y0} df_4/dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = l_1(l_3 - l_4)\alpha_1 + \{ l_0(l_3 - l_4) - (l_3{}^2 + l_4{}^2)\} \alpha$$
$$f_2 = l_1(l_3 - l_4)\beta_1 + \{ l_0(l_3 - l_4) - (l_3{}^2 + l_4{}^2)\} \beta$$
$$f_3 = -2 l_1 \beta_1 - (2 l_0 + l_4 - l_3)\beta$$
$$f_4 = 2 l_1 \alpha_1 + (2 l_0 + l_4 - l_3)\alpha$$

（2・29）

ここで、K_{X0}，K_{Y0}，C_{X0}，C_{Y0} はそれぞれX_0，Y_0方向のばね定数および減衰定数、l_3，l_4は円板中心Oから各軸受支持点までの長さ

で表される。ロータ軸の運動方程式は剛体の3次元運動に関するオイラーの運動方程式より全外部モーメントおよび全外力のO－xyz成分をそれぞれ［τ_x τ_y τ_z］，［f_x f_y f_z］で表すと次式となる[30]。

$$\tau_x = I_t{}^G d\omega_x/dt + (I_p - I_t{}^G)\,\omega_y\omega_z + I_p\omega_y d\theta/dt$$

$$\tau_y = I_t{}^G d\omega_y/dt - (I_p - I_t{}^G)\,\omega_x\omega_z - I_p\omega_x d\theta/dt$$

$$\tau_z = I_p\,(d\omega_z/dt + d^2\theta/dt^2)$$

$$f_x = m a_{Gx}$$

$$f_y = m a_{Gy}$$

$$f_z = m a_{Gz}$$

（2・30）

ここで、

I_p：ロータ軸のz軸回りの極慣性モーメント、$I_t{}^G$：ロータ軸のx(y)軸回りの慣性モーメント（MR2ロータの場合と定義が異なる）、m：ロータ質量。

$[\omega_x \ \ \omega_y \ \ \omega_z]$ はロータ軸に固定した座標系O－xyzの角速度のO－xyz成分で式（2・17）で定義したものと結果的には同じ形の式である。$[a_{Gx} \ \ a_{Gy} \ \ a_{Gz}]$ はロータ中心Oの角加速度のO－xyz成分であり次式で表される。

$$
\begin{bmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ a_{Gz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2 x_G/dt^2 \\ d^2 y_G/dt^2 \\ d^2 z_G/dt^2 \end{bmatrix}
$$

式（2・28）、式（2・29）を式（2・30）の左辺に代入し、右辺慣性項を線形近似するとα, β, α_1, β_1に関する線形方程式が得られる。ここで、独立変数をα, β, α_1, β_1からロータ軸の傾きθ_x, θ_y及びロータ中心の変位x_G, y_Gに変換する。すなわち、

$$
\begin{aligned} &\theta_x = \beta, \quad \theta_y = -\alpha \\ &x_G = l_1\beta_1 + l_0\beta, \quad y_G = -l_1\alpha_1 - l_0\alpha \end{aligned} \qquad (2\cdot31)
$$

と置くと、運動方程式は以下に示す無次元量を用いて式（2・32）となる。なお、本論文では、動力を伝達しているときの安定性が駆動トルクと負荷トルクの方向差に起因するものであり傾き振動のほうが並進振動より重要であると考えられるため、固有振動の基準は傾き振動のそれで取っている。

$$
\ddot{X} + C\dot{X} + (B_0 + \tau_0 B_1) X = \tau_0 D \qquad (2\cdot32)
$$

$$
X = [\theta_x \ \ \theta_y \ \ \bar{x}_G \ \ \bar{y}_G]^T
$$

$$
C = \begin{bmatrix} \zeta_e & H & \zeta_e \bar{l}_5 & 0 \\ -H & \zeta_e & 0 & \zeta_e \bar{l}_5 \\ \zeta_e \bar{l}_5 \bar{i}^2 & 0 & \zeta_e \bar{l}_6 \bar{i}^2 & 0 \\ 0 & \zeta_e \bar{l}_5 \bar{i}^2 & 0 & \zeta_e \bar{l}_6 \bar{i}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
B_0 = \begin{bmatrix}
1+\sigma & 0 & (1+\sigma)\bar{l}_5 & 0 \\
0 & 1-\sigma & 0 & (1-\sigma)\bar{l}_5 \\
(1+\sigma)\bar{l}_5\bar{i}^2 & 0 & (1+\sigma)\bar{l}_6\bar{i}^2 & 0 \\
0 & (1-\sigma)\bar{l}_5\bar{i}^2 & 0 & (1-\sigma)\bar{l}_6\bar{i}^2
\end{bmatrix}
$$

$$
B_1 = 1/2
$$

$$
\times \begin{bmatrix}
0 & +1+\bar{l}_0^2\bar{l}_1^{-2}a_0^2 & 0 & -\bar{l}_1^{-1}-\bar{l}_0\bar{l}_1^{-2}a_0^2 \\
-1+\bar{l}_0^2\bar{l}_1^{-2}a_0^2 & 0 & \bar{l}_1^{-1}-\bar{l}_0\bar{l}_1^{-2}a_0^2 & 0 \\
0 & (\bar{l}_1^{-1}-\bar{l}_0\bar{l}_1^{-2}a_0^2)\bar{i}^2 & 0 & \bar{i}^2\bar{l}_1^{-2}a_0^2 \\
-(\bar{l}_1^{-1}+\bar{l}_0\bar{l}_1^{-2}a_0^2)\bar{i}^2 & 0 & \bar{i}^2\bar{l}_1^{-2}a_0^2 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
D = [-\bar{l}_0\bar{l}_1^{-1}a_0 \quad 0 \quad \bar{i}^2\bar{l}_1^{-1}a_0 \quad 0]^T
$$

ここで、

$\sigma = (K_{X0}-K_{Y0})/(K_{X0}+K_{Y0})$, $H = B\nu$, $B = I_p/I_t^G$,
$\zeta_0 = (C_{X0}+C_{Y0})(\bar{l}_4^2+\bar{l}_3^2)/2I_t^G\omega_0$, $\tau_0 = T_0/I_t^G\omega_0^2$,
$\nu = \dot{\theta}$ = 一定, $a_0 = \tan(\alpha_0/2)$,
$\bar{l}_5 = (\bar{l}_4-\bar{l}_3)/(\bar{l}_4^2+\bar{l}_3^2)$, $\bar{l}_6 = 2/(\bar{l}_4^2+\bar{l}_3^2)$,
$T = \omega_0 t$, $\omega_0^2 = (K_{X0}+K_{Y0})(\bar{l}_4^2+\bar{l}_3^2)/2I_t^G$,
$(\bar{\cdot}) = (\cdot)$／ロータ軸長さ、$(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dT$

2・4・2 安定性解析

式（2・32）に一般解 $X = A\exp(-ZT)$ を代入して、特性方程式

$$\sum_{i=0}^{8} S_i Z^{8-i}=0 \quad (S_0=1)$$

を求め、係数S_iにラウス・フルヴィッツの安定判別条件を用いると不安定条件式が得られるが、4自由度系の不安定条件式は簡単な形では書き表せない。その上、実際の数値計算に於てもラウス・フルヴィッツの安定条件式を計算するよりも根を数値的に直接求める方が計算プログラムは簡単である。

そこで、式（2·32）の変数を

$$Y=[\dot{X} \quad X]^T$$

と置き、一階の微分方程式

$$\dot{Y}+GY=\begin{bmatrix} \tau_0 D \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; G=\begin{bmatrix} C & B_0+\tau_0 B_1 \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

と変形する。解を $Y=a\exp(-ZT)$ と置けば特性方程式は

$$|G-ZI|=0$$

となり、Gの固有値を求めることにより根Zが得られる。安定条件は $\mathrm{Re}Z>0$（Re（·）は（·）の実数部を表す）である。

2・4・3　安定性の数値計算例と考察

2自由度系の場合から推察すると4自由度系の場合でもジャイロモーメントの影響は伝達トルクの符号の正負によって差異が生じると考えられるので、本項でも$\tau_0 H>0$と$\tau_0 H<0$の場合に分けて検討する。なお、本節で用いた数値は次の通りである。

$\bar{i}^2$＝(円板の半径/ロータ軸長さ$)^2$/4＋(円板の厚み/ロータ軸長さ$)^2$/12

$=0.2^2/4+0.05^2/12=0.0102$,

$\bar{l}_0 = 0.5$，　$\bar{l}_3 = 0.4$，　$\bar{l}_4 = 0.4$

（Ｉ）ロータ軸が外部に仕事をする場合（$\tau_0 H > 0$の場合）

図２·１６に不安定領域の計算例を示す。同図中　$S_8 < 0$　は不安定が特性方程式の係数

$$S_8 = | B_0 + \tau_0 B_1 | < 0$$

の条件より発生していることを示している。この不安定は静的不安定（ダイバージェンス型不安定）[29]であり、不安定境界はS_8がＨを含んでいないためジャイロモーメントの影響を受けていない。明らかに、この条件は減衰係数ζ_0をも含んでいない。ところで、図２·１６と図２·９の$\zeta_1 = 0$の場合を比較すると、動的不安定については非常に似た傾向を示している。図２·９は横軸をνとして示したため一見類似しないように見えるが、$H = A\nu$を横軸とすると不安定境界がほゞ一致することがよく分かる。つまり、動的不安定はＭＲ４ロータでもＭＲ２ロータでも同じ原因で発生していると考えられる。それゆえ、運動方程式（２·３２）と（２·２１）の復元力項非対角成分に共通なの項が不安定を支配しており、傾き振動が不安定モードであると考えられる。このことは不安定境界付近でのτ_0に対する固有値の変化からも確認できる。図２·１７に固有値曲線の例を示す。同図（ａ）はＭＲ２ロータと同じ不安定境界を示す動的不安定の例（不安定解は $\mathrm{Re}Z < 0, \mathrm{Im}Z \neq 0$）で傾き振動の固有値が不安定化している。すなわち、動的不安定には他の連成項が影響を及ぼしていないと考えられる。ＭＲ２ロータと共通なθ_xとθ_yの連成項とこれら以外の項とが不安定境界に及ぼす影響の関係は次章で詳しく調べる。図２·１７（ｂ）は静的不安定（不安定解は $\mathrm{Re}Z < 0, \mathrm{Im}Z = 0$）の例である。この場合は並進振動の固有値が不安定化している。不安定境界付近の振動波形を確認するためルンゲ・クッタ・ジル（ＲＫＧ）解を求めた。その例を図２·１８に示す。同図（ａ）が動的不安定の例、同図（ｂ）が静的不安定の例である。境界付近の動的不安定はＭＲ２ロータの場合と同様にその発散がかなり緩やかであるが、静的不安定は境界付近でも急激に振幅が増加している。このことは、τ_0をパラメータにした根軌跡を描くとより一層明瞭になる。図２·１９に

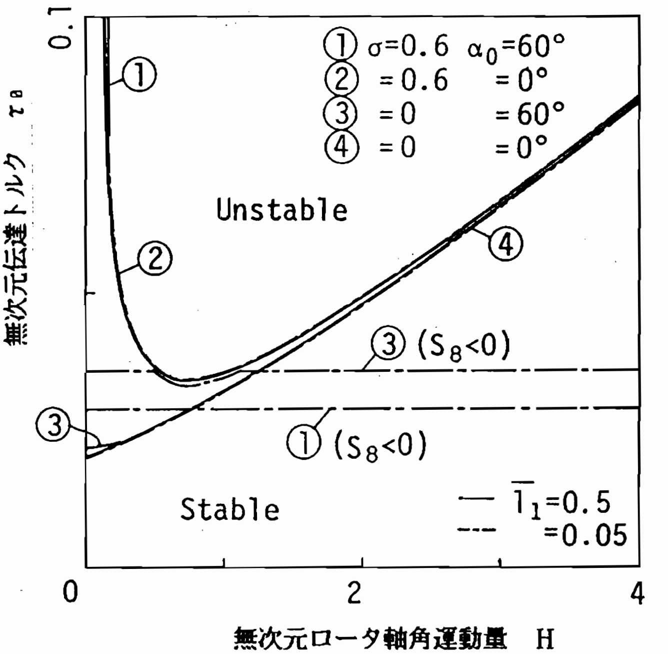


図２・１６　ＭＲ４ロータの不安定領域（τ_0Ｈ＞０；ζ_0＝０．０１）

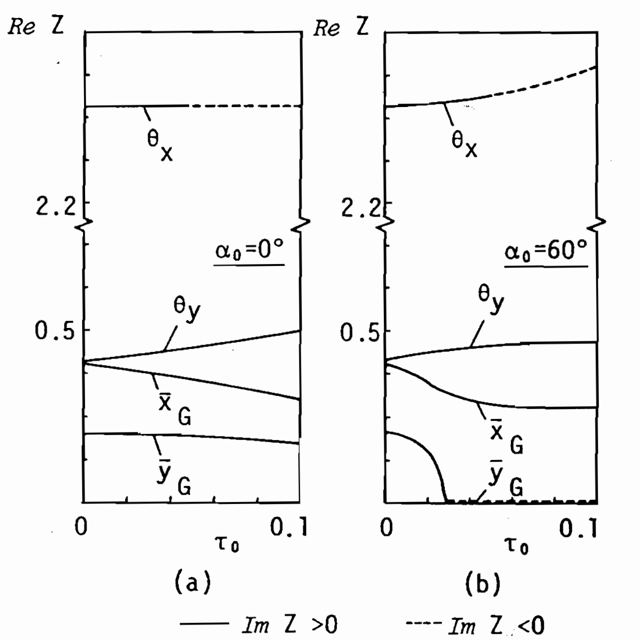
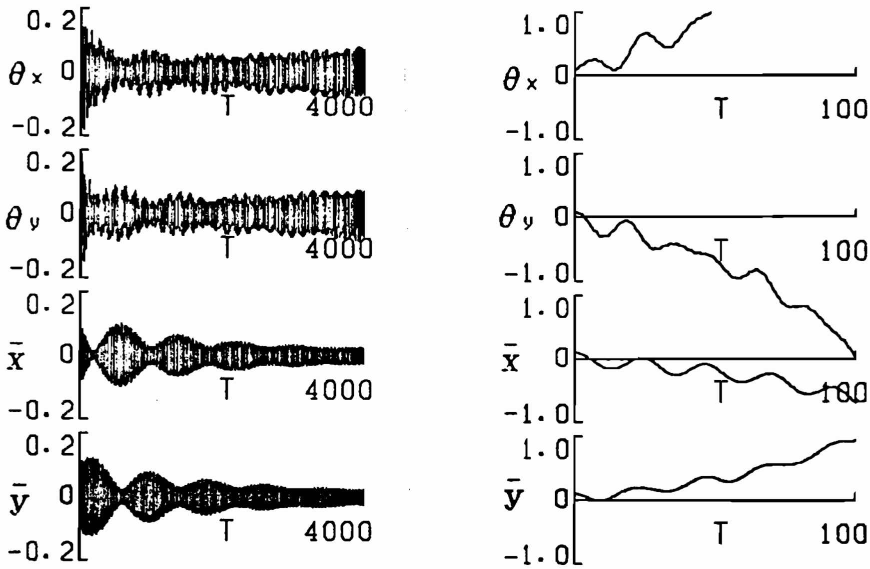


図２・１７　ＭＲ４ロータの固有値曲線

（$\bar{I}_1$＝０．０５，ζ_0＝０．０１，Ｈ＝２）



（ａ）動的不安定　　　　　　（ｂ）静的不安定

（図２・１６の ④; τ_0＝０．０５）　　（図２・１６の ③; τ_0＝０．０３６）

図２・１８　ＭＲ４ロータのＲＫＧ解（$\bar{I}_1$＝０．０５，Ｈ＝２）

その例を示す。静的不安定は、τ_0の少しの増加で根の実部がかなり大きくなるが、動的不安定ではほとんど増加していない。なお、ＲＫＧ計算は、きざみ幅＝０．０１，初期変位＝０．１，初期速度＝０　として求めたものである。

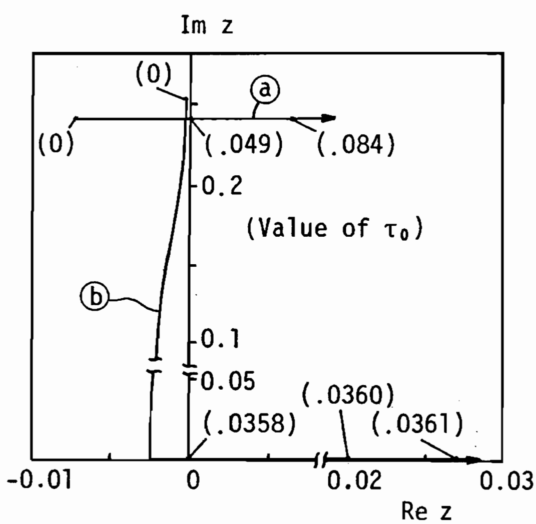


図２・１９　根軌跡

ⓐ：図２・１８（ａ）の場合

ⓑ：図２・１８（ｂ）の場合

（ＩＩ）ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_\theta H<0$の場合）

図２·２０に不安定領域の例を示す。パラメータは図２·１６と同じである。図２·２０では$\tau_\theta H>0$の場合と異なりジャイロモーメントが安定化作用を持つことはほとんどない。各不安定境界はパラメータの値による差はあまりなくほゞ一定の範囲内にある。$\bar{I}_1=0.05$の場合には静的不安定が $S_\theta<0$ の条件より発生している。この静的不安定条件を除くと$\bar{I}_1=0.05$の場合の方が$\bar{I}_1=0.5$の場合より安定化している。軸受剛性異方性はごく一部（③の$3<H<4$など）を除いて安定化作用を持つ。また、初期交差角もごく僅かであるが安定化作用を持っている。$\tau_\theta H<0$の場合も静的不安定の発生しない$\bar{I}_1=0.5$，$\alpha_\theta=0$の場合についてはＭＲ２ロータの不安定境界と一致している。不安定が発生している固有値を調べると、$\tau_\theta H>0$の場合と同様傾き振動が不安定化しており、動的不安定である。

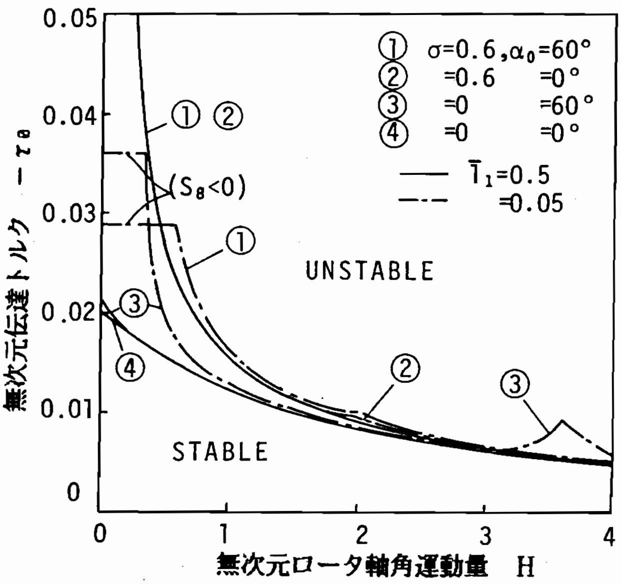
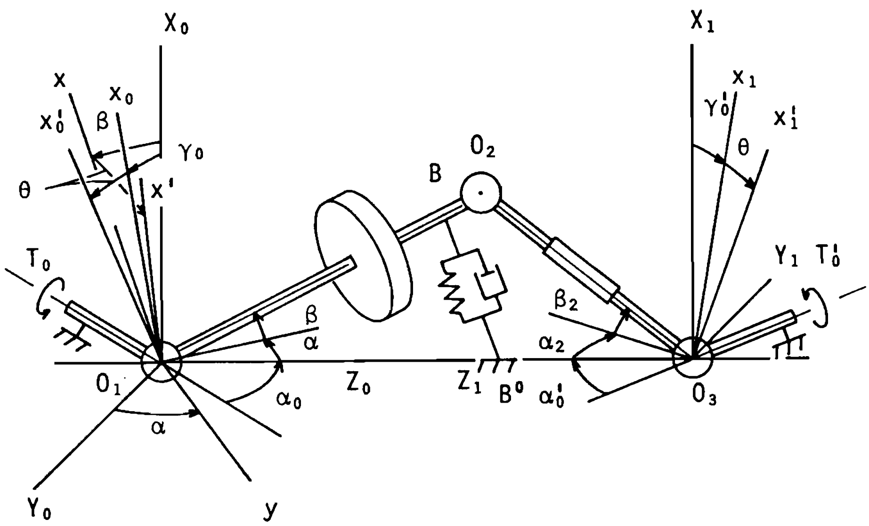


図２・２０　ＭＲ４ロータの不安定領域（$\tau_\theta H<0$；$\zeta_\theta=0.01$）

２・５　ＳＲ２ロータ系の安定性

図２·２１に解析モデルを示す。駆動条件はＭＲ２ロータと同一である。負荷条



$O_1O_2 = l$, $O_2O_3 = l_2$

図２・２１　ＳＲ２ロータの座標系

件はロータ軸が二つの等速継手と中間軸およびスプライン等軸方向にスライド可能な要素を介して初期交差角α_0'を持つ負荷軸に結合されて負荷トルクT_0'を受けるとする（線形近似した運動方程式ではスライド要素の効果は現れない）。また、継手の内部減衰は無視する。

２・５・１　運動方程式

まず、２・３節及び２・４節で得られた結果を利用して、駆動トルクと負荷トルクに起因する横方向モーメントを仮想仕事の原理から導く。ロータ軸の角変位α, βに対する駆動軸の自転角γ_0は式（２・３）、（２・４）で与えられるが、負荷軸の自転角については、２・２・３節で導いた式（２・１２）、（２・１４）はｚ軸方向が逆になっているのでそのままでは適用できない。そこで、負荷軸の初期交差角α_0'、中間軸変位α_2, β_2を図２・２１中に示してある場合を正と定義し、$X_1 = X_0$, $Y_1 = -Y_0$, $Z_1 = -Z_0$ なるO_3を原点とする座標系を考える。図２・２１において$O_3 - X_1Y_1Z_1$座標で見たα_2, β_2, α, β, γ_0'と図２・７の$O_1 - X_0Y_0Z_0$座標でみたα_1, β_1, α, β, γ_0との関係は

$$\alpha_1 \to -(\alpha_2+\alpha_0'),\quad \beta_1 \to \beta_2$$

α（O_1-$X_0Y_0Z_0$で見た場合）→ α（O_3-$X_1Y_1Z_1$で見た場合）

β（O_1-$X_0Y_0Z_0$で見た場合）→ $-\beta$（O_3-$X_1Y_1Z_1$で見た場合）

$$\gamma_0 \to -\gamma_0',\quad l_1 \to l_2$$

である。この関係を式（2・12）、（2・14）に代入すると、γ_0'は

$$\sin\gamma_0' = [\sin(\alpha_0'+\alpha_2)\sin\beta_2\cos\gamma_2 + \{\cos(\alpha_0'+\alpha_2)+\cos\beta_2\}\sin\gamma_2] / \{1+\cos(\alpha_0'+\alpha_2)\cos\beta_2\}$$

$$\cos\gamma_0' = [\{\cos(\alpha_0'+\alpha_2)+\cos\beta_2\}\cos\gamma_2 - \sin(\alpha_0'+\alpha_2)\sin\beta_2\sin\gamma_2] / \{1+\cos(\alpha_0'+\alpha_2)\cos\beta_2\} \tag{2・33}$$

$$\sin\gamma_2 = (\sin\beta-\sin\beta_2)\sin(\alpha_0'+\alpha_2+\alpha) / \{1-\sin\beta\sin\beta_2+\cos\beta\cos\beta_2\cos(\alpha_0'+\alpha_2+\alpha)\}$$

$$\cos\gamma_2 = \{\cos\beta\cos\beta_2+(1-\sin\beta\sin\beta_2)\cos(\alpha_0'+\alpha_2+\alpha)\} / \{1-\sin\beta\sin\beta_2+\cos\beta\cos\beta_2\cos(\alpha_0'+\alpha_2+\alpha)\} \tag{2・34}$$

ここで、　$l\sin\alpha = l_2\sin\alpha_2,\quad l\sin\beta = l_2\sin\beta_2$

γ_2は中間軸の自転角で式（2・12）のγ_1に対応する角

で与えられる。

上式から得られるγ_0'を用いて、駆動トルクT_0と負荷トルクT_0'の作用する図2・21の系に仮想仕事の原理を適用すれば、

$$T_0(\delta\theta+\delta\gamma_0) - T_0'(\delta\theta+\delta\gamma_0') = M_x\cos\beta\,\delta\alpha + M_y\,\delta\beta + M_z(\sin\beta\,\delta\alpha+\delta\theta) \tag{2・35}$$

が成立する。式（2・3）、（2・4）、（2・33）、（2・34）から導ける$\delta\gamma_0$,

$\delta\gamma_0'$を式（2・35）に代入し、その両辺の$\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\theta$の係数を等置する。さらに、α, βについて線形化すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_0 a_0 + T_0' a_0'/\bar{l}_2 \\ T_0 - T_0' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-T_0 + T_0' + T_0 a_0^2 - T_0' a_0'^2/\bar{l}_2^2)\beta/2 \\ (T_0 - T'_0 + T_0 a_0^2 - T_0' a_0'^2/\bar{l}_2^2)\alpha/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

; $a_0' = \tan(\alpha_0'/2)$, $(\bar{\bullet})$ は l による無次元化。　（2・36）

式（2・36）より $T_0 = T_0'$ のとき第2項の運動方程式復元力項の非対角成分となる項は対称成分のみ得られる。$T_0 \neq T_0'$ のときは逆対称成分も存在することになるが、この場合は回転速度が一定とならないのでここでは扱わない。

運動方程式は伝達トルクに起因するモーメント以外はMR2ロータと同一であるので、$T_0 = T_0'$ と置くと、式（2・21）と式（2・36）より次式となる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_e & A\nu \\ -A\nu & \zeta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\sigma & (-a_0^2 + a_0'^2/\bar{l}_2^2)\tau_0/2 \\ (-a_0^2 + a_0'^2/\bar{l}_2^2)\tau_0/2 & 1-\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 + a_0'/\bar{l}_2 \end{bmatrix} \tau_0$$

（2・37）

2・5・2　安定性解析

式（2・37）に解 $\alpha = a_1 \exp(ZT)$, $\beta = a_2 \exp(ZT)$ を代入し、特性方程式を求めると、

$$Z^4 + 2\zeta_e Z^3 + (2 + \zeta_e^2 + A^2\nu^2) Z^2 + 2\zeta_e Z + 1 - \sigma^2 - (a_0^2 - a_0'^2/\bar{l}_2^2)^2 \tau_0^2/4 = 0$$

となる。ラウス・フルヴィッツの安定判別条件のうちフルヴィッツ行列は負にならず、不安定条件は 特性方程式の係数<0 の条件から得られる。すなわち、不安定条件は、

$$\sqrt{(1-\sigma^2)/(a_\theta{}^2-a_\theta{}'^2/\bar{I}_2{}^2)}<|\tau_\theta/2| \qquad (2\cdot38)$$

となる。上式よりジャイロモーメント、外部減衰力が不安定境界に影響を与えず、不安定境界は初期交差角と軸受剛性異方性のみで与えられることが分かる。また、$\sigma=1$ で常に不安定となる。初期交差角の影響は角度の正負には関係なく互いに打ち消す方向で作用し、とくに初期交差角を0とできない場合には $a_\theta{}^2=a_\theta{}'^2/\bar{I}_2{}^2$ の関係を満たすようにすればこの不安定は発生しなくなる。明らかに不安定条件はトルクの作用方向に依存しない。

2・5・3 安定性の数値計算例と考察

式(2・38)より簡単に不安定領域は求められるが、次節のSR4ロータの不安定領域と比較するため式(2・38)の数値計算例を図2・22に示す。同図よ

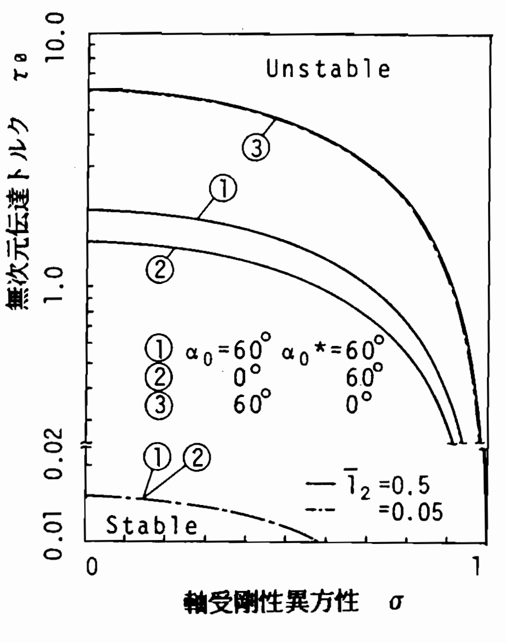


図2・22 SR2ロータの不安定領域

り、σが1に近くなければ、中間軸が長いか負荷軸に交差角がない場合にはMR2ロータ、MR4ロータに比べてかなり安定である。中間軸が短く負荷軸に交差角がある場合にはMR2ロータ、MR4ロータより不安定となる。特性方程式より根を求めると不安定は静的不安定であることが分かる。

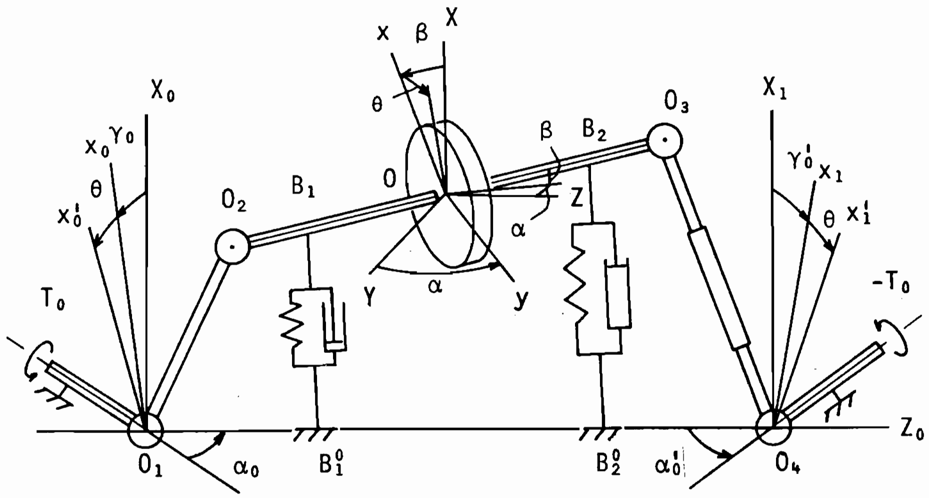
2・6　SR4ロータ系の安定性

解析モデルの座標系を図2・23に示す。ロータ軸の駆動条件はMR4ロータと同一であり、負荷条件はMR2ロータと同一である（図2・21と同様線形近似運動方程式ではスライド要素は特に影響を持たない）。

2・6・1　運動方程式

駆動トルクをT_0、負荷トルクを$-T_0$と置く。駆動側にはMR4ロータの結果を利用し、負荷側にはSR2ロータの結果を利用して運動方程式を導く。駆動トルクと負荷トルクが作用する系に仮想仕事の原理を適用して

$$T_0(\delta\theta+\delta\gamma_0)-T_0(\delta\theta+\delta\gamma_0')$$



$O_1O_2=l_1$,　$O_3O_4=l_2$,　$O_2O_3=l$

図2・23　SR4ロータの座標系

$$=M_x\cos\beta\,\delta\alpha+M_y\,\delta\beta+M_z\,(\sin\beta\,\delta\alpha+\delta\theta)$$
$$+F_x\,\delta x_G+F_y\,\delta y_G+F_z\,\delta z_G \qquad (2\cdot39)$$

が得られる。ここで、γ_0は式（２・１２）、（２・１４）で与えられ、γ_0'は式（２・３３）、（２・３４）で与えられる。また、x_G, y_G, z_Gは式（２・２７）中で定義した式より得られる。これらの式よりそれぞれの変分を求め、式（２・３９）に代入して$\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, $\delta\theta$の係数を等置する。さらに、得られた関係式においてα, β, α_1, β_1について線形化すると式（２・４０）が得られる。

$$M_x=T_0\{(1-a_0^2 l_0/l_1)\beta_1/2-(1-l_0/l_1)\beta/2\}$$
$$-T_0[\{a_0'^2(l-l_0)/l_2-1\}(l_1/l_2)\beta_1/2$$
$$+\{-(l_2+l_0)/l_2+a_0'^2 l(l-l_0)/l_2^2\}\beta/2]$$

$$M_y=T_0\{-a_0 l_0/l_1-(1+a_0^2 l_0/l_1)\alpha_1/2+(1-l_0/l_1)\alpha/2\}$$
$$-T_0[a_0'(l-l_0)/l_2+\{l_1/l_2+a_0'^2 l_1(l-l_0)/l_2^2\}$$
$$\cdot\alpha_1/2+\{(l_2+l_0)/l_2+a_0'^2 l(l-l_0)/l_2^2\}\alpha/2]$$

$$F_x=T_0(a_0+a_0^2\alpha_1/2+\alpha/2)/l_1$$
$$-T_0\{a_0'+(a_0'^2 l_1/l_2)\alpha_1/2+(a_0'^2 l/l_2-1)\alpha/2\}/l_2$$

$$F_y=-T_0(a_0^2\beta_1/2-\beta/2)/l_1$$
$$+T_0\{(a_0'^2 l_1/l_2)\beta_1/2+(a_0'^2 l/l_2+1)\beta/2\}/l_2$$

$$M_z=0,\quad F_z=0$$
$$(2\cdot40)$$

但し、$F_z=0$ はＭＲ４ロータと同様ロータ軸の微小運動の仮定より運動方程式から得られる関係である。

軸受の復元モーメント及び復元力はＭＲ４ロータの場合の式（２・２９）で与えられる。また、運動方程式は式（２・３０）で与えられる。ＭＲ４ロータと同様に独立変数をα, β, α_1, β_1から式（２・３１）で定義されるロータ軸の傾きθ_x,

θ_y及びロータ円板中心の変位x_G，y_Gに変換し、運動方程式を式（２·３２）と同様な無次元表示すると次式系となる。

$$\ddot{X} + C\dot{X} + (B_0 + \tau_0 B_1)X = \tau_0 D \qquad (2\cdot41)$$

$$X = [\theta_x \quad \theta_y \quad \bar{x}_G \quad \bar{y}_G]^T$$

C，B_0は式（２·３２）と同じ。

$$B_1 = 1/2$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & \bar{l}_0^2 \bar{l}_1^{-2} a_0^2 - (1-\bar{l}_0)^2 \bar{l}_2^{-2} a_0'^2 & 0 & -\bar{l}_1^{-1} - \bar{l}_2^{-1} - \bar{l}_0 \bar{l}_1^{-2} a_0^2 - (1-\bar{l}_0)\bar{l}_2^{-2} a_0'^2 \\ \bar{l}_0^2 \bar{l}_1^{-2} a_0^2 - (1-\bar{l}_0)^2 \bar{l}_2^{-2} a_0'^2 & 0 & \bar{l}_1^{-1} + \bar{l}_2^{-1} - \bar{l}_0 \bar{l}_1^{-2} a_0^2 - (1-\bar{l}_0)\bar{l}_2^{-2} a_0'^2 & 0 \\ 0 & \{\bar{l}_1^{-1} + \bar{l}_2^{-1} - \bar{l}_0 \bar{l}_1^{-2} a_0^2 - (1-\bar{l}_0)\bar{l}_2^{-2} a_0'^2\}\,\bar{i}^2 & 0 & (\bar{l}_1^{-2} a_0^2 - \bar{l}_2^{-2} a_0'^2)\,\bar{i}^2 \\ \{-\bar{l}_1^{-1} - \bar{l}_2^{-1} - \bar{l}_0 \bar{l}_1^{-2} a_0^2 - (1-\bar{l}_0)\bar{l}_2^{-2} a_0'^2\}\,\bar{i}^2 & 0 & (\bar{l}_1^{-2} a_0^2 - \bar{l}_2^{-2} a_0'^2)\,\bar{i}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=[-\bar{l}_{\theta}\bar{l}_1^{-1}a_{\theta}-(1-\bar{l}_{\theta})\bar{l}_2^{-1}a_{\theta}' \qquad 0$$

$$(\bar{l}_1^{-1}a+\bar{l}_2^{-1}a_{\theta}')\bar{i}^2 \qquad 0\quad]^T$$

2・6・2　安定性解析

ＭＲ４ロータの場合と同様に特性方程式の係数にラウス・フルビッツの安定判別条件を適用するか、一階の微分方程式に変換して固有値を求めれば不安定境界が得られる。前節と同様、特性方程式の係数 $S_i<0$ の条件による静的不安定の発生が予測される。次項では、前節と同様に特性方程式の根を固有値として求め不安定境界を得ているが、同時に S_i の値も計算している。特に、次項の計算例で現れる S_7 と S_8 を記述すると、以下の通りである。

$$S_7=2K_1\zeta_{\theta}\{2K_1(1-\sigma^2)-K_1(\tau_2^2+\tau_4^2)-2K_2(\tau_5^2+\tau_6^2)\}$$

$$\begin{aligned}S_8=&K_1^2(1-\sigma^2)^2+K_1^2\tau_2^2\tau_4^2+K_2^2(\tau_5^2-\tau_6^2)^2\\&-K_1(1-\sigma^2)(\tau_2^2+\tau_4^2)-2K_2(\tau_5^2+\tau_6^2)\\&-2K_1K_2\tau_2\tau_4(\tau_6^2-\tau_5^2)\end{aligned}$$

（２・４２）

ここで、$K_1=2\bar{i}^2/(\bar{l}_4^2+\bar{l}_3^2)$, $K_2=\bar{i}^2$,

$\tau_2=\{(\bar{l}_{\theta}/\bar{l}_1)^2a_{\theta}^2-(1-\bar{l}_{\theta})^2/\bar{l}^2a_{\theta}'^2\}\tau_{\theta}/2$,

$\tau_4=(\bar{l}_1^{-2}a_{\theta}^2-\bar{l}_2^{-2}a_{\theta}'^2)(\bar{l}_4^2+\bar{l}_3^2)\tau_{\theta}$,

$\tau_5=(-\bar{l}_1^{-1}-\bar{l}_2^{-1})\tau_{\theta}/2$,

$\tau_6=-\{\bar{l}_{\theta}\bar{l}_1^{-2}a_{\theta}^2+(1-\bar{l}_{\theta})\bar{l}_2^{-2}a_{\theta}'^2\}\tau_{\theta}/2$,

なお、$\bar{l}_1\to\infty$, $\bar{l}_2\to\infty$ と置けば τ_{θ} に関する項は消失し、系は安定となる。

2・6・3　安定性の数値計算例と考察

図２・２４に不安定領域の計算例を示す。同図では図２・１６と同様不安定を発生させている条件も示してあるが、その条件は $S_7<0$ または $S_8<0$ で与え

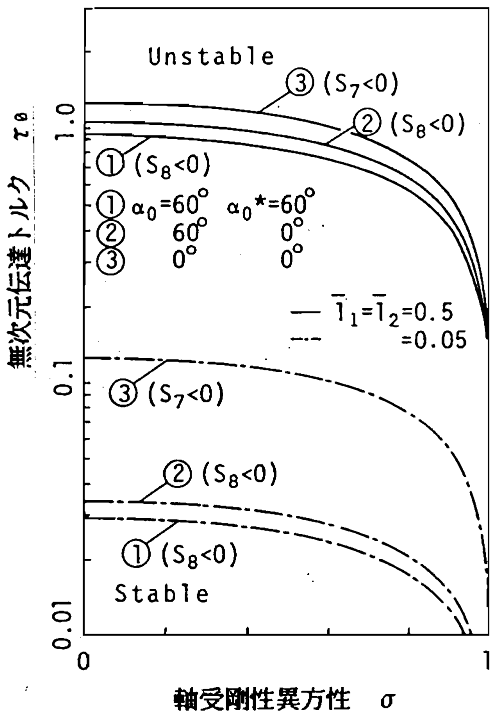
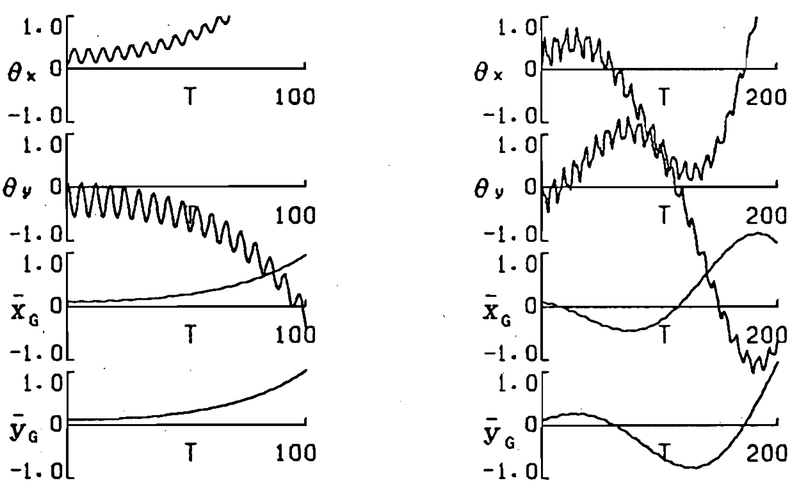


図２・２４　ＳＲ４ロータの不安定領域（ζ_0＝０．０１）



（ａ）静的不安定（Ｈ＝０）　　（ｂ）動的不安定（Ｈ＝１）

図２・２５　ＳＲ４ロータのＲＫＧ解

（図２·２４の ③ ；$\bar{l}_1=\bar{l}_2$＝０．５，σ＝０，τ_0＝１．２６）

られている。ＳＲ４ロータの場合、S_7、S_8はＨを含まないので、不安定境界がジャイロモーメントの影響を受けないことが分かる。$S_8<0$ で与えられる不安定境界は減衰係数ζ_eの影響も受けない。図２・２４より不安定境界がσおよびα_θ、α_θ'が大きいほど低下することが分かる。ＳＲ２ロータの不安定境界とＳＲ４ロータのそれはσに対してほゞ同じ形を示しており、定性的には２自由度モデルも４自由度モデルも同一である。ところで、ＳＲ２ロータの安定性解析結果より、特性方程式の係数<０ の条件より得られる不安定領域は静的不安定であると予測されるが、ＳＲ４ロータ系では動的不安定も発生する。図２・２４においてＨ＝０の場合は不安定は常に静的であるが、Ｈ≠０の場合はσ，α_θに依存して不安定が静的な場合も動的な場合もある。ただし、不安定境界はＨの影響を受けない。図２・２５にＨによって静的不安定が動的不安定となる場合のＲＫＧ解の例を示す。この場合、動的不安定であってもその発散はＭＲ４ロータの動的不安定と違って非常にきつい。

２・７　結言

等速形自在継手で駆動されるロータ系が動力を伝達している場合の安定性をＭＲ２、ＭＲ４、ＳＲ２、ＳＲ４の各モデルロータについて解析した結果、以下のことが明らかになった。

（１）ＭＲ２ロータ、ＭＲ４ロータ、ＳＲ２ロータ、ＳＲ４ロータの各運動方程式は、それぞれ、式（２・２５）、式（２・３２）、式（２・３７）、式（２・４１）で与えられる。

（２）何れのモデルロータの場合も伝達トルクが運動方程式の復元力項に非対角成分として現れ、系を不安定にする。

（３）ジャイロモーメントは保存力であるが、伝達トルクによる復元力項非対角成分の存在する系では系の不安定境界に影響を及ぼす。

（４）不安定境界は 特性方程式の係数<０ となる不安定と、それ以外のラウス・フルビッツの条件による不安定で、ジャイロモーメント、軸受剛性異方性、初期交差角の影響が異なる。

（５）ＭＲ２ロータおよびＭＲ４ロータでは、ロータ軸が外部に仕事をする場

合と外部から仕事をされる場合とではジャイロモーメントの不安定境界に及ぼす影響が異なる。

（６）ＭＲ２ロータでは動的不安定のみ発生し、軸受剛性異方性、初期交差角は安定化作用を持つ。

（７）ＭＲ４ロータでは中間軸長さが短い場合や初期交差角が大きい場合には動的不安定、静的不安定の何れも発生しうる。静的不安定境界はジャイロモーメント、減衰係数の影響を受けない。軸受剛性異方性、初期交差角は動的不安定に対して安定化作用、静的不安定に対して不安定化作用を持つ。

（８）ＳＲ２ロータでは静的不安定のみ発生し、軸受剛性異方性、初期交差角は不安定化作用を持つ。ジャイロモーメント、減衰係数は不安定境界に影響を及ぼさない。

（９）ＳＲ４ロータではジャイロモーメントが存在しない場合は静的不安定のみ発生し、ジャイロモーメントが存在する場合は動的不安定も発生する。軸受剛性異方性、初期交差角は不安定化作用を持ち、ジャイロモーメントは不安定境界に影響を及ぼさない。

第3章　自在軸継手に起因する不安定振動の一般的特性

3・1　緒言

前章で明らかになった伝達トルクによる不安定振動は、固有振動モードの干渉によって発生する多自由度系の自励振動であり、運動方程式復元力項の非対角成分によって特徴づけられている。このような特徴をもつ自励振動系は、自然界に多く存在し、ロータ軸系に関するものばかりでなく他の振動系でも不安定現象として発生している。回転軸に関するものでは、トルクによるふれ回り（トルクホワール）[(31)-(33)]、すべり軸受の油膜力による軸のふれ回り[(34)-(36)]（オイルホイップ、オイルホワール）、シールの流体力による軸のふれ回り（シールホイップ）、作動流体力（Thomas－Alford力）によるふれ回り[(37)-(41)]（スチームホワール）、粘性流体力に起因するふれ回り[(42)-(46)]（液体を内蔵する回転体のふれ回り）、乾性摩擦によるふれ回り[(47)]（フリクションホイップ、スティックスリップ）、内部減衰力によるふれ回り[(12)、(48)]（ヒステリシスホワール、磁気軸受における渦電流によるふれ回り）　などがある。回転軸系以外の振動系の例としては、接線方向荷重を受ける柱の座屈[(49)]や導水管の不安定現象[(50)]などがある。このような自励振動を発生させる不安定化力は、回転軸系で考えれば、一般に図3・1のようになる。この力は、軸のある方向の変位に対してその方向の復元力成分のみでなくそれに垂直な方向の復元力成分も発生させる。この垂直方向成分がふれまわり運動を助長する。また、エネルギ的にみれば、この自励振動は回転のエネルギがエネルギ源となってその一部のエネルギを横振動エネルギに変換する変換機構として振動系が作用していることを意味している。

モードの干渉による復元力項非対角成分の不安定化作用の一般的な研究の試みが岩壺[(51)、(52)]によって2自由度系を対象に行われている。そこでは、振動系に流入するエネルギ（負）と流出するエネルギ（正）を考えて振動の一周期でそれらの総和が負となると不安定が発生することを示し、剛性マトリクスの非対角成分の差が大きい程不安定化力が大きなること等を示している。このことは前章で

明らかにした結果と一致している。しかしながら、岩壺の論文では非対角成分の対称成分と逆対称成分の相互的な不安定化作用は検討されていないし、動的不安定にのみ注目しているなど剛性マトリクスの非対角成分の不安定化作用が一般的には明らかにされていない。さらに、実際のロータで必要となる4自由度系については全く触れられていない。

そこで、本章では2自由度系と4自由度系の運動方程式復元力項を一般化し、それらの不安定化作用を物理モデルから離れて数式の上で検討する。上述の回転軸系をも含めた振動系で発生する自励振動による不安定を統一的に考察するとともに、前章で示した各モデルロータの不安定領域の計算例がパラメータの値に対してどの様な一般的変化をするか考察を行う。

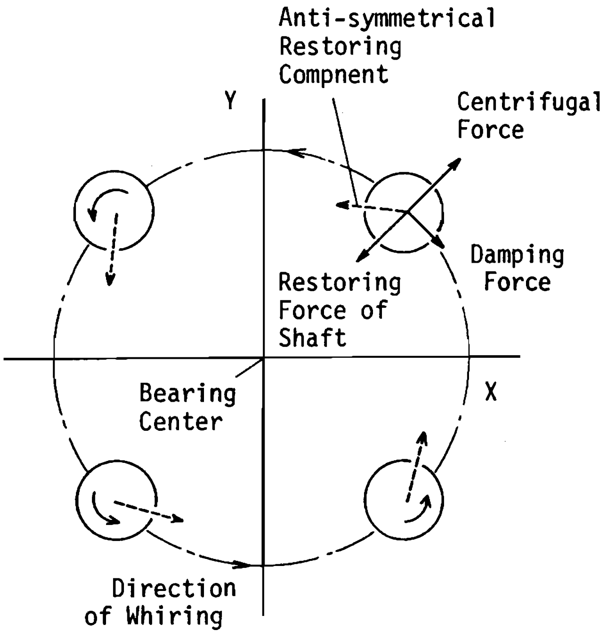


図3・1　逆対称復元力成分による不安定化

3・2　2自由度系の場合

復元力項に非対角成分を持つ一般的な2自由度系の運動方程式を

$$\ddot{X} + C\dot{X} + (B_0 + B_1)X = 0 \tag{3・1}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \zeta & H \\ -H & \zeta \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1+\sigma & 0 \\ 0 & 1-\sigma \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 + \tau_2 \\ -\tau_1 + \tau_2 & 0 \end{bmatrix}$$

で表す。ここで、Cは減衰マトリクスで、ζは減衰係数、Hは角運動量である。B_0は復元力マトリクスの対角項成分で、σはx_1とx_2の固有振動数の平均値からのずれを表すパラメータで固有振動数異方性と呼ぶ（$0 \leqq \sigma \leqq 1$）。B_1は復元力マトリクスの非対角項成分を表し、τ_1は逆対称成分、τ_2は対称成分を表す。

式（3・1）の解を $X = Ae^{ZT}$ と置き特性方程式を求めると

$$Z^4 + 2\zeta Z^3 + (2 + \zeta^2 + H^2) Z^2 + 2(\zeta + \tau_1 H) Z + 1 - \sigma^2 + \tau_1{}^2 - \tau_2{}^2 = 0 \qquad (3\cdot 2)$$

となる。$Z = Z_r + jZ_i$（jは虚数単位）と置けば、不安定条件は $Z_r > 0$ であり、$Z_i \neq 0$ のとき動的不安定（フラッタ）、$Z_i = 0$ のとき静的不安定（ダイバージェンス）となる。

$H = 0$ のときは $z = Z + \zeta/2$ と置くと式（3・2）は複2次式となり根は容易に求められ次のようになる。

$$z = \pm\sqrt{-1 + \zeta^2/4 \pm \sqrt{\sigma^2 - \tau_1{}^2 + \tau_2{}^2}}$$

または

$$Z = \pm\sqrt{-1 + \zeta^2/4 \pm \sqrt{\sigma^2 - \tau_1{}^2 + \tau_2{}^2}} - \zeta/2 \qquad (3\cdot 3)$$

静的不安定条件は、式（3・3）が正の実根となる条件より、

$$\sigma^2 - \tau_1{}^2 + \tau_2{}^2 > 1 \qquad (3\cdot 4)$$

となる。動的不安定条件は、式（3・3）が正の実部を持つ虚根となる条件より、

$$\tau_1{}^2 - \tau_2{}^2 - \sigma^2 > \zeta^2 \qquad (3\cdot 5)$$

となる。式（3・4）より分かるように静的不安定条件は減衰力に関係しない。式

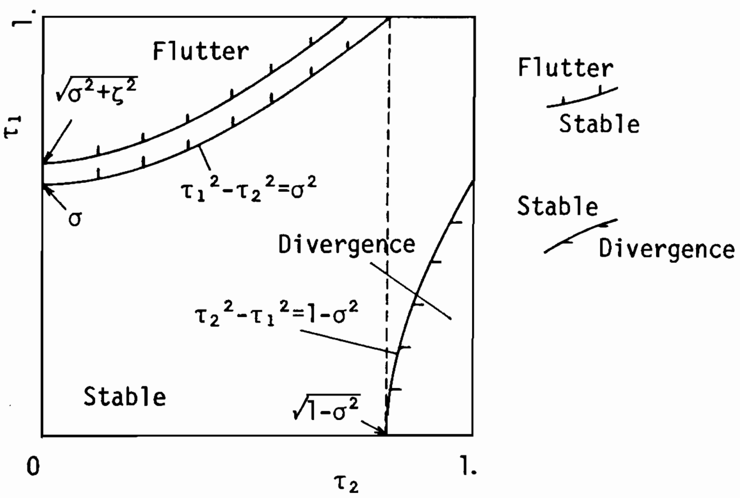


図３・２　２自由度系復元力項の不安定化作用（Ｈ＝０の場合）

（３・４）、式（３・５）よりジャイロモーメントの影響が無視できる場合には、復元力項非対角成分の逆対称成分τ_1は動的不安定化作用を持ち、対称成分τ_2は静的不安定化作用を持つことが分かる。逆にτ_1は静的不安定に対して安定化作用、τ_2は動的不安定に対して安定化作用をもつ。さらに復元力項の対角成分にある固有振動数異方性σは動的不安定に対して安定化作用、静的不安定に対しては不安定化作用を持ち、その影響はτ_1, τ_2と同じオーダである。外部減衰係数ζは一般には１に比べてかなり小さな値であるのに対し、σは０と１の間を任意に取り得るので動的不安定の安定化にはζよりかなり効果があることが分かる。この保存的な性質を持つパラメータσが安定化効果を持つことは、ζのようにエネルギを消費するのではなく系にエネルギが流入するのを防ぐ作用をしているためである[53]。式（３・４）、式（３・５）を図示すると図３・２のようになる。

次にジャイロモーメントを考慮した不安定条件式をラウス・フルビッツの安定判別条件式[28]より求めると、

(i)　$$1-\sigma^2+\tau_1{}^2-\tau_2{}^2<0 \tag{3・6}$$

(ii)　$$\zeta+\tau_1 H<0 \tag{3・7}$$

(iii)　$(H^2+\zeta^2)\tau_1^2-\zeta H(H^2+\zeta^2)\tau_1$

$$-\zeta^2(H^2+\zeta^2+\sigma^2+\tau_2^2)>0 \qquad (3\cdot8)$$

が得られる。式（3・6）は式（3・4）と同一である。式（3・8）は $H\to0$ と置けば式（3・5）に帰着する。この条件式では、式（3・5）と同様にHの値にかかわらずσとτ_2が安定化作用を持ち、τ_1が不安定化作用を持つ。根の公式[54]を用いて式（3・2）を数値的に解くと、式（3・6）は静的不安定条件であり、式（3・8）は動的不安定条件であることが分かる。式（3・8）では$|\tau_1|<|\zeta H/2|$の範囲でτ_1が左辺の値を減少させ安定化作用を持つように見られるが、この範囲では$\tau_1=0$でも安定であり系を安定化させるわけではない。式（3・8）の角運動量Hの不安定境界に及ぼす影響はHの大きさによって適当な近似を行うと次のように比較的簡単な式で表され、各パラメータの影響の定性的な傾向が理解できる。ここで $\zeta<<1$ と仮定している。

(i)　$H\fallingdotseq0$ の場合

$$\tau_1>\sqrt{\zeta^2+\sigma^2+\tau_2^2} \qquad (3\cdot9)$$

(ii)　$\zeta<<H<1$ の場合

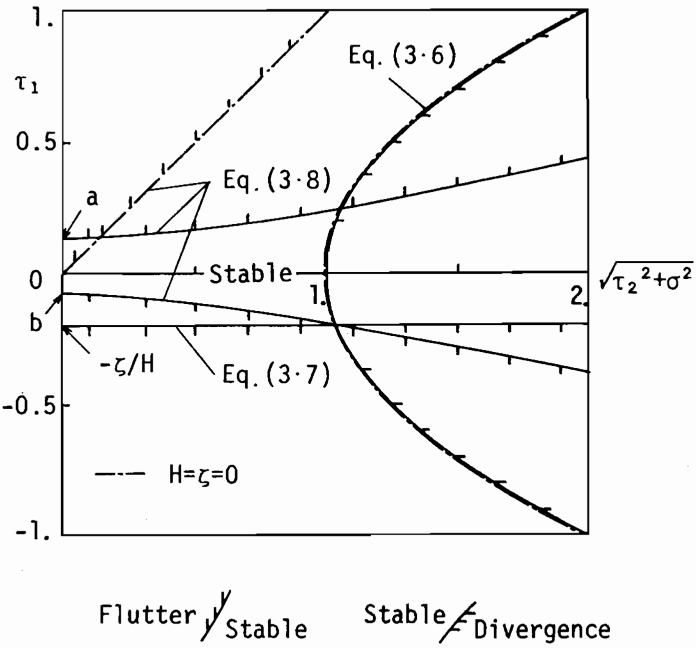
$$\tau_1>\zeta\{H^2+\sqrt{H^4+4H^2+4(\sigma^2+\tau_2^2)}\}/2H$$
$$\fallingdotseq\zeta\sqrt{\sigma^2+\tau_2^2}/H \quad (\sigma^2+\tau_2^2>1 \text{ の場合}) \qquad (3\cdot10)$$

(iii)　$1<<H$ の場合

$$\tau_1>H\zeta \qquad (3\cdot11)$$

比較的低速域ではσとτ_2が大きいとHが不安定化作用を持ちうるが（式（3・10））、高速域では安定化作用を持つ（式（3・11））ことが分かる。

式（3・7）は$H=0$の場合には発生しない条件であるが、$H\neq0$の場合、$\tau_1\cdot H<0$ではζが小さいためごく小さな$|\tau_1|$によって満足される。根の公式を用いて式（3・7）を調べると、この条件は動的不安定条件であることが分かる。



$a=\zeta H/2+\zeta\sqrt{1+H^2/4}$, $b=\zeta H/2-\zeta\sqrt{1+H^2/4}$

図３・３　２自由度系復元力項の不安定化作用（Ｈ＞０の場合）

すべり軸受で支持されたロータ系に現れるばね復元力の非対角成分などは油膜の方向が回転方向と関係があるため$\tau_1 H<0$とはならないが、前章で明らかにしたように、トルクによる不安定はロータ軸から外部に仕事を取り出している場合と外部から軸に仕事が与えられる場合があり、$\tau_1 H<0$の条件は実際に発生しうる。

式（３・６）～式（３・８）より明かなようにτ_1はその符号が不安定境界に影響を与えるが、τ_2の符号は不安定境界に影響を及ぼさない。図３・３に式（３・６）～式（３・８）を示してある。特に式（３・６）のため$\tau_1<0$と$\tau_1>0$では横軸に関して対称な不安定境界とはならない。同図中に記したａ，ｂに対して$|a|>|b|$であるから$\tau_1 H<0$の場合の方が$\tau_1 H>0$の場合より同じζ，Ｈの値に対しては常に安定であることが分かる。

以上のように、２自由度系では不安定が静的であるか動的であるかによって復元力項のパラメータσ、τ_1、τ_2の不安定化作用は互いに逆になる。なお、静的不安定はデカルトの規則より 特性方程式の係数＜０ の場合のみ発生する（逆は

成立しない）[55]。

3・3　4自由度系の場合

2自由度系では不安定条件式をパラメータの影響が理解できるように書き下すことは容易であった。ところが4自由度系の場合では不安定条件式は2自由度系の場合のように簡単ではなく、パラメータの影響を調べるには数値計算によらざるを得ない。そこで、本節では4自由度系での復元力項非対角成分の基本的な傾向を理解するために、減衰力項が存在しない次式（3・12）の系のパラメータの影響を検討する。

$$\ddot{X} + (B_0 + B_1)X = 0 \qquad (3\cdot12)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1+\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1(1+\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1(1-\sigma) \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1+\tau_2 & 0 & \tau_5+\tau_6 \\ -\tau_1+\tau_2 & 0 & -\tau_5+\tau_6 & 0 \\ 0 & K_2(\tau_7+\tau_8) & 0 & K_1(\tau_3+\tau_4) \\ K_2(-\tau_7+\tau_8) & 0 & K_1(-\tau_3+\tau_4) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(0 \leqq K_1 \leqq 1)$$

式（3・12）のB_0マトリクスは $B_1=0$ のときのx_i（$i=1\sim4$）の固有振動数をあらわし、x_1とx_2の固有振動数異方性とx_3とx_4の固有振動数異方性は等しく、それらの平均値の間には$\sqrt{K_1}$倍の関係があると仮定している（$\sqrt{K_1}$を平均固有振動数比と呼ぶ）。式（3・12）の非対角成分マトリクスB_1は、（x_1, x_2）の間および（x_3, x_4）の間の連成成分$\tau_1\sim\tau_4$と、（x_1, x_2）と（x_3, x_4）の振動系の間の連成成分$\tau_5\sim\tau_8$とから成っている。本論文では便宜上$\tau_1\sim\tau_4$を2自由度連成項、$\tau_5\sim\tau_8$を4自由度連成項と称する。前章で得

られたモデルロータの運動方程式との対応では、軸受スパンの中央に回転体がある傾き運動と並進運動が連成しない場合で、x_1, x_2が傾き運動のx, y成分、x_3, x_4が並進運動のx, y成分である。$\sqrt{K_1}$は傾き運動と並進運動の固有振動数比になる。

式（3・12）の解を $X = Ae^{Z\tau}$ と置き特性方程式を求めると次式となる。

$$Z^8 + S_2 Z^6 + S_4 Z^4 + S_6 Z^2 + S_8 = 0 \qquad (3\cdot13)$$

$$S_2 = 2(1 + K_1)$$

$$S_4 = (1 + K_1^2)(1 - \sigma^2) + 4K_1 + \tau_1^2 - \tau_2^2 + K_1^2(\tau_3^2 - \tau_4^2) + 2K_2(\tau_5\tau_7 - \tau_6\tau_8)$$

$$S_6 = 2K_1(1 + K_1)(1 - \sigma^2) + 2K_1(\tau_1^2 - \tau_2^2) + 2K_1^2(\tau_3^2 - \tau_4^2) + 2K_2(1 + K_1)(\tau_5\tau_7 - \tau_6\tau_8) + 2K_2(1 - K_1)\sigma(\tau_5\tau_8 - \tau_6\tau_7)$$

$$\begin{aligned} S_8 = {} & K_1(1 - \sigma^2)\{K_1(1 - \sigma^2 + \tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2 - \tau_4^2) \\ & + 2K_2(\tau_5\tau_7 - \tau_6\tau_8)\} + K_1^2(\tau_1^2 - \tau_2^2)(\tau_3^2 - \tau_4^2) \\ & + K_2^2(\tau_5^2 - \tau_6^2)(\tau_7^2 - \tau_8^2) \\ & - K_1K_2(\tau_1 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_4)(\tau_5 + \tau_6)(\tau_7 + \tau_8) \\ & - K_1K_2(\tau_1 + \tau_2)(\tau_3 + \tau_4)(\tau_5 - \tau_6)(\tau_7 - \tau_8) \end{aligned}$$

上式で、K_2は$K_2\tau_i$（$i = 5 \sim 8$）とおけばτ_iに含めることができるので独立なパラメータとして扱わなくてもよいことが分かる。特性方程式は複4次式であるので根の公式を用いて根を求められるが[54]、その公式はパラメータの影響が直感的に理解できるような簡単な形ではない。また、ラウス・フルヴィッツの安定判別条件を用いても$\tau_1 \sim \tau_8$の8個のパラメータの影響を一般的に調べることは非常に煩雑である。

そこで、2自由度連成項と4自由度連成項に分けてパラメータの数を減らし各々が独立に存在する場合の基本的な不安定特性を調べる。最初に4自由度連成項

のない場合を考える。$\tau_5 \sim \tau_8 = 0$ と置くと明らかに（x_1, x_2）振動系と（x_3, x_4）振動系は独立になり、系の安定性は２自由度系に帰着する。また、$\tau_5 = \tau_6 = 0$ または $\tau_7 = \tau_8 = 0$ と置いた場合も$\tau_5 \sim \tau_8$を含む項はすべて消失し２自由度系に帰着する。すなわち、４自由度連成項は４つの成分が存在するときのみ連成効果をもつことがわかる。２自由度連成項の不安定化作用は前節の結果より明らかである。

次に４自由度連成項の特性を調べる。式（３・１３）において $\tau_1 \sim \tau_4 = 0$ と置く。このように置いてもパラメータが４個（$\tau_5 \sim \tau_8$）となり一般的検討はなお煩雑である。ところで、２自由度系の場合には復元力項非対角成分の対称性が系の不安定様式を支配していた。そこで４自由度系の場合も連成項の対称性に注目して解析することにする。前章でのモデルロータで現れた場合を考慮して $|\tau_5| = |\tau_7|$, $|\tau_6| = |\tau_8|$ の場合を検討する。

（ａ）$\tau_5 = \tau_7$, $\tau_6 = \tau_8$ の場合　　復元力項の中央の対角項成分に関して逆対称成分（$\tau_5 = \tau_7$）と対称成分（$\tau_6 = \tau_8$）が存在する場合である。S_{2i}は

$$
\begin{aligned}
S_4 &= (1 + K_1^2)(1 - \sigma^2) + 4K_1 + 2K_2(\tau_5^2 - \tau_6^2) \\
S_6 &= 2(1 + K_1)\{K_1(1 - \sigma^2) + K_2(\tau_5^2 - \tau_6^2)\} \\
S_8 &= \{K_1(1 - \sigma^2) + K_2(\tau_5^2 - \tau_6^2)\}^2
\end{aligned}
\tag{3·14}
$$

となる。ただしS_2は式（３・１３）と同じであるので省略してある（以下同様）。明らかに $S_4 < 0$, $S_6 < 0$ となる可能性があり静的不安定の発生が予測される。静的不安定が発生すればいずれの場合もτ_5は安定化作用、τ_6は不安定化作用をもつ。これらは２自由度系のτ_1の作用に似ている。特に $K_1 = 1$ の時は

$$
\begin{aligned}
S_4 &= 2\{2 + (1 - \sigma^2 + \tau_5^2 - \tau_6^2)\} \\
S_6 &= 4(1 - \sigma^2 + \tau_5^2 - \tau_6^2) \\
S_8 &= (1 - \sigma^2 + \tau_5^2 - \tau_6^2)^2
\end{aligned}
$$

ただし、$\sqrt{K_2}$はτ_5, τ_6に含ませてある。

となり、S_{21}は（$1-\sigma^2+\tau_5^2-\tau_6^2$）の関数として表されるので静的不安定条件は２自由度系と同じとなる。図３・４（ａ）に不安定領域図を示す。同図では図３・３に似た動的不安定領域と静的不安定領域とが発生している。動的不安定についてはK_1が大きい場合にはσが安定化作用を持っているが、K_1が小さい場合にはσは不安定化作用をもつ。また、静的不安定は $S_8<0$ の条件より発生しており、式（３・１４）からも分かるようにσは不安定化作用、K_1は安定化作用を持っている。

（ｂ）$\tau_5=-\tau_7$, $\tau_6=\tau_8$ の場合　復元力項の中央の対角項成分に対して対称成分のみ存在する場合である。S_{21}は

$$
\begin{aligned}
S_4 &= (1+K_1^2)(1-\sigma^2)+4K_1-2K_2(\tau_5^2+\tau_6^2)\\
S_6 &= 2\{K_1(1+K_1)(1-\sigma^2)-(1+K_1)K_2(\tau_5^2+\tau_6^2)\\
&\quad +2\sigma(1-K_1)K_2\tau_5\tau_6\}\\
S_8 &= K_1^2(1-\sigma^2)^2-2K_1K_2(1-\sigma^2)(\tau_5^2+\tau_6^2)\\
&\quad +K_2^2(\tau_5^2-\tau_6^2)^2
\end{aligned}
\tag{3・15}
$$

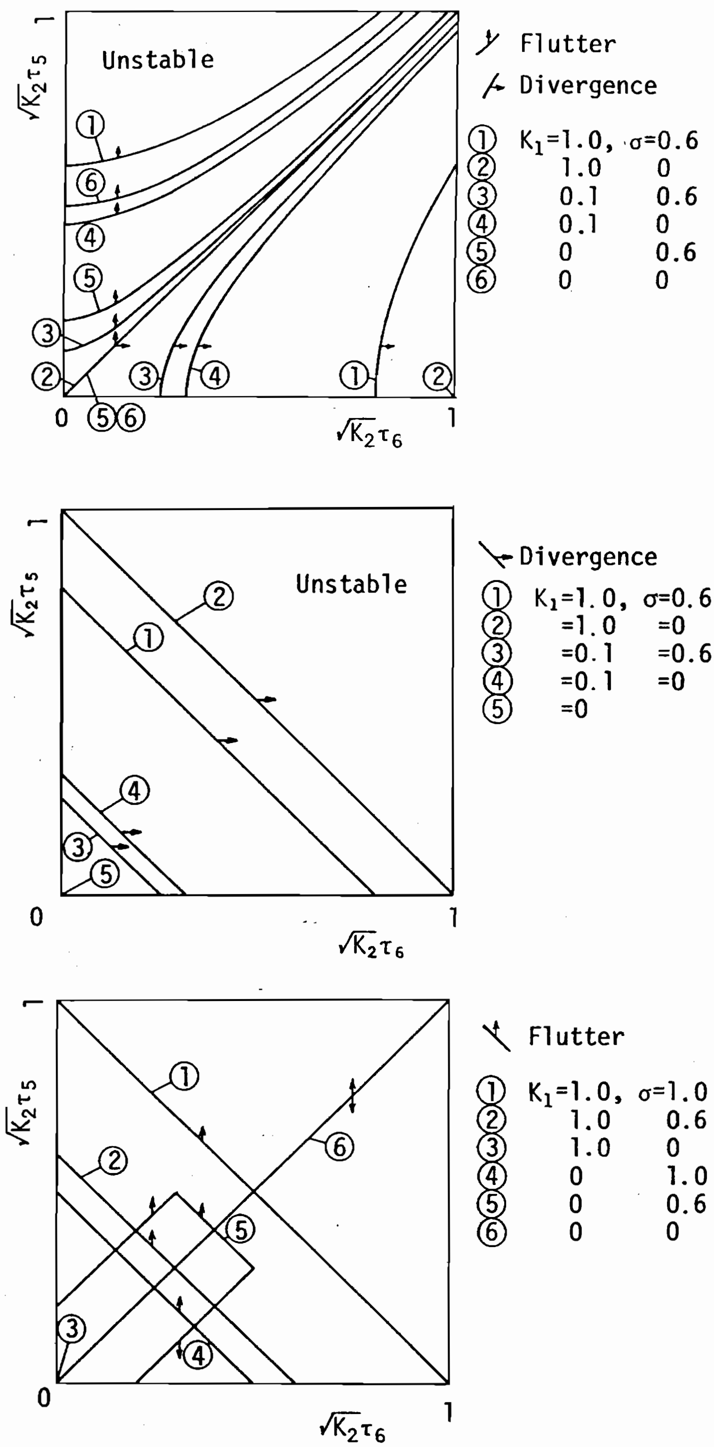
となる。この場合も $S_{21}<0$ となり得る。式（３・１５）はτ_5, τ_6に関して対称であり、τ_5とτ_6は同じ不安定化作用を持っている。図３・４（ｂ）に不安定領域図を示す。同図より静的不安定のみが発生することが分かる。$\tau_6=0$ で $S_6<0$, $S_8<0$, $\tau_6\neq0$ で $S_8<0$ の条件により不安定が発生している。式（３・１５）より $S_6<0$（$\tau_6=0$） および $S_8<0$ の条件は、それぞれ、

$$\sqrt{K_1(1-\sigma^2)}<\sqrt{K_2}\,\tau_5,$$

$$\sqrt{K_1(1-\sigma^2)}<\sqrt{K_2}\,(\tau_5+\tau_6)$$

となる。何れの場合もσは不安定化作用、K_1は安定化作用をもつ。

(a)
(b)
(c)



(a) $\tau_5=\tau_7,\ \tau_6=\tau_8$, (b) $\tau_5=-\tau_7,\ \tau_6=\tau_8$, (c) $\tau_5=\tau_7,\ \tau_6=-\tau_8$

図３・４　４自由度連成項の不安定化作用

（c）$\tau_5=\tau_7$, $\tau_6=-\tau_8$ の場合　復元力項の中央の対角項成分に関して逆対称成分のみ存在する場合である。S_{21}は

$$
\begin{aligned}
S_4 &= (1+K_1^2)(1-\sigma^2)+4K_1+2K_2(\tau_5^2+\tau_6^2)\\
S_6 &= 2\{K_1(1+K_1)(1-\sigma^2)+(1+K_1)K_2(\tau_5^2+\tau_6^2)\\
&\quad -2\sigma(1-K_1)K_2\tau_5\tau_6\}\\
S_8 &= K_1^2(1-\sigma^2)^2+2K_1K_2(1-\sigma^2)(\tau_5^2+\tau_6^2)\\
&\quad +K_2^2(\tau_5^2-\tau_6^2)^2
\end{aligned}
\tag{3·16}
$$

となる。$S_{21}>0$ であり静的不安定は発生しない。式（3・16）はτ_5, τ_6に関して対称であり、τ_5, τ_6は同じ不安定化作用をもつ。図3・4（c）に不安定領域図を示す。K_1が大きい場合にはσは安定化作用を持つが、K_1が小さい場合にはσはτ_5、τ_6に依存して安定化作用を持つことも不安定化作用を持つこともある。

（d）$\tau_5=-\tau_7$, $\tau_6=-\tau_8$ の場合　復元力項の中央の対角項成分に関して対称成分（$\tau_5=-\tau_7$）と、逆対称成分（$\tau_6=-\tau_8$）が存在する場合である。S_{21}は式（3・14）でτ_5とτ_6を交換した式となり不安定特性は（a）の結果から容易に分かる。

以上より、4自由度連成項が対称成分または逆対称成分のみである場合には、それぞれ静的不安定、動的不安定のみが発生し、対称成分と逆対称成分が混在する場合には静的不安定、動的不安定いずれも発生することが分かる。さらに、固有振動数異方性σは静的不安定に対しては常に不安定化作用のみ持つが、動的不安定に対しては、$K_1=1$ では安定化作用を持ち、$K_1<1$ のある値から不安定化作用を持ちはじめることが分かった。

最後に2自由度連成項と4自由度連成項が同時に存在する場合を調べる。対称成分または逆対称成分のみ存在する場合は2自由度系、4自由度系ともそれぞれ静的不安定、動的不安定のみ発生し不安定領域は単調な形をしているため、パラ

メータの変化に対する不安定領域の変化は予測しやすい。しかし、対称成分と逆対称成分が混在する場合には不安定領域は複雑に変化しパラメータの少しのスイープでは全体が見わたせない。前章での自在継手を含むロータ系の解析ではロータ系の物理的に定義したパラメータが２自由度連成項と４自由度連成項とに対称成分と逆対称成分として同時に含まれ、そのパラメータをスイープしたのでは不安定傾向が理解しにくい場合があった。その場合は式（３・１２）の形の方が不安定傾向の特性が理解しやすい。そこで、その最も基本的な場合として式（３・１２）において逆対称な２自由度連成項τ_1と対称な４自由度連成項$\tau_5=-\tau_7$のみが存在する場合を調べる。S_{21}は

$$S_4=(1+K_1^2)(1-\sigma^2)+4K_1+\tau_1^2-2K_2\tau_5^2$$
$$S_6=2K_1(1+K_1)(1-\sigma^2)+2K_1\tau_1^2-2K_2(1+K_1)\tau_5^2$$
$$S_8=K_1(1-\sigma^2)\{K_1(1-\sigma^2+\tau_1^2)-2K_2\tau_5^2\}+K_2^2\tau_5^4 \tag{3・17}$$

となる。$K_1=0$では $S_6<0$ となりσ, τ_1にかかわらず静的不安定の発生が予測される。不安定領域を図３・５（ａ）～（ｄ）に示す。$K_1=0$では $S_6<0$ となりσ, τ_1に関わらず静的不安定が発生している。しかし、$\tau_1>\sigma$ では不安定が静的から動的へと変わっている。この場合もσは動的不安定に対して安定化作用があると言える（系全体は安定化していない）。また、$K_1>0$ となると原点近くに安定領域が発生し始め、K_1が大きくなるほど静的不安定は縮小して動的不安定のみになりσが系の安定化作用を持つようになってくる。しかし、σが安定化作用を持つ領域はK_1, τ_1, τ_5によって複雑に変化する。なお、式（３・１７）よりτ_1, τ_5の符号は不安定境界に影響を与えないことが分かる。

３・４　等速継手に起因して発生する不安定振動の再検討

３・２節、３・３節でそれぞれ２自由度振動系、４自由度振動系の復元力項非対角成分による基本的な不安定特性を一般的に求めた。これらの結果を用いて前章で検討した伝達トルクによる自励振動の安定性を統一的に見直してみる。

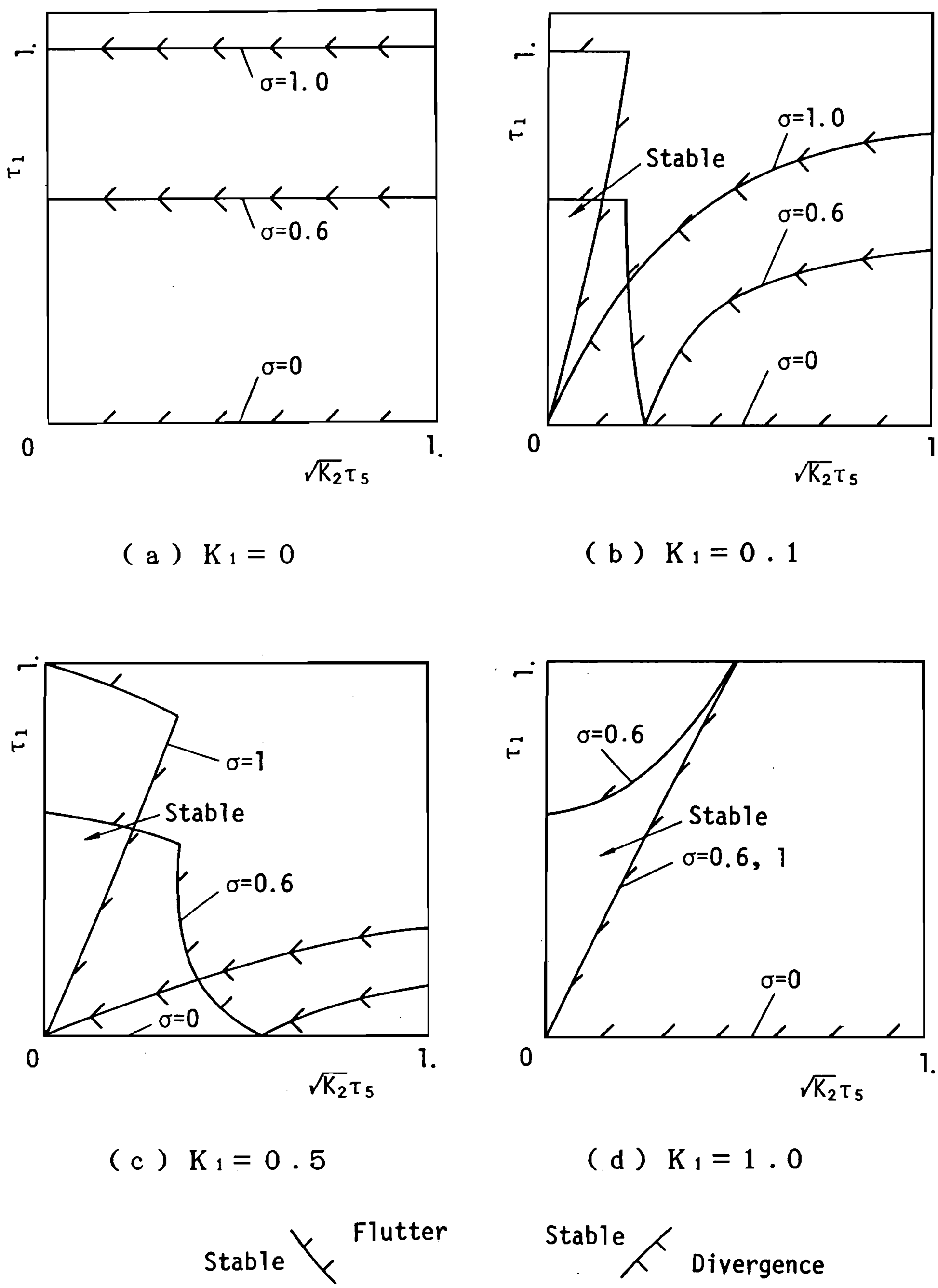


図３・５　２自由度連成項(τ_1)と４自由度連成項($\tau_6 = -\tau_7$)の相互作用

3・4・1　MR２ロータ系の場合

運動方程式（2・21）は式（3・1）の表現法によると、$\tau_1=\zeta_i\nu(1-a_0{}^2)/(1+a_0{}^2)+\tau_0/2$、$\tau_2=a_0{}^2\tau_0/2$ である。伝達トルクは$a_0=0$のときは逆対称な非対角成分のみ発生させる。$a_0\neq 0$のときは対称な非対角成分も発生させる。復元力項に現れる内部減衰ζ_iは逆対称非対角成分を発生させる。すでに述べたが、実際の継手では $\alpha_0<90°$ であるから $a_0{}^2<1$であり静的不安定条件式（3・6）は満足しない。すなわち、MR２ロータでは動的不安定のみ発生し、その不安定条件は式（3・7）、式（3・8）である。同式より軸受剛性異方性（固有振動数異方性）が安定化作用をもつことが容易に分かる。初期交差角α_0はτ_1の内部減衰項とτ_2に含まれている。前者についてはα_0が大きいほどτ_1を減少させるため安定化作用を持ち、後者についても対称な非対角成分が動的不安定を安定化することよりα_0が大きいほど安定であることが分かる。すなわち、α_0が大きいほど系は安定である。これらは何れも2・3・3項の数値計算結果を裏付るものである。

3・4・2　MR４ロータ系の場合

運動方程式（2・32）に置いて、$\bar{I}_5=0$の場合を式（3・12）と比べると、τ_1は、$\tau_0/2$を省略すれば、

$$K_1=2\,\bar{i}^2/(\bar{I}_3{}^2+\bar{I}_4{}^2)(=0.0638),\quad K_2=\bar{i}^2(=0.0102),$$
$$\tau_1=1,\quad \tau_2=(\bar{I}_0/\bar{I}_1)^2a_0{}^2,$$
$$\tau_3=0,\quad \tau_4=\{(\bar{I}_3{}^2+\bar{I}_4{}^2)/(2\,\bar{I}_1{}^2)\}\,a_0{}^2,$$
$$\tau_5=-\bar{I}_1{}^{-1},\quad \tau_6=-(\bar{I}_0/\bar{I}_1{}^2)a_0{}^2,\quad \tau_7=-\tau_5,\quad \tau_8=\tau_6$$

ここで、（・）内は前章の数値計算で用いた値

である。初期交差角α_0が0の場合（$a_0=0$）は逆対称な２自由度連成項τ_1と対称な４自由度連成項$\tau_5=-\tau_7$ だけが存在し図3・5で検討した場合となる。$\alpha_0\neq 0$の場合はこれらのほかに対称な２自由度連成項$\tau_2=\tau_4$ と対称な４自由度連成項$\tau_6=\tau_8$ が存在する。$\alpha_0=0$の場合、図3・5より$\sigma=0$ではτ_5が不安定境界に影響を与えない。このために図2・16では$\bar{I}_1{}^{-1}$（$=-\tau_5$）が不安定

境界に影響を与えてない。さらに、2・4・3項での数値計算例では$\alpha_0=0$の場合は$\sigma\neq0$で$\tau_5=-\tau_7$が1に比べてかなり大きくても不安定境界に変化がなかった（図2・16の②，④）。これは図3・5（b）（前章で用いた$K_1=0.06$の場合は図3・5（b）に近い）に示した対称な4自由度連成項がτ_1による動的不安定に対し影響を与えない範囲（$\tau_1<0.05$，$\sqrt{K_2}\tau_5<0.1$）にパラメータがあるためであることが分かる。$\alpha_0\neq0$の場合は、$\bar{l}_1$とα_0を$a_0{}^2/\bar{l}_1{}^2$の形で含む対称な2自由度連成項および4自由度連成項が現れる。これらの対称成分はそれぞれ、図3・2、図3・4（b）では静的不安定のみ発生させていた。それゆえ、前章の計算例ではこれらの対称成分のために $S_8<0$ の条件により静的不安定境界が現れていると考えられる。また、この対称成分に含まれるα_0は動的不安定に対して安定化作用を持ち、静的不安定に対しては不安定化作用を持つことが理解できる。

3・4・3　SR2ロータ系の場合

運動方程式（2・37）は式（3・1）の形で表すと、$\tau_1=0$，$\tau_2=(-a_0{}^2+a_0'^2/\bar{l}_2{}^2)\tau_0/2$ である。$\tau_1=0$であるので式（3・7）、式（3・8）は常に満足されず動的不安定は発生しない。しかし $\alpha_0=\alpha_0'=0$ でないかぎり式（3・6）を満たすτ_2が存在し静的不安定は発生する。2・5・3節ではSR2ロータの不安定が静的不安定であることを数値的に確認したが、本章の解析より一般的な現象であることが分かった。

3・4・4　SR4ロータ系の場合

運動方程式（2・41）と式（3・12）を比べると、τ_1は、$\tau_0/2$を省略して、

$$\tau_2=\bar{l}_0{}^2\bar{l}_1{}^{-2}a_0{}^2-(1-\bar{l}_0)^2\bar{l}_2{}^{-2}a_0'^2$$

$$\tau_4=(\bar{l}_1{}^{-2}a_0{}^2-\bar{l}_2{}^{-2}a_0'^2)(\bar{l}_3{}^2+\bar{l}_4{}^2)/2$$

$$\tau_5=-\bar{l}_1{}^{-1}-\bar{l}_2{}^{-1}=-\tau_7$$

$$\tau_6=-\bar{l}_0\bar{l}_1{}^{-2}a_0{}^2-(1-\bar{l}_0)\bar{l}_2{}^{-2}a_0'^2=\tau_8$$

である。$a_0=a_0'$，$2\bar{l}_0=1$の場合（図2・24の場合）は $\tau_2=0$ となるの

で4自由度連成項のみ存在する場合であり、不安定特性は図3・4（b）で求めたものとなる。同図よりσ、α_θ、α_θ'は常に不安定化作用を持つことが分かる。また、a_θ，a_θ'の値に関わらずB_1の復元力項は対称な非対角成分のみであるので、減衰項が存在しない場合には静的不安定のみが発生し、不安定条件式は $S_1<0$ によって与えられることが分かる。しかし、$H\neq0$の場合には前章で調べたように減衰項が存在しない振動系とは異なる。

3・5　結言

2自由度系及び4自由度系の復元力項に非対角成分を有する振動系について安定性を解析した結果、以下のことが明かとなった。

（1）2自由度系では系の不安定が静的か動的かによって復元力項非対角成分の不安定化作用が定性的に分類できる。

（2）2自由度系ではジャイロモーメントの影響が無視できる場合、復元力項の対称な非対角成分は静的不安定に対し不安定化作用、動的不安定に対して安定化作用を持つ。復元力項の逆対称な非対角成分は静的不安定に対して安定化作用、動的不安定に対して不安定化作用を持つ。

（3）2自由度系では復元力項の対称な非対角成分はジャイロモーメントを考慮しても常に静的不安定化作用を持つ。固有振動数の異方性は静的不安定に対して不安定化作用、動的不安定に対して安定化作用をもつ。

（4）4自由度系では系の不安定が静的か動的かによって復元力項非対角成分の不安定化作用を定性的に分類することはできない。

（5）4自由度系ではジャイロモーメントを無視できる場合には、対称成分または逆対称成分のみから成る復元力項非対角成分はそれぞれ静的不安定、動的不安定のみ発生させる。固有振動数の異方性は静的不安定に対しては不安定化作用を持つが、動的不安定に対しては固有振動数比によって安定化作用を持つことも不安定化作用を持つこともある。

第4章　十字軸形自在軸継手で連結された回転体の不安定振動

4・1　緒言

自在継手の一つである十字軸形自在継手が発明されたのはかなり古く、16世紀初めにカルダン（イタリア人）によって発明され、一般にカルダンジョイントと呼ばれている。この継手をのちにフック（イギリス人）が天体望遠鏡の駆動装置に使用したとき不等速性を発見し、フックスジョイントとも呼ばれるようになった[56]。十字軸形継手はその不等速性にも関わらず、安価であること、高負荷に耐えることなどの利点から種々の装置、例えば、自動車、鉄道車両、クレーン、ポンプ、船舶、製鉄機械などの駆動軸系に用いられている。最近では圧延ラインのホットストリップのワークロール駆動軸にも使用されるようになってきている。自動車、車両などにおける振動問題は勿論のこと、ロールミルでも駆動軸系の振動は、微小振動ではあるが製品精度に最も敏感に影響を与えるものとしてクローズアップされてきている[57]。

この継手を回転機械に用いると、不等速性のため、ねじり振動と横振動が発生することが知られている[58]。ねじり振動は強制振動と係数励振振動[58]-[60]が発生する。ねじり振動は軸系のばね定数、減衰定数を変更するなどして避ければよく、系の同定ができれば防振方法はそれほど難しくはない。一方、横振動は変動曲げモーメントによる強制振動、軸部に不つりあいが存在するときの角速度変動に起因する強制振動、モーメントによる係数励振振動などが発生する。実際の装置では振幅を抑制する要素を追加できる個所が限られていることなどのため振動の原因を明確にして適切な防振対策を立てる必要がある。特に不安定振動はその原因が単純でなく対策は厄介である。そのため、横振動、ことに不安定振動については比較的多くの研究者によって解析がなされている。例えば、Rosenberg[61]は変動トルクによるロータ軸系の安定性を解析し運動方程式をマシューの方程式に帰着させている。また、Wherli[62]も同様な方法で係数励振不安定を解析している。さらに、Burdess[63]は継手内部の減衰力を考慮し安定解析を行って

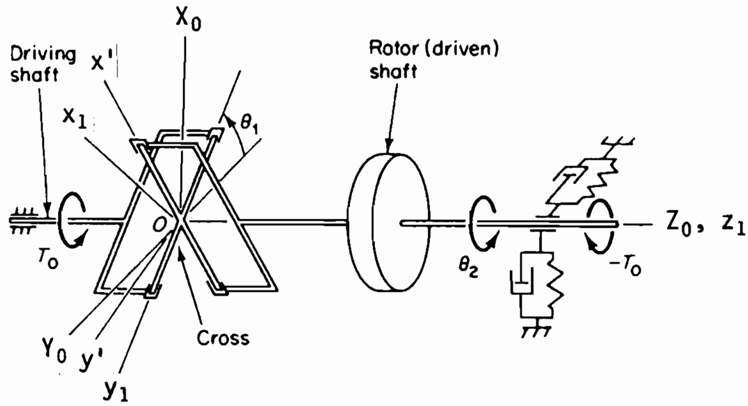
いる。しかしながら、これらの研究では回転軸の係数励振振動の解析を目的としているため、回転体を有する場合の回転体の運動の安定解析は行っておらず、本論文で明らかにする等速継手で発生するのと同様な伝達トルクによる自励振動を見逃してしまっている。また、従来の伝達トルクによる係数励振振動は継手の不等速性に起因するものとして解析しているが、本論文では不等速性が近似的に無視できて等速と見なせる場合でも伝達トルクによる係数励振振動が発生し得ることを明らかにしている。

係数励振振動の解析については、十字軸形軸継手を含むロータ系の解析に限らず、周期的軸力を受ける梁や柱の振動(64)-(67)、非対称弾性支持された非対称ロータ系の振動(68)-(71)、直行流体中の管群の振動(72)、気液二層流による配管の振動(73)など、数多くの研究がある。しかし、本論文で扱っている係数励振振動と自励振動とが同時に存在する線形振動系でのこれらの相互作用について研究した例は少ない(74)。なかでも、多自由度間での連成による自励振動と係数励振振動との相互干渉を解析した例は著者の知る限りではないようである。

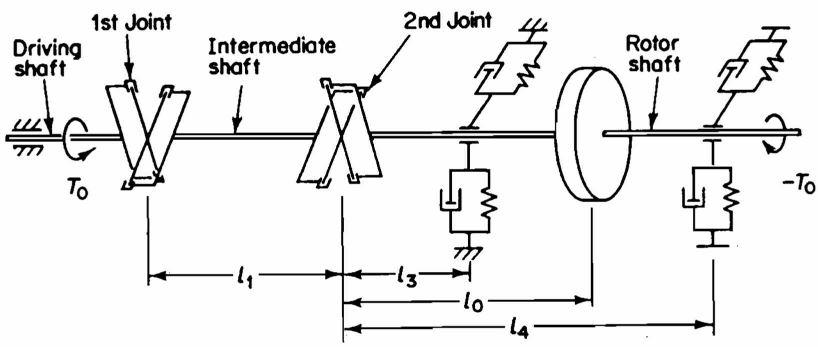
本章では、十字軸形軸継手を介して駆動されるロータ軸系について第２章と同様な検討を加える。第２章同様、系の特性を理解するためのロータ軸の運動を傾き運動に限定した一つの軸受で支持された２自由度モデル（ＭＲ２ロータ、ＳＲ２ロータ）と、実際のロータ軸を模擬する二つの軸受で支持された傾き運動と並進運動を考慮した二つの継手を含む４自由度モデル（ＭＲ４ロータ、ＳＲ４ロータ）の解析を行う（図２・１）。第２章と同様な解析に加えて、自励振動と係数励振振動の相互干渉、初期交差角による不等速性の系の安定性に及ぼす影響などを解析している。なお、十字軸形継手は等速形継手と異なりその構造に方向性があるため、二つの継手を連結する場合は背中合わせにしてその不等速性を少なくするようにして使用するので本論文でもこの場合についてのみ検討している（図４·1（ｂ））。

４・２　十字軸形自在軸継手の機構

本節ではロータ軸系の振動解析に先立ち十字軸形自在継手の機構学的な解析を行う。



（ａ）　一継手系（ＭＲ２ロータ）



（ｂ）　二継手系（ＭＲ４ロータ）

図４・１　十字軸継手で連結されたＭＲロータ軸系

４・２・１　十字軸形自在軸継手の構造

この構造は非常に簡単で図4・2に示すように互いに９０°位相がずれた二つのヨークに十字軸（クロス）をはめ込み軸受で支持したものである。よく知られているようにこの継手を介して駆動すると従動軸には駆動軸回転角速度の整数倍の角周波数成分を持つ角速度変動が生ずる。この不等速性は十字軸継手の構造が２・２節の等速条件を満たさないために発生している。以下の解析でも分かるよ

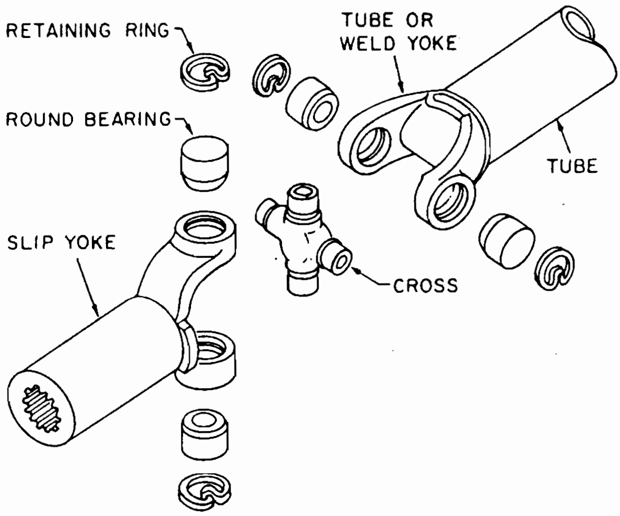


図４・２　十字軸継手の構造

うに十字軸形軸継手では駆動要素と従動要素の接触面（十字軸を含む平面）は一方のヨークに垂直な面と他方のヨークに垂直な面との間を交互に周期変動している。

４・２・２　十字軸形自在軸継手の速度特性

図４・１の系の駆動軸自転角速度と従動軸自転角速度の関係を求める。まず、同図（ａ）の場合であるが、座標系を図４・３のようにとる。静止座標系$O_0-X_0Y_0Z_0$、駆動軸に固定した座標系$O_0-x_1y_1z_1$（O_0y_1軸を十字軸の方向に取る）および従動軸に固定した座標系$O_0-x'y'z'$（O_0x'軸を十字軸の方向に取る）を定義する。従動軸が横変位しても常に$O_0y_1 \perp O_0x'$の関係が保たれる（十字軸形自在継手の機構学的な拘束条件はこれだけである）。$O_0-x_1y_1z_1$座標系と$O_0-x'y'z'$座標系との間の座標変換マトリクスを求め、$O_0y_1 \perp O_0x'$の条件を用いれば駆動軸の自転角と従動軸の自転角及び横変位との関係が得られる。従動軸の横変位を第２章でのＭＲ２ロータの場合と同様に定義すると、この座標変換マトリクスは

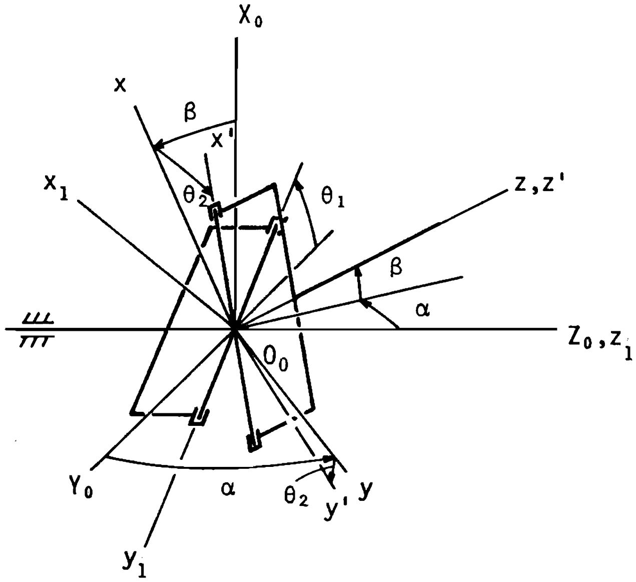


図４・３　　一つの十字軸継手の座標系

$$[x' \ y' \ z']^T = \Xi(\xi_{ij}) \ [x_1 \ y_1 \ z_1]^T \qquad (4\cdot1)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表せる。α，β，θ_1の値に関わらず $O_0y_1 \perp O_0x'$ が成立するには $\xi_{12}=0$ であればよい。これより次式が得られる。

$$-\cos\beta\tan\theta_1 + \cos\alpha\tan\theta_2 + \sin\alpha\sin\beta = 0 \qquad (4\cdot2)$$

式（４・２）を時間で微分すれば従動軸の速度変動$d\theta_2/dt$が次のように得られる。

$$\cos\alpha\cos^2\theta_1 d\theta_2/dt$$
$$=(\sin\alpha\sin\theta_2-\cos\alpha\sin\beta\cos\theta_2)\cos\theta_2\cos^2\theta_1 d\alpha/dt$$
$$-(\sin\beta\sin\theta_1+\sin\alpha\cos\beta\cos\theta_1)\cos\theta_1\cos^2\theta_2 d\beta/dt$$
$$+\cos\beta\cos^2\theta_2 d\theta_1/dt \qquad (4\cdot3)$$

上式より従動軸が横変位する場合には、駆動軸速度が一定であっても従動軸の自転角速度は従動軸の横変位に依存して複雑に変動することが分かる。しかし、従動軸の横変位が微小であり変位角及び角速度の２乗以上の項が無視しえる場合（$\cos\alpha(\beta)\fallingdotseq 1$, $\sin\alpha(\beta)\fallingdotseq\alpha(\beta)$ と近似できる場合）には、式（４・３）は

$$\cos^2\theta_2 d\theta_2/dt \fallingdotseq \cos^2\theta_2 d\theta_1/dt \qquad (4\cdot3)'$$

すなわち、

$$\theta_1 \fallingdotseq \theta_2 \qquad (4\cdot3)''$$

と近似でき速度変動は無視しうることが分かる。

同様な方法によって図４・１（ｂ）の場合の駆動軸の自転角と従動軸の自転角の関係を導く。座標系を図４・４のように取り、駆動軸、中間軸、従動軸に固定した座標系をそれぞれ$O_0-x_1y_1z_1$, $O_0-x_2y_2z_2$, $O-x'y'z'$とする。O_0x_1軸, O_0y_2軸を駆動軸側の継手（第１継手）の十字軸方向にとり、Oy_2'軸、Ox'軸を従動軸側継手（第２継手）の十字軸方向にとる。ここで、従動軸の横変位角α, β、中間軸の横変位角α_1, β_1は第２章で用いたＭＲ４ロータと同じ定義に従うものである。$O-x_2'y_2'z_2'$は$O_0-x_2y_2z_2$に平行な座標系である。また、原点がOの静止座標に平行な動座標系$O-X_0'Y_0'Z_0'$を定義し、これらの座標間の座標変換マトリクスを次のように定義する。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} \qquad (4\cdot4)$$

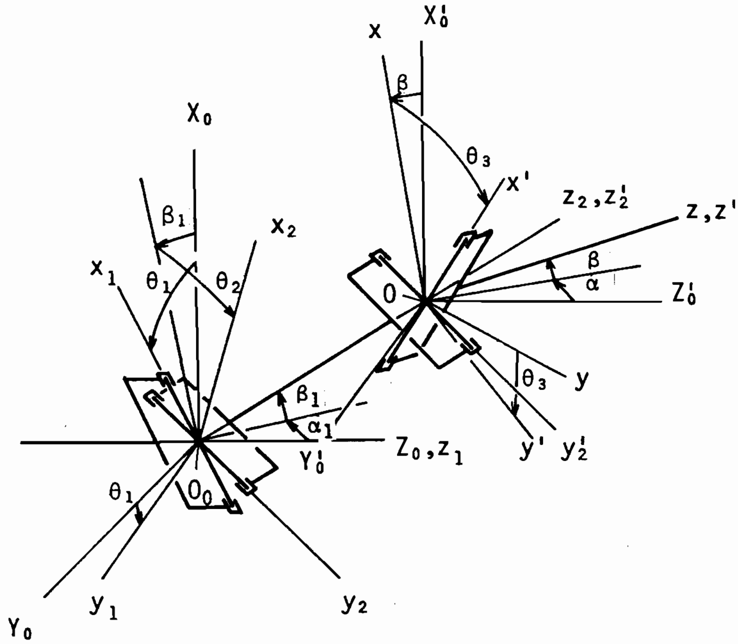


図４・４　　二つの十字軸継手系の座標系

$$N = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & 0 & -\sin\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta_1 & 0 & \cos\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ここで、$\Xi = \Lambda N^{-1}$, $Z = M\Lambda^{-1}$ と置くと、三つの軸に固定した動座標系は

$$
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Xi(\xi_{ij}) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Z(\zeta_{ij}) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = Z(\zeta_{ij}) \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ x_2' \end{bmatrix} \tag{4・5}
$$

で表される。十字軸に固定した座標軸が常に垂直であることより $O_a x_1 \perp O_a y_2$, $O y_2' \perp O x'$ が常に成立し、$\xi_{21}=0$, $\zeta_{12}=0$ が得られる。これらより

$$
\tan\theta_2 = \cos\alpha_1 \tan\theta_1 / (\cos\beta_1 + \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \tan\theta_1)
$$

$$
\tan\theta_3 = \{-\cos\beta_1 \sin\beta \sin(\alpha-\alpha_1) + (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\beta + \sin\beta_1 \sin\beta \cos\alpha) \tan\theta_1\} / \{\cos\beta_1 \cos(\alpha-\alpha_1) + \sin\beta_1 \sin\alpha \tan\theta_1\} \tag{4・6}
$$

が得られる。この場合も中間軸、従動軸の交差角が微小の場合には式（4・2）と同様にして次式と近似できる。

$$
\theta_1 \fallingdotseq \theta_2 \fallingdotseq \theta_3 \tag{4・7}
$$

4・3　初期交差角が存在しないＭＲ２ロータ系の安定性

初期状態で駆動軸と従動軸が一直線状にある場合の図４・１（ａ）に示すロータ系の安定解析を行う。系は支持ばね以外はすべて剛とし、重力の影響、継手部軸受の減衰力を無視する。軸の支持部はそのばね定数、減衰定数が水平、垂直方向で異なるものとする。また、駆動軸ヨーク軸にはトルクT_aが作用し、ロータ軸（従動軸）には負荷トルク$-T_a$が作用しているものとする。

4・3・1　運動方程式

ロータ軸に作用する外力は、伝達トルクに起因するモーメントM、負荷トルクL、軸受部の復元モーメントＲおよび減衰モーメントＰである。伝達トルクに起

因するモーメントは機構の拘束条件式（4・2）を考慮して第２章の等速継手の場合と同じように仮想仕事の原理より導くことができる。ＭをO_0-xyz成分で$[M_x\ M_y\ M_z]^T$と表し図４・１（ａ）の系に仮想仕事の原理を適用すると、

$$T_0\delta\theta_1=M_x\cos\beta\,\delta\alpha+M_y\delta\beta+M_z(\sin\beta\,\delta\alpha+\delta\theta_2) \qquad (4\cdot8)$$

が成立する。ここで、式（4・2）より$\delta\theta_2$は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\cos\alpha\sec^2\theta_2\delta\theta_2=&(\sin\alpha\tan\theta_2-\cos\alpha\sin\beta)\delta\alpha\\&-(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\tan\theta_1)\delta\beta+\cos\beta\sec^2\theta_1\delta\theta_1\end{aligned}$$

式（4・8）の両辺において$\delta\theta_1$, $\delta\alpha$, $\delta\beta$の係数を等置すると、

$$\begin{aligned}M_x&=T_0(-\sin\beta\cos\alpha\sec^2\theta_2+\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\tan\theta_2)\\&\qquad/(\cos^2\beta\sec^2\theta_1)\\M_y&=T_0(\sin\alpha\cos^2\theta_1+\tan\beta\cos\theta_1\sin\theta_1)\\M_z&=T_0\cos\alpha\sec^2\theta_2/(\cos^2\beta\sec^2\theta_1)\end{aligned} \qquad (4\cdot9)$$

を得る。線形近似した運動方程式を導くためα, βを微小として式（4・9）を近似すると、

$$\begin{aligned}M_x&=\{\beta(-1+\cos2\theta_1)-\alpha\sin2\theta_1\}T_0/2\\M_y&=\{\alpha(1+\cos2\theta_1)+\beta\sin2\theta_1\}T_0/2\\M_z&=T_0\end{aligned} \qquad (4\cdot10)$$

を得る。なお、ここで式（4・3）”の関係を使っている。

式（4・10）より微小交差角の場合、十字軸継手の不等速性は変位の２乗のオーダとして無視しうるが、本来不等速性に起因しているトルクの横方向成分の変動量は無視し得ない１乗のオーダの量として存在することが分かる。速度変動が

無視し得うるのにそれに起因するトルク変動が無視し得ないということは一見不合理のように感じられるが、これは三角関数を近似する際に $\cos\alpha \fallingdotseq 1$, $\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$ と置くことに原因している。すなわち、ロータ軸の軸方向のトルクおよび速度変動はそれぞれ駆動トルクおよび駆動軸速度に対して cosine の関係にありその変動が無視し得るが、横方向のモーメントは sine の関係にあり無視できない。次節で導くが、ロータ軸に作用するモーメントの関係を力およびモーメントのつりあいから導いても式（４・１０）と同じ関係が得られる。

伝達トルクに起因するモーメント以外の外部モーメント、軸受の復元モーメント及び減衰モーメントは第２章で用いたＭＲ２ロータの場合と同じであり、式（２・１７）のR，Ｐで与えられる。また、運動方程式も式（２・１８）で与えられる。

運動方程式および外部モーメントを線形化すると、z軸方向の運動方程式は $d^2\theta_2/dt^2=0$ となるので、$\theta_2=\omega t$（ω＝一定）とおける。このとき α，β に関しては、

$$\ddot{X}+C\dot{X}+B_0X+\tau_0(B_1+D\cos 2\nu T+E\sin 2\nu T)X=0$$

$$X=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}\zeta_e & A\nu\\ -A\nu & \zeta_e\end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix}\omega_2^2 & 0\\ 0 & \omega_1^2\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{4・11}$$

ただし、$\omega_2^2=2k_a/(k_a+k_b)$, $\omega_1^2=2k_b/(k_a+k_b)$,

$\zeta_e=C_e/I_t\omega_0$, $\tau_0=T_0/2I_t\omega_0^2$, $A=I_p/I_t$,

$\nu=\omega/\omega_0$, $\omega_0^2=(k_a+k_b)/2I_t$,

$T=\omega_0 t$，（$\dot{\ }$）はＴによる微分

；k_a，k_b は α，β 方向の軸受の回転ばね定数、C_eは軸受の減衰係数

を得る。式（４・１１）の伝達トルクに関する復元力項を等速継手で連結されたＭ

R2ロータの運動方程式（2·21）（$\zeta_1=0$, $a_0=0$ と置く）のそれと比較すると、式（4·11）のB_1が式（2·21）の復元力項の非対角成分と一致していることが分かる。すなわち、十字軸継手で連結されたロータ系における伝達トルクに起因する横方向の励振力は、等速継手で連結されたロータ系の自励振動励振成分を平均値とする回転角速度の２倍の周波数成分を持つ周期力である。２·２·２項でも考察したが交差角のある二軸間でトルクを伝達する場合の自励振動は継手の種類に依存しないことが改めて確認された。式（4·11）ではDおよびEの成分による係数励振不安定とB_1による自励振動とが同時に起こり、これらの相互干渉が問題となる。

4・3・2　安定性解析

二階の微分方程式（4·11）は、変数を

$$Y=[\dot{X}\quad X]^T$$

と置けば、周期係数を持つ一階の微分方程式

$$\dot{Y}+A(T)Y=0 \qquad (4\cdot12)$$

と書ける。ここで、$A(T)$の周期をT_0とする。式（4·12）で表される周期係数微分方程式はリアプノフの定理によれば、微分可能な正則変換

$$Y=S(T)Z,\qquad S(T+T_0)=S(T)$$

によって定係数の微分方程式

$$\dot{Z}=BZ \qquad (4\cdot13)$$

に変換される[75]。式（4·13）の解は

$$Z = U\exp(BT)$$

であるから、結局、式（4・12）の基本解は

$$Y = S(T)\exp(BT)$$

の形で表される。S(T)は周期関数であるから、解の安定性は、exp(BT)、すなわち、Bの固有値によって決定されることが分かる。Bの固有値がすべて負の実数部を持っていれば、単根、重根に関わらずYの解は安定である[76]。すなわち、安定性を議論するには、ある固有値λに対して $Z = V\exp(\lambda T)$ なる形で得られる解を考えればよく、式（4・12）に対して

$$Y = S(T)\exp(\lambda T) \tag{4・14}$$

なる形の解を求めればよいことになる。

式（4・14）の形の解を用いて実際に不安定条件を求める手法として、摂動法を用いて非線形方程式を解くのと同様な手続きで解く方法[77]、[78]と、厳密な特性方程式を求めてそれを適当な方法で近似する方法[76]、[79]が提案されているが、ここではより合理的と考えられる後者の方法を用いる。

解析の便宜上、式（4・11）の三角関数を複素関数で表し次のように変形する。

$$\ddot{X} + C\dot{X} + B_0 X + \tau_0 \{B_1 + D'\exp(j2\nu T) + E'\exp(-j2\nu T)\} X = 0$$

$$D' = \begin{bmatrix} -j & -1 \\ -1 & j \end{bmatrix} / 2,\quad E' = \begin{bmatrix} j & -1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} / 2;\quad j = \sqrt{-1} \tag{4・15}$$

式（4・15）の解を、S(T)を周期 $2\pi/2\nu$ または $2\pi/\nu$ の関数として、

$$X = S(T)\exp(jzT)$$

の形で表し[76]、S(T)を複素フーリエ級数の形に展開すると

$$X = \exp(j\,z\,T)\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \exp(j\,i\,\nu\,T)$$

で表される。上式を式（4・15）に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Big[\{B_0-(z+i\nu)^2 I+\tau_0 B_1+j(z+i\nu)C\}\exp(j\,i\,\nu\,T)$$
$$+\tau_0 D'\exp\{j(2+i)\nu T\}+\tau_0 E'\exp\{j(-2+i)\nu T\}\Big]a_i=0$$
$$;\quad I=\mathrm{diag}\,[1\quad 1] \tag{4・16}$$

任意の時間Tにおいて上式が成立するには各周波数成分の係数が0でなければならないから、

$$\begin{array}{ll}
\Omega_0+\tau_0 D'a_{-2}+\tau_0 E'a_2=0 & (\exp(0)\ \text{の係数})\\
\Omega_1+\tau_0 D'a_{-1}+\tau_0 E'a_3=0 & (\exp(+j\nu T)\ \text{〃})\\
\Omega_{-1}+\tau_0 D'a_{-3}+\tau_0 E'a_1=0 & (\exp(-j\nu T)\ \text{〃})\\
\Omega_2+\tau_0 D'a_0+\tau_0 E'a_4=0 & (\exp(+j2\nu T)\ \text{〃})\\
\Omega_{-2}+\tau_0 D'a_{-4}+\tau_0 E'a_0=0 & (\exp(-j2\nu T)\ \text{〃})\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

ここで　$\Omega_i=B_0-(z+i\nu)^2 I+\tau_0 B_1+j(z+i\nu)C$

（4・17）

が得られる。式系（4・17）より a_i の i が奇数の場合と偶数の場合が独立していることが分かる。a_i の全てが0とはならないとき解Xが非自明な解を持つ。奇数成分からなる式系より、a_i（i：奇数）の全てが0とはならない条件は式（4・18）となる。偶数成分からなる式系より、a_i（i：偶数）の全てが0とはならない条件は式（4・19）となる。

$$
f(z)=\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \Omega_{-3} & \tau_0 E' & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \tau_0 D' & \Omega_{-1} & \tau_0 E' & 0 & \cdot \\
\cdot & 0 & \tau_0 D' & \Omega_{+1} & \tau_0 E' & \cdot \\
\cdot & 0 & 0 & \tau_0 D' & \Omega_{+3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}
$$

$$
=0 \qquad (4\cdot 18)
$$

$$
g(z)=\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \Omega_{-2} & \tau_0 E' & 0 & \cdot \\
\cdot & \tau_0 D' & \Omega_0 & \tau_0 E' & \cdot \\
\cdot & 0 & \tau_0 D' & \Omega_{+2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}
$$

$$
=0 \qquad (4\cdot 19)
$$

式（４·１８）または（４·１９）の何れかが満たされればＸは非自明解を持つことになる。式（４·１８）と（４·１９）には $f(z)=f(z+2\nu)$, $g(z)=g(z+2\nu)=f(z+\nu)$ の関係がある。何れの条件も不安定性を調べるには同値であり、 $0\leqq \mathrm{Re}\,z\leqq 2\nu$ の根の安定性のみを調べればよい（ここでは式（４·１８）を用いる）。

式（４·１８）は無限次元行列でありその根の解析解は見いだされていないので近似解法に依らざるを得ない。この近似解の出発点は $\tau_0=\zeta_0=A=0$ の場合の解とするのが合理的と考えられる。式（４·１８）で $\tau_0=\zeta_0=A=0$ の場合を調べてみると、

$$
|B_0-(z+i\nu)^2 I|=0 \qquad (i=\pm 1,\ \pm 3\cdots)
$$

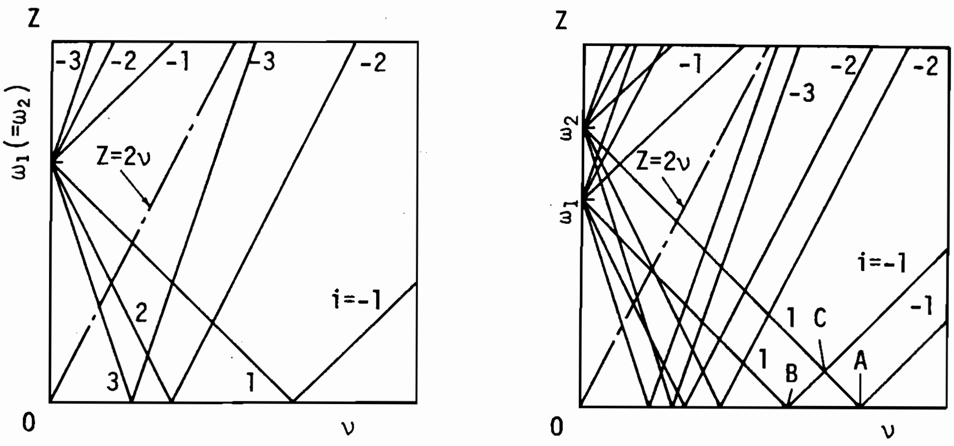
すなわち、

$$z = \pm \left\{ \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} - i\nu \quad (i = \pm 1,\ \pm 3 \cdots) \qquad (4 \cdot 20)$$

（複合任意）

となる。式（4・20）は図4・5のように各周波数成分ごとの直線群として表され、τ_θ，ζ_e，Aがそれほど大きくないとき式（4・18）の根はこれらの直線の近傍に存在するものと考えられる。そして各直線の交点近傍で複素根が存在する可能性がある。これらの直線群は解を周期関数とexp(j z T)との積と置いたときの周期成分により生じたものであるから、この不安定は係数励振作用によるものである。また、前章の結果よりB_1の逆対称性による不安定の発生が予測されるが、これは周波数の次数 i とは関係がないので図4・5の同じ傾きを持つ平行な解直線群のすべてが $\tau_\theta \neq 0$ のために不安定根をもつようになる場合と考えられる。

式（4・18）を有限次元で近似して得られる有限次の特性方程式に対しラウス・フルヴィッツの安定判別法を適用すれば不安定境界が得られる。この場合、次元数が大きいほど厳密解に近ずくはずであるが数値計算の計算時間の点から適当な次数で打ち切らざるを得ない。ところで、前述の文献(79)では係数励振不安定領域を小さい次元数で精度よく求める方法として式（4・18）の対角要素を次の



（a）$\omega_1 = \omega_2$の場合　　（b）$\omega_1 \neq \omega_2$の場合

図4・5　$\tau_\theta = \zeta_e = A = 0$のときの解直線

ように近似している。

$$\omega^2_{1(2)} - (z \pm i\nu)^2 = 2\omega_{1(2)}(\omega_{1(2)} \pm z \pm i\nu) \qquad (4\cdot21)$$

（複合任意）

これは係数励振不安定領域を求めるためには $\tau_e = \zeta_e = A = 0$ で交点を形成する直線群のみを含めればよいと考えられるからである。最も重要な係数励振不安定領域と考えられる図４・５（ｂ）の交点Ａ，Ｂ，Ｃ近傍の不安定領域を求めるのに式（４・２１）のように近似すると高々４次の特性方程式（４・２２）で三つの不安定領域を求めることができる。

$$\begin{vmatrix} 2\omega_2(\omega_2+z-\nu) + j(z-\nu)\zeta_e & \tau_e & j\tau_e/2 & -\tau_e/2 \\ -\tau_e & 2\omega_1(\omega_1+z-\nu) + j(z-\nu)\zeta_e & -\tau_e/2 & -j\tau_e/2 \\ -j\tau_e/2 & -\tau_e/2 & 2\omega_2(\omega_2-z-\nu) + j(z+\nu)\zeta_e & \tau_e \\ -\tau_e/2 & j\tau_e/2 & -\tau_e & 2\omega_1(\omega_1-z-\nu) + j(z+\nu)\zeta_e \end{vmatrix}$$

$$= 0 \qquad (4\cdot22)$$

さらに、最も簡単な係数励振不安定条件は２次の特性方程式から求められる。$\tau_e = \zeta_e = A = 0$ のとき交差する２直線が対角成分となる要素と対応する非対角要素のみを取り出し上式をさらに簡単化すると、交点Ａ，Ｂ，Ｃ近傍で式（４・２３）～（４・２５）の不安定条件が得られる。これらの条件にはB_1の要素が含まれていないので明らかに係数励振不安定の条件のみである。式（４・２３）、式（４・２４）は主共振の係数励振不安定、式（４・２５）は和型混合共振の係数励振不安定を表している。

(i)　A点近傍

$$2\sqrt{4\omega_2^2(\omega_2-\nu)^2+\zeta_e^2\nu^2}<\tau_0 \qquad (4\cdot23)$$

(ii)　B点近傍

$$2\sqrt{4\omega_1^2(\omega_1-\nu)^2+\zeta_e^2\nu^2}<\tau_0 \qquad (4\cdot24)$$

(iii)　C点近傍

$$p_2p_3-p_1p_4\pm(p_1p_8-p_2p_7)<0 \qquad (4\cdot25)$$

$p_1=-4\omega_1\omega_2-\zeta_e^2,\quad p_2=2\zeta_e(\omega_2-\omega_1)$

$p_3=2\omega_1\omega_2(\omega_1-\omega_2),\quad p_4=\zeta_e(\omega_1^2+\omega_2^2)$

$p_5=4\omega_1\omega_2(\nu-\omega_1)(\nu-\omega_2)+\zeta_e^2\nu^2-\tau_0^2/4$

$p_6=2\zeta_e\nu\{\omega_1(\nu-\omega_1)-\omega_2(\nu-\omega_2)\}$

$p_7+j\,p_8$

$=\{p_3^2-p_4^2+p_2p_6-p_1p_5+j\,(2p_3p_4-p_2p_5-p_1p_6)\}^{1/2}$

一方、運動方程式（4・11）の自励振動の近似的な不安定条件は同式で係数励振項を除いた次式

$$\ddot{X}+C\dot{X}+(B_0+\tau_0B_1)X=0 \qquad (4\cdot26)$$

で与えられると考えられる（等速継手の場合の運動方程式（2・21）と同じ式である）。式（4・26）の特性方程式は式（4・18）、（4・19）の対角ブロックマトリクスΩ_1に対応している。この時、$\tau_0=0$で2本の直線を表現していた対角成分を式（4・21）のように1本の直線に近似すると自励振動の影響を調べる際には誤差が大きくなるはずである。図4・6は式（4・21）のように解曲線を近似して求めた不安定領域の例である（RKG解のうち、(•)は計算時間T＝240で振幅が初期値の10倍に達する点を表し、(×)はT≦240で不安定傾向が確認された点である）。τ_0の小さな領域での係数励振不安定領域については十分な精度で求められているが、τ_0が大きくなり自励振動の影響が現れてくる領

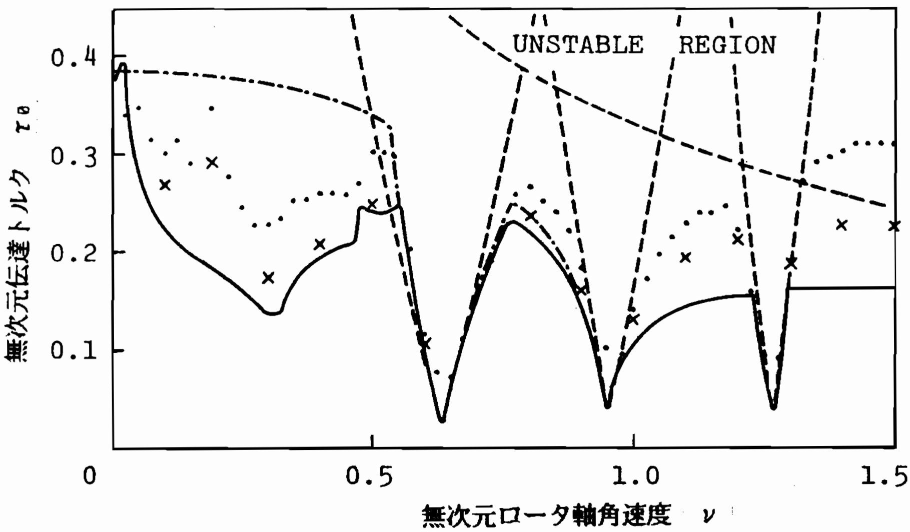


図4・6　式（4・21）の近似法による不安定領域の変化
（σ＝0.6，A＝0.03，ζ_e＝0.02；
----- 2次近似 -・-・- 4次近似 —— 8次近似　・× RKG解）

域では近似項数を増やしても精度のよい境界が得られていない。このように係数励振不安定と自励振動不安定が同時に存在する系では式（4・21）のような近似を行うことはできないことが分かる。次項では式（4・18）の形のままで根を求めている。そのため、運動方程式（4・11）を一階の微分方程式に変換して対角成分に根zが2乗の形で現れない特性行列式を導き、その根を行列式の固有値としてQR法[80]で求めている（具体的な方法は次節で示す）。

4・3・3　安定性の数値計算例と考察

（I）ロータ軸が外部に仕事をする場合（$\tau_B\nu>0$の場合）

前項で得られた不安定境界を求める方法及び2行2列近似（2次近似）条件式（式（4・23）～式（4・25））を用いて軸受剛性異方性、軸受減衰異方性の安定化作用を調べた。ここで軸受剛性異方性を表すパラメータσを導入して $\omega_2{}^2=1+\sigma$，$\omega_1{}^2=1-\sigma$ と置く。

特性方程式の近似度による不安定領域の変化の例を図４・７に示す。同図には特性方程式の２次近似、４次近似（周波数成分 ±ν）、８次近似（周波数成分 ±ν, ±２ν）の場合および運動方程式（４・１１）のルンゲ・クッタ・ジル（ＲＫＧ）法による不安定境界を併せて記してある。ＲＫＧ法による計算では、きざみ幅＝０．０１、計算時間＝２４０、初期条件 $\alpha=0.1$, $\beta=0.1$、$\dot{\alpha}=\dot{\beta}=0$ を用いた。このきざみ幅は計算した範囲での最大の固有振動数（$1+\sigma=1.6$）の１周期の約１／５００に相当し、計算時間は最小の固有振動数（$1-\sigma=0.4$）の１周期の約２４倍に相当する。ＲＫＧ法による不安定境界（○印）は上述の計算時間内で発散傾向がみられた場合を不安定と判断した点である（図４・６の×印と同じ点）。ＲＫＧ法は近似特性方程式による方法よりは直接的であるが、振動波形が発散傾向にあるか否かの判断が困難な場合がありこの意味で近似的である。同図より式（４・１１）の系の不安定領域は係数励振不安定領域と自励振動による不安定領域とから成っていることが確認できる。係数励振不安定領域については各近似特性方程式による境界とＲＫＧ法による境界とはほゞ一致した値を示しているが、自励振動の影響が現れる領域では２次近似の境界条件式の誤差が大

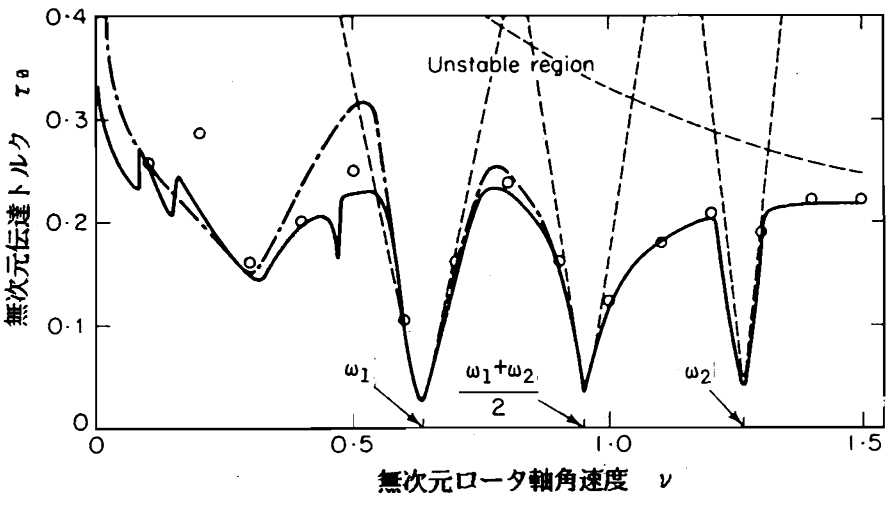


図４・７　ＭＲ２ロータの特性方程式の近似項数による不安定領域の変化

（$\tau_B\nu>0$； $\sigma=0.6$, $A=0.03$, $\zeta_e=0.02$；

----- ２次近似 -·-·-· ４次近似 ―― ８次近似 ○ ＲＫＧ解）

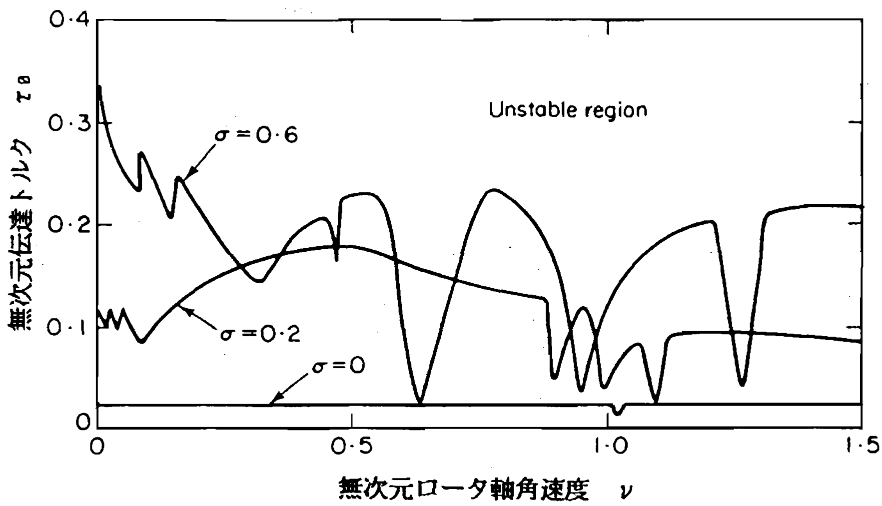


図４・８　ＭＲ２ロータの不安定領域に及ぼす軸受剛性異方性の影響

（Ａ＝０．０３，$\zeta_\circ$＝０．０２）

きくなっている。$\nu=\omega_2$を中心とする係数励振不安定領域より高速側では自励振動の影響が強く現れているが、$\nu=\omega_1$を中心とする係数励振不安定領域より低速側では自励振動のみによる不安定境界と実際の境界ではかなりの差があり係数励振作用の影響が強い。図４・８にσをパラメータとした不安定境界を８次近似特性方程式を用いて求めている。同図よりσの安定化作用が確認できる。σ≠０とすると係数励振不安定領域は増大するが、共振点から十分離れた回転数域では自励振動による不安定境界が安定側に縮退し安定領域が増加している。σをあまり大きくとると係数励振不安定領域が広い範囲に現れるが、比較的小さく取れば自励振動による不安定境界がσ＝０に比べてかなり縮退し、かつ係数励振不安定領域も限られた回転数域に抑えることが可能であることが分かる。つぎに図４・９にジャイロモーメントの不安定境界に及ぼす影響を示す。図４・７、図４・８はＡ＝０．０３とした場合の例であったが、図４・９はＡ＝０の場合とＡ＝０．０３の場合の差を示したものである。同図より図４・７、図４・８の高速域における不安定境界の右下がり傾向がジャイロモーメントの作用によるものであることが分かる。この効果は係数励振項を除いた式において存在することをすでに第２章で調べたが（図２・１１）、係数励振項を含む系でも存在することが分かった。以上は減衰力

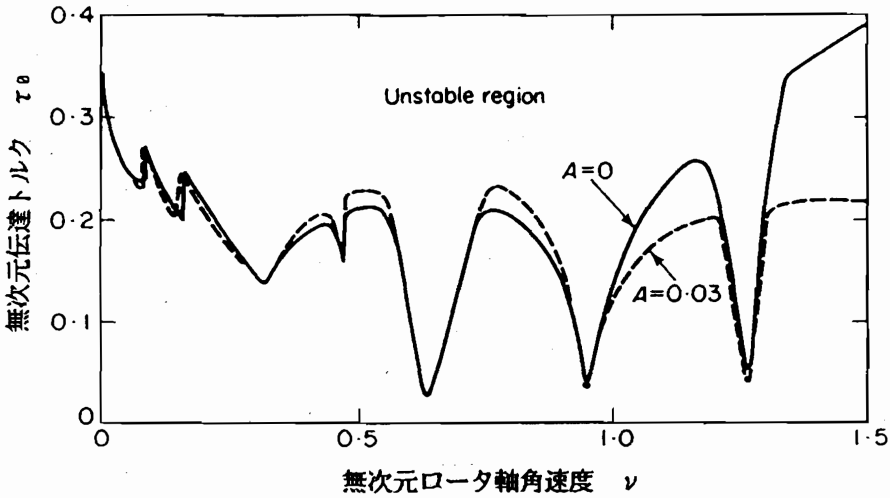


図４・９　ＭＲ２ロータの不安定領域に及ぼすジャイロモーメントの影響
（$\tau_B \nu > 0$；$\sigma = 0$，$\zeta_e = 0.02$）

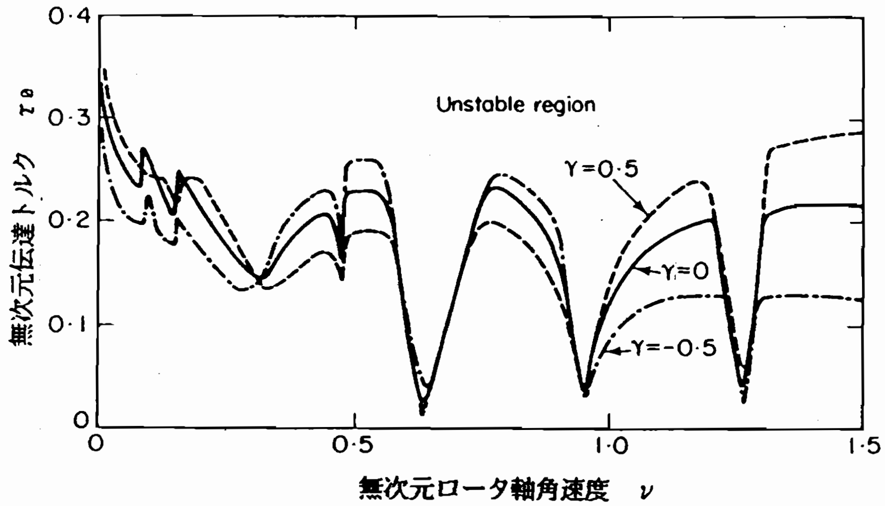


図４・１０　ＭＲ２ロータの不安定領域に及ぼす軸受減衰異方性の影響
（$\tau_B \nu > 0$；$\bar{\zeta} = 0.02$，$\sigma = 0.6$，$A = 0.03$）

については等方性の場合を示したが、図４・１０に減衰係数異方性がある場合の計算例を示す。α方向の減衰定数を$\bar{\zeta}$（１＋γ）、β方向の減衰定数を$\bar{\zeta}$（１－γ）と置いてγをパラメータとして示してある。同図より減衰が強い方向の固有振動数付近の不安定境界が安定側に移動し、弱い方向の固有振動数付近の不安定境界が不安定側に移動していることが分かる。すなわち減衰係数異方性の連成効果はあまりないと言える。

（ＩＩ）ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_0\nu$＜０の場合）

第２章の等速継手の場合に明らかにしたように十字軸継手系でも伝達トルクの符号によって不安定境界が変化することが予測される。直感的には、自励振動成分の影響は第２章の等速継手の場合と同じであり（図２・１３、２・１４）、また、係数励振成分については、特性方程式が±ν、±２ν・・・と何れの成分も正負に対称な形で含まれているから伝達トルクの方向は不安定境界に影響を与えないと考えられる。しかし、これらの成分間の干渉が存在するので必ずしも加え合わさった特性のみが現れるとは限らない。数値計算例は次節の図４・１１、図４・１３に初期交差角を考慮した場合と比較して記してある。図４・１１は係数励振項を無視した系の不安定領域である。同図（ａ）のσ＝０の場合では、不安定境界に及ぼす自励振動成分の影響はτ_0の符号によってほとんど差がない。同じように図４・１３に示す係数励振項をも考慮した不安定境界も伝達トルクの方向によってそれほど差が見られない。しかし、σ＝０の場合には、τ_0＜０では係数励振不安定領域が消滅しているなど自励振動項と係数励振項との干渉がみられる。一方、σ＝０.６の場合には係数励振項を無視した系の不安定境界はτ_0＞０とτ_0＜０の場合で全く差がなく、係数励振項を考慮した場合にも差が見られない。

４・４　初期交差角が存在するＭＲ２ロータ系の安定性

考察する系は図４・１（ａ）で駆動軸とロータ軸が静止時に交差角α_0で交わっている場合であり（第２章の場合と同様、X_0軸まわりにα_0の交差角を持つものとする）、これ以外は前節と同じである。

４・４・１　運動方程式

伝達トルクに起因する項以外の項は4・3・1項で導いたものと同じである。伝達トルクを本節ではモーメントのつりあい式より導く。図4・3の座標系を用いて、駆動側ヨークから十字軸に作用するモーメントを $[M_0 \quad 0 \quad T_0]^T_{x_1y_1z_1}$、十字軸からロータ軸側ヨークに作用するモーメントを $[0 \quad M \quad T]^T_{x'y'z'}$ と表わすと、式(4・1)より

$$\begin{bmatrix} 0 \\ M \\ T \end{bmatrix}_{x'y'z'} = \Xi \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ T_0 \end{bmatrix}_{x_1y_1z_1} \tag{4・27}$$

の関係がある。 Ξ の i j 成分を ξ_{ij} と表し、上式よりM、Tを求めるとロータ軸に作用するモーメント M_j は

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{23} - \xi_{21}\xi_{13}/\xi_{11} \\ \xi_{33} - \xi_{31}\xi_{13}/\xi_{11} \end{bmatrix}_{x'y'z'} T_0$$

となる。上式において α を $\alpha_0 + \alpha$ とおき、α、β に関して2乗以上の項を無視すると、

$$M_j = (1 - \sin^2\alpha_0\sin^2\theta_2 - \alpha\sin 2\alpha_0\sin^2\theta_2 + \beta\sin 2\alpha_0\sin\theta_2\cos\theta_2)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\alpha_0\cos\theta_2 + \alpha\cos\alpha_0\cos\theta_2 + \beta\cos\alpha_0\sin\theta_2 \\ \cos\alpha_0 - \alpha\sin\alpha_0 \end{bmatrix} T_0 \tag{4・28}$$

となる。z'方向(自転軸方向)の運動方程式は、上式のz'成分より、α, β およびそれらの導関数の2乗以上の項を無視すると、

$$I_t A\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{\cos\alpha_0 - \alpha\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0\sin 2\alpha_0\sin\theta_2(\alpha\sin\theta_2 - \beta\cos\theta_2)}{1 - \sin^2\alpha_0\sin^2\theta_2}$$

$$\cdot T_{0} - T_{0}' \qquad (4\cdot29)$$

となる。ここで、T_0'は負荷トルクである。

上式より、$\alpha_0 \neq 0$の場合には、$T_0 = T_0'$ でも $d^2\theta_2/dt^2 \fallingdotseq 0$ と近似できないばかりでなく、θ_2とα、βが連成して横方向の運動方程式が非線形となり容易には解けない。そこで、α_0がそれほど大きい角度でなく、右辺の分数分子の第2項以下が無視できるものと仮定する。すなわち、ロータ軸の自転の角速度変動は初期交差の状態の速度変動と差がないと見なす。このとき、式（4・29）は、$\sin^2\alpha_0$を1に比べて十分小さいとして、

$$I_t A d^2\theta_2/dt^2 = -T_0' + T_0\{\cos\alpha_0(1+\sin^2\alpha_0/2) - \cos\alpha_0\sin^2\alpha_0\cos2\theta_2/2\} \qquad (4\cdot30)$$

と近似できる。上式において $T_0 = T_0'$ と置いたのでは$d\theta_2/dt$が時間と共に増加するので、ここではロータ軸速度は平均的には一定値に保持されるものとして、

$$T_0' = \cos\alpha_0(1+\sin^2\alpha_0/2)T_0 \qquad (4\cdot31)$$

と置く。式（4・31）を用いると式（4・30）は、$\sin^2\alpha_0$のオーダで

$$I_t A d^2\theta_2/dt^2 \fallingdotseq -\sin^2\alpha_0\cos2\theta_2 T_0'/2 \qquad (4\cdot32)$$

で表される。前節と同じ無次元量を用いると、式（4・32）は

$$\ddot{\theta}_2 \fallingdotseq -\sin^2\alpha_0\cos2\theta_2\tau_0'/A \qquad (4\cdot33)$$

となる。式（4・33）の両辺に$\dot{\theta}_2$を掛けて時間で積分すると、

$$(\dot{\theta}_2)^2 = -\tau_0'\sin^2\alpha_0\sin2\theta_2/A + \nu^2 \qquad (\nu\text{は初速度})$$

となり、

$$\dot{\theta}_2=\nu\sqrt{1-\varepsilon\sin 2\theta_2}\ ;\ \varepsilon=\tau_0{}'\sin^2\alpha_0/A\nu^2 \qquad (4\cdot 34)$$

となる。

式（４・３４）は楕円積分に帰着され、θ_2がＪacobiの楕円関数として表されることが分かる。しかし、解析の目的はθ_2の三角関数を含む運動方程式を解くことにあり、楕円関数の cosine や sine が必要になる。つまり、θ_2を楕円関数で厳密に表現しても解析的には利用できない。そのため、本論文ではεが微小であることを利用して式（４・３４）の右辺を近似してθ_2を初等関数で表すことにする。式（４・３４）より

$$\nu=\dot{\theta}_2/\sqrt{1-\varepsilon\sin 2\theta_2}\fallingdotseq(1+\varepsilon\sin 2\theta_2/2)\dot{\theta}_2$$

と置き、積分すると、

$$\theta_2=\nu T+\varepsilon\cos 2\theta_2/4 \qquad (4\cdot 35)$$

となる。式（４・３５）からθ_2はνTの関数として厳密には解けないが、εが微小であるので逐次近似によってθ_2をνTの関数として求めることができる。ここで、式（４・３４）はεの２乗以上、即ち、$\sin^4\alpha_0$以上の項を無視して求めた式であるから、式（４・３５）の解もεの１乗のオーダで求めればよい。

まず、第０近似解として、

$$\theta_2=\nu T$$

と置き、これを式（４・３５）右辺に代入すると、第１次近似解として、

$$\theta_2=\nu T+\varepsilon\cos 2\nu T/4 \qquad (4\cdot 36)$$

が得られる。式（4・36）を式（4・35）右辺に代入すると、εの1乗のオーダまでの近似解としては式（4・36）でよいことが分かる。式（4・36）よりロータ軸角速度は

$$\dot{\theta}_2 = \nu - \varepsilon \nu \sin 2\nu T/2$$
$$= \nu\,(1 - \tau_0' \sin^2\alpha_0 \sin 2\nu T/2A\nu^2)$$

となり、平均回転角速度νに対して

$$\mu = \tau_0' \sin^2\alpha_0/2A\nu^2 = \varepsilon/2 \qquad (4\cdot37)$$

の振幅の変動がある。

ロータ軸の横方向の運動方程式は、式（4・28）のy'成分より$\sin^2\alpha_0$のオーダで次のようになる。

$$\begin{aligned} &I_t d^2\alpha/dt^2 + I_t A(d\theta_2/dt)(d\beta/dt) + k_a\alpha + C_e d\alpha/dt \\ &+ [\tan\alpha_0\,(\sin 2\theta_2 - \sin^2\alpha_0 \sin 4\theta_2/4) \\ &\quad + \alpha\,\{(1+\sin^2\alpha_0/2)\sin 2\theta_2 - 3\sin^2\alpha_0 \sin 4\theta_2/4\} \\ &\quad + \beta\,\{1 - \sin^2\alpha_0/4 - (1+\sin^2\alpha_0/2)\cos 2\theta_2 \\ &\qquad + 3\sin^2\alpha_0 \cos 4\theta_2/4\}]\,T_0'/2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &I_t d^2\beta/dt^2 - I_t A(d\theta_2/dt)(d\alpha/dt) + k_b\beta + C_e d\beta/dt \\ &- [\tan\alpha_0\,\{1 - \sin^2\alpha_0/4 + (1-\sin^2\alpha_0/2)\cos 2\theta_2 \\ &\qquad - \sin^2\alpha_0 \cos 4\theta_2/4\} \\ &\quad + \alpha\,\{1 + \sin^2\alpha_0/4 + (1-\sin^2\alpha_0/2)\cos 2\theta_2 \\ &\qquad - 3\sin^2\alpha_0 \cos 4\theta_2/4\} \\ &\quad + \beta\,\{(1-\sin^2\alpha_0)\sin 2\theta_2 - 3\sin^2\alpha_0 \sin 4\theta_2/4\}]\,T_0'/2 = 0 \end{aligned} \qquad (4\cdot38)$$

ここで、式（4・36）の関係を用いると、

$$\cos 2\theta_2 = \cos\{2\nu T + \varepsilon \cos 2\nu T/2\}$$
$$\fallingdotseq \cos 2\nu T - \varepsilon \sin 4\nu T/4$$
$$\sin 2\theta_2 = \sin\{2\nu T + \varepsilon \cos 2\nu T/2\}$$
$$\fallingdotseq \sin 2\nu T + \varepsilon(1+\cos 4\nu T)/4$$
$$\cos 4\theta_2 = \cos(4\nu T + \varepsilon \cos 2\nu T)$$
$$\fallingdotseq \cos 4\nu T - \varepsilon(\sin 2\nu T + \sin 6\nu T)/2$$
$$\sin 4\theta_2 = \sin(4\nu T + \varepsilon \cos 2\nu T)$$
$$\fallingdotseq \sin 4\nu T + \varepsilon(\cos 2\nu T + \cos 6\nu T)/2$$

が得られるから、上式系を式（４・３８）に代入してεのオーダ（$\sin^2\alpha_0$のオーダ）までで整理すると次式が得られる。

$$\ddot{X} + (C + C_{2s}\sin 2\nu T)\dot{X} + B_0 X + \tau_0(B_1 + B_{2c}\cos 2\nu T + B_{2s}\sin 2\nu T + B_{4c}\cos 4\nu T + B_{4s}\sin 4\nu T)X = F \tag{4・39}$$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \zeta_0 & A\nu \\ -A\nu & \zeta_0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1+\sigma & 0 \\ 0 & 1-\sigma \end{bmatrix}$$

$$C_{2s} = \tau_0 \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} / 2\nu$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1-\sin^2\alpha_0/4 \\ -1-\sin^2\alpha_0/4 & 0 \end{bmatrix} + \tau_0 \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} / 4A\nu^2$$

$$B_{2c} = \begin{bmatrix} 0 & -1-\sin^2\alpha_0/2 \\ -1+\sin^2\alpha_0/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2s} = \begin{bmatrix} 1+\sin^2\alpha_0 & 0 \\ 0 & -1+\sin^2\alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$B_{4c}=3\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}/4+\tau_0\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}/4A\nu^2$$

$$B_{4s}=3\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}/4+\tau_0\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}/4A\nu^2$$

$$F=\tau_0\tan\alpha_0\,[-\sin 2\nu T\quad 1+\cos 2\nu T]^T$$

ただし、無次元量は前節と同じであり、減衰係数に異方性はないものとしている。τ_0は負荷トルクを無次元化したものを改めて置き直したものである。

式（４·３９）において $\alpha_0=0$ とおけば明らかに式（４·１１）に一致する。式（４·３９）において伝達トルクに起因する項のうち、$\tau_0\sin^2\alpha_0$のみを含む項は伝達トルクの横方向成分が交差角のために変動する成分を表している項である。$\tau^2{}_0\sin^2\alpha_0/A\nu^2$を含む項は初期交差角のためロータ軸の自転角速度が変動することによる影響を表している項である。何れの場合も$\sin^2\alpha_0$のオーダでは回転速度の４倍の振動成分まで現れることが分かる。また、強制力項にも回転数の２倍の周期成分が現れ、共振も問題となる。なお、νが０に近い場合にはτ_0がかなり小さくないと式（４·３５）の $\varepsilon<<1$ の条件が満足されなくなり、式（４·３９）で表される運動方程式は、式（４·３３）、式（４·３８）から成る系に対して誤差が大きくなる。

４・４・２　安定性解析

前節と同じ方法によって式（４·３９）の特性方程式を導く。式（４·３９）の強制項Fを０と置いた式の三角関数を複素表示し、更に、$Y=[X\quad \dot{X}]^T$ なる変数を用いて一階の方程式に変換すると、

$$\dot{Y}+\{P+R_2\exp(j2\nu T)+S_2\exp(-j2\nu T)+R_4\exp(j4\nu T)+S_4\exp(-j4\nu T)\}Y=0 \qquad (4\cdot 40)$$

$$P=\begin{bmatrix} 0 & -I \\ B_0+\tau_0 B_1 & C \end{bmatrix},\quad R_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_0(B_{2c}-jB_{2s}) & -jC_{2s} \end{bmatrix}/2$$

$$S_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_0(B_{2c}+jB_{2s}) & jC_{2s} \end{bmatrix}/2$$

$$R_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_0(B_{4c}-jB_{4s}) & 0 \end{bmatrix}/2,\quad S_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_0(B_{4c}+jB_{4s}) & 0 \end{bmatrix}/2$$

となる。

式（4・40）の解を

$$Y=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \exp(-z+j\,i\,\nu)T \qquad (4\cdot41)$$

と置き、上式を式（4・40）に代入して非自明解が存在する条件を求めると、式（4・22）と式（4・23）が得られる。これらのうち何れか一方についてzを求め（本論文では式（4・42）を用いる）、実数部が負となる範囲を探していけば不安定境界が得られる。

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & P+(-z-j3\nu)I & R_2 & R_4 & 0 & \cdot \\ \cdot & S_2 & P+(-z-j\nu)I & R_2 & R_4 & \cdot \\ \cdot & S_4 & S_2 & P+(-z+j\nu)I & R_2 & \cdot \\ \cdot & 0 & S_4 & S_2 & P+(-z+j3\nu)I & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$=0 \qquad (4\cdot42)$$

$$
\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & P+(-z-j4\nu)I & R_2 & R_4 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & S_2 & P+(-z-j2\nu)I & R_2 & R_4 & 0 & \cdot \\
\cdot & S_4 & S_2 & P+(-z)I & R_2 & R_4 & \cdot \\
\cdot & 0 & S_4 & S_2 & P+(-z+j2\nu)I & R_2 & \cdot \\
\cdot & 0 & 0 & S_4 & S_2 & P+(-z+j4\nu)I & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}
$$

$$=0 \qquad (4\cdot43)$$

4・4・3　安定性の数値計算例と考察

初期交差角を含む場合は運動方程式に回転角速度の4倍の周波数成分までの係数励振成分が含まれるので、特性方程式は$\pm\nu$、$\pm3\nu$の成分を含む16行16列の行列式を用いて根（固有値）を求めた。なお、数値計算例は、運動方程式にAが分数の分母として含まれるのでA＝0.03の場合のみである。

（Ⅰ）ロータ軸が外部に仕事をする場合（$\tau_0\nu>0$の場合）

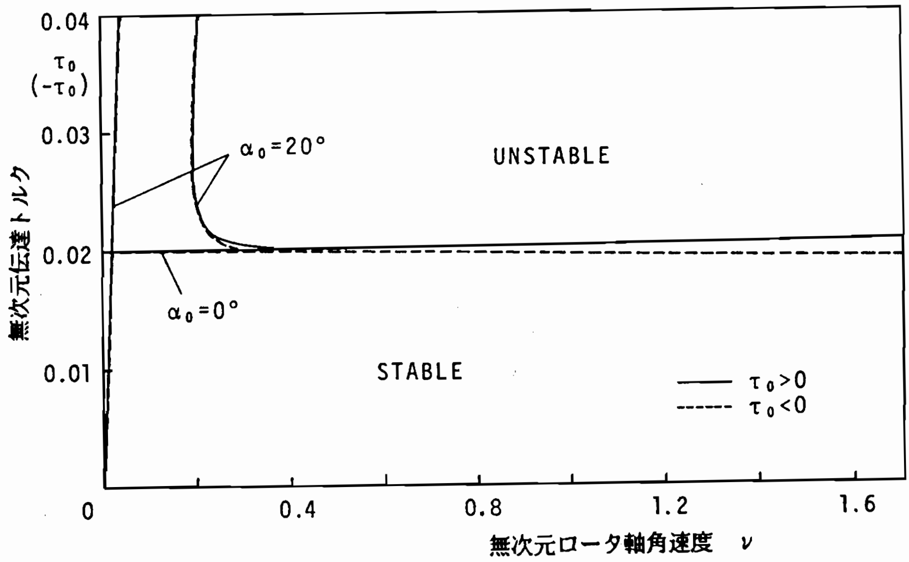
まず、図4・11に式（4・39）において係数励振項を除いた式の不安定境界を示す。同図には前節の$\alpha_0=0$の場合も記入してある。また、ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_0<0$）も併せて記入してある。同図によると、$\sigma=0$の場合、$\nu<0.2$以下に初期交差角のため極端な安定域が現れている。これは式（4・39）のB_1の第二項が軸受剛性異方性と同じ成分であるので、その項が軸受剛性異方性と同様な安定化作用を持つためと考えられる。原点を通る不安定境界はβ方向のばね復元力が0となる $\tau_0^2\sin^2\alpha_0/4A\nu^2=1$ の条件を表している。$\sigma=0.6$の場合も高速側で初期交差角のため安定化しており、低速側で不安定境界が現れている。低速側の不安定境界はβ方向のばね復元力が0となる条

件である。

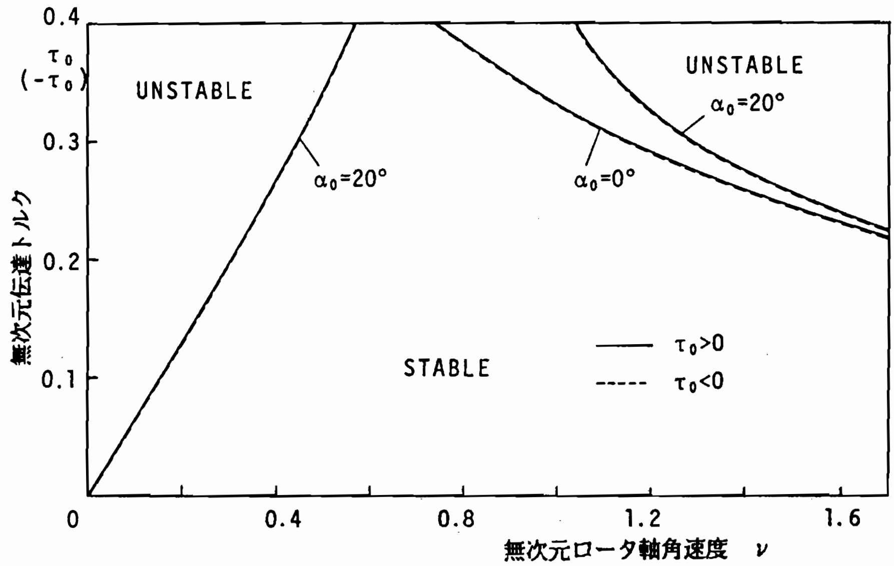
つぎに、図４・１２に係数励振項をも含む不安定領域の計算例を示す。同図（ａ）はσ＝０の場合で、同図（ｂ）はσ＝０．６の場合である。何れも前節で求めたα_0＝０°の場合を併せて記してある。また、α_0＝２０°の時の回転角速度の変動振幅μ（式（４・３７））が０．０１、０．１、１の場合を破線で示している。σ＝０の場合は、自励振動による不安定境界がかなり不安定側にあるため不安定境界は自励振動の影響を強く受け、係数励振項をも含む不安定境界は係数励振項を除いた不安定境界と類似している。σ＝０．６でも低速域では自励振動の不安定化作用が強い。同図より、σ＝０の場合、初期交差角が低速域の不安定境界を安定化しているように見えるが、この領域はμが１を越えた領域であり、この様な条件で運転されることはないので実際上はあまり意味がない。σ＝０．６の場合も低速域で初期交差角によって不安定領域が極端に増大しているが、この領域もμが１を越えており実際上特に問題はない。μが０．１～０．０１程度では不安定領域は初期交差角によってほとんど変化していない。μがこれより大きくても１に近くなければ不安定境界は僅かにシフトしている程度で定性的には初期交差角が存在しない場合とほとんど同一であると言える。

（ＩＩ）ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_0\nu$＜０の場合）

図４・１１の係数励振項を除いた系の不安定境界はτ_0＞０の場合とほとんど変わらない（σ＝０の場合には若干差が生じている）。図４・１３にτ_0＜０の場合の係数励振項をも含む系の不安定領域を示す。同図（ａ）はσ＝０の場合である。τ_0＞０の図４・１２（ａ）と比べると、α_0＝０の場合は、既に述べたようにτ_0の符号の影響がほとんどない。α_0＝２０°の場合も係数励振不安定領域がτ_0＜０によって消滅すること以外は逆方向トルクの影響は見られない。同図（ｂ）のσ＝０．６の場合も細かくみればτ_0＞０の場合（図４・１２（ｂ））と比べて不安定境界に差がみられるが全般的にはほとんど差がない。これは図４・１１に示すように、初期交差角が存在しても係数励振項を除いた式の安定性がトルクの符号によってほとんど差がないことに起因していると考えられる。



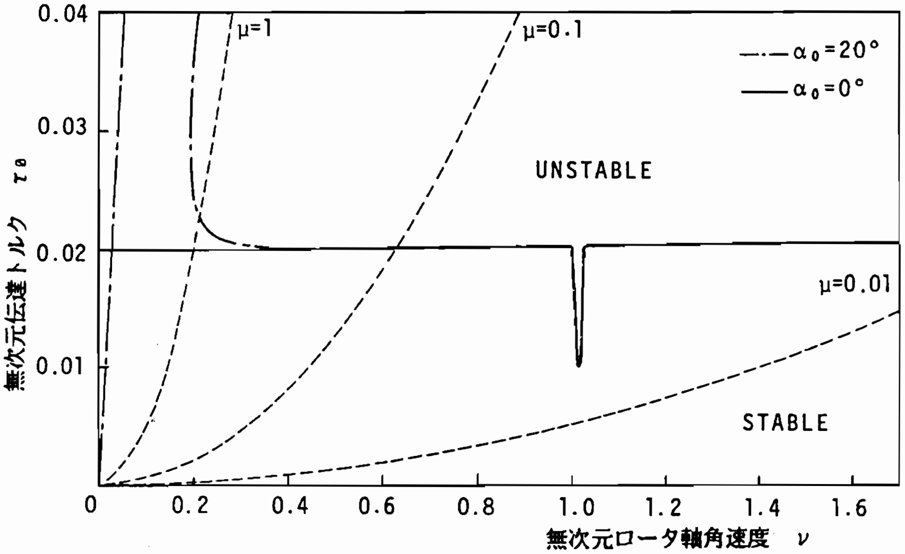
（ａ） σ ＝０の場合



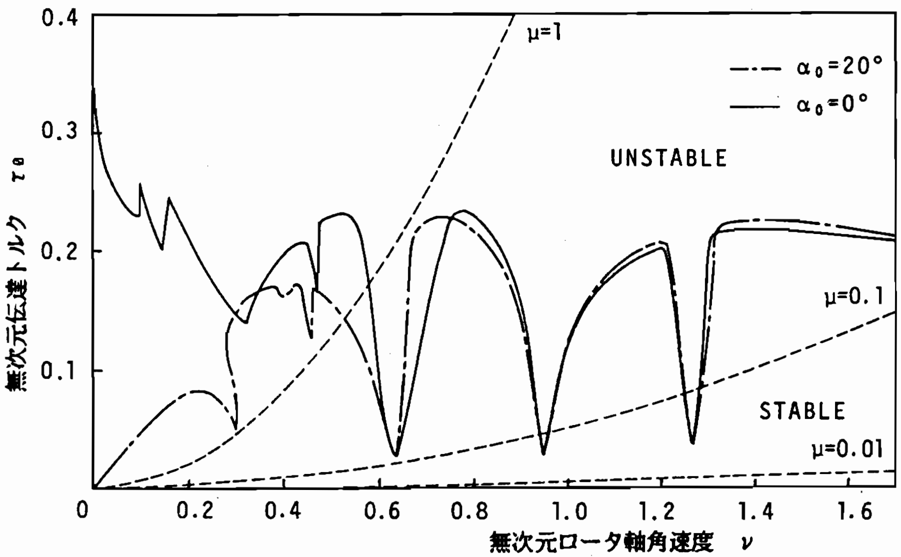
（ｂ） σ ＝０．６の場合

図４・１１　ＭＲ２ロータの係数励振項を無視した不安定領域

（Ａ＝０．０３，ζ_0＝０．０２）



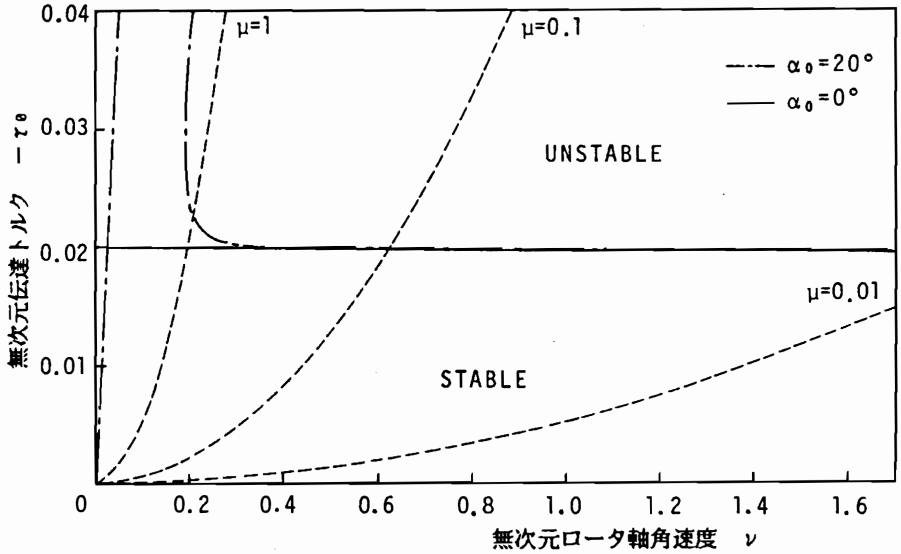
（a） σ＝0の場合



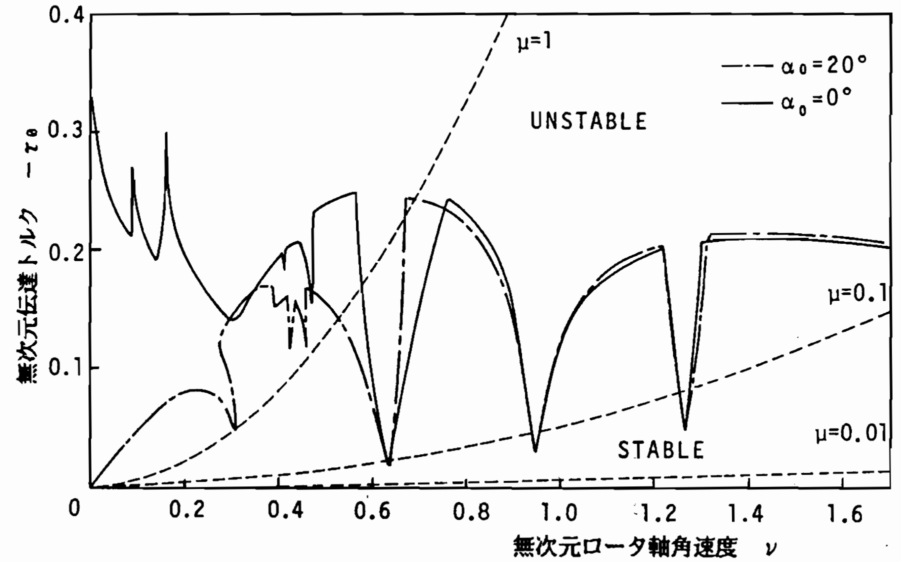
（b） σ＝0.6の場合

図4・12　係数励振項を考慮したMR2ロータの不安定領域

（$\tau_{\theta}\nu>0$； α_{θ}＝20°，A＝0.03，$\zeta_{\circ}$＝0.02）



（a） σ＝0の場合



（b） σ＝0.6の場合

図4・13　係数励振項を考慮したMR2ロータの不安定領域

（$\tau_\theta \nu < 0$；$\alpha_\theta = 20°$，A＝0.03，$\zeta_\mathrm{e} = 0.02$）

4・5　初期交差角が存在しないMR４ロータ系の安定性

系は図2・1のMR４ロータの等速継手を十字軸継手に置き換えたものであり（図４・１（ｂ））、座標系は図４・４と同じである。本節では継手の十字軸支持部の減衰モーメントをも考慮する。

4・5・1　運動方程式

ロータ軸に作用する外力およびモーメントは伝達トルクに起因するモーメントおよび力、負荷トルク、支持軸受部の復元力およびそれに起因するモーメント、十字軸支持部の減衰モーメントおよびそれに起因する力である。これらのうち支持軸受に起因する力については等速継手の場合のMR４ロータと同じである。伝達トルクに起因するモーメントは４・３節のMR２ロータの場合と同様に式（４・６）の関係を用いて仮想仕事の原理から導くことができるが、本節では継手軸受部の摩擦力を考慮するため各継手と中間軸での力とモーメントのつりあいからロータ軸に作用する力およびモーメントを導く。ここで、十字軸支持部の摩擦モーメントはヨークと十字軸の相対速度に比例するものとする。以下に、伝達トルクに起因する成分と内部摩擦に起因する成分をあわせて導く。

まず、第１継手について考える。第１継手十字軸を介して駆動軸から中間軸に伝達される力及びモーメントをF^I, M^Iと置く。力F^Iを駆動軸に固定した$O_a-x_1y_1z_1$成分で［F^I_{x1} F^I_{y1} F^I_{z1}］と表し、中間軸に固定した座標$O_a-x_2y_2z_2$成分で［F^I_{x2} F^I_{y2} F^I_{z2}］と表す。これらは何れも未知量である。式（４・５）で定義した座標変換マトリクスΞを用いれば、

$$\begin{bmatrix} F^I_{x2} \\ F^I_{y2} \\ F^I_{z2} \end{bmatrix} = \Xi \begin{bmatrix} F^I_{x1} \\ F^I_{y1} \\ F^I_{z1} \end{bmatrix} \qquad (4\cdot44)$$

と表せる。モーメントM^Iは駆動軸側ヨークから十字軸に作用するとき$O_a-x_1y_1z_1$成分で考えれば次のようになる。明らかにz_1成分は駆動トルクT_aに等しい。x_1成分は駆動軸と十字軸との相対速度に比例する十字軸支持部の減衰モーメントに等しい。駆動軸角速度のx_1成分は０であるから、この減衰モーメントは、

十字軸の絶対角速度Ω^{I}を$O_0-x_1y_1z_1$成分表示したときのx_1成分を$\Omega^{I}{}_{x1}$と表せば、$-C_I\Omega^{I}{}_{x1}$ で表せる。ここで、C_Iは十字軸を支持している部分の減衰定数である。結局、駆動軸ヨークから十字軸に作用するモーメントは、M^{I}を$O_0-x_1y_1z_1$成分表示したときのy_1成分$M^{I}{}_{y1}$を未知量として$[-C_I\Omega^{I}{}_{x1}\ \ M^{I}{}_{y1}\ \ T_0]^T$と置ける。一方、同じモーメント$M^{I}$は十字軸から中間軸側ヨークに作用するが、それを$O_0-x_2y_2z_2$成分で考えると次のように表せる。$y_2$成分は十字軸支持部での減衰モーメントに等しい。中間軸の絶対角速度をΩ^{i}と置きそのy_2成分を$\Omega^{i}{}_{y2}$と置く。十字軸から見た中間軸の相対速度は $\Omega^{i}{}_{y2}-\Omega^{I}{}_{y2}$ であるから、十字軸から中間軸ヨークに及ぼす減衰モーメントは $-C_I(\Omega^{i}{}_{y2}-\Omega^{I}{}_{y2})$ で表される。それゆえ、M^{I}は$O_0-x_2y_2z_2$成分表示したときのx_2, z_2成分を未知量として$[M^{I}{}_{x2}\ \ -C_I(\Omega^{i}{}_{y2}-\Omega^{I}{}_{y2})\ \ M^{I}{}_{z2}]^T$と表せる。これら駆動側ヨークから十字軸に作用するモーメントと十字軸から中間軸側ヨークに作用するモーメントはΞを用いて

$$\begin{bmatrix} M^{I}{}_{x2} \\ -C_I(\Omega^{i}{}_{y2}-\Omega^{I}{}_{y2}) \\ M^{I}{}_{z2} \end{bmatrix} = \Xi \begin{bmatrix} -C_I\Omega^{I}{}_{x1} \\ M^{I}{}_{y1} \\ T_0 \end{bmatrix} \qquad (4\cdot45)$$

と等置できる。式（4・45）は3つの未知数$M^{I}{}_{x2}$, $M^{I}{}_{y1}$, $M^{I}{}_{z2}$を含んでいるだけであるから、これらはT_0, Ω^{i}, Ω^{I}を用いて表すことができる。

同様に第2継手についても考えることができる。第2継手十字軸を介して中間軸からロータ軸に伝達される力及びモーメントをF^{II}, M^{II}と置く。F^{II}は、中間軸に固定した座標$O-x_2'y_2'z_2'$成分で$[F^{II}{}_{x2'}\ \ F^{II}{}_{y2'}\ \ F^{II}{}_{z2'}]^T$と表し、ロータ軸に固定した座標$O-x'y'z'$成分で$[F^{II}{}_{x'}\ \ F^{II}{}_{y'}\ \ F^{II}{}_{z'}]^T$と表す（$O-x_2'y_2'z_2'$は原点が$O$の$O_0-x_2y_2z_2$に平行な座標系）。式（4・5）で定義される座標変換マトリクスZを用いるとこれらは次式と置ける。

$$\begin{bmatrix} F^{II}{}_{x'} \\ F^{II}{}_{y'} \\ F^{II}{}_{z'} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} F^{II}{}_{x2'} \\ F^{II}{}_{y2'} \\ F^{II}{}_{z2'} \end{bmatrix} \qquad (4\cdot46)$$

モーメントM^{II}は中間軸側ヨークから十字軸に作用する場合を$O-x_2'y_2'z_2'$成分で考えると次のように表せる。y_2'成分は十字軸支持部の減衰モーメントである。第2継手十字軸の絶対角速度をΩ^{II}と置き、そのy_2'成分を$\Omega^{II}_{y2'}$で表す。中間軸から見た十字軸の相対速度は $\Omega^{II}_{y2'}-\Omega^{I}_{y2'}$ であるからヨークから十字軸に及ぼす減衰モーメントは $-C_i(\Omega^{II}_{y2'}-\Omega^{I}_{y2'})$ となる。それゆえ、M^{II}はx_2', z_2'成分を未知量として$[M^{II}_{x2'}\ -C_i\ (\Omega^{II}_{y2'}-\Omega^{I}_{y2'})\ M^{II}_{z2'}]^T$と表せる。さらに、$M^{II}$が十字軸からロータ軸側ヨークに作用する場合を$O-x'y'z'$成分で考えると次のようになる。$x'$成分は十字軸支持部の減衰モーメントである。ロータ軸の絶対角速度をΩ^rで表しそのx'成分を$\Omega^r_{x'}$で表す。十字軸から見たロータ軸の相対角速度は $\Omega^r_{x'}-\Omega^{II}_{x'}$ であるから、十字軸からロータ軸に及ぼす減衰モーメントは $-C_i(\Omega^r_{x'}-\Omega^{II}_{x'})$ となる。それゆえ、M^{II}はy', z'成分を未知数として$[-C_i(\Omega^r_{x'}-\Omega^{II}_{x'})\ M^{II}_{y'}\ M^{II}_{z'}]^T$と表せる。これら中間軸側ヨークから十字軸に作用するモーメントと十字軸からロータ軸側ヨークに作用するモーメントは座標変換マトリクスZを用いて

$$\begin{bmatrix} -C_i(\Omega^r_{x'}-\Omega^{II}_{x'}) \\ M^{II}_{y'} \\ M^{II}_{z'} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} M^{II}_{x2'} \\ -C_i(\Omega^{II}_{y2'}-\Omega^{I}_{y2'}) \\ M^{II}_{z2'} \end{bmatrix} \qquad (4\cdot47)$$

と置ける。

さらに、第1継手十字軸から中間軸に作用する力及びモーメントと中間軸から第2継手十字軸に作用する力及びモーメントの中間軸におけるつりあいを取ると、$O_B-x_2y_2z_2$成分で表した次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} F^{II}_{x2'} \\ F^{II}_{y2'} \\ F^{II}_{z2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{I}_{x2} \\ F^{I}_{y2} \\ F^{I}_{z2} \end{bmatrix} \qquad (4\cdot48)$$

$$
\begin{bmatrix} M^{II}{}_{x2'} \\ -C_1(\Omega^{II}{}_{y2'}-\Omega^{i}{}_{y2'}) \\ M^{II}{}_{z2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{I}{}_{x2} \\ -C_1(\Omega^{i}{}_{y2}-\Omega^{I}{}_{y2}) \\ M^{I}{}_{z2} \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} F^{I}{}_{y2} \\ -F^{I}{}_{x2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4・49}
$$

式（4・47）と式（4・49）を用いると未知数$M^{II}{}_{x2'}$，$M^{II}{}_{z2'}$，$M^{II}{}_{y'}$，$M^{II}{}_{z'}$，$F^{I}{}_{y2}$，$F^{I}{}_{x2}$に対して6つの方程式が得られる。式（4・45）から得られるM^{I}を用いれば、これらをT_{θ}，Ω^{r}，Ω^{i}，Ω^{I}，Ω^{II}を用いて表すことができる。それゆえ、ロータ軸に作用するモーメントM^{II}と力F^{II}はT_{θ}，Ω^{r}，Ω^{i}，Ω^{I}，Ω^{II}と$F^{I}{}_{z2}$を用いて表すことができる。

ここで、中間軸角速度Ω^{i}，ロータ軸角速度Ω^{r}はそれぞれ次のように表される。

$$
\begin{bmatrix} \Omega^{i}{}_{x2} \\ \Omega^{i}{}_{y2} \\ \Omega^{i}{}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^{i}{}_{x2'} \\ \Omega^{i}{}_{y2'} \\ \Omega^{i}{}_{z2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_1\cos\theta_2 d\alpha_1/dt + \sin\theta_2 d\beta_1/dt \\ -\cos\beta_1\sin\theta_2 d\alpha_1/dt + \cos\theta_2 d\beta_1/dt \\ \sin\beta_1 d\alpha_1/dt + d\theta_2/dt \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \Omega^{r}{}_{x'} \\ \Omega^{r}{}_{y'} \\ \Omega^{r}{}_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\theta_3 d\alpha/dt + \sin\theta_3 d\beta/dt \\ -\cos\beta\sin\theta_3 d\alpha/dt + \cos\theta_3 d\beta/dt \\ \sin\beta d\alpha/dt + d\theta_3/dt \end{bmatrix} \tag{4・50}
$$

十字軸角速度Ω^{I}，Ω^{II}は各十字軸を支持しているヨークの角速度を用いて求めることができる。まず第1継手について考える。十字軸が駆動軸に支持されていることよりΩ^{I}を$O_{\theta}-x_1y_1z_1$成分で表せば、z_1成分は駆動軸速度と等しく$d\theta_1/dt$でありy_1成分の速度成分は0であるから、未知量$\Omega^{I}{}_{x1}$を用いて $[\Omega^{I}{}_{x1}\quad 0\quad d\theta_1/dt]^{T}$と表せる。一方同じ十字軸が中間軸側ヨークに支持されていることよりΩ^{I}を$O_{\theta}-x_2y_2z_2$成分で表せば、x_2，y_2成分は中間軸速度に等しいから未知量$\Omega^{I}{}_{y2}$を用いて$[\Omega^{i}{}_{x2}\quad \Omega^{I}{}_{y2}\quad \Omega^{i}{}_{z2}]^{T}$となる。この両者を座標変換マトリクス$\Xi$を用いて等置すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \Omega^{I}{}_{x2} \\ \Omega^{I}{}_{y2} \\ \Omega^{I}{}_{z2} \end{bmatrix} = \Xi \begin{bmatrix} \Omega^{I}{}_{x1} \\ 0 \\ d\theta_1/dt \end{bmatrix}$$

上式のy_2成分と（x_2成分・ξ_{11}＋z_2成分・ξ_{31}）より

$$\begin{aligned} \Omega^{I}{}_{x1} &= \xi_{11}\Omega^{I}{}_{x2} + \xi_{31}\Omega^{I}{}_{z2} \\ \Omega^{I}{}_{y2} &= \xi_{23} d\theta_1/dt \end{aligned} \qquad (4\cdot51)$$

となり、Ω^{I}の各成分が得られる。ここで $\xi_{21}=0$ を用いている。同様に第２継手の十字軸の角速度を中間軸固定の座標軸成分O－$x_{2'}$・$y_{2'}$・$z_{2'}$方向に分解する。$x_{2'}$成分および$z_{2'}$成分は中間軸速度に等しいから、未知量$\Omega^{II}{}_{y2'}$を用いて[$\Omega^{I}{}_{x2'}$, $\Omega^{II}{}_{y2'}$, $\Omega^{I}{}_{z2'}$]^{T}と表される。また、同じ十字軸角速度はロータ軸固定の座標軸成分O－$x'y'z'$方向に分解すると、y'成分とz'成分はロータ軸速度に等しいから未知量$\Omega^{II}{}_{x'}$を用いて[$\Omega^{II}{}_{x'}$, $\Omega^{r}{}_{y'}$, $\Omega^{r}{}_{z'}$]^{T}と表される。これらを等置すると、

$$\begin{bmatrix} \Omega^{II}{}_{x'} \\ \Omega^{r}{}_{y'} \\ \Omega^{r}{}_{z'} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} \Omega^{I}{}_{x2'} \\ \Omega^{II}{}_{y2'} \\ \Omega^{I}{}_{z2'} \end{bmatrix}$$

が得られる。上式のx'成分と（y'成分・ζ_{22}＋z'成分・ζ_{32}）より

$$\begin{aligned} \Omega^{II}{}_{x'} &= \zeta_{11}\Omega^{I}{}_{x2'} + \zeta_{13}\Omega^{I}{}_{z2'} \\ \Omega^{II}{}_{y2'} &= \zeta_{22}\Omega^{r}{}_{y'} + \zeta_{32}\Omega^{r}{}_{z'} \end{aligned} \qquad (4\cdot52)$$

となり、Ω^{II}の各成分が得られる。ここで、$\zeta_{12}=0$ を用いている。式（4・44）～（4・52）の関係式を用いてF^{II}とM^{II}をα, β, α_1, β_1, θ_1およびF_{z2}で表し、それらをα, β, α_1, β_1について線形化すると、O－xyz成分表示で次式となる。ここで、O－xyz座標はO－$x'y'z'$座標をz'軸回りに

$-\theta_3$回転させた座標系である。

$$
l_1\begin{bmatrix} F^{II}_x \\ F^{II}_y \\ F^{II}_z \end{bmatrix} = C_l\begin{bmatrix} (d\beta/dt-2d\beta_1/dt)+d\theta_1/dt\,(2\alpha_1-\alpha) \\ (2d\alpha_1/dt-d\alpha/dt)+d\theta_1/dt\,(2\beta_1-\beta) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+T_0/2\begin{bmatrix} \alpha-\alpha\cos 2\theta_1-\beta\sin 2\theta_1 \\ \beta+\beta\cos 2\theta_1-\alpha\sin 2\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}+l_1 F^{II}_z\begin{bmatrix} \beta_1-\beta \\ \alpha-\alpha_1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} M^{II}_x \\ M^{II}_y \\ M^{II}_z \end{bmatrix} = C_l\begin{bmatrix} d\alpha_1/dt-d\alpha/dt+d\theta_1/dt\,(\beta_1-\beta) \\ d\beta_1/dt-d\beta/dt+d\theta_1/dt\,(\alpha-\alpha_1) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+T_0/2\begin{bmatrix} (\beta_1-\beta)-(\beta_1-\beta)\cos 2\theta_1+(\alpha_1-\alpha)\sin 2\theta_1 \\ (\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_1)\cos 2\theta_1+(\beta-\beta_1)\sin 2\theta_1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

(4・53)

運動方程式は次式で与えられる[30]。

$$M_x=-m\,l_0\,a_y+I_t d\Omega^r{}_x/dt+(I_p-I_t)\,\Omega^r{}_y\Omega^r{}_z$$

$$M_y=m\,l_0\,a_x+I_t d\Omega^r{}_y/dt+(I_t-I_p)\,\Omega^r{}_z\Omega^r{}_x$$

$$M_z=I_p d\Omega^r{}_z/dt$$

$$F_x=m\{a_x+l_0(\Omega^r{}_z\Omega^r{}_x+\Omega^r{}_y{}^2)\}$$

$$F_y=m\{a_y+l_0(\Omega^r{}_y\Omega^r{}_z-\Omega^r{}_x{}^2)\}$$

$$F_z=m\{a_z-l_0(\Omega^r{}_x{}^2+\Omega^r{}_y{}^2)\}$$

(4・54)

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = l_1 d^2 \begin{bmatrix} \sin\beta_1 \\ -\sin\alpha_1\cos\beta_1 \\ \cos\alpha_1\cos\beta_1 \end{bmatrix} / dt^2 \fallingdotseq l_1 \begin{bmatrix} d^2\beta_1/dt^2 \\ -d^2\alpha_1/dt^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega^r{}_x \\ \Omega^r{}_y \\ \Omega^r{}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta\, d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ \sin\beta\, d\alpha/dt + d\theta_3/dt \end{bmatrix} \fallingdotseq \begin{bmatrix} d\alpha/dt \\ d\beta/dt \\ d\theta_3/dt \end{bmatrix}$$

なお、本節の十字軸継手で連結されたＭＲ４ロータではロータ軸固定の座標系の原点を十字軸中心に取っているため第２章のＭＲ４ロータ系とは運動方程式は見かけ上異なっている。式（４·５４）の外力項に式（４·５３）で与えられる伝達トルクと内部減衰に起因する項および負荷トルク $[0 \quad 0 \quad -T_0]^T{}_{xyz}$、軸受部の復元力および復元モーメント、減衰力および減衰モーメント（式（２·２９））を代入すると次式が得られる。

$$\ddot{X} + B_0 X + C\dot{X} + \tau_0 (B_1 + D\cos 2\nu T + E\sin 2\nu T) X = 0 \tag{4·55}$$

$$X = [\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1]^T$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} (1+\sigma)L_1 & \zeta_i \nu L_2 \\ -\zeta_i \nu L_2 & (1-\sigma)L_1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} \zeta_e L_1 + \zeta_i L_2 & A\nu L_3 \\ -A\nu L_3 & \zeta_e L_1 + \zeta_i L_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & L_4 \\ -L_4 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & L_5 \\ L_5 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} -L_5 & 0 \\ 0 & L_5 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} \bar{l}_3{}^2 + \bar{l}_4{}^2 - \bar{l}_3 - \bar{l}_4 & \bar{l}_1(\bar{l}_3 + \bar{l}_4 - 2) \\ \bar{l}_1{}^{-1}\{(\bar{l}_3 + \bar{l}_4)\lambda^{-1} - (\bar{l}_3{}^2 + \bar{l}_4{}^2)\} & 2\lambda^{-1} - (\bar{l}_3 + \bar{l}_4) \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} (1+\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-1} & -(2+\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-1} \\ -(1+\lambda\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-2}\lambda^{-1} & (2+\lambda\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-2}\lambda^{-1} \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{l}_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} (\bar{l}_1-1)\bar{l}_1^{-1} & -1 \\ (\lambda^{-1}-\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-2} & \bar{l}_1^{-1} \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

$$L_5 = \begin{bmatrix} -(1+\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-1} & 1 \\ (\lambda^{-1}+\bar{l}_1)\bar{l}_1^{-2} & -\bar{l}_1^{-1} \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

ここで、$\omega_0^2=(K_{X0}+K_{Y0})l_0^2/4I_t$, $\nu=\omega/\omega_0$,

$\tau_0=T_0/2I_t\omega_0^2$, $\zeta_e=C_e l_0^2/2I_t\omega_0$, $\zeta_i=C_i/I_t\omega_0$,

$\sigma=(K_{X0}-K_{Y0})/(K_{X0}+K_{Y0})$, $A=I_p/I_t$,

$\lambda=m l_0^2/I_t$, $\bar{l}_i=l_i/l_0\ (i=1,3,4)$

当然であるが、式（4・55）において $\alpha_1=\beta_1=0$ とおけばＭＲ２ロータの場合の運動方程式と一致する。また、B_1項は等速継手で連結されたＭＲ４ロータのB_1項（式（2・32））と同一であり（変数が異なるため比較するには若干の計算を要する）、等速継手系で発生する自励振動と同じ自励振動も発生することが分かる。

4・5・2　安定性解析および不安定領域の決定の仕方

ＭＲ２ロータの場合と同様な方法によって特性方程式を求めその根により安定判別を行う。運動方程式（4・55）の三角関数を含む項を複素表示し、そのときの $\exp(j2\nu T)$ と $\exp(-j2\nu T)$ の係数をD', E'とおくと次式となる。

$$\ddot{X}+C\dot{X}+B_0X+\tau_0\{B_1+D'\exp(j2\nu T)+E'\exp(-j2\nu T)\}X=0$$

$$; D' = (D - jE)/2, \quad E' = (D + jE)/2 \qquad (4\cdot56)$$

式（４・５６）の解は

$$X = \exp(jzt)\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \exp(ji\nu T)$$

の形で表されるから、これを式（４・５６）に代入し、Ｘが非自明解を持つ条件より特性方程式を得ることができる。特性方程式はｉが偶数の場合と奇数の場合とそれぞれ独立になり、二つの特性方程式　式（４・５７）、式（４・５８）を得る。

$$f(z) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Omega_{-3} & \tau_0 E' & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \tau_0 D' & \Omega_{-1} & \tau_0 E' & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \tau_0 D' & \Omega_{+1} & \tau_0 E' & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \tau_0 D' & \Omega_{+3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= 0 \qquad (4\cdot57)$$

$$g(z) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Omega_{-2} & \tau_0 E' & 0 & \cdot \\ \cdot & \tau_0 D' & \Omega_0 & \tau_0 E' & \cdot \\ \cdot & 0 & \tau_0 D' & \Omega_{+2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= 0 \qquad (4\cdot58)$$

ここで、　$\Omega_i = B_0 - (z + i\nu)^2 I + j(z + i\nu)C + \tau_0 B_1$

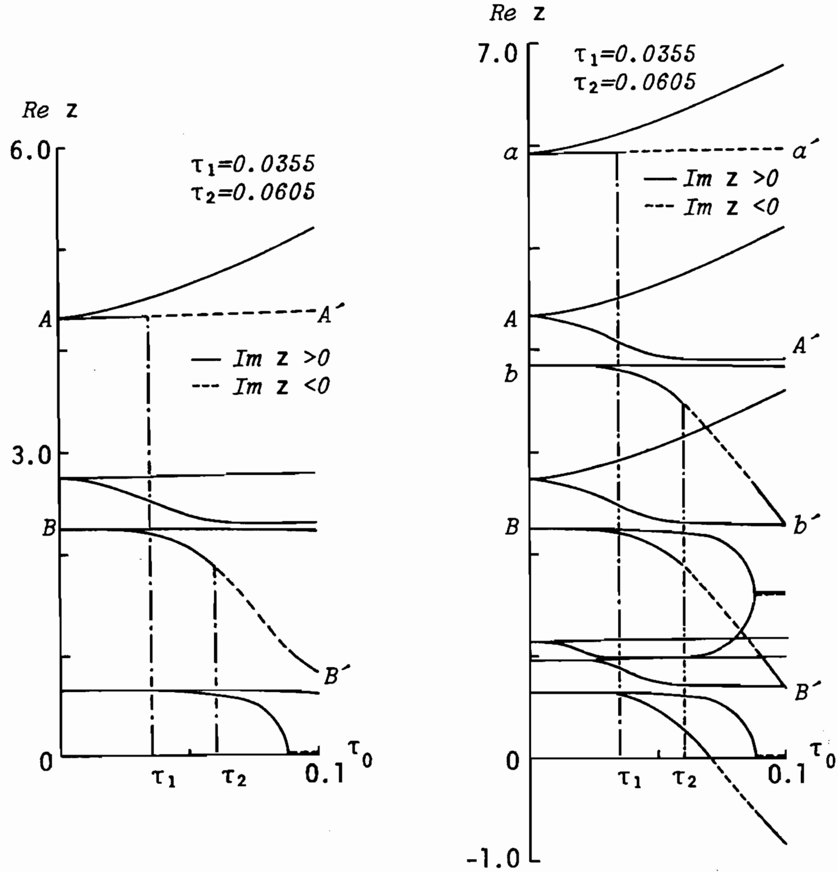
$I = \mathrm{diag}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$：単位マトリクス

これらの式の間には $g(z)=f(z+\nu)$ の関係があり、いずれの特性方程式を用いても同じ不安定条件が得られる。本節では式（4・57）を用いる。

なお、4自由度モデルでは数値計算で特に記述のないパラメータの値は次の通りである。

$$\zeta_0=0.02,\quad \lambda=0.96,\quad \bar{I}_1=\bar{I}_3=0.5,\quad \bar{I}_4=1.5$$

ところで、式（4・57）を有限次元で近似した特性方程式の根zに対して $\mathrm{Im}\,z<0$（Im（・）は（・）の虚数部を表す）の条件より不安定境界を求めると、ＲＫＧ法で求めた不安定境界と差異がある場合があった。例えば、次節の不安定領域図4・17の $\sigma=0$ の場合で一点鎖線（係数励振系を無視した系の不安定境界）が実線（係数励振項をも含む不安定境界）の下側にある回転数域などである。図4・14にＲＫＧ解による不安定境界と一致しない不安定境界を与える特性根の例を示す。同図（a）は式（4・57）を中央の8行8列で近似してzを求めたものである。発散する解（$\mathrm{Im}\,z<0$）を破線で、発散しない解（$\mathrm{Im}\,z\geqq 0$）を実線で示している。解曲線ＡＡ'が $\tau_0\geqq\tau_1$ で発散しており、解曲線ＢＢ'が $\tau_0\geqq\tau_2$ で発散している。ところが、図4・14（a）の場合のＲＫＧ法による結果では不安定境界は τ_2 のみであり差異がある。そこで、τ_1 についてさらに検討を加えてみた。この τ_1 を与える解曲線ＡＡ'は近似項数を増し、解曲線の数を増加させると安定化し、改めて他の解曲線の中に $\tau_0\geqq\tau_1$ で発散するものが出てくる。図4・14（b）は式（4・57）の中央の16行16列で近似してzを求めた場合である。同図（a）と同じように $\tau_0\geqq\tau_1$ で発散する解曲線ａａ'は存在するが、それは8行8列近似したときに発散した解曲線ＡＡ'ではなく近似項数を増したために新たに加わった成分である。同図（a）のＡＡ'に相当する解曲線は安定化している。一方、$\tau_0\geqq\tau_2$ で発散する解曲線には8行8列近似のとき発散した解曲線ＢＢ'、近似項数を増やしたために新たに現れる解曲線ｂｂ'がある。近似項数をさらに増加させて計算しても $\tau_0\geqq\tau_1$ で発散する解曲線は存在するが、発散するのは $\tau_0=0$ で振動数最大の解曲線でありそれ以下の振動数の解曲線は $\tau_0=\tau_1$ では発散しない。この特性から帰納すると、無限次元を有する厳密な特性方程式では $\tau_0=\tau_1$ での発散は得られないものと考えられる。そこで、特性方程式による



（ａ）８行８列近似　　　　（ｂ）１６行１６列近似

図４・１４　ＭＲ４ロータの解曲線の例（σ＝Ａ＝ζ_1＝０，ν＝０．８）

近似解法ではτ_1による境界点は無視して不安定境界を定める。

この境界点τ_1の発生は、本系が係数励振振動と自励振動が共存する系であり、無限次元の特性方程式を打ち切る際に最も高周波成分の対角要素については係数励振振動と自励振動の相互干渉効果が落ちてしまうためであろうと考えられる。なお、前節のＭＲ２ロータの計算例では自励振動が係数励振振動によって安定化されることがなかったのでこの様な現象はみられなかった。

4・5・3　安定性の数値計算例と考察

(Ⅰ) ロータ軸が外部に仕事をする場合 ($\tau_\theta \nu > 0$の場合)

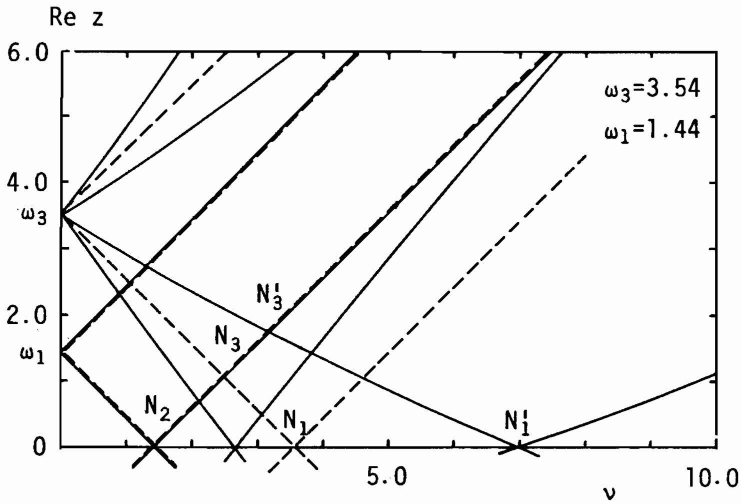
前項の方法によって軸受剛性異方性およびジャイロモーメントが不安定領域に及ぼす影響を調べる。最初に$\tau_\theta = 0$の解曲線を図4・15に示す。同図 (a) は$\sigma = 0$の場合、(b) は$\sigma = 0.6$の場合でいずれもA＝0，0.03の場合について示している。本章の定義での慣性モーメント比A＝0.03は第2章のMR4ロータの定義ではB＝0.75に対応する。図4・15 (a) の場合、ω_1を通る曲線は2本ずつ重なっており、A＝0の場合はさらにω_3を通る曲線も重なっている。これらの曲線は図示していない虚数部があり重根ではない。図4・15にはi＝±n (n＝3，5‥) の曲線を示していないが、これらは傾きがきつくなることのほかはi＝±1の場合と類似である。同図より、A≠0ではジャイロモーメントは高い方の二つの固有振動数にのみ影響を及ぼし、それらの高い方の固有振動数を上昇させ、低い方の固有振動数を低下させることが分かる。固有振動モードを求めると、ω_1とω_2は並進振動のモードで、ω_3とω_4は傾き振動のモードである。

次に、自励振動の特性を調べるため D'＝E'＝0 とおく。この場合は等速継手で連結されたMR4ロータの場合にも解析したが、ここでは内部減衰を含んでいるため特にその影響を調べる。式 (4・57) で D'＝E'＝0 と置くと

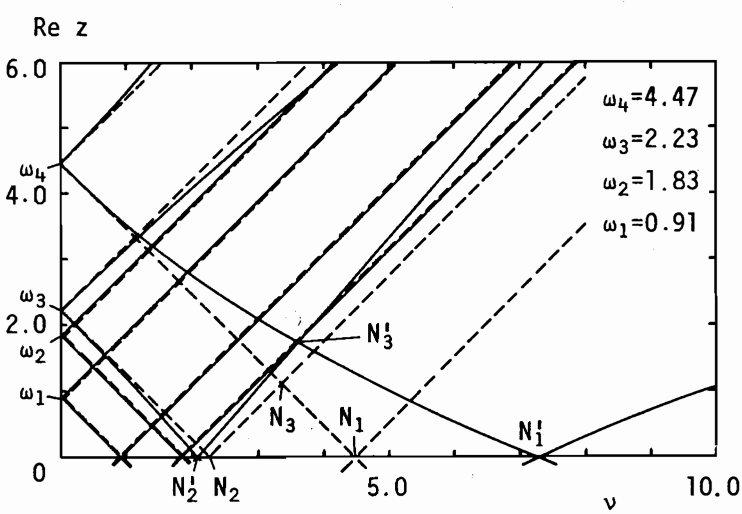
$$|B_\theta + \tau_\theta B_1 - (z + i\nu)^2 I + j(z + i\nu)C| = 0 \qquad (4\cdot 59)$$
$$(i = \pm 1,\ \pm 3 \cdots)$$

となる。式 (4・59) から得られる不安定領域図の例を図4・16に示す。同図より、内部減衰はσおよびAによって定まる回転数 (P_1，P_2，P_3) より低速側で安定化作用、それより高速側で不安定化作用を持つことが分かる。回転数が十分高くなるとτ_θに関らず系を不安定にする場合がある。図中、不安定境界に尖った点が現れる場合があるが、これはこの点で不安定条件が切り変わるためである。

次に、D'≠0，E'≠0 の場合の計算例を図4・17 (a) ～ (f) に示す。これらの図では特性方程式を式 (4・57) の中央8行8列 (周波数成分 ±ν) で近似している。その計算精度を確認するためRKG解による不安定境界も併記してある。$\sigma = 0$の場合については、4・5・2項で述べた方法によりRKG解と



（ａ） σ＝０の場合



（ｂ） σ＝０．６の場合

図４・１５　４自由度系の τ_θ＝０のときのRe z－ν 曲線

（ ——— Ａ＝０．０３　······ Ａ＝０）

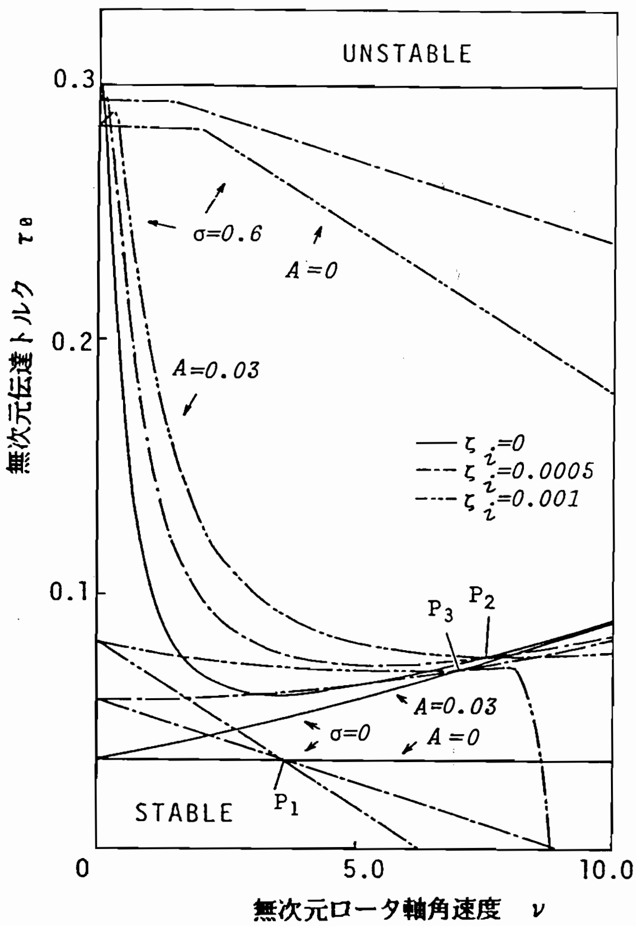


図４・１６　ＭＲ４ロータの係数励振項を無視した系の不安定領域

（$\tau_\theta \nu > 0$；$\zeta_\circ = 0.02$）

十分一致する不安定境界が得られている。$\sigma \neq 0$の場合についても、低回転数域では４･５･２項の方法による境界とＲＫＧ解による境界とに差異が見られるものの他の領域についてはかなり一致している。

以下に各不安定領域についてその特徴を考察する。$\sigma = 0$，Ａ＝０の場合（図４･１７（ａ））、$\nu = 3.6$，２．５近傍に係数励振不安定と考えられる領域が存在する。実際、$\tau_\theta = 0$の解曲線図（図４･１５（ａ））での交点N_1，N_3の回転数はこれらの不安定領域の中心回転数に一致している。それぞれ傾き振動モードの主共振、傾き振動と並進振動モードの混合共振である。$\sigma = 0$，Ａ＝０．０３の

場合（図４・１７（ｂ））では、Ａ＝０の場合にくらべ新たな係数励振不安定領域が発生することはないが係数励振不安定領域が高回転数側にずれ（主共振の中心回転数は図４・１５（ａ）のN_1'）、かつ広範囲になっている。すなわち、ジャイロモーメントが系を不安定化していると言える。$\sigma=0$ではＡの値にかかわらず低速域で係数励振作用が自励振動作用を安定化させている。

次に軸受剛性異方性について検討する。$\sigma=0.6$，Ａ＝０の場合（図４・１７（ｃ））、$\tau_B=0$の解曲線図（図４・１５（ｂ））の交点N_1，N_2，N_3を中心回転数とする係数励振不安定領域が確認される。N_1，N_2が傾き振動モードの主共振、N_3が傾き振動モードの混合共振の中心回転数を与える。同図では傾き振動モードの不安定領域は大きいが、明瞭な並進モードの不安定領域は生じていない。この理由を調べるために、運動方程式の変数を変換してモード別に考察した。独立変数をα、α_1、β、β_1からロータ中心の傾きθ_x，θ_yと変位x_G，y_Gに変換する。座標変換したときの伝達トルクに起因する項のみを示すと、

$$\ddot{X}+\cdots+\tau_B\{B_1+D\cos2\theta+E\sin2\theta\}X=0 \qquad (4\cdot60)$$

$$X=\begin{bmatrix}\theta_x\\ \theta_y\\ \bar{x}_G\\ \bar{y}_G\end{bmatrix},\quad (1-\lambda)B_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -\bar{l}_1^{-1}\\ -1 & 0 & \bar{l}_1^{-1} & 0\\ 0 & \bar{l}_1^{-1}\bar{i}^2 & 0 & 0\\ -\bar{l}_1^{-1}\bar{i}^2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)D=\begin{bmatrix}0 & 1+2\bar{l}_1^{-1} & 0 & -\bar{l}_1^{-1}\\ 1+2\bar{l}_1^{-1} & 0 & -\bar{l}_1^{-1} & 0\\ 0 & -\bar{l}_1^{-1}\bar{i}^2 & 0 & 0\\ -\bar{l}_1^{-1}\bar{i}^2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)E=\begin{bmatrix}-1-2\bar{l}_1^{-1} & 0 & \bar{l}_1^{-1} & 0\\ 0 & 1+2\bar{l}_1^{-1} & 0 & -\bar{l}_1^{-1}\\ -\bar{l}_1^{-1}\bar{i}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \bar{l}_1^{-1}\bar{i}^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

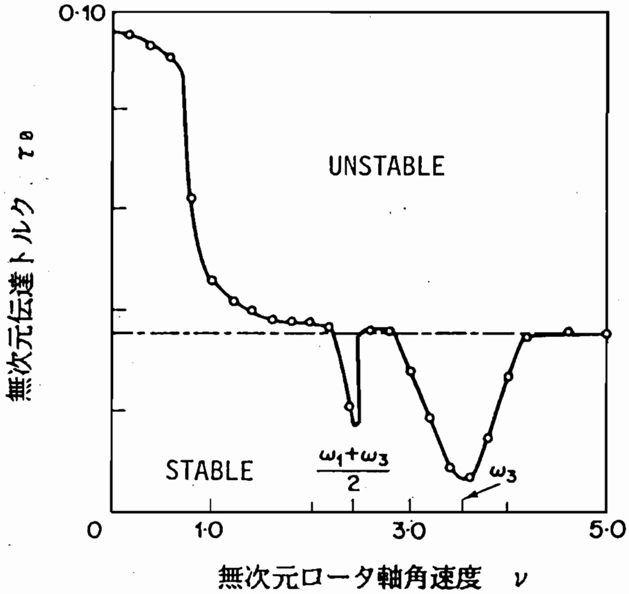
となる。このときの特性方程式は、τ_{θ}を含む項を±νの成分で考えると、式（4・61）のようになる。同式より並進振動の固有振動数を含む${}^{2}\Omega$と${}^{1}\Omega$に関する成分（▨の部分）から成る特性方程式を考えると係数励振成分のないことが分かる。

$$\begin{vmatrix} {}^{4}\Omega_{-1} & \times & & \times & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \times & {}^{3}\Omega_{-1} & \times & & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ & \times & {}^{2}\Omega_{-1} & & \bigcirc & \bigcirc & & \\ \times & & & {}^{1}\Omega_{-1} & \bigcirc & \bigcirc & & \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & {}^{4}\Omega_{+1} & \times & & \times \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \times & {}^{3}\Omega_{+1} & \times & \\ \bigcirc & \bigcirc & & & & \times & {}^{2}\Omega_{+1} & \\ \bigcirc & \bigcirc & & & \times & & & {}^{1}\Omega_{+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (4\cdot61)$$

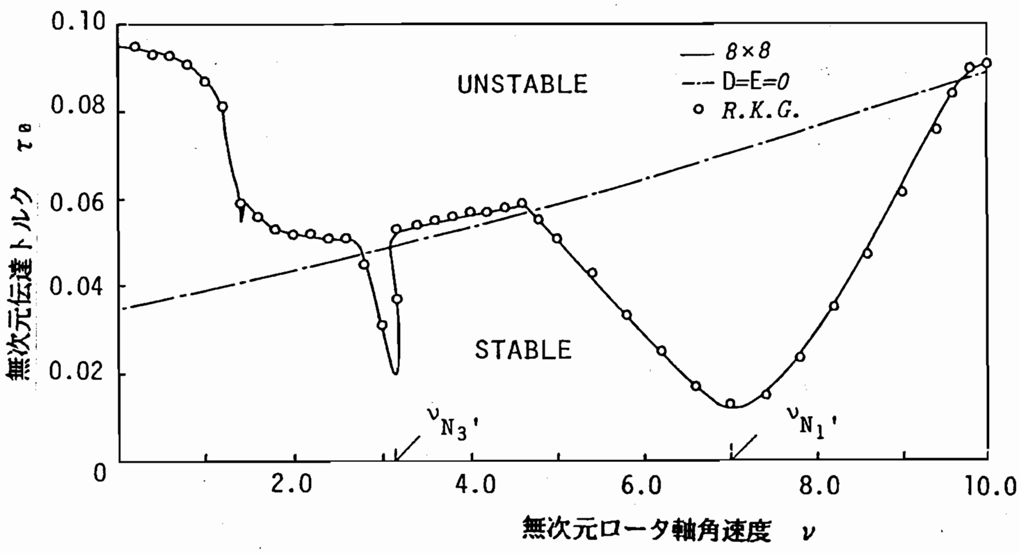
$$;\ {}^{1}\Omega_{\substack{-1\\+1}} = \omega_{1}{}^{2} - (z + i\nu)^{2}$$

○はD，Eによる係数励振成分、×はB_1による非対角成分、他はすべて0。

ところで、N_2を中心回転数とする不安定領域より低回転数側では特性根による不安定境界とRKG解によるそれとはあまり一致していない。$\sigma = 0.6$の場合$D' = E' = 0$ の場合の不安定境界は十分大きいのでこれらの差異は係数励振作用によるものと考えられる。$\sigma = 0.6$，$A = 0.03$（図4・17（d））では，$\sigma = 0$の場合と同様に、$A = 0$の場合に比べて係数励振主不安定領域が高回転数側にずれ、かつ広範囲にわたっている。また、$\nu < 3.0$では特性根による境界とRKG解による境界にはかなり差異が生じている。この差異は近似項数の不足によるものと考えられるので、低回転数域について特性方程式の次数を増やし中央32行32列で近似して計算した。その結果を図4・18に示す。しかし、$2.0 < \nu < 2.8$の範囲ではRKG解と比較的一致するようになったが、これより低回転数域ではそれほど一致していない。この低回転数域ではRKG解による境界もか



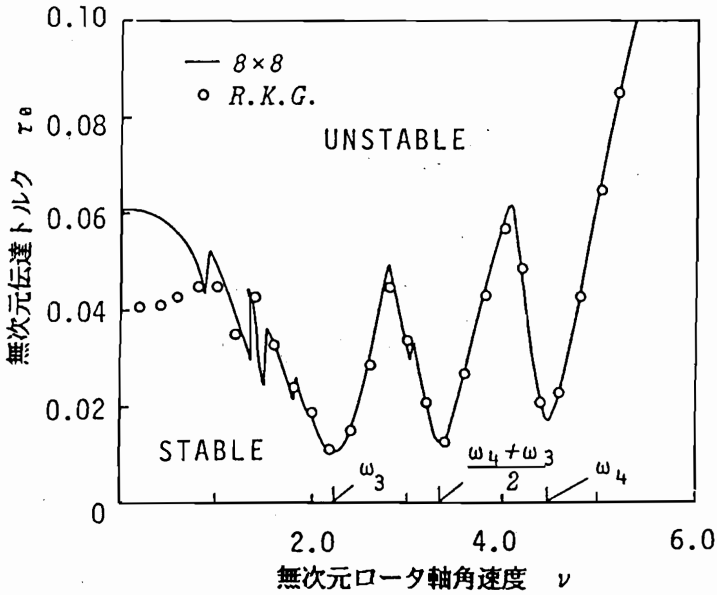
（ａ）σ＝０，Ａ＝０，ζ_1＝０の場合



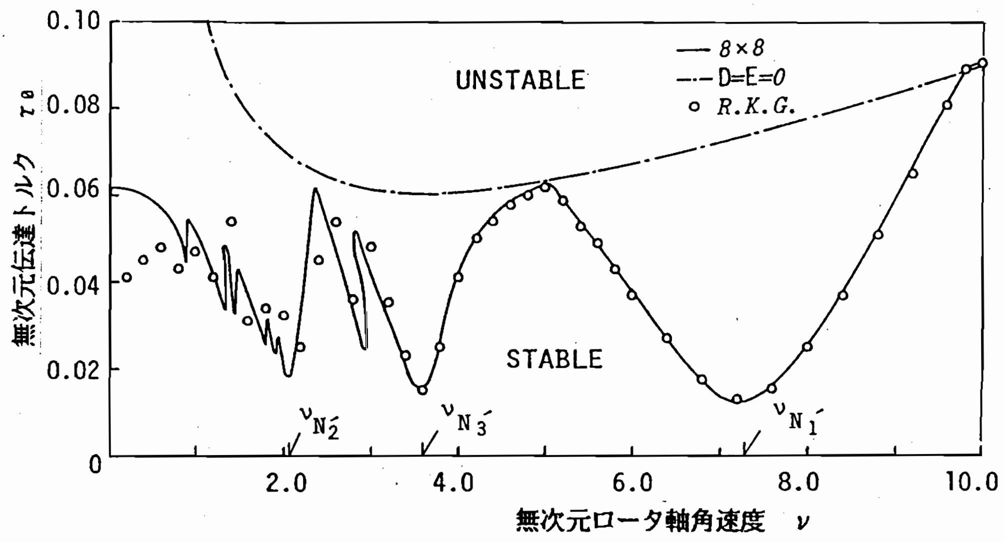
（ｂ）σ＝０，Ａ＝０．０３，ζ_1＝０の場合

図４・１７　係数励振項を考慮したＭＲ４ロータの不安定領域

（$\tau_0\nu$＞０；α_0＝０°，ζ_0＝０．０２）

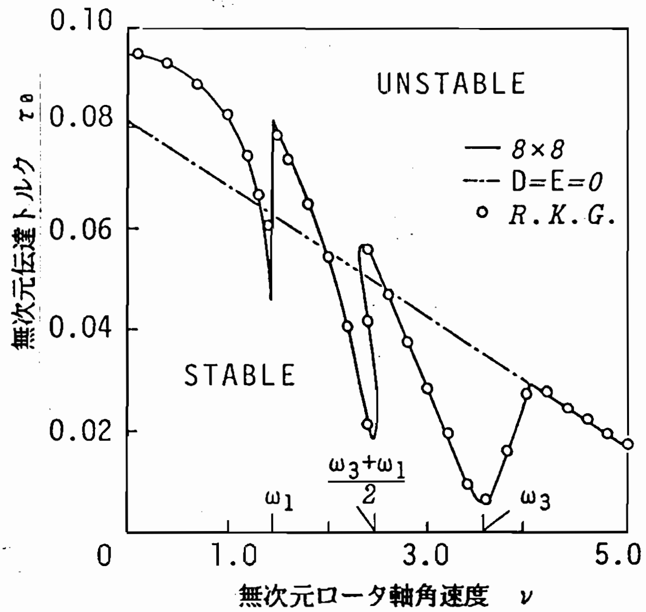


（ｃ） $\sigma = 0.6$，$A = 0$，$\zeta_1 = 0$ の場合

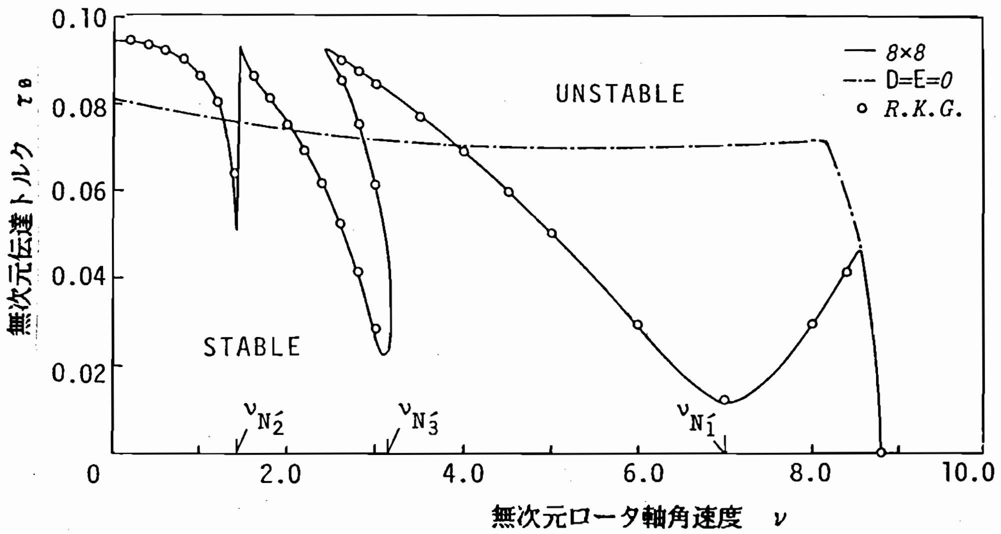


（ｄ） $\sigma = 0.6$，$A = 0.03$，$\zeta_1 = 0$ の場合

図４・１７　ＭＲ４ロータの不安定領域（続き）



（ｅ）$\sigma=0$，Ａ＝０，$\zeta_i=0.001$ の場合



（ｆ）$\sigma=0$，Ａ＝０．０３，$\zeta_i=0.001$ の場合

図４・１７　ＭＲ４ロータの不安定領域（続き）

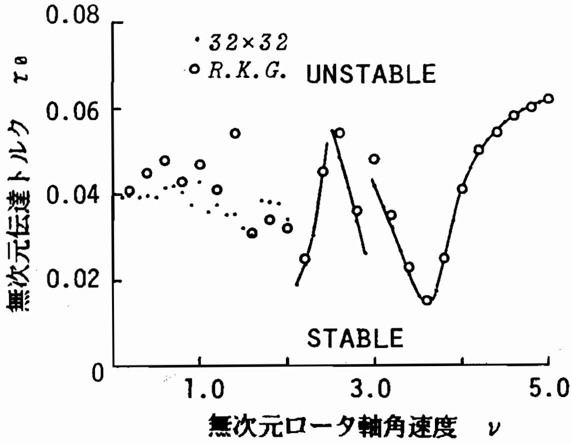
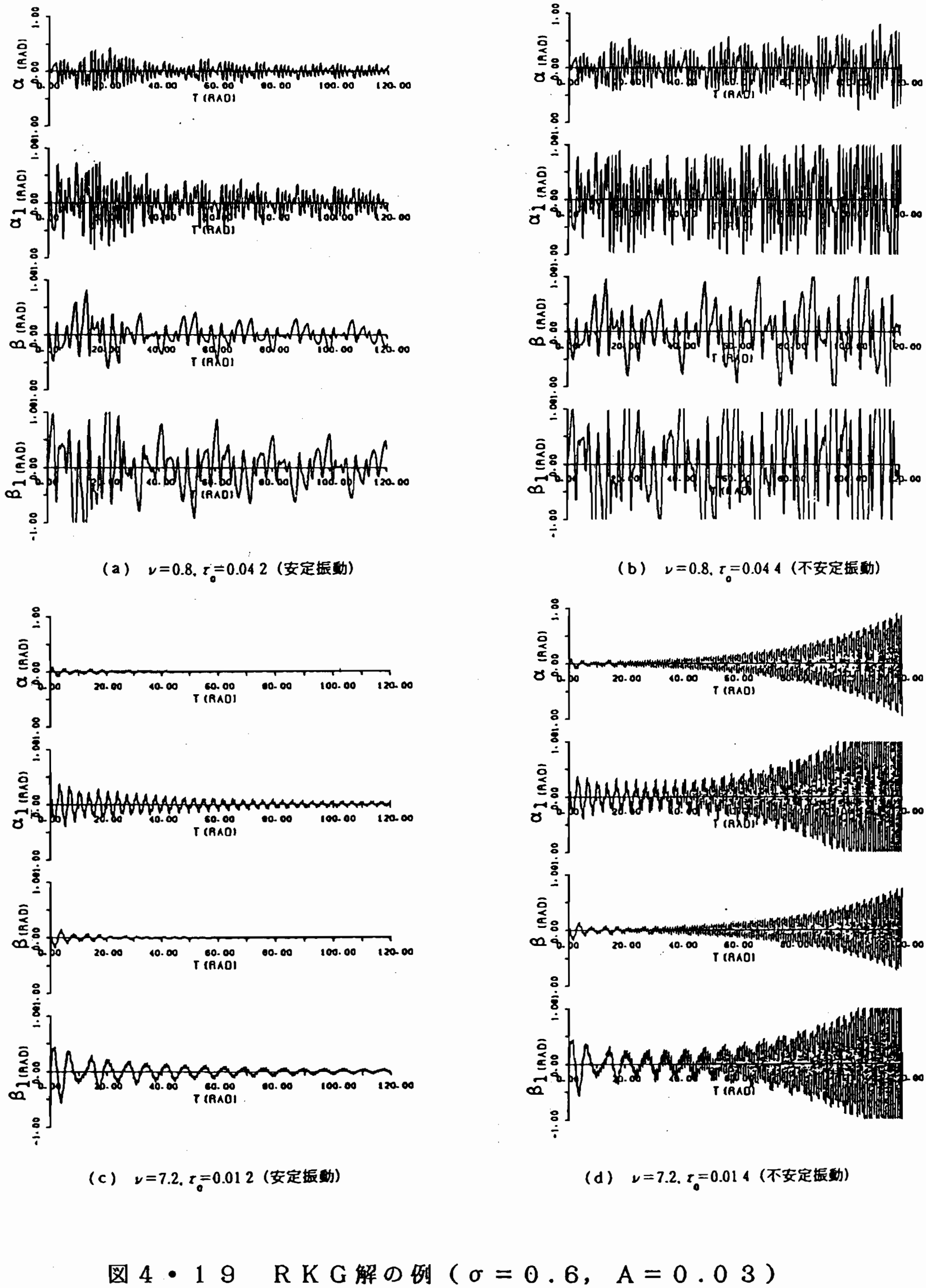


図４・１８
３２行３２列近似による
ＭＲ４ロータの不安定領域
（図４・１７（ｄ）の場合）

なりばらついており、種々の周波数成分が影響しあっているものと考えられる。近似項数を増やして計算してもそれに伴なって数値計算誤差も増加していくので、$\sigma \neq 0$の場合の低回転数域では十分な精度を持つ不安定境界を定めるのはかなりやっかいなようである。図４・１９に$\sigma = 0.6$，Ａ＝０．０３の場合の低回転数域および係数励振不安定領域におけるＲＫＧ解の例を示す（上段からα，α_1，β，β_1である）。低回転数域における不安定振動波形には係数励振主不安定領域内のような振幅の明瞭な指数関数的増加が現れていない。νを変えても低回転数域ではほゞ類似の波形であり、不安定振動はそれほどきついものではない。このため、特性根の数値計算、ＲＫＧ解、いずれの不安定境界にも誤差が入りやすいものと考えられる。

最後に内部減衰の影響を検討する。図４・１７（ｅ），（ｆ）はそれぞれ同図（ａ）と（ｂ）の場合で内部減衰を考慮した場合である。（ａ）と（ｅ）を比較すると、内部減衰が$\nu = (\omega_1 + \omega_3)/2$を中心とする傾き振動モードと並進振動モードの混合共振不安定領域より低速側で系を安定化さているが、ω_3を中心とする傾き振動モードの主共振より高速側では不安定化させている。同図（ｂ）と（ｆ）を比べても（ａ）と（ｅ）の関係と同様な傾向がみられる。いずれも図４・１６に現れる係数励振項を除いたときの内部減衰の効果がかなり影響しているものと考えられる。また、同図（ｆ）の$\nu_{N3'}$を中心回転数とする領域などに見られるように、内部減衰が存在すると係数励振不安定領域がτ_0と共に広がらずτ_0が大



(a)　ν=0.8, τ_0=0.04 2（安定振動）

(b)　ν=0.8, τ_0=0.04 4（不安定振動）

(c)　ν=7.2, τ_0=0.01 2（安定振動）

(d)　ν=7.2, τ_0=0.01 4（不安定振動）

図４・１９　ＲＫＧ解の例（σ＝０.６, Ａ＝０.０３）

きい方が安定化することもある。同図（ｆ）ではν＞８．７でτ_θに関わらず系が不安定になっている。

（ＩＩ）ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_\theta\nu$＜０場合）

まず最初に、駆動トルクの作用方向の影響が顕著に現れる係数励振項のない系の不安定境界を図４・２０に示す。同図は、等速継手の場合の図２・２０と同じ式を表しているが、図４・２１以下に示す係数励振項をも含む系の不安定境界を理解するためパラメータの値をこれらと同一にした場合の図である。図４・２０を図４・１６と比較すると、σ＝０．６，Ａ＝０．０３の場合はいずれも下に凸の境界曲線であり定性的に類似であるが、それ以外のパラメータでは不安定化作用は全く逆になっている。すなわち、σ＝０，Ａ＝０．０３では、内部減衰が存在しない場合には、τ_θ＞０では不安定領域はνが増加するに従って安定化しているがτ_θ＜０

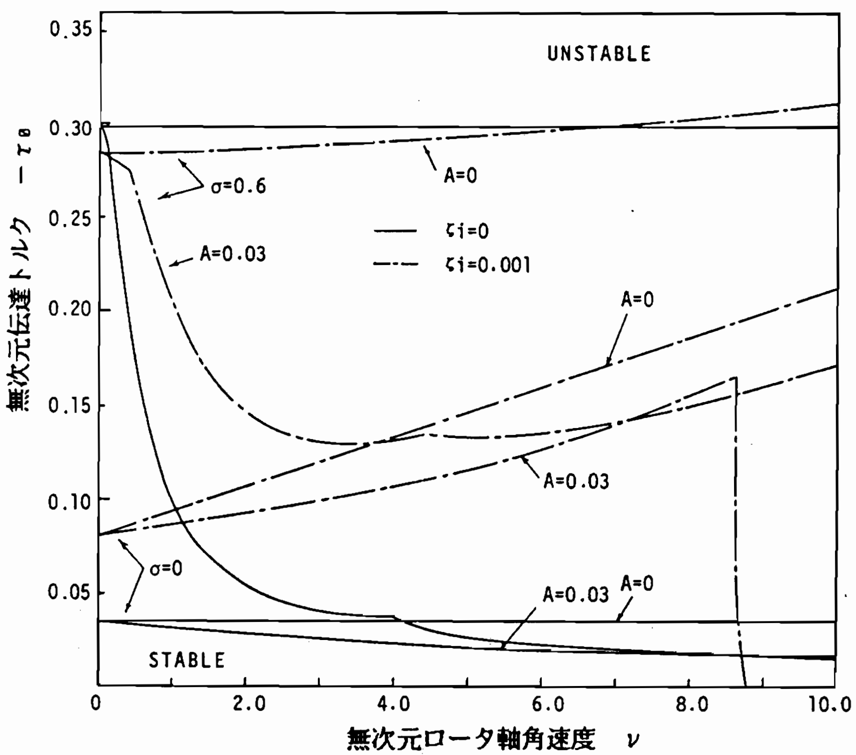
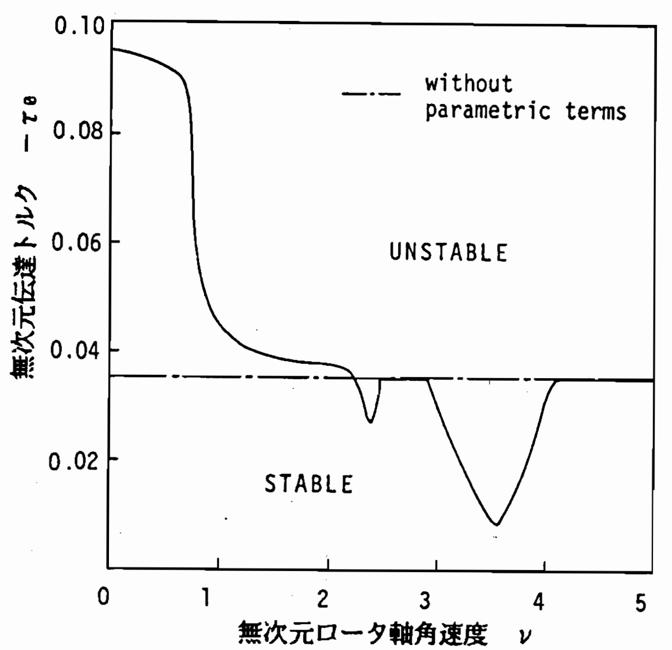


図４・２０　係数励振項を無視したＭＲ４ロータの不安定領域（$\tau_\theta\nu$＜０）

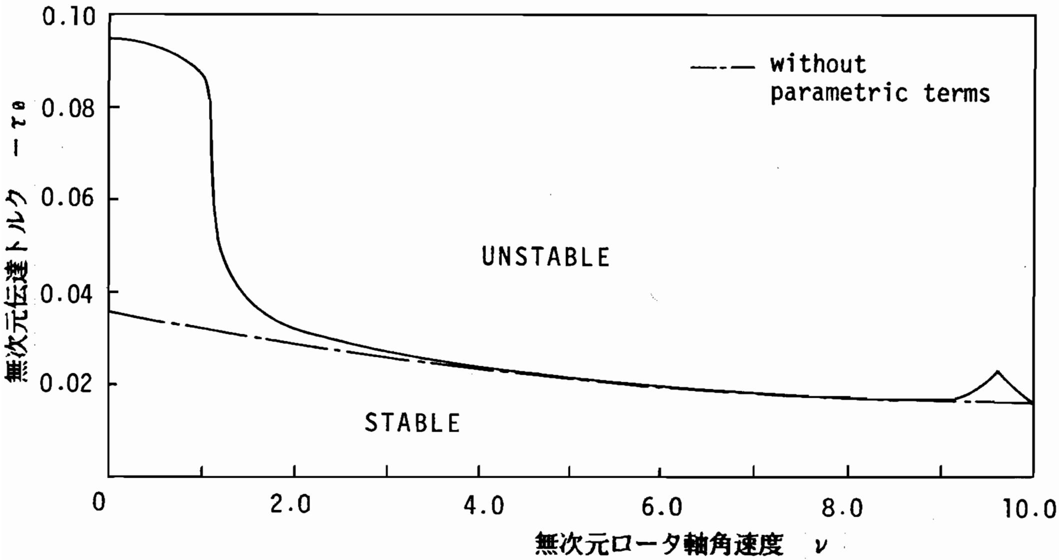
では不安定化している。内部減衰が存在する場合には、νが増加すると$\tau_\theta>0$では不安定化するが$\tau_\theta<0$では安定化する。$\sigma=0.6$，$A=0$では、$\tau_\theta>0$でνは不安定化作用を持つのに対し、$\tau_\theta<0$では安定化作用を持っている。$\tau_\theta<0$での内部減衰の作用は$\sigma=0.6$，$A=0.03$の場合を除いて安定化作用のみ現れており、$\tau_\theta>0$のように一点を境として低速側と高速側で安定化作用が逆になることはない。しかし、$\sigma=0$，$A=0.03$の場合は$\tau_\theta>0$の場合と同様に$\nu>8.7$でτ_θに関わらず不安定となっている。

次に、係数励振項をも含む系の不安定領域の例を図4・21（a）～（e）に示す。$A=0$、$\zeta_i=0$の場合は同図（a）に示すようにトルクの符号の影響はほとんど現れず不安定領域は図4・17（a）の場合とほゞ同じである。このことは、図には示していないが$\sigma=0.6$の場合も同じでありσには関係しない。これは係数励振項を除いた系の不安定境界が$\tau_\theta>0$の場合と$\tau_\theta<0$の場合でほとんど差異がないことに起因すると考えられる。図4・21（b）、（c）は$A=0.03$，$\zeta_i=0$の場合で、それぞれ$\sigma=0$と$\sigma=0.6$の場合である。これらは$\tau_\theta>$

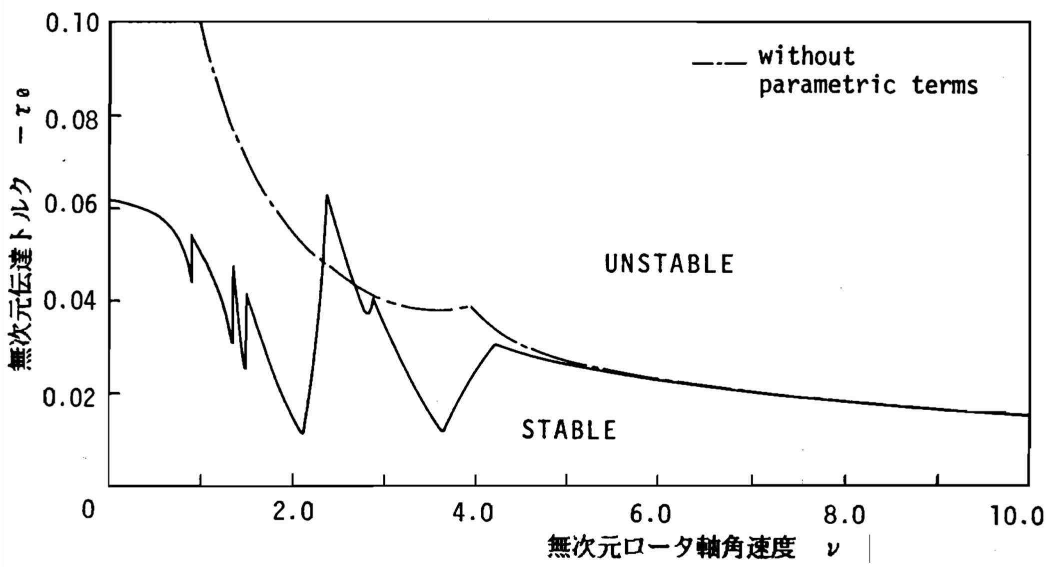


（a）$\sigma=0, A=0, \zeta_i=0$の場合

図4・21　MR4ロータの不安定領域（$\tau_\theta\nu<0$；$\alpha_\theta=0°, \zeta_e=0.02$）

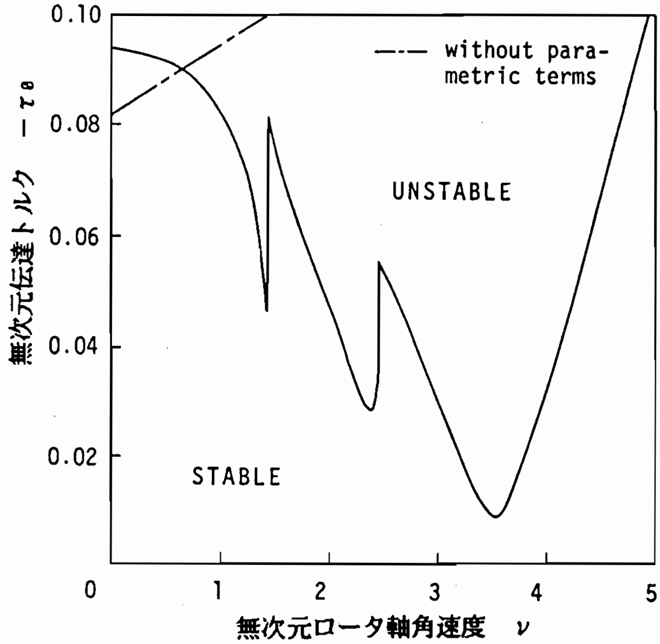


（ｂ）$\sigma=0$，$A=0.03$，$\zeta_1=0$の場合

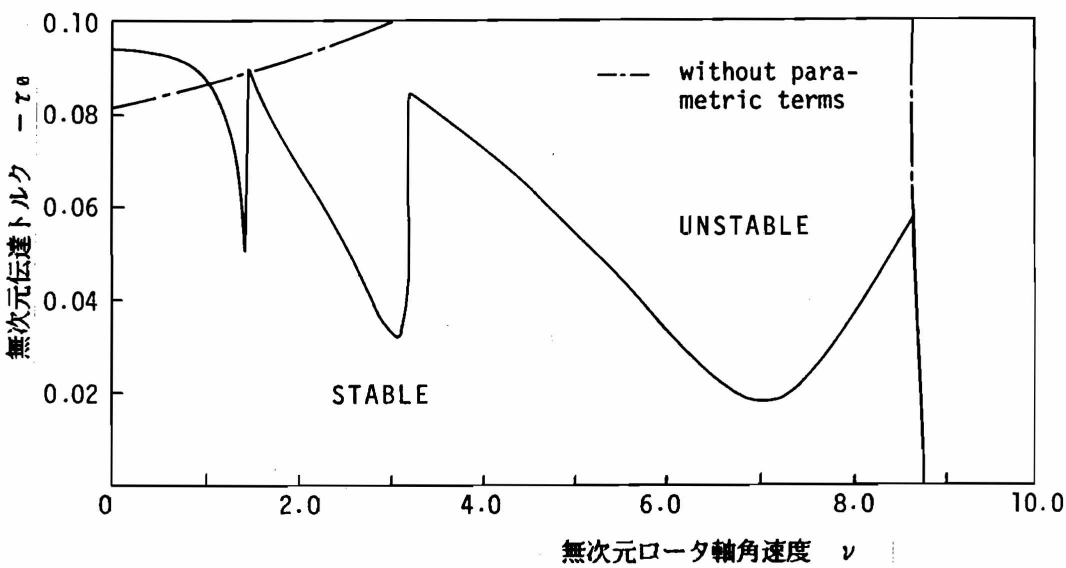


（ｃ）　$\sigma=0.6$，$A=0.03$，$\zeta_1=0$の場合

図４・２１　ＭＲ４ロータの不安定領域（続き）



（d） $\sigma=0, A=0, \zeta_l=0.001$ の場合



（e） $\sigma=0$,　$A=0.03$,　$\zeta_l=0.001$ の場合

図４・２１　ＭＲ４ロータの不安定領域（続き）

0の図4・17（b）、（d）に対応している。$\tau_0<0$と$\tau_0>0$の場合とは係数励振項を除いた系の不安定境界が定性的に異なるため、係数励振項を含む系でも不安定境界はかなり異なっている。$\tau_0<0$の場合の特徴的なことは、自励振動がごく小さなτ_0で発生するため、係数励振不安定（安定）化作用が自励振動作用によって打ち消されてV字型の係数励振不安定領域の前後にある安定領域は消滅し回転数をずらせても全く安定化しないことである。すなわち、内部減衰が存在しない場合には$\tau_0<0$の方が$\tau_0>0$より不安定であると言える。図4・21（d）、（e）は$\sigma=0$のときの内部減衰の影響を見たものである。$\tau_0<0$では自励振動の不安定境界が$\tau_0>0$の場合（図4・17（e）、（f））に比べて安定側に移動しているため係数励振項を含む系でも安定領域が増加している。

4・6　初期交差角が存在するMR4ロータ系の安定性

考察する系は図4・1（b）および図4・4の系で駆動軸が静止状態でX_0軸回りに$-\alpha_0$回転している場合である。なお、本節では継手内の減衰力は考慮しない。

4・6・1　運動方程式

ロータ軸に作用する駆動トルクに起因したモーメントと力は、前節の誘導と同じ過程をたどり、そこでα_1を$\alpha_0+\alpha_1$と置けば得られる。それらは、α, β, α_1, β_1の線形の範囲で式（4・62）、（4・63）となる。ここで、初期交差角については前節までと同様に$\sin^4\alpha_0$以上のオーダを無視している。

$$
\begin{bmatrix} M^{11}{}_{x'} \\ M^{11}{}_{y'} \\ M^{11}{}_{z'} \end{bmatrix} = T_0\cos\alpha_0
\begin{bmatrix} 0 \\[2ex] (1+\sin^2\alpha_0\cos^2\theta_3) \\ \times\{(\beta-\beta_1)\sin\theta_3+(\alpha-\alpha_1)\cos\theta_3\} \\[2ex] 1+\sin^2\alpha_0\cos^2\theta_3-\alpha_1\tan\alpha_0 \\ +\alpha_1\sin2\alpha_0\cos^2\theta_3+\beta_1\sin2\alpha_0\cos\theta_3\sin\theta_3 \end{bmatrix}
\qquad (4\cdot62)
$$

$$\begin{bmatrix} F^{11}{}_{x'} \\ F^{11}{}_{y'} \\ F^{11}{}_{z'} \end{bmatrix} = T_0 / l_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -\sin\alpha_0 \sin\theta_3 - 2\alpha_1 \cos\alpha_0 \sin^2\alpha_0 \cos^2\theta_3 \sin\theta_3 \\ -2\beta_1 \cos\alpha_0 \sin^2\alpha_0 \cos\theta_3 \sin^2\theta_3 \\ -\alpha\cos\alpha_0 \sin\theta_3 (1+\sin^2\alpha_0 \cos^2\theta_3) \\ +\beta\cos\alpha_0 \cos\theta_3 (1+\sin^2\alpha_0\cos^2\theta_3) \\ \\ \sin\alpha_0 \{(\beta-\beta_1)\sin\theta_3 + (\alpha-\alpha_1)\cos\theta_3\} \sin\theta_3 \end{bmatrix} \tag{4·63}$$

上式では、θ_2（中間軸回転角）とθ_3（ロータ軸回転角）はこれらの軸の間の交差角が微小であることより近似的に等しいと置いている。それゆえ、$M^{11}{}_{z}'$成分はＭＲ２ロータの式（４·２８）とθ_3の位相角が９０°ずれることを除いて同じ形である。

ＭＲ２ロータの場合と同様にロータ軸自転角速度を平均的に一定に保持するため、負荷トルクT_0'を駆動トルクT_0に対して

$$T_0' = \cos\alpha_0 (1+\sin^2\alpha_0/2)\, T_0 \tag{4·31}$$

と置く。このときz'軸回りの運動方程式は

$$I_t A d^2\theta_3/dt^2 = M^{11}{}_{z'} - T_0'$$

であるから、４·４節と同じ無次元量を用いて、

$$A\ddot{\theta}_3 \fallingdotseq \tau_0' \sin^2\alpha_0 \cos 2\theta_3 ; \quad \tau_0' = T_0'/2 I_t \omega_0^2 \tag{4·64}$$

となる。式（４·６４）は式（４·３３）と符号が異なるのみであるから、式（４·３３）から式（４·３６）を導いたのと同じ過程をたどれば、

$$\theta_3 \fallingdotseq \nu T - \varepsilon \cos 2\nu T / 4 \quad ; \ \varepsilon = \tau_0' \sin^2 \alpha_0 / A\nu^2$$

$$\dot{\theta}_3 = \nu\ (1 + \tau_0' \sin^2 \alpha_0 \sin 2\nu T / 2A\nu^2)$$
$$\triangleq \nu\ (1 + \mu \sin 2\nu T)$$

ν：無次元平均回転数、μ：式（４·３７）と同じ

（４·６５）

が得られる。

ロータ軸の横方向の運動方程式は、式（４·５４）の左辺の外力項に式（４·６２）、式（４·６３）を代入すれば、α, β, α_1, β_1の線形近似の範囲で次式となる。

$$I_t(1-\lambda)\, d^2\alpha/dt^2 + I_t A (d\theta_3/dt)(d\beta/dt)$$
$$= -M^{11}{}_y \cdot \sin\theta_3 + l_0 F^{11}{}_y \cdot \cos\theta_3$$

$$m\, l_1 l_0 (1-\lambda)\, d^2\alpha_1/dt^2 - \lambda I_t A (d\theta_3/dt)(d\beta/dt)$$
$$= \lambda M^{11}{}_y \cdot \sin\theta_3 - l_0 F^{11}{}_y \cdot \cos\theta_3$$

$$I_t(1-\lambda)\, d^2\beta/dt^2 - I_t A (d\theta_3/dt)(d\alpha/dt)$$
$$= M^{11}{}_y \cdot \cos\theta_3 + l_0 F^{11}{}_y \cdot \sin\theta_3$$

$$m\, l_1 l_0 (1-\lambda)\, d^2\beta_1/dt^2 + \lambda I_t A (d\theta_3/dt)(d\alpha/dt)$$
$$= -\lambda M^{11}{}_y \cdot \cos\theta_3 - l_0 F^{11}{}_y \cdot \sin\theta_3$$

（４·６６）

上式の右辺を整理し、式（４·５５）に現れる軸受力に起因する項を付加すると、運動方程式は次式となる。

$$\ddot{X} + (C_0 + A\dot{\theta}_3 C_1)\dot{X} + B_0 X + \tau_0' (B_1 + B_{2c}\cos 2\theta_3$$
$$+ B_{2s}\sin 2\theta_3 + B_{4c}\cos 4\theta_3 + B_{4s}\sin 4\theta_3) X = F \qquad (4\cdot 67)$$

$$X = [\alpha \quad \alpha_1 \quad \beta \quad \beta_1]^T$$

$$C_0 = \zeta_0 \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{bmatrix} + \zeta_1 \begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & L_3 \\ -L_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} (1+\sigma) L_1 & 0 \\ 0 & (1-\sigma) L_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 L_2 \\ -\zeta_1 L_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & L_4 \\ -L_4 & 0 \end{bmatrix} + \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} 0 & K_1 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{2c} = \begin{bmatrix} 0 & L_5 \\ L_5 & 0 \end{bmatrix} + \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} 0 & -K_2 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{2s} = \begin{bmatrix} -L_5 & 0 \\ 0 & L_5 \end{bmatrix} + \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} K_3 & 0 \\ 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$B_{4c} = \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} 0 & K_4 \\ K_4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_{4s} = \sin^2\alpha_0 \begin{bmatrix} -K_4 & 0 \\ 0 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$F = \tau_0{}'\tan\alpha_0 / \{\bar{l}_1(1-\lambda)\}$$
$$\times [-\sin 2\nu T \quad \sin 2\nu T/\bar{l}_1\lambda \quad -1+\cos 2\nu T \quad (1-\cos 2\nu T)/\bar{l}_1\lambda]^T$$

ここで、$L_1 \sim L_5$ はそれぞれ式（4·55）の $L_1 \sim L_5$ と同じであり、

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1+\bar{l}_1{}^{-1} & -1-2\bar{l}_1{}^{-1} \\ -\bar{l}_1{}^{-1}-\lambda^{-1}\bar{l}_1{}^{-2} & \bar{l}_1{}^{-1}+2\lambda^{-1}\bar{l}_1{}^{-2} \end{bmatrix} / 4(\lambda-1)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1-\bar{l}_1{}^{-1} & -1 \\ \lambda^{-1}\bar{l}_1{}^{-2}-\bar{l}_1{}^{-1} & \bar{l}_1{}^{-1} \end{bmatrix} / 2(\lambda-1)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{l}_1^{-1} \\ 0 & \lambda^{-1}\bar{l}_1^{-2} \end{bmatrix} / (\lambda - 1)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1 + \bar{l}_1^{-1} & -1 + 2\bar{l}_1^{-1} \\ -\bar{l}_1^{-1} - \lambda^{-1}\bar{l}_1^{-2} & l_1^{-1} - 2\lambda^{-1}\bar{l}_1^{-2} \end{bmatrix} / 4(\lambda - 1)$$

である。上式のθ_3に式（4·65）および

$$\cos 2\theta_3 \fallingdotseq \cos 2\nu T + \varepsilon \sin 4\nu T / 4$$
$$\sin 2\theta_3 \fallingdotseq \sin 2\nu T - \varepsilon (1 + \cos 4\nu T) / 4$$
$$\cos 4\theta_3 \fallingdotseq \cos 4\nu T + \varepsilon (\sin 2\nu T + \sin 6\nu T) / 2$$
$$\sin 4\theta_3 \fallingdotseq \sin 4\nu T - \varepsilon (\cos 2\nu T + \cos 6\nu T) / 2$$

を代入すると、運動方程式は最終的に、

$$\ddot{X} + (D_1 + D_{2s}\sin 2\nu T)\dot{X} + B_\theta X + \tau_\theta (E_1 + E_{2c}\cos 2\nu T + E_{2s}\sin 2\nu T + E_{4c}\cos 4\nu T + E_{4s}\sin 4\nu T) X = F \qquad (4\cdot 68)$$

$$D_1 = C_\theta + A\nu C_1, \quad D_{2s} = \tau_\theta \sin^2\alpha_\theta C_1 / 2\nu$$

$$E_1 = B_1 - \tau_\theta \sin^2\alpha_\theta B_{2s} / 4A\nu^2$$

$$E_{2c} = B_{2c}, \quad E_{2s} = B_{2s}$$

$$E_{4c} = B_{4c} - \tau_\theta \sin^2\alpha_\theta B_{2s} / 4A\nu^2 \ (B_{2s}\text{は第1項のみ})$$

$$E_{4s} = B_{4s} + \tau_\theta \sin^2\alpha_\theta B_{2c} / 4A\nu^2 \ (B_{2c}\text{は第1項のみ})$$

となる。ここで、無次元量はすべて前節と同じであり、τ_θは負荷トルクを無次元化したものである。式（4·39）と同様に$\tau_\theta \sin^2\alpha_\theta$を含む項は交差角による伝達トルクの変化に起因する項であり、$\tau_\theta^2 \sin^2\alpha_\theta / A\nu^2$を含む項はロータ軸の

自転角速度変動に起因する項である。当然ではあるが、初期交差角の影響はＭＲ２ロータの場合と同様であり、$\sin^2\alpha_0$のオーダでは回転角速度の４倍の係数励振成分まで現れる。

４・６・２　安定性解析

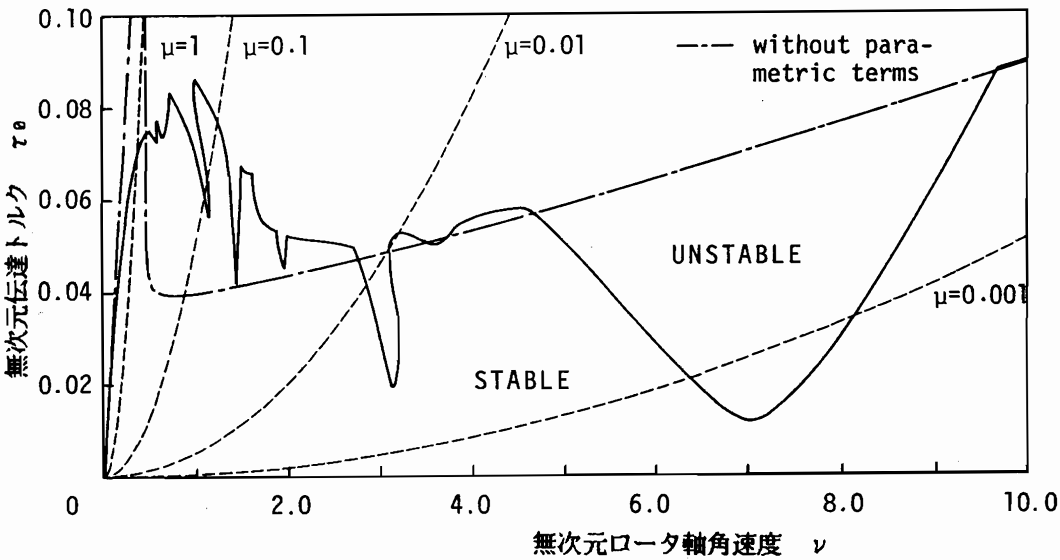
運動方程式（４・６８）は各マトリクスが４行４列であることを除いてＭＲ２ロータの式（４・３９）と同じ形をしており、特性方程式もマトリクスの大きさが４倍になることを除いて式（４・４２）、式（４・４３）と同じ形である。

４・６・３　安定性の数値計算例と考察

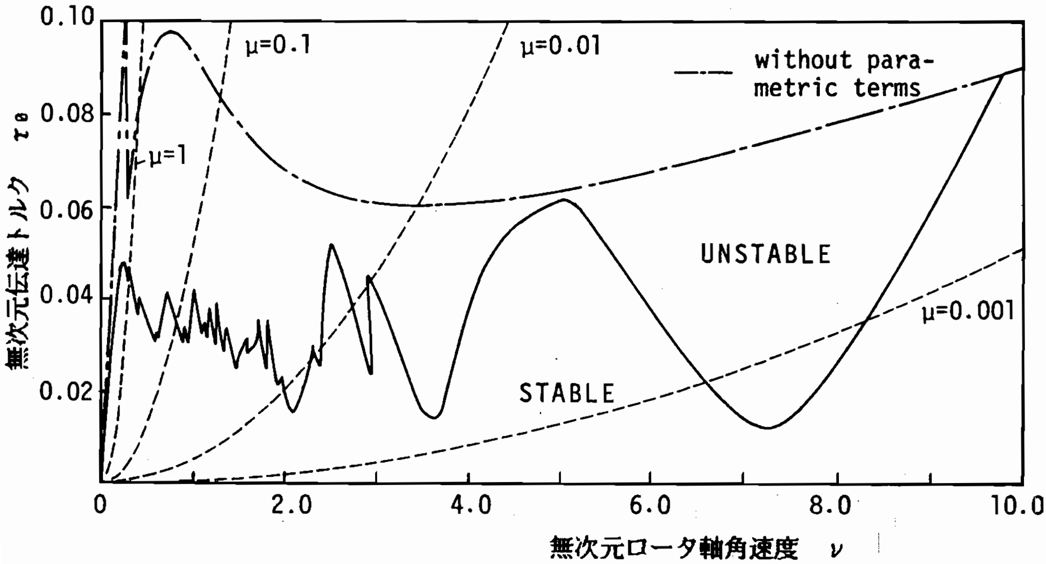
運動方程式は回転角速度の４倍の周波数成分まで含まれるので、特性方程式は$\pm\nu$、$\pm 3\nu$の成分を含む３２行３２列の行列式を用いて根を求め不安定境界を定めている。４・４節と同様、数値計算例はＡ＝０．０３の場合のみである。

（Ｉ）ロータ軸が外部に仕事をする場合（$\tau_0\nu>0$の場合）

図４・２２（ａ）～（ｃ）に不安定領域図を示す。同図中、破線は式（４・６５）第２式の初期交差角による速度変動率μが一定の曲線を示している。また、一点鎖線は係数励振項を除いた系の不安定境界を示す。係数励振項を除いた系の不安定境界はＭＲ２ロータの場合に似ている。$\sigma=0$では低速域で安定域が発生し、σに関わらず原点を通る不安定境界が生じている。高速域での傾向は図４・１６に示した$\alpha_0=0°$の場合によく似ており初期交差角の影響はあまり見られない。次に係数励振項をも含む場合を考察する。同図（ａ）は$\sigma=0$, $\zeta_1=0$, $\alpha_0=20°$の場合であり、初期交差角が存在しない場合の図４・１７（ｂ）に対応している。両図を比較すると、$\nu<1$以下の低速域で不安定境界の差が顕著であり、初期交差角によって不安定化しているが、この領域では$\mu\approx1$であり実際の運転域ではないので問題とはならない。また、$\mu<0.1$の範囲では初期交差角によって部分的に係数励振不安定領域が増大しているが、大略的にはそれほど変わりはない。図４・２２（ｂ）は$\sigma=0.6$の場合で図４・１７（ｄ）に対応している。$\nu<2$では初期交差角によって不安定化しているが、全般的にみれば初期交差角を考慮してもしなくても不安定領域はそれほど差異はないと言える。図４・２２（ｃ）



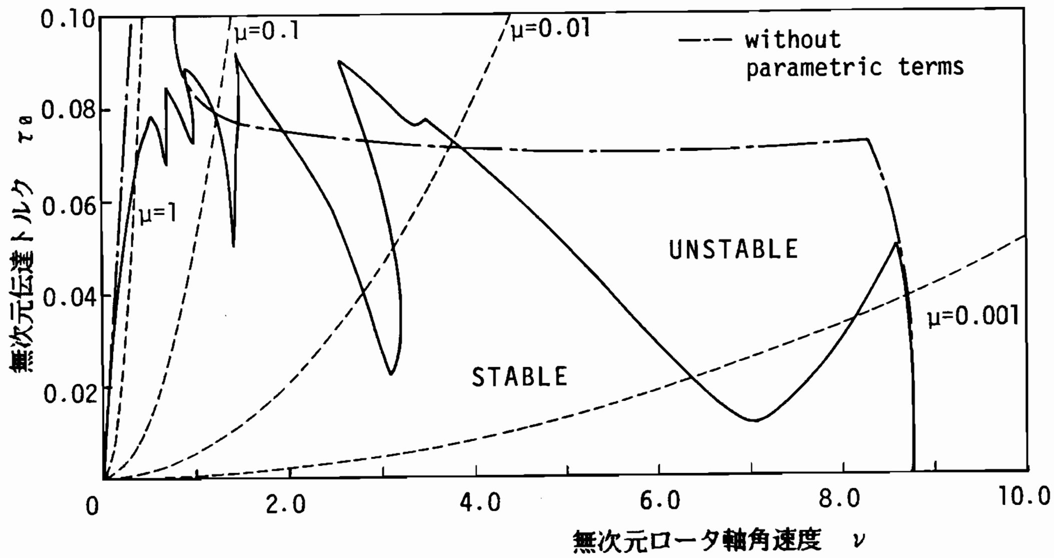
（ａ）$\sigma = 0$，$\zeta_1 = 0$ の場合



（ｂ）$\sigma = 0.6$，$\zeta_1 = 0$ の場合

図４・２２　ＭＲ４ロータの不安定領域

（$\tau_0 \nu > 0$；$\alpha_0 = 20°$，$A = 0.03$，$\zeta_0 = 0.02$）



（ｃ）$\sigma = 0$，$\zeta_i = 0.001$の場合

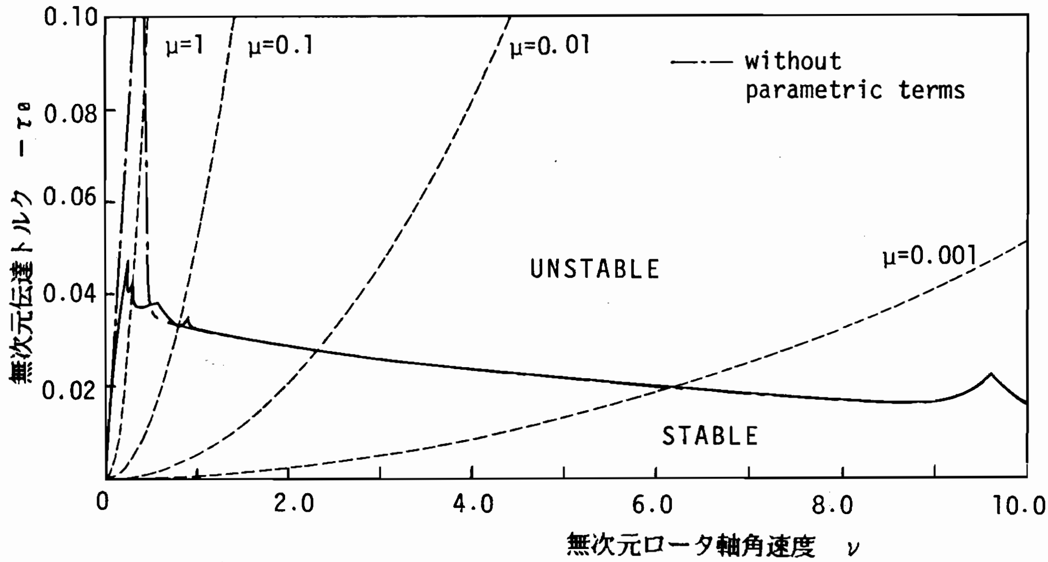
図４・２２　ＭＲ４ロータの不安定領域（続き）

は$\sigma = 0$，$\alpha_0 = 20°$，$\zeta_i = 0.001$の場合で内部減衰を考慮した場合である。$\nu < 1$で$\alpha_0 = 0°$の場合（図４・１７（ｆ））とは差が生じているものの、この不安定境界近傍では$\mu \approx 1$であり現実的な運転範囲ではないのであまり問題とはならい。

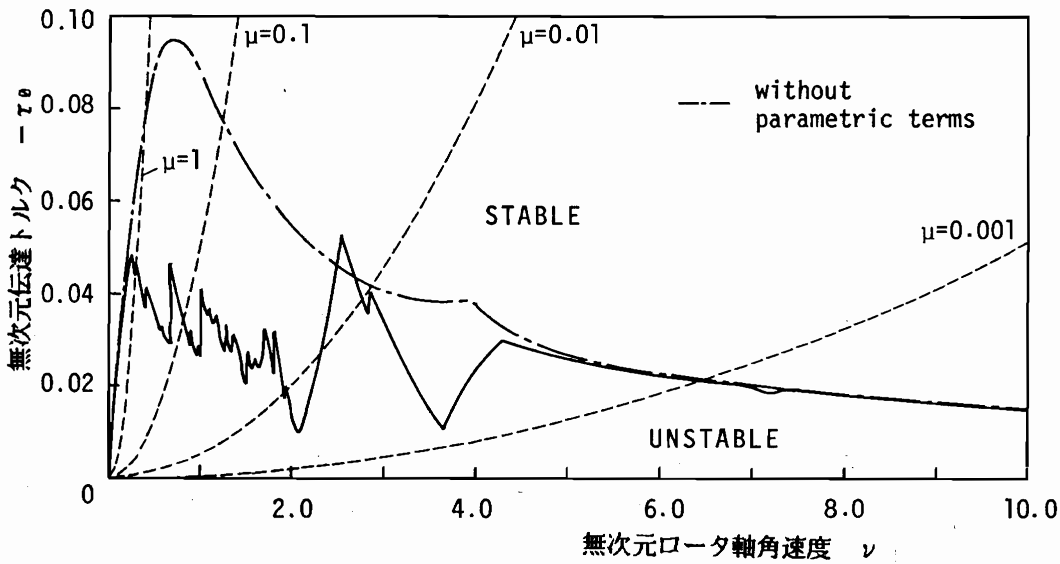
以上、図４・２２に示すパラメータの範囲では、初期交差角が２０°程度であれば実際運転される範囲内では不安定境界は初期交差角が存在しない場合とほとんど変わらないことが分かる。

（ＩＩ）ロータ軸が外部から仕事をされる場合（$\tau_0 \nu < 0$の場合）

図４・２３（ａ）～（ｃ）に$\tau_0 < 0$の場合の不安定領域の例を示す。同図のパラメータの値は図４・２２（ａ）～（ｃ）と同じである。同図は、それぞれ、図４・２１（ｂ）、（ｃ）、（ｅ）で初期交差角を考慮した場合でもある。図４・２３（ａ）は内部減衰がなく軸受剛性異方性が存在しない場合である。図４・２２（ａ）と比較すると不安定境界がかなり低下しており、$\tau_0 < 0$となることによりかなり



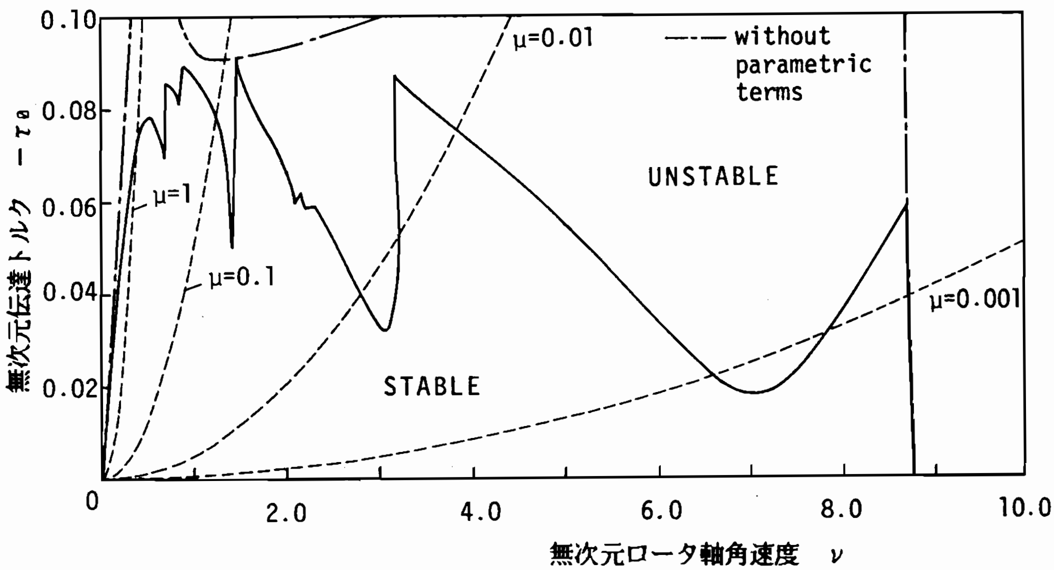
（a） $\sigma=0$， $\zeta_1=0$ の場合



（b） $\sigma=0.6$， $\zeta_1=0$ の場合

図4・23　MR4ロータの不安定領域

（$\tau_a\nu<0$； $\alpha_a=20°$，$A=0.03$，$\zeta_0=0.02$）



（ｃ）$\sigma=0$，$\zeta_1=0.001$の場合

図４・２３　ＭＲ４ロータの不安定領域（続き）

不安定化していることが分かる。これらの傾向は初期交差角が存在しない場合の関係と類似しており（図４・１７（ｂ）と図４・２１（ｂ）を比較）、τ_0の符号の影響が強く現れている。初期交差角を考慮した場合には低速域（$\nu<0.1$）で$\alpha_0=0°$の場合よりかなり不安定化しており、しかもμが０．１程度であるので実際上も注目すべき領域である。図４・２３（ｂ）は$\sigma=0.6$、$\zeta_1=0$の場合である。図４・２２（ｂ）と比較すると、$\nu>2.0$の領域で$\tau_0<0$の場合はかなり不安定化している。この場合は初期交差角が存在しない場合の関係とほゞ同一である。図４・２３（ｃ）は内部減衰ζ_1を考慮した場合である。初期交差角が低速域で不安定化作用を持つが不安定境界付近は$\mu\approx1$であり問題はない。図４・２２（ｃ）と比較すると、$\mu<0.1$では大略的には駆動トルクの方向によって不安定境界はそれほど変化していない。

以上、$\tau_0<0$では$\sigma=0$，$\zeta_1=0$の場合に初期交差角が存在すると初期交差角が存在しない場合よりも実用的な範囲内で不安定化することが明かとなった。

4・7　初期交差角が存在しないＳＲ２ロータ系の安定性

図４･２４に十字軸継手で連結されたＳＲ２ロータの座標系と変数を示す。$O_1-X_0Y_0Z_0$は静止座標系である。O_1-xyzはO_1X_0軸回りにα回転し、さらに新しいｙ軸回りにβ回転した座標系で、自転角を除いてロータ軸に一致している。$O_3-\Xi YZ$軸は $\Xi=X, Z=-Z_0, Y=-Y_0$ の関係にある負荷軸側継手中心O_3を原点とする座標系である。ＳＲ２ロータでは継手の対が奇数個であるので、入力軸と出力軸では継手の位相角が９０°ずれることになる。

伝達トルクに起因する横方向力成分は駆動軸側がＭＲ２ロータと同じであり、負荷軸側がＭＲ４ロータと同じであるので、前節までに導いた結果を加え合わせればＳＲ２ロータの場合が得られる。第１継手からロータ軸に作用するモーメントM^Iは式（４･１０）より次式となる。

$$M^I=\begin{bmatrix}-\alpha\sin2\theta-\beta(1-\cos2\theta)\\ \alpha(1+\cos2\theta)+\beta\sin2\theta\\ 2\end{bmatrix}_{xyz} T_0/2 \qquad (4\cdot69)$$

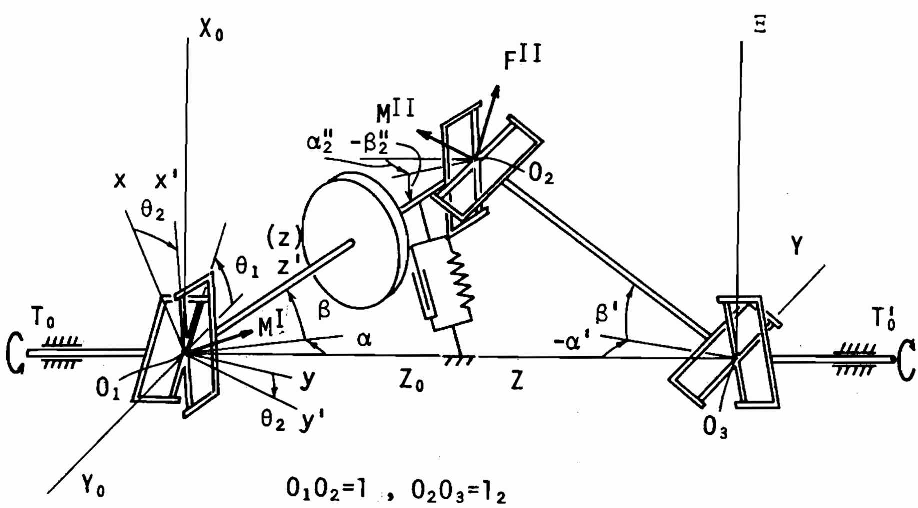


図４・２４　ＳＲ２ロータと座標系

負荷トルクの影響は、$O_3-\Xi YZ$座標系で考えればMR４ロータの駆動トルクに起因する式と同じ成分で表される。負荷軸側からロータ軸に作用するモーメント及び力は、$O_3-\Xi YZ$座標で表すと、式（４·５３）より

$$M^{11}=\begin{bmatrix}(\beta'-\beta'')-(\beta'-\beta'')\cos 2\theta+(\alpha'-\alpha'')\sin 2\theta\\(\alpha''-\alpha')+(\alpha''-\alpha')\cos 2\theta+(\beta''-\beta')\sin 2\theta\\2\end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta}T_8'/2$$

$$F^{11}=\begin{bmatrix}\alpha''-\alpha''\cos 2\theta-\beta''\sin 2\theta\\\beta''+\beta''\cos 2\theta-\alpha''\sin 2\theta\\0\end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta}T_8'/2\,l_2+F^{11}{}_{\zeta}\begin{bmatrix}\beta'-\beta''\\\alpha''-\alpha'\\1\end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta}\tag{4·70}$$

となる。ここで、α', β'は$O_3-\Xi YZ$座標で見た中間軸の横変位角、α'', β''はロータ軸の横変位角であり、図４·２４に示す方向を正に取っている。また、自転角は $\theta\fallingdotseq\theta_1\fallingdotseq\theta_2\fallingdotseq\theta_3$ と置いている。図４·２４より、

$$l_2\alpha'+l\alpha''=0,\quad l\alpha=-l_2\alpha'$$
$$l_2\beta'+l\beta''=0,\quad l\beta=l_2\beta'$$

であるから、$O_3-\Xi YZ$座標でみた変位角は、$O_1-X_8Y_8Z_8$座標でみた変位角に対し次式で表される。

$$\alpha'=-\alpha/\bar{l}_2,\quad \beta'=\beta/\bar{l}_2$$
$$\alpha''=\alpha,\quad \beta''=-\beta\tag{4·71}$$

（$(\bar{\cdot})$ は l で無次元化）

上式を式（４·７０）に代入すると、M^{11}とF^{11}はO_1-xyz成分で次式となる。

$$
M^{II}_{xyz}=\begin{bmatrix} \beta-\beta\cos 2\theta+\alpha\sin 2\theta \\ -\alpha-\alpha\cos 2\theta-\beta\sin 2\theta \\ -2 \end{bmatrix}(1+1/\bar{l}_2)T_\theta'/2
$$

$$
F^{II}_{xyz}=\begin{bmatrix} \alpha-\alpha\cos 2\theta-\beta\sin 2\theta \\ \beta+\beta\cos 2\theta-\alpha\sin 2\theta \\ 0 \end{bmatrix}T_\theta'/2\bar{l}_2
$$

$$
+F^{II}_z\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}/(1+1/\bar{l}_2)
$$

$$
\fallingdotseq\begin{bmatrix} \alpha-\alpha\cos 2\theta-\beta\sin 2\theta \\ \beta+\beta\cos 2\theta-\alpha\sin 2\theta \\ 0 \end{bmatrix}T_\theta'/2\bar{l}_2
$$

（４·７２）

ここで、F^{II}_zは中間軸の軸力であるが、軸方向の運動を無視していることより軸力が無視できるとして $F^{II}_z\fallingdotseq 0$ と置いている。式（４·６９）、式（４·７２）より、ロータ軸に作用するモーメントＭは、

$$
M_{xyz}=M^{I}_{xyz}+M^{II}_{xyz}+\overrightarrow{O_1O_2}\times F^{II}_{xyz}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \alpha\sin 2\theta-\beta\cos 2\theta \\ -\alpha\cos 2\theta-\beta\sin 2\theta \\ 0 \end{bmatrix}T_\theta/\bar{l}_2 \qquad (4\cdot 73)
$$

となる。ただし、$T_\theta=T_\theta'$ と置いている。

式（４·７３）より、運動方程式に現れる伝達トルクに起因する復元力項のうち、自励振動に関する項は打ち消されることが分かる。係数励振項はＭＲ２ロータの運動方程式と同じ形で残り、その値はＭＲ２ロータの場合の（$2/\bar{l}_2$）倍となる。それゆえ、不安定領域はＭＲ２ロータの場合に求めたもののうち、図４·７の係数

励振項のみによる不安定境界と同じで縦軸を（$\bar{I}_2$／２）倍にしたものである。すなわち、ＳＲ２ロータの不安定領域は、$\bar{I}_2 \approx 2$であればＭＲ２ロータに比べて自励振動項が存在しないため$\sigma=0$ではかなり安定化し、$\sigma \neq 0$では係数励振不安定領域は拡大する。しかし、$\sigma \neq 0$の場合でも自励振動の影響が存在しなくなるのでＶ字型の係数励振不安定領域が存在しない回転数域ではかなり安定化する。明らかに、$\bar{I}_2 < 2$ではＭＲ２ロータより係数励振不安定化作用が強くなり、$\bar{I}_2 > 2$では弱くなる。

４・８　初期交差角が存在するＳＲ２ロータ系の安定性

前節で触れたように本モデルでは継手の対が奇数個となるため、初期交差角が存在する場合には、たとえ駆動軸と負荷軸のそれらを等しく配置してもロータ軸に速度変動が発生する。このような構成は実際の設計では用いることはないが、運動方程式にどの様な項が現れるかは興味がある。本節では、前節までに導いた結果を用いて伝達トルクに起因する項のみを導いてみる。考察する系は図４・２４で駆動軸がX_0軸回りに$-\alpha_0$、負荷軸がΞ軸回りに$-\alpha_0$回転した位置に固定されている場合である。

前節と同様、駆動トルクに起因するトルクの成分はＭＲ２ロータの式（４・２８）に等しい。また、ロータ軸端O_2に作用する負荷トルクに起因する力及びモーメントは、$O_3-\Xi YZ$座標で見ればＭＲ４ロータの式（４・６２）、（４・６３）において次のように置き直せばよい。

$$(\alpha_1)_{MR4} \rightarrow (-\alpha/\bar{I}_2)_{SR2},\quad (\beta_1)_{MR4} \rightarrow (\beta/\bar{I}_2)_{SR2},$$

$$(\alpha)_{MR4} \rightarrow (\alpha)_{SR2},\quad (\beta)_{MR4} \rightarrow (-\beta)_{SR2}$$

ここで、$(\cdot)_{MR4}$はＭＲ４ロータ系での表現、

$(\cdot)_{SR2}$はＳＲ２ロータ系での表現を表す。

得られた関係式をさらにO_1-xyz座標に変換するには　η座標→$-y$座標，$\theta_2 \rightarrow -\theta_2$ と置き直せばよい。

駆動トルクに起因するモーメントを$[M^I_x\ \ M^I_y]^T$、負荷トルクに起因するモーメント及び力を$[M^{II}_x\ \ M^{II}_y]^T$、$[F^{II}_x\ \ F^{II}_y]^T$と置けば、ロータ軸に

作用するモーメント$[M_x \quad M_y]^T$は、

$$M_x = M^I{}_x + M^{II}{}_x - l F^{II}{}_y$$
$$M_y = M^I{}_y + M^{II}{}_y + l F^{II}{}_x$$

となる。これらを書き下すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = T_\theta' \Big[\begin{bmatrix} (\bar{I}_2^{-1} - 1)\sin 2\theta_2 \\ (1 + \bar{I}_2^{-1}) + (1 - \bar{I}_2^{-1})\cos 2\theta_2 \end{bmatrix} \tan\alpha_\theta / 2$$

$$+ \bar{I}_2^{-1} \begin{bmatrix} \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \\ -\cos 2\theta_2 & -\sin 2\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$+ \sin^2\alpha_\theta \Big\{ \begin{bmatrix} 0 & -\bar{I}_2^{-1}(1 + \bar{I}_2^{-1})/4 \\ -\bar{I}_2^{-1}(1 + \bar{I}_2^{-1})/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cos 2\theta_2 / 2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (1 + \bar{I}_2^{-2}) \sin 2\theta_2 / 2$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\bar{I}_2^{-2} - \bar{I}_2^{-1} - 2) \cos 4\theta_2 / 4$$

$$+ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\bar{I}_2^{-2} - \bar{I}_2^{-1} - 2) \sin 4\theta_2 / 4 \Big\} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Big] \qquad (4\cdot 74)$$

ここで、$T_\theta' = T_\theta \cos\alpha_\theta (1 + \sin^2\alpha_\theta / 2)$

式（４・７４）を見ると、初期交差角のため定係数の連成項（｛・｝内の第一項）とロータ軸回転角速度の２倍、４倍の周波数成分の係数励振成分が発生することが分かる。明らかに、$\alpha_\theta = 0$ と置けば式（４・７３）から得られる運動方程式に

一致する。$\sin^2\alpha_0$のかかっている定係数の連成項は等速継手のＳＲ２ロータの場合（式（２・３７））と同様に同符号の連成項ある。この項のみでは動的不安定な自励振動は発生しないので、不安定領域は係数励振成分が支配的であろうと考えられる（静的不安定境界は係数励振不安定境界に比べて非常に安定側であるため）。なお、定係数の連成成分は式（２・３７）で $\alpha_0=\alpha_0'$ と置いた式と一致しないが、これは交差角により発生する項を$\sin^2\alpha_0$のみ含む項で打ち切って近似したためであろうと思われる（仮想仕事の原理を用いて直接導いても同じ結果が得られることを確認している）。

４・９　初期交差角が存在しないＳＲ４ロータ系の安定性

図４・２５に解析モデル系を示す。本モデルは駆動軸側と負荷軸側が対称になっており通常駆動軸系で用いられる継手の組合せである。

４・９・１　運動方程式

駆動トルク、負荷トルクに起因する横方向の成分は何れもＭＲ４ロータの解析で得られた結果が適用できる。駆動軸側中間軸の横変位角をα_1，β_1、ロータ軸のそれらをα，βとする。O_4－ΞＹＺ座標でみた負荷軸側中間軸の横変位角を

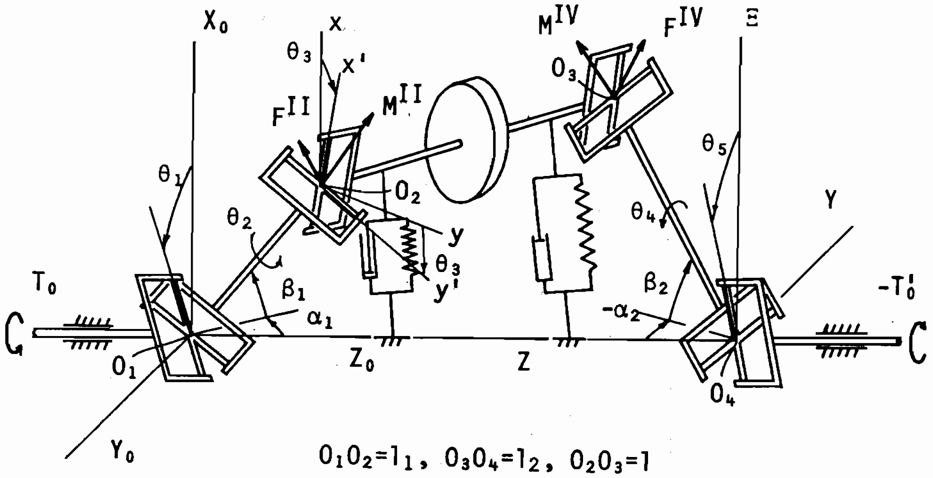


図４・２５　ＳＲ４ロータと座標系

α_2、β_2、ロータ軸のそれらをα', β'と置く。このとき、駆動軸側ロータ軸端に作用する駆動トルクに起因するモーメントM^{II}および力F^{II}は、式（4・53）よりロータ軸に固定したO_2-xyz座標成分で次式となる。

$$M^{II}=\begin{bmatrix}(\beta_1-\beta)-(\beta_1-\beta)\cos 2\theta+(\alpha_1-\alpha)\sin 2\theta \\ (\alpha-\alpha_1)+(\alpha-\alpha_1)\cos 2\theta+(\beta-\beta_1)\sin 2\theta \\ 2\end{bmatrix} T_a/2$$

$$\triangleq\begin{bmatrix}M^{II}{}_x \\ M^{II}{}_y \\ M^{II}{}_z\end{bmatrix}$$

$$F^{II}=\begin{bmatrix}\alpha-\alpha\cos 2\theta-\beta\sin 2\theta \\ \beta+\beta\cos 2\theta-\alpha\sin 2\theta \\ 0\end{bmatrix} T_a/2l_1 \triangleq \begin{bmatrix}F^{II}{}_x \\ F^{II}{}_y \\ F^{II}{}_z\end{bmatrix}$$

（4・75）

ここで、自転角は $\theta_1 \fallingdotseq \theta_2 \fallingdotseq \theta_3 \fallingdotseq \theta_4 \fallingdotseq \theta_5 = \theta$ と置き、中間軸に作用する軸力は軸方向運動を無視しているため無視できるものとしている。負荷トルクに起因するモーメントM^{IV}と力F^{IV}は式（4・75）で $\alpha \to \alpha'$, $\beta \to \beta'$, $\alpha_1 \to \alpha_2$, $\beta_1 \to \beta_2$, $l_1 \to l_2$, Y成分→－Y成分, $\theta \to -\theta$ と置いて得られ、式（4・76）となる。α', β'は$O_4-\Xi YZ$座標で見たロータ軸の回転角である。

$$M^{IV}=\begin{bmatrix}(\beta_2-\beta')-(\beta_2-\beta')\cos 2\theta+(\alpha'-\alpha_2)\sin 2\theta \\ (\alpha_2-\alpha')+(\alpha_2-\alpha')\cos 2\theta+(\beta'-\beta_2)\sin 2\theta \\ 2\end{bmatrix} T_a/2$$

$$\triangleq\begin{bmatrix}M^{IV}{}_x \\ M^{IV}{}_y \\ M^{IV}{}_z\end{bmatrix}$$

$$F^{1U} = \begin{bmatrix} \alpha' - \alpha'\cos 2\theta + \beta'\sin 2\theta \\ -\beta' - \beta'\cos 2\theta - \alpha'\sin 2\theta \\ 0 \end{bmatrix} T_0 / 2 l_2 \triangleq \begin{bmatrix} F^{1U}{}_x \\ F^{1U}{}_y \\ F^{1U}{}_z \end{bmatrix}$$

（４·７６）

さらに、式（４·７６）に

$\alpha' = \alpha,\quad \beta' = -\beta,$

$\alpha_2 = -(\bar{l}_1 \alpha_1 + \alpha)/\bar{l}_2,\quad \beta_2 = (\bar{l}_1 \beta_1 + \beta)/\bar{l}_2$

（$(\bar{\bullet})$はロータ軸長 $l = 2 l_0$ で無次元化）

を代入すれば負荷トルクに起因するモーメント及び力を駆動軸側の変位角で表現できる。

ロータ軸の線形近似した運動方程式は式（４·５４）より次式系で表される

$$m l_1 d^2\beta_1/dt^2 + m l_0 d^2\beta/dt^2 = F^{11}{}_x + F^{1U}{}_x + P_x$$

$$m l_1 d^2\alpha_1/dt^2 + m l_0 d^2\alpha/dt^2 = -F^{11}{}_y - F^{1U}{}_y - P_y$$

$$I_t d^2\alpha/dt^2 + m l_1 l_0 d^2\alpha_1/dt^2 + I_t A(d\theta/dt)(d\beta/dt) = M^{11}{}_x + M^{1U}{}_x - l F^{1U}{}_y + R_x$$

$$I_t d^2\beta/dt^2 + m l_1 l_0 d^2\beta_1/dt^2 - I_t A(d\theta/dt)(d\alpha/dt) = M^{11}{}_y + M^{1U}{}_y + l F^{1U}{}_x + R_y$$

（４·７７）

ここで、P_x, P_y, R_x, R_y は式（２·２９）で表される軸受力に起因する復元力と減衰力及び復元モーメントと減衰モーメントのｘ，ｙ成分を表す。式（４·７７）に式（４·７５）及び式（４·７６）を代入し、式（４·５５）で定義した無次元量を用いて整理すると次式となる。

$$\ddot{X} + C\dot{X} + B_0 X + \tau_0 (B_1 + D\cos 2\nu T + E\sin 2\nu T) X = 0$$

（４·７８）

$$X = [\alpha \quad \alpha_1 \quad \beta \quad \beta_1]^T$$

B_0, C は式（4・55）と同じ。

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & L_4 \\ -L_4 & 0 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 0 & L_5 \\ L_5 & 0 \end{bmatrix},\quad E = \begin{bmatrix} -L_5 & 0 \\ 0 & L_5 \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} -\bar{l}_1^{-1} - \bar{l}_2^{-1} & -1 - \bar{l}_1 \bar{l}_2^{-1} \\ \bar{l}_1^{-1}(\bar{l}_1^{-1} + \bar{l}_2^{-1})/\lambda & \bar{l}_1^{-1} + \bar{l}_2^{-1} \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

$$L_5 = \begin{bmatrix} 3\bar{l}_2^{-1} - \bar{l}_1^{-1} & 1 + \bar{l}_1 \bar{l}_2^{-1} \\ -4\bar{l}_2^{-1}\bar{l}_1^{-1} + \bar{l}_1^{-1}(\bar{l}_1^{-1} + \bar{l}_2^{-1})/\lambda & -\bar{l}_1^{-1} - \bar{l}_2^{-1} \end{bmatrix} / (1-\lambda)$$

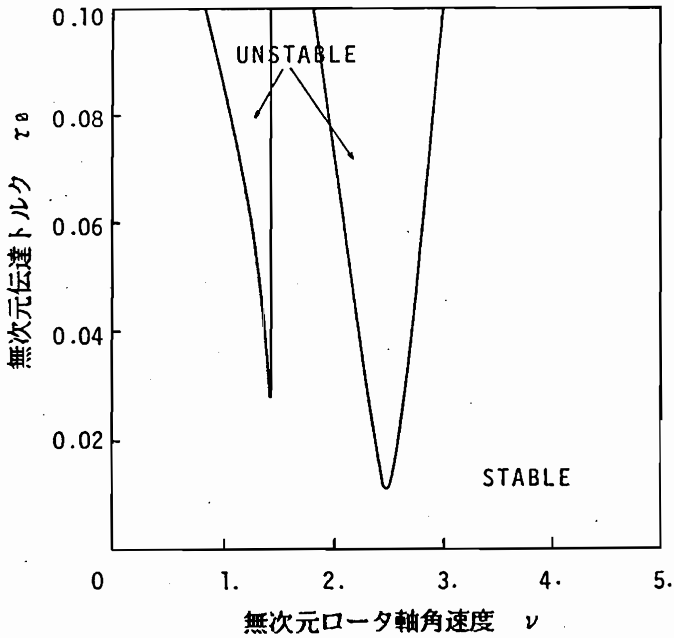
ここで、$\bar{l}_1$はMR４ロータの場合と統一を取るためにl_0（＝ロータ軸長さ／2）で無次元化した量を改めて$\bar{l}_1$と置いた。B_1項は変数を変換すれば等速継手の場合のSR４ロータの式（2・41）のB_1（$a_0 = a_0' = 0$と置く）に一致する。式（4・78）より、十字軸継手で連結すればたとえ機構を対称に配置しても係数励振不安定が発生し得ることが分かる。

4・9・2　安定性解析

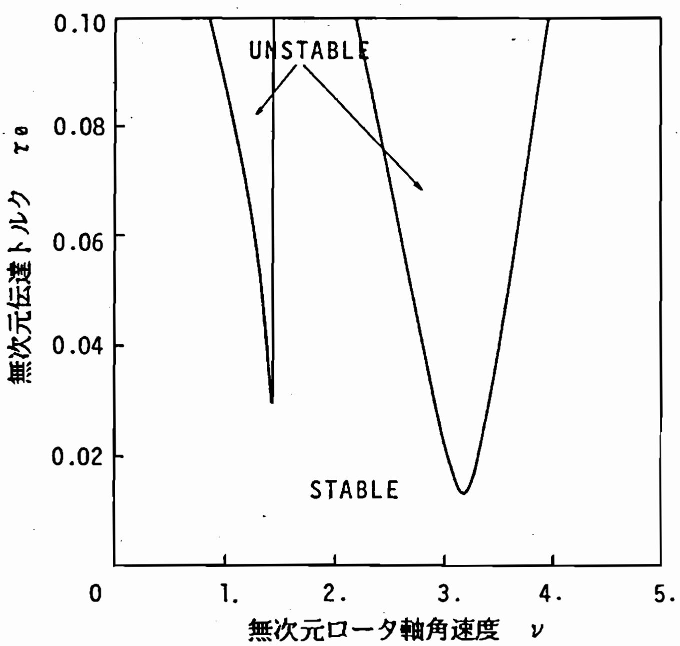
運動方程式はL_4とL_5の形が異なることを除いてMR４ロータの式（4・55）と同じであるので、不安定条件の求め方も4・4・2項で示したMR４ロータの場合と同じである。

4・9・3　安定性の数値計算例と考察

不安定領域の数値計算例を図4・26（a）～（d）に示す。パラメータの数値は $\bar{l}_1 = \bar{l}_2$ と置く以外はMR４ロータの場合と同じである。本モデルでは、等速継手で連結されたSR４ロータの解析で明かにしたように自励振動のみによる

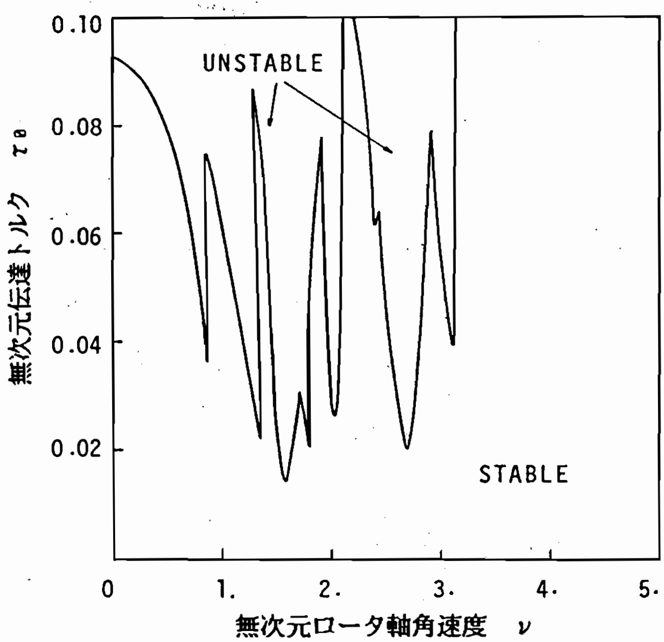


（a） σ＝0， A＝0の場合

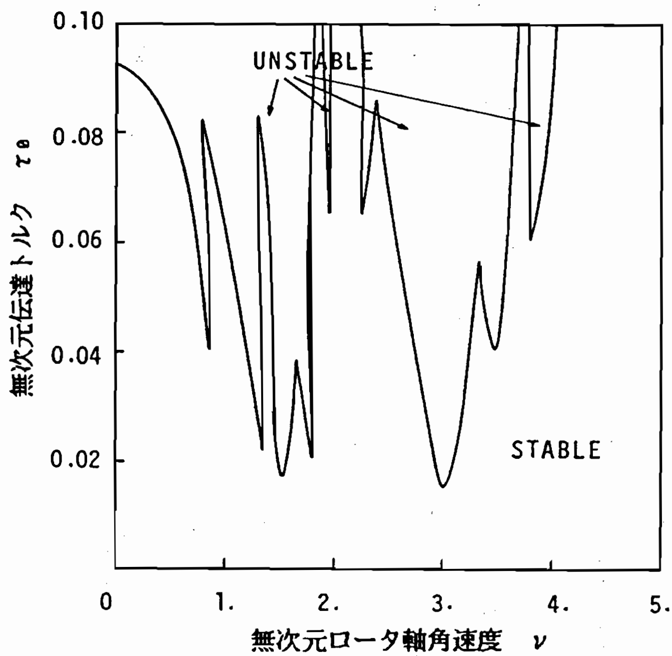


（b） σ＝0， A＝0.03の場合

図4・26 SR4ロータの不安定領域（α_0＝0°，ζ_e＝0.02）



（ｃ）σ＝０.６，Ａ＝０の場合



（ｄ）σ＝０.６，Ａ＝０.０３の場合

図４・２６　ＳＲ４ロータの不安定領域（続き）

不安定は発生しないので（静的不安定は発生するが不安定境界は十分安定側にある）、係数励振不安定が支配的であると考えられる。これらの不安定領域図をMR4ロータの図4・17と比較すると全く異なっていることが分かる。$\sigma=0$の場合（図4・26（a）、（b））は図4・17（a）、（b）に現れる$\nu=N_1$、N_1'を中心とする傾き振動モードの大きな係数励振主不安定領域が消滅している。傾き振動モードと並進振動モードの和型混合共振の不安定領域と$\nu=N_2$（N_2'）近傍の不安定領域のみが残っていることが分かる。これはロータ軸の構成を対称にしたため傾き振動に関する成分は駆動トルクと負荷トルクで打ち消しあっているためと考えられる。このことを確かめるために、運動方程式の変数を変換してモード別に考察した。独立変数をα、α_1、β、β_1からロータ中心の傾きθ_x, θ_yと変位x_G, y_Gに変換する。座標変換したときの伝達トルクに起因する項のみを示すと、

$$\ddot{X}+\cdots+\tau_a\{B_1+D\cos 2\theta+E\sin 2\theta\}X=0 \qquad (4\cdot 79)$$

$$X=\begin{bmatrix}\theta_x\\ \theta_y\\ \bar{x}_G\\ \bar{y}_G\end{bmatrix},\quad (1-\lambda)B_1=\begin{bmatrix}0&0&0&-b_1\\0&0&b_1&0\\0&b_1\bar{i}^2&0&0\\-b_1\bar{i}^2&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)D=\begin{bmatrix}0&0&0&-b_1\\0&0&-b_1&0\\0&-b_1\bar{i}^2&0&0\\-b_1\bar{i}^2&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$(1-\lambda)E=\begin{bmatrix}0&0&b_1&0\\0&0&0&-b_1\\b_1\bar{i}^2&0&0&0\\0&-b_1\bar{i}^2&0&0\end{bmatrix};\quad b_1=\bar{l}_1^{-1}+\bar{l}_2^{-1}$$

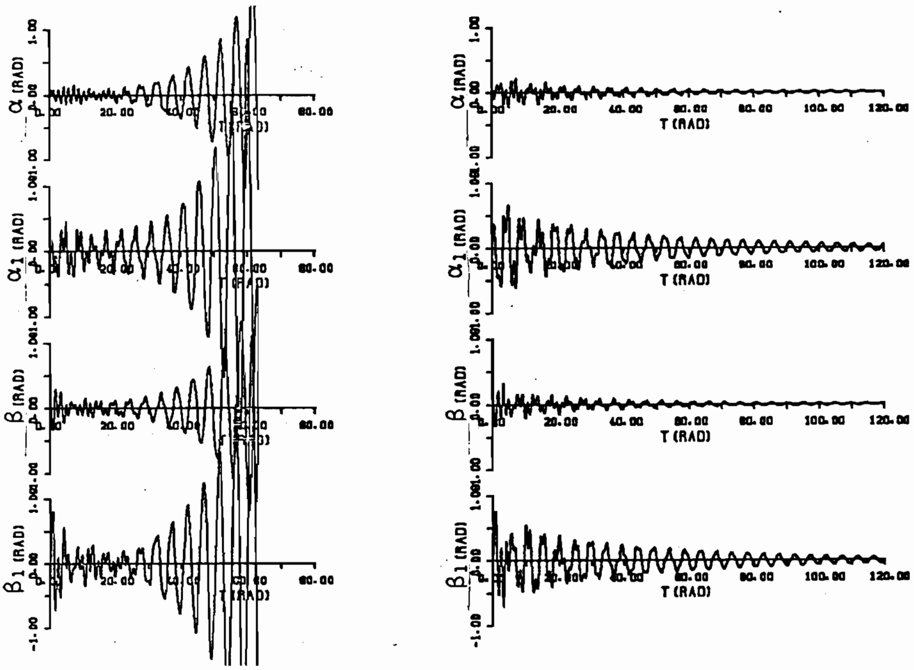
となる。このときの特性方程式は、τ_θを含む項を$\pm\nu$の成分で考えると、式（4・80）のようになる。

$$
\begin{vmatrix}
{}^4\Omega_{-1} & & & \times & & & \bigcirc & \bigcirc \\
 & {}^3\Omega_{-1} & \times & & & & \bigcirc & \bigcirc \\
 & \times & {}^2\Omega_{-1} & & \bigcirc & \bigcirc & & \\
\times & & & {}^1\Omega_{-1} & \bigcirc & \bigcirc & & \\
 & & \bigcirc & \bigcirc & {}^4\Omega_{+1} & & & \times \\
 & & \bigcirc & \bigcirc & & {}^3\Omega_{+1} & \times & \\
\bigcirc & \bigcirc & & & & \times & {}^2\Omega_{+1} & \\
\bigcirc & \bigcirc & & & \times & & & {}^1\Omega_{+1}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (4\cdot80)
$$

$$
;\ {}^1\Omega_{\substack{-1\\+1}} = \omega_1{}^2 - (z + i\nu)^2
$$

○はD，Eによる係数励振成分、×はB_1による非対角成分、他はすべて0。

上式より傾き振動の固有振動数を含む$^4\Omega$と$^3\Omega$に関する成分（////の部分）から成る特性方程式を考えると係数励振成分が現れないことが分かる。同じ様に考えると並進モードの主不安定領域も発生しないはずである（\\\\の部分）。ところが図4・26（a）の左側の不安定領域は最下端が並進モードの固有振動数に一致している（図4・15（a））。しかし、この不安定領域は通常の係数励振領域のように固有振動数を中心とするV字型の領域ではなく（上述のようにして得られる係数励振不安定領域は必ずこのようになる）、低回転数側にのみ広がっている。それゆえ、この領域は式（4・80）で上述のように考察できる単純な係数励振不安定領域ではなく、B_1項（×の成分）との干渉によるものではないかと考えられる。このことを確認するためRKG解を求めた。その例を図4・27に示す。同図（a）は式（4・78）を不安定領域内のパラメータで解いた例で確かに発散している。一方、（b）は同式で$B_1=0$と置いて解いた例であるが安定である。この例よりこの不安定領域はB_1とE，Dの干渉で発生する領域であり、純粋な係数励振不安定領域ではないことが確認できる。



（ａ）図４・２７（ａ）の場合　　（ｂ）図４・２７（ａ）でB_1＝０の場合

τ_0＝０．０６　　τ_0＝０．１

図４・２７　ＲＫＧ解の例（ν＝１．３）

図４・２６（ａ），（ｂ）はσ＝０の場合である。これらを比較すると定性的には変わらないがジャイロモーメントによって不安定領域が拡大していることが分かる。図４・２６（ｃ）、（ｄ）はσ＝０．６の場合である。この場合も係数励振の主共振は存在しないはずであるから、Ｅ，Ｄの作用による不安定領域は種々の組合せによる結合共振であると考えられる。例えば、不安定領域が典型的な形をしている図４・２６（ｃ）のν≒２．７を中心とする領域と同図（ｄ）のν≒３．０を中心とする領域はω_4とω_3（θ_xとθ_yの固有振動数）の結合共振とみられる。これらの不安定領域を全般的にＭＲ４ロータの場合（図４・１７（ｃ）、（ｄ））と比較すると、主共振が存在しなくなったため高速域では非常に安定化し、中、低速域でも全般的に安定化していることが分かる。

４・１０　初期交差角が存在するＳＲ４ロータ系の安定性

解析モデルは図４・２５で駆動軸がX_0軸回りに－α_0、負荷軸が三軸回りに－α_0回転した位置にある場合である。

4・10・1　運動方程式

運動方程式の駆動トルクに起因する項はMR4ロータの初期交差角を考慮した式（式（4・62）、（4・63））をそのまま用いればよい。負荷トルクに起因する項は前節と同じように$O_4-\Xi YZ$座標系で式（4・62）、式（4・63）を考慮し、その後、O_2-xyz座標系に変換すればよい。ここで、ロータ軸に発生する軸トルクの変動は、駆動トルクと負荷トルクが等しいと置くと式（4・62）のz成分より、

$$T_0\cos\alpha_0\{(\alpha_2-\alpha_1)\tan\alpha_0+(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2\alpha_0\cos^2\theta_3 + (\beta_1-\beta_2)\sin 2\alpha_0\cos\theta_3\sin\theta_3\}$$

となり、横変位角と初期交差角の積として残る。このままでは運動方程式の線形解析ができないので、本章のこれまでの解析のようにこの成分は微小であると仮定して無視し、ロータ軸自転角速度 $d\theta_3/dt$ ≒一定（$=\nu$）とみなす。このとき運動方程式は次式となる。

$$\ddot{X}+C\dot{X}+B_0X+\tau_0(B_1+B_{2c}\cos 2\nu T+B_{2s}\sin 2\nu T + B_{4c}\cos 4\nu T+B_{4s}\sin 4\nu T)X=F \tag{4・81}$$

$$X=[\alpha\ \ \alpha_1\ \ \beta\ \ \beta_1]^T$$

C, B_0 は式（4・55）と同じ（Cは$\zeta_1=0$と置いた式）

$$B_1=\begin{bmatrix}0 & L_4\\ -L_4 & 0\end{bmatrix}+\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}0 & K_1\\ K_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B_{2c}=\begin{bmatrix}0 & L_5\\ L_5 & 0\end{bmatrix}+\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}0 & -K_2\\ K_2 & 0\end{bmatrix}$$

$$B_{2s}=\begin{bmatrix}-L_5 & 0\\ 0 & L_5\end{bmatrix}+\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}K_3 & 0\\ 0 & K_3\end{bmatrix}$$

$$B_{4c}=\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}0 & K_4\\ K_4 & 0\end{bmatrix},\qquad B_{4s}=\sin^2\alpha_0\begin{bmatrix}-K_4 & 0\\ 0 & K_4\end{bmatrix}$$

$$F=2\tau_0\sin\alpha_0/(\lambda\,\bar{l}_1{}^2)$$
$$\times[\quad 0\qquad \sin 2\nu T\qquad 0\qquad 1-\cos 2\nu T\quad]^T$$

$$K_1=\begin{bmatrix}\bar{l}_1{}^{-1} & 1\\ \bar{l}_1{}^{-2}(1-2\lambda)\lambda^{-1} & -\bar{l}_1{}^{-1}\end{bmatrix}(2\bar{l}_1{}^{-1}+1)(1-\lambda)^{-1}/2$$

$$K_2=\begin{bmatrix}\bar{l}_1{}^{-1} & 1\\ -\bar{l}_1{}^{-2}\lambda^{-1} & -\bar{l}_1{}^{-1}\end{bmatrix}/(1-\lambda),$$

$$K_3=4K_1\bar{l}_1{}^{-1}(1+2\bar{l}_1{}^{-1})^{-1},\quad K_4=K_1(1-2\bar{l}_1{}^{-1})/(1+2\bar{l}_1{}^{-1})$$

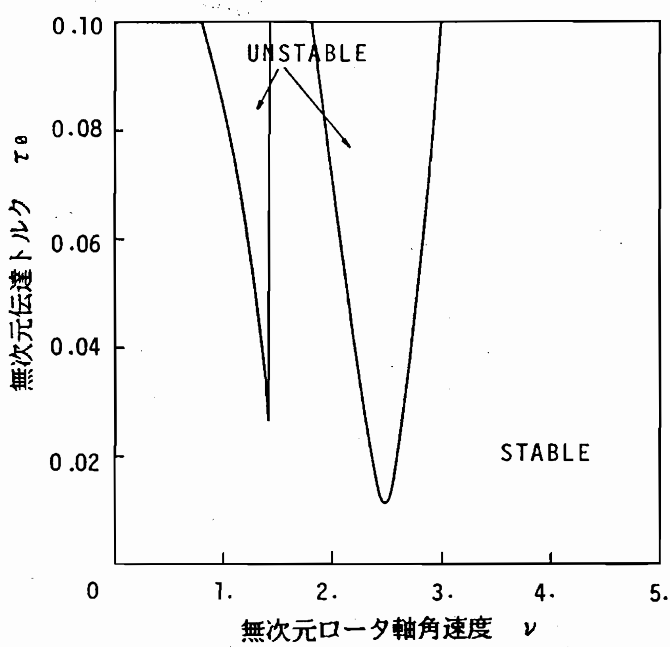
$$L_4=-2K_2,\quad L_5=4K_1/(1+2\bar{l}_1{}^{-1})$$

ここで、伝達トルクはMR４ロータと統一を取るため $\tau_0/\{\cos\alpha_0(1+\sin^2\alpha_0/2)\}$ を τ_0 と置いている。無次元量は式（４･５５）で定義した量と同一である。また、$\bar{l}_1=\bar{l}_2$ と置いている。

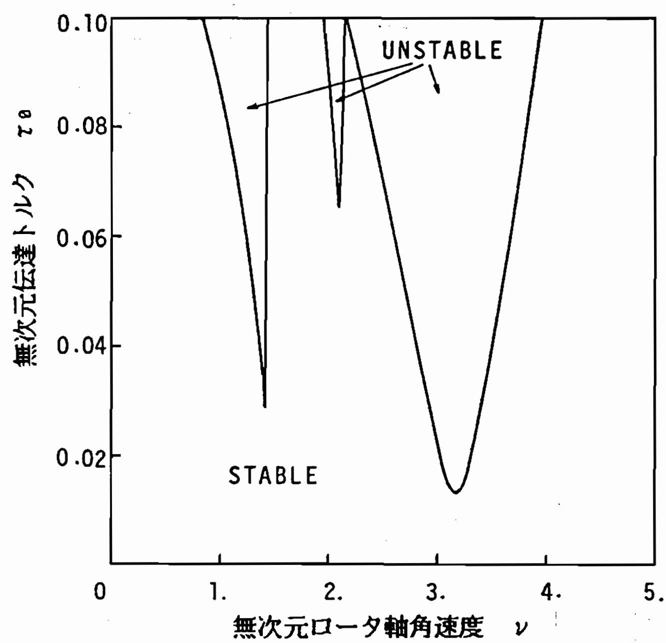
ロータ軸速度は近似的に一定と見なしているので、式（４･８１）に現れている初期交差角の影響は、交差角による伝達トルクの変化に起因する項のみである。なお、駆動軸および負荷軸には回転速度変動が発生することになる。

４・１０・２　安定性の数値計算例と考察

不安定条件の求め方はMR４ロータの初期交差角を含む場合と同じであるので省略する。図４･２７（ａ）～（ｄ）に不安定領域の計算例を示す。これらは、それぞれ図４･２６（ａ）～（ｄ）で初期交差角を考慮した場合である。$\sigma=0$ の場

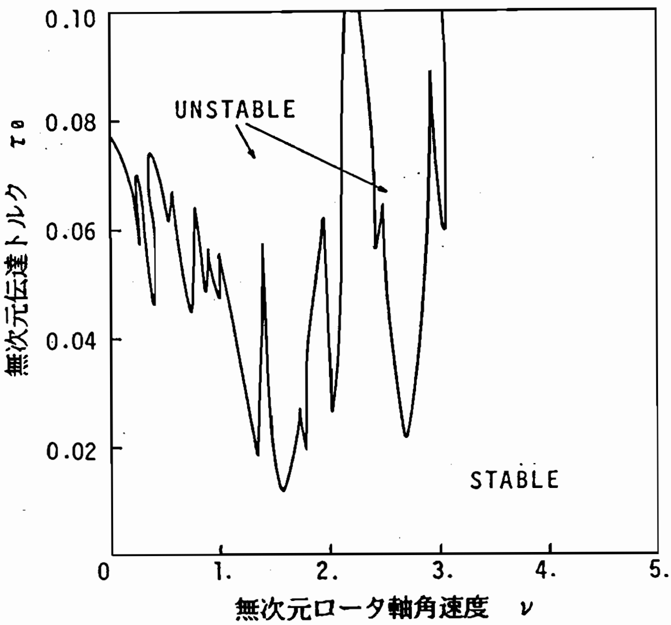


（a） σ＝0，A＝0の場合

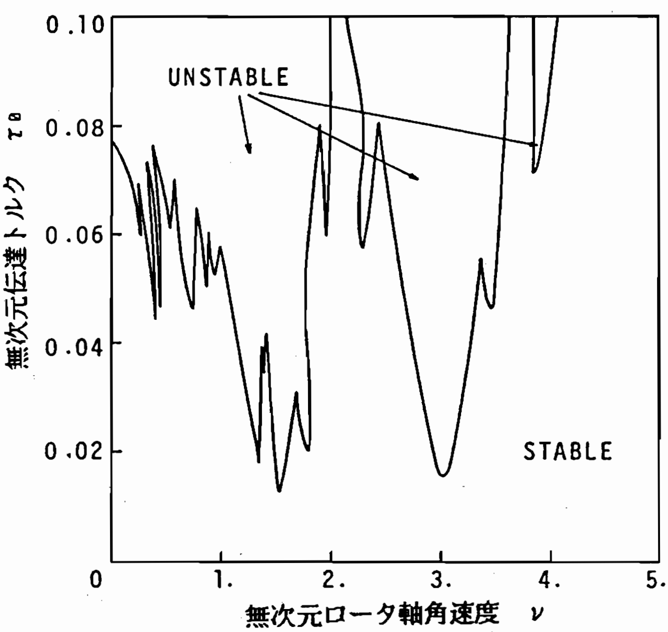


（b） σ＝0，A＝0.03の場合

図4・28　SR4ロータの不安定領域（α_0＝20°，ζ_0＝0.02）



(c) σ＝0.6，A＝0の場合



(d) σ＝0.6，A＝0.03の場合

図4・28　SR4ロータの不安定領域（続き）

合（図４·２７（ａ），（ｂ））には、Ａ＝０．０３の場合に新たに傾き振動モードと並進振動モードの混合共振の不安定領域が発生している。これ以外は初期交差角の影響はあまり現れていない。σ＝０．６の場合（図４·２７（ｃ）、（ｄ））ではν＜１の範囲で初期交差角が系を不安定化するとともに高周波成分により各種モードの組合せの係数励振不安定領域が発生し不安定境界を複雑にしているが、大略的にはそれほど不安定境界に影響を与えていないと言える。

４•１１　結言

十字軸継手を介して駆動されるロータ系のトルク不安定についてＭＲ２、ＭＲ４、ＳＲ２、ＳＲ４の各モデルロータについて解析した結果、以下のことが分かった。

（１）ＭＲ２ロータ、ＭＲ４ロータ、ＳＲ４ロータの運動方程式は、駆動軸及び負荷軸が初期交差角を含む場合、それぞれ、式（４·３９）、式（４·６７）、式（４·８１）で与えられる。

（２）何れのロータモデルの場合も伝達トルクは運動方程式の復元力項に、等速継手で連結された系と同じ一定の非対角成分と周期成分が現れ、自励振動と係数励振振動のいずれも発生させる。周期成分は、初期交差角が存在しない場合は回転角速度の２倍の周波数成分、初期交差角が存在する場合は回転角速度の２倍および４倍の周波数成分を持つ。

（３）自励振動の特性は等速継手系と同じである。

（４）自励振動の不安定化作用と係数励振振動の不安定化作用を比べると、初期交差角が存在しない場合には、主共振の係数励振不安定領域より低速側では係数励振不安定化作用の方が強く高速側では自励振動の方が強い。初期交差角が存在すると、低速域でも自励振動の影響が支配的となる。

（５）ＭＲ２、ＭＲ４ロータでの自励振動はロータ軸が外部に仕事をする場合と外部から仕事をされる場合ではその不安定境界が大幅に変化する。係数励振項が存在する系でも自励振動の影響のためロータ軸が外部に仕事をする場合と外部から仕事をされる場合では不安定境界が大幅に異なる。

（６）初期交差角が存在すると不安定境界は影響を受け、特に低速域では不安

定化作用を持つことが多い。しかし、ロータ軸が外部から仕事をされる場合で軸受剛性異方性が存在しない場合を除いて軸の回転角速度変動の実用的な許容範囲内ではほとんど問題はない。

（７）軸受剛性異方性は自励振動に対しては安定化作用を持つが係数励振振動に対しては不安定領域を拡大し、等速継手系の場合のように必ずしも安定化作用を持たない。回転数域によっては安定化することも不安定化することもある。

（８）ジャイロモーメントは係数励振不安定領域を拡大する。

（９）内部減衰力は係数励振項を除いた系で存在する不安定化（安定化）作用と類似の作用が係数励振項を含む系でも存在する。

（１０）ＳＲ４ロータでは係数励振の主不安定領域は消滅し、結合型係数励振不安定領域のみ存在する。それゆえ、ＭＲ４ロータより安定である。

（１１）係数励振系の無限次元の特性方程式を有限次元で打ち切る場合、系が自励振動系でもあると最高次の固有振動成分について自励振動と係数励振振動の相互作用が無視され、誤った不安定境界を与えることがある。

第5章　たわみ軸継手で連結された回転体の不安定振動

5・1　緒言

発電プラントなどに代表される定置型の大型回転軸系は自在継手でなくたわみ継手で結合されることがほとんどである[81]。その場合、軸継手としては歯車形や金属ばね形（ダイアフラム式や板ばね式）がよく用いられており、最近は歯車形よりも金属ばね形が多く用いられるようになっている。これは軸系の加工精度や据え付け精度が向上しミスアライメントを小さく抑えられるようになったため許容角度が小さいダイアフラム式などでもよくなったことと、歯車継手に起因する異常振動が嫌われるためである。

ダイアフラム軸継手（図5・1）はその回転変位に対するばね定数が軸に比べて十分小さく作られているので、ロータ軸系に不つりあい振動などによるたわみが発生すると、結合されている二軸の間に継手部において無視できない交差角が発生する。この状態でトルクを伝達すると前章までに調べた交差角に起因する横方向のモーメントが発生し系が不安定になることが考えられる。

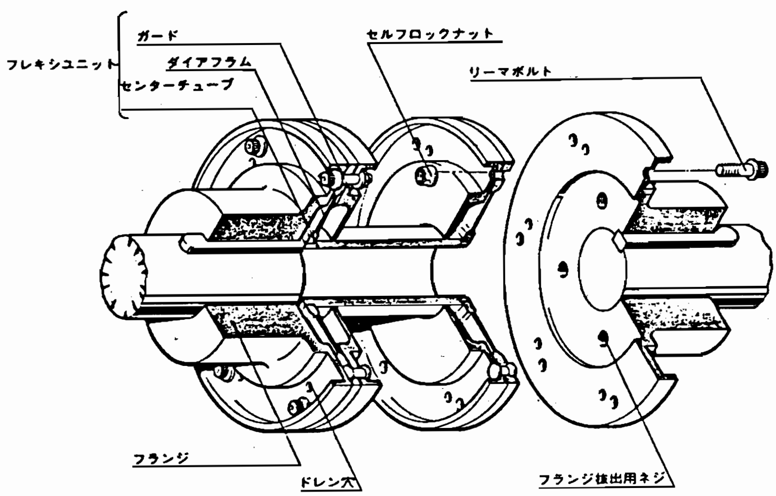
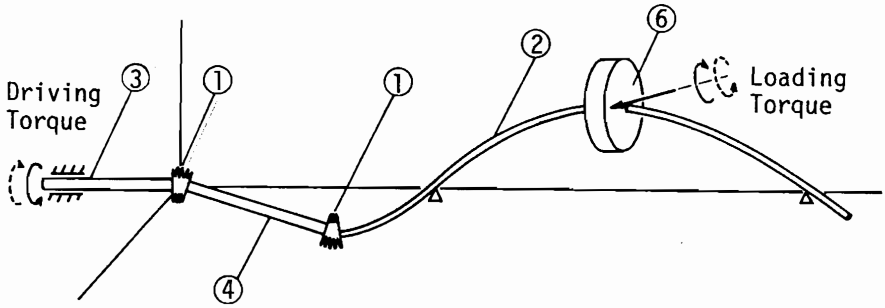


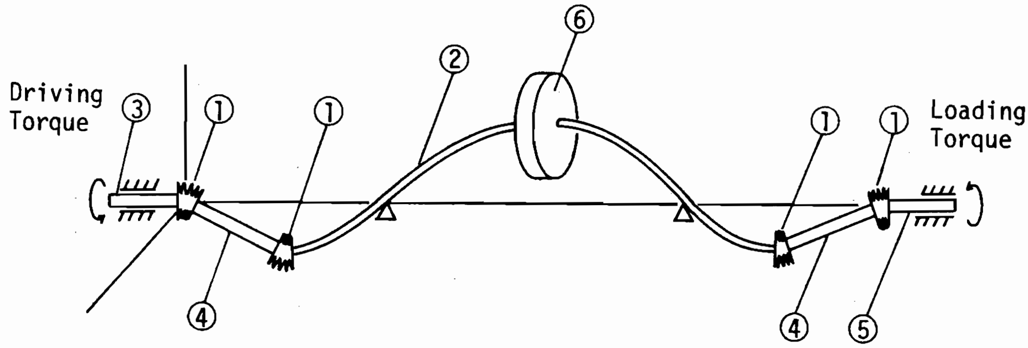
図5・1　ダイアフラム軸継手

ところで、軸継手で連結された二軸に軸トルクが作用しているときのトルクに起因する曲げモーメント成分は、継手がどの様な構造であっても継手の前後で式（２・１５）に相当する式が成立するはずである。ここで、同式中の$\delta\gamma_\theta$が継手の種類に依存して種々の形を取ることになる。第２章の等速継手や第４章の十字軸継手などの自在継手では、従動軸の自転と横変位の関係は機構的に決っておりこの$\delta\gamma_\theta$は比較的すっきりした式で表現できた。ダイアフラム継手を含む軸系をモデル化する際に、ダイアフラムを弾性円板で置き換えることが考えられるが、式（２・１５）の考え方を弾性円板に適用すると弾性体の曲げ変形とねじり変形を同時に考えることになり、通常の弾性解析で行われている解析よりかなり高度な解析を行う必要がある。そのため、この様な方法は基本的な振動解析にはあまり有用とは考えられない。軸系の振動現象を扱うにはもう少しマクロにとらえた方が簡単な計算で見通しのよい振動特性の把握ができると考えられる。例えば、Ｋlompas[4]やＢanister[5]はフランジ継手のばね特性を非線形モデル化して軸振動解析に用いている。そこで、本論文では、継手におけるトルクの伝達方向を仮定し、その方向をパラメータとして不安定化の可能性を検討することにする。

前章までは剛性ロータ系について安定性に及ぼすトルクの影響を検討したが、本章では４自由度の剛性ロータ（図２・１（ｂ），（ｄ））と弾性ロータ（図５・２を扱う。剛性ロータとばね復元力を持つ軸受から成る系は剛支持の弾性ロータ系と振動論的に等価である場合も多いが、軸の傾きが大きな影響を持つトルクに起因する不安定問題では必ずしも等価であるとは限らない。例えば、剛体軸ではつりあって振動論的外力とはならない同じ大きさで符号のみ異なる軸両端の曲げモーメントは、弾性軸では軸のたわみを起こし横変位と傾きを発生させる。弾性軸が回転体を有していればこの回転体の運動に対して加振源となることになる。しかし、弾性軸を含む回転体の解析では剛性ロータの場合のように運動方程式を書き下してトルクの伝達方向の影響を数式上で考察することが困難なため、次節では、まず、ロータ軸系を剛性ロータとして解析し、安定性に及ぼすトルクの作用方向の影響を前章までの結果と比較して考察する。その後、弾性ロータモデルを用いて安定性解析を行い伝達トルクに起因するロータ系の限界トルクを求め、それと一般に軸の設計に用いられる材料強度から決まるロータ軸の限界トルクとの比較検討を行う。



（a）ＭＦ４ロータ



（b）ＳＦ４ロータ

① Flexible Joint ② Flexible Rotor Shaft ③ Rigid Driving Shaft
④ Rigid Intermediate Shaft ⑤ Rigid Loading Shaft ⑥ Disk
Direction of Torque

図５・２　弾性ロータモデル

なお、たわみ継手はミスアライメントの存在する軸系を連結するのに用いるものであるが、軸系の芯違い（平行なずれ、偏角）は軸系にとっては静的な一定のたわみを与えるだけであり[82]、安定性には関係なく強制力として作用するだけであるからここでは考慮しない。

５・２　たわみ継手のモデル化

第２章で解析したように、等速継手では従動軸の横変位に伴う自転角γ_0（式（２·３）、（２·４））は、横変位に伴うねじりが存在しない条件と等価であった。

一方、弾性円板では連結された軸の横変位に伴ってねじりが生じると考えられる。そこで、図２・４と同じ系で継手部分の横変位に伴う従動軸の自転角が$\rho\gamma_\theta$（ρ：パラメータ）であると仮定してみる。$\rho=1$ がねじれのない場合である。このとき、式（２・１５）に対応する継手前後での仮想仕事を考えると、

$$T_\theta(\delta\theta+\rho\delta\gamma_\theta)=M_x\cos\beta\delta\alpha+M_y\delta\beta+M_z(\sin\beta+\delta\theta) \quad (5\cdot1)$$

となり、横方向のモーメントは、α、βの線形の範囲で、

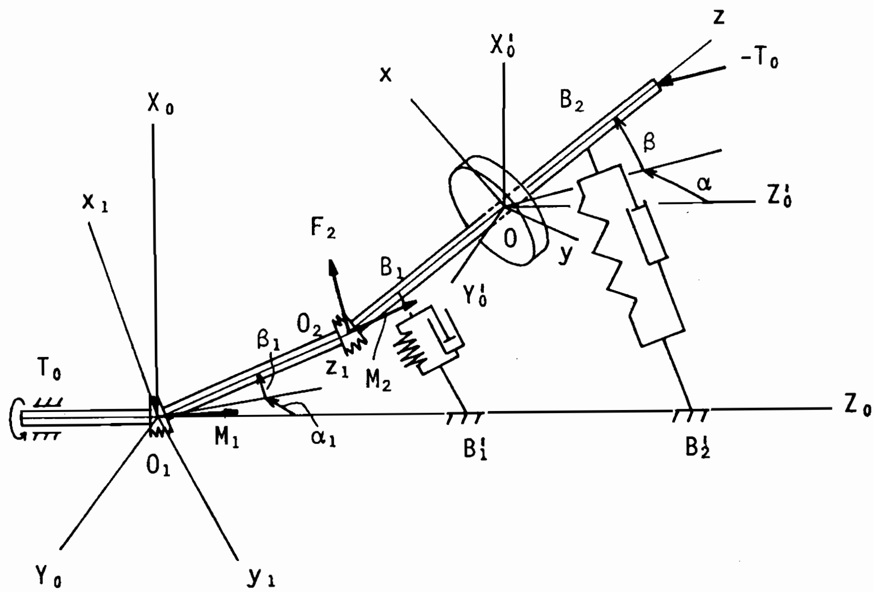
$$M_x=(\rho/2-1)\beta T_\theta, \quad M_y=\rho\alpha T_\theta/2$$

となる。ところが、このモーメントは $\rho\neq1$ では駆動軸と従動軸のなす平面内に存在しない。物理的に考えると、対称に作られた軸継手は変形してもその変形は駆動軸と従動軸のなす面に関して面対称になるはずであり、式（５・１）のような考え方は不合理であることが分かる。一般の変形は式（５・１）のように単純な関係では表現できない。

そこで、継手の前後でトルクの伝達方向を次のようにモデル化する。すなわち、交差する二軸をたわみ継手で結合した場合、伝達トルクの方向は二軸のなす平面内にあり、かつ二軸の交差角の間に存在するはずであるから、その方向を二軸のなす平面内で測った交差角αに対して$\varepsilon_1\alpha$（ε_1：パラメータ；$0\leqq\varepsilon_1\leqq1$）であると仮定する。そして交差角に比例する復元モーメント$k\alpha$（k＝一定）を導入する。第２章との対比で言えば $\varepsilon_1=0.5$, $k=0$ が等速継手の場合である。

５・３　ＭＲ４ロータ系の安定性

本節では第２章のＭＲ４ロータについて前節でモデル化したたわみ継手を用いて結合した場合の安定解析を行う。ＭＲ４ロータでは負荷トルクについても作用方向を表すパラメータを導入する。考察するモデルロータの座標系を図５・３に示す。同モデルは継手部を除いて図２・１５と同じである。駆動トルクは駆動軸に沿ったT_θで、負荷トルクは大きさが$-T_\theta$である。なお、本章では簡単化のため式の記述はすべて微小回転角変位、微小変位の場合である。



$O_1O_2 = l_1$,　$O_2O = l_0$

図５・３　ＭＲ４ロータの座標系

５・３・１　運動方程式

静止座標系$O_1-X_0Y_0Z_0$と中間軸固定座標系$O_1-x_1y_1z_1$、及び回転体中心に原点を持つ静止座標に平行な座標系$O-X_0'Y_0'Z_0'$とロータ軸固定の座標系$O-xyz$とはそれぞれ微小変位角の仮定のもとに次式で変換される。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} \tag{5・2}$$

継手部分では、モーメントは、第１継手で駆動軸と中間軸の交差角［α_1, β_1］に対して静止座標で駆動軸からみて［$\varepsilon_1\alpha_1$, $\varepsilon_1\beta_1$］の方向で伝達される。第２継手で中間軸とロータ軸の交差角［$\alpha-\alpha_1$, $\beta-\beta_1$］に対して中間軸固定の$O_1-x_1y_1z_1$座標で中間軸からみて［$\varepsilon_1(\alpha-\alpha_1)$, $\varepsilon_1(\beta-\beta_1)$］の方向、

すなわち、静止座標でみて［$\varepsilon_1(\alpha-\alpha_1)+\alpha_1$, $\varepsilon_1(\beta-\beta_1)+\beta_1$］の方向で伝達される。ここで、［•,•］は各座標系のx軸回りの角度とy軸回りの角度を示す。このように置くと第1継手で伝達されるモーメント$\mathbf{M}_1$は大きさをM_1として次式で表される。

$$\mathbf{M}_1=M_1\begin{bmatrix}\varepsilon_1\beta_1\\-\varepsilon_1\alpha_1\\1\end{bmatrix}_{x0y0z0}=M_1\begin{bmatrix}(\varepsilon_1-1)\beta_1\\(1-\varepsilon_1)\alpha_1\\1\end{bmatrix}_{x1y1z1}\qquad(5\cdot3)$$

ここで、$\varepsilon_1=0$は伝達トルクが駆動軸方向に沿う場合で、$\varepsilon_1=1$は中間軸方向に沿う場合を意味する。同様に、第2継手において伝達されるモーメント$\mathbf{M}_2$は、大きさをM_2として、

$$\mathbf{M}_2=M_2\begin{bmatrix}\varepsilon_1(\beta-\beta_1)+\beta_1\\-\varepsilon_1(\alpha-\alpha_1)-\alpha_1\\1\end{bmatrix}_{x0y0z0}=M_2\begin{bmatrix}\varepsilon_1(\beta-\beta_1)\\\varepsilon_1(\alpha_1-\alpha)\\1\end{bmatrix}_{x1y1z1}$$

$$=M_2\begin{bmatrix}(\varepsilon_1-1)(\beta-\beta_1)\\(1-\varepsilon_1)(\alpha-\alpha_1)\\1\end{bmatrix}_{xyz}\qquad(5\cdot4)$$

と表せる。第2継手で伝達される力$\mathbf{F}_2$を

$$\mathbf{F}_2=\begin{bmatrix}f_{21}\\f_{22}\\f_{23}\end{bmatrix}_{x1y1z1}=\begin{bmatrix}f_{21}\\f_{22}\\f_{23}\end{bmatrix}_{x0y0z0}\qquad(5\cdot5)$$

と置き、中間軸で原点O_1回りのモーメントのつりあいを取ると次式が成立する（$O_1-x_1y_1z_1$成分表示式を用いる）。

$$T_0\begin{bmatrix}(\varepsilon_1-1)\beta_1\\(1-\varepsilon_1)\alpha_1\\1\end{bmatrix}=M_2\begin{bmatrix}\varepsilon_1(\beta-\beta_1)\\\varepsilon_1(\alpha_1-\alpha)\\1\end{bmatrix}+l_1\begin{bmatrix}-f_{22}\\f_{21}\\0\end{bmatrix}$$

ここで、$M_1=T_0$ と置いている。上式よりM_2, f_{21}, f_{22}を求めると、F_2, M_2は次式となる。

$$l_1F_2$$
$$=T_0\begin{bmatrix}(1-2\varepsilon_1)\alpha_1+\varepsilon_1\alpha\\(1-2\varepsilon_1)\beta_1+\varepsilon_1\beta\\f_{23}\end{bmatrix}_{x0y0z0}=T_0\begin{bmatrix}(1-2\varepsilon_1)\alpha_1+\varepsilon_1\alpha\\(1-2\varepsilon_1)\beta_1+\varepsilon_1\beta\\f_{23}\end{bmatrix}_{x1y1z1} \tag{5・6}$$

$$M_2=T_0\begin{bmatrix}\varepsilon_1\beta+(1-\varepsilon_1)\beta_1\\-\varepsilon_1\alpha+(\varepsilon_1-1)\alpha_1\\1\end{bmatrix}_{x0y0z0}=T_0\begin{bmatrix}(\varepsilon_1-1)(\beta-\beta_1)\\(1-\varepsilon_1)(\alpha-\alpha_1)\\1\end{bmatrix}_{xyz} \tag{5・7}$$

さらに、負荷トルクについてもその作用方向を表すパラメータε_2を用いて次式のように置く。

$$M_3=-T_0\begin{bmatrix}\varepsilon_2\beta\\-\varepsilon_2\alpha\\1\end{bmatrix}_{x0y0z0}=-T_0\begin{bmatrix}(\varepsilon_2-1)\beta\\(1-\varepsilon_2)\alpha\\1\end{bmatrix}_{xyz} \tag{5・8}$$

ここで、$\varepsilon_2=0$は負荷トルクが静止座標方向（駆動軸方向）であることを表し、$\varepsilon_2=1$はロータ軸に沿う方向であることを表す。

運動方程式はオイラーの運動方程式（2・30）で与えられる。外力のうち、軸受力に起因する項は2・4節の場合と同じであるが、伝達トルクに起因する項及び継手部のばね復元モーメントに起因する項は新たに導く必要がある。ところで、

オイラーの運動方程式（２・３０）は回転体の重心回りの三つの回転角と重心の三つの並進変位を一般座標とするラグランジュの運動方程式と見なせる。微小変位では、自転軸回りの回転運動は駆動トルクと負荷トルクの絶対値が等しいから変動がない。また、自転軸方向の並進運動は無視できる。それゆえ、一般座標は重心に原点を持つx軸およびy軸回りの回転角θ_x，θ_yと重心のx軸方向およびy軸方向の変位x_G，y_Gを考えればよい。その場合の一般力は、仮想仕事を$\delta\theta_x$，$\delta\theta_y$，δx_G，δy_G成分に分ければ各変分の係数として得られる(83)。まず、F_2，M_2，M_3が作用するロータ軸に仮想仕事の原理を適用して伝達トルクに起因する一般化力を導く。仮想仕事は、

$$\begin{aligned}\delta w &= f_{21} l_1 \delta\beta_1 - f_{22} l_1 \delta\alpha_1 \\ &\quad + T_0\{\varepsilon_1\beta + (1-\varepsilon_1)\beta_1 - \varepsilon_2\beta\}\delta\alpha \\ &\quad + T_0\{(1-\varepsilon_1)(\alpha-\alpha_1) - (1-\varepsilon_2)\alpha\}\delta\beta \qquad (5\cdot9)\end{aligned}$$

と表せる。変数を次式で表される回転体中心x_G，y_G及び傾き角θ_x，θ_y

$$x_G = l_1\beta_1 + l_0\beta,\quad y_G = -l_1\alpha_1 - l_0\alpha,\quad \theta_x = \beta,\quad \theta_y = -\alpha$$

l_1：中間軸長さ、l_0：第２継手から円板中心までの長さ

で表すと、式（５・９）は

$$\begin{aligned}\delta w &= f_{21}\delta x_G + f_{22}\delta y_G \\ &+ [-l_0 f_{21} + T_0\{(1-\varepsilon_1)(\alpha-\alpha_1) + (\varepsilon_2 - 1)\alpha\}]\delta\theta_x \\ &+ [-l_0 f_{22} + T_0\{-\varepsilon_1\beta + (\varepsilon_1 - 1)\beta_1 + \varepsilon_2\beta\}]\delta\theta_y \qquad (5\cdot9)'\end{aligned}$$

となり、x_G，y_G，θ_x，θ_yに関する一般化力F_{xG}，F_{yG}，$F_{\theta x}$，$F_{\theta y}$が、次式のように得られる。

$$F_x = [(2\varepsilon_1 - 1)y_G/l_1 + \{(1-2\varepsilon_1)l_0/l_1 - \varepsilon_1\}\theta_y]T_0/l_1$$

$$F_y = [(1-2\varepsilon_1)x_G/l_1 + \{(2\varepsilon_1 - 1)l_0/l_1 + \varepsilon_1\}\theta_x]T_0/l_1$$

$$F_{\theta x} = [\{(1-2\varepsilon_1)l_0/l_1 + (1-\varepsilon_1)\}y_G/l_1 + \{(2\varepsilon_1-1)l_0^2/l_1^2 + (2\varepsilon_1-1)l_0/l_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}\theta_y]T_0$$

$$F_{\theta y} = [\{(2\varepsilon_1-1)l_0/l_1 + (\varepsilon_1 - 1)\}x_G/l_1 + \{(1-2\varepsilon_1)l_0^2/l_1^2 + (1-2\varepsilon_1)l_0/l_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\}\theta_x]T_0 \tag{5・10}$$

次に、ばね復元モーメントに起因する項を伝達トルクと同様に一般化力として求める。このモーメントは継手で連結した二軸の相対変位角に比例すると仮定しているから、第１継手において中間軸に作用するモーメントは

$$M_1 = k\begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{X0Y0Z0} = k\begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x1y1z1} \tag{5・11}$$

と表せる。第２継手においてロータ軸側に作用するモーメントは、

$$M_2 = k\begin{bmatrix} -(\alpha-\alpha_1) \\ -(\beta-\beta_1) \\ 0 \end{bmatrix}_{X0Y0Z0} = k\begin{bmatrix} -(\alpha-\alpha_1) \\ -(\beta-\beta_1) \\ 0 \end{bmatrix}_{x1y1z1}$$

$$= k\begin{bmatrix} -(\alpha-\alpha_1) \\ -(\beta-\beta_1) \\ 0 \end{bmatrix}_{xyz} \triangleq \begin{bmatrix} M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} \tag{5・12}$$

と表せる。これらのモーメントに起因して第２継手において発生する力を

$$F_2 = \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix}_{x1y1z1} = \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix}_{xyz} \tag{5・13}$$

と置けば、中間軸におけるモーメントのつりあいより$O_1-x_1y_1z_1$成分で

$$M_1=M_2+l_1\begin{bmatrix}-f_{22}\\ f_{21}\\ 0\end{bmatrix}$$

が成立する。これより、

$$l_1F_2=k\begin{bmatrix}\beta-2\beta_1\\ 2\alpha_1-\alpha\\ 0\end{bmatrix}_{x_1y_1z_1}=k\begin{bmatrix}\beta-2\beta_1\\ 2\alpha_1-\alpha\\ 0\end{bmatrix}_{x_0'y_0'z_0'} \qquad (5\cdot14)$$

が得られる。M_2, F_2が作用する系に仮想仕事の原理を適用すると、

$$\delta w=f_{21}(\delta x_G-l_0\delta\theta_x)+f_{22}(\delta y_G-l_0\delta\theta_y)$$
$$-M_{2x}\delta\theta_y+M_{2y}\delta\theta_x$$

となり、x_G, y_G, θ_x, θ_yに関する一般化力

$$F_{xG}=-k\{2x_G/l_1{}^2-(1+2l_0/l_1)\theta_x/l_1\}$$

$$F_{yG}=-k\{2y_G/l_1{}^2-(1+2l_0/l_1)\theta_y/l_1\}$$

$$F_{\theta x}=-k\{-(1+2l_0/l_1)x_G/l_1$$
$$+(2l_0{}^2/l_1{}^2+2l_0/l_1+1)\theta_x\}$$

$$F_{\theta y}=-k\{-(1+2l_0/l_1)y_G/l_1$$
$$+(2l_0{}^2/l_1{}^2+2l_0/l_1+1)\theta_y\}$$

$$(5\cdot15)$$

を得る。

式（5·10）、（5·15）および軸受力に関する式（2·29）を式（2·3

0）に代入すると、運動方程式は式（2·32）と同じ無次元量を用いて次式で表される。

$$\ddot{X}+C\dot{X}+(B_0+\kappa B_0{}'+\tau_0 B_1)X=0 \qquad (5\cdot16)$$

$$X=[\theta_x \quad \theta_y \quad \bar{x}_G \quad \bar{y}_G]^T$$

C，B_0は式（2·32）と同じ。

$$B_0{}'=\bar{l}_6/\bar{l}_1{}^2 \times \begin{bmatrix} (1+\bar{l}_1+\bar{l}_1{}^2/2) & 0 & -(1+\bar{l}_1/2) & 0 \\ 0 & (1+\bar{l}_1+\bar{l}_1{}^2/2) & 0 & -(1+\bar{l}_1/2) \\ -\bar{i}^2(1+\bar{l}_1/2) & 0 & \bar{i}^2 & 0 \\ 0 & -\bar{i}^2(1+\bar{l}_1/2) & 0 & \bar{i}^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0 & \begin{array}{c}\varepsilon_2-\varepsilon_1+(1-2\varepsilon_1)/\bar{l}_1\\ +(1-2\varepsilon_1)/\bar{l}_1{}^2\end{array} & 0 & \begin{array}{c}(2\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1{}^2\\ +(\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1\end{array} \\ \begin{array}{c}\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1\\ +(2\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1{}^2\end{array} & 0 & \begin{array}{c}(1-2\varepsilon_1)/\bar{l}_1{}^2\\ +(1-\varepsilon_1)/\bar{l}_1\end{array} & 0 \\ 0 & (2\varepsilon_1-1+\varepsilon_1\bar{l}_1)\bar{i}^2/\bar{l}_1{}^2 & 0 & (1-2\varepsilon_1)\bar{i}^2/\bar{l}_1{}^2 \\ (1-2\varepsilon_1-\varepsilon_1\bar{l}_1)\bar{i}^2/\bar{l}_1{}^2 & 0 & (2\varepsilon_1-1)\bar{i}^2/\bar{l}_1{}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

但し、$\kappa=k/(K l_0{}^2)$；K：軸受平均ばね定数、（$\bar{\bullet}$）：l_0による無次元化。

明らかに式（5·16）のB_1は、式（2·32）のB_1マトリクスで$\varepsilon_1=0.5$、$a_0=0$と置いた場合に一致する。式（5·16）より$\varepsilon_1\neq0.5$の場合には分母

に$\bar{I}_1^2$を含む項が現れる。$\bar{I}_1$は通常１に比べてかなり小さい値であるからこれらの項の絶対値はそれ以外の項に比べて大きい。それゆえ、$\varepsilon_1=0.5$の前後でε_1の影響は大幅に変化することが予測される。復元力項非対角成分の対称性については、θ_x，θ_yに関する２自由度連成項（B_1のの項）は$\varepsilon_1\neq0.5$の場合も$\varepsilon_1=0.5$の場合と同様に逆対称である。x_G，y_Gに関する２自由度連成項（B_1のの項）は$\varepsilon_1\neq0.5$の場合に$\varepsilon_1=0.5$の場合では存在しない逆対称成分が生じている。４自由度連成項も$\varepsilon_1=0.5$の場合には対角線に関して対称であったが、$\varepsilon_1\neq0.5$の場合には対称性がくずれ一般に対称成分と逆対称成分が生じる。これらより、不安定境界は$\varepsilon_1=0.5$の場合と$\varepsilon_1\neq0.5$の場合でかなり傾向が異なるとともに、$\varepsilon_1\neq0.5$では$\bar{I}_1^{-2}$や$\bar{I}_1^{-1}$を含む項が現れるため$\varepsilon_1=0.5$の場合に比べ不安定化するものと予測される。

５・３・２　安定性の数値計算例と考察

式（５・１６）の運動方程式を第２章と同じ解析方法に従って不安定解析を行った。図５・４にＨ＝０のときのε_1の影響を図２・１６と同じパラメータの値について示してある。前項で考察したように、$\varepsilon_1\neq0.5$では不安定境界は$\varepsilon_1=0.5$にくらべてかなり低下しており$\bar{I}_1$が小さいほどその差が著しい。しかし、細かく見ると（同図右）、$\varepsilon_1=0.5$の近傍では$\bar{I}_1$によって不安定境界はそれほど変化していない。これは、この近傍では$\bar{I}_1$を含まないθ_x，θ_yの２自由度連成項（$\varepsilon_2-\varepsilon_1$）が支配的であるためと考えられる。この傾向はジャイロモーメントの影響が存在する場合でも変わらない。図５・５にＨ≠０の場合を$\bar{I}_1$を変えて計算した例を示す。同図は$\kappa=0$，$\sigma=0$の場合である。ジャイロモーメントの影響は$\varepsilon_1=0.5$の場合にはε_2によって変わるが、$\varepsilon_1=0$または$\varepsilon_1=1.0$の場合にはε_2にはほとんど依存していない（厳密には同一ではない）。これは第２章および第３章で明らかにした復元力項非対角成分の不安定化特性に起因するものと考えられる。すなわち、復元力項非対角成分が逆対称成分を含む場合（ＭＲ４ロータ）ではジャイロモーメントが不安定境界に影響を与え、復元力項非対角成分が対称成分のみとなる場合（ＳＲ４ロータ）ではジャイロモーメントが不安定境界に影響を及ぼさない。式（５・１６）の場合、$\varepsilon_1=0.5$では逆対称成分はε_2

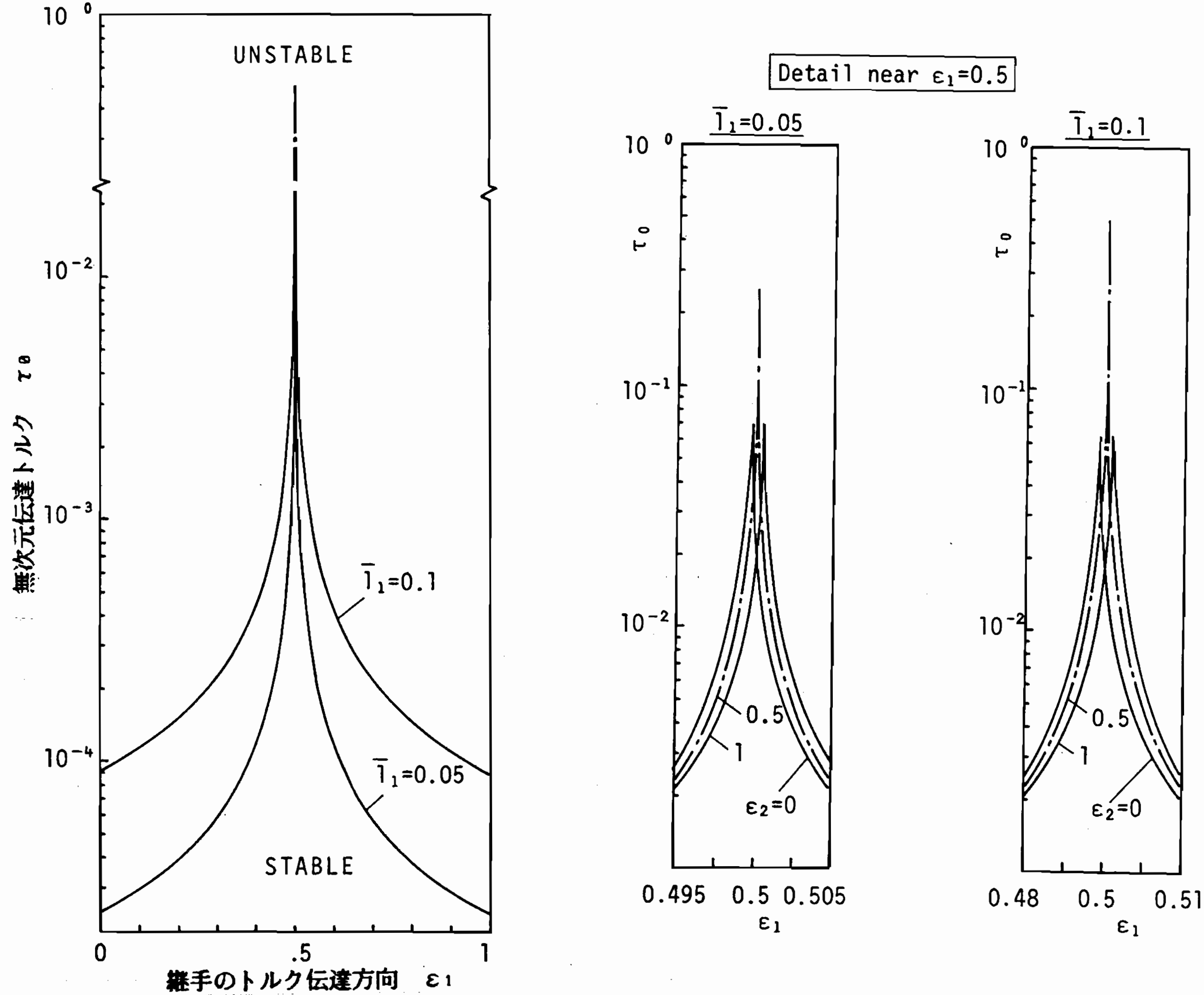


図５・４　ＭＲ４ロータの不安定領域に及ぼすε_1の影響（Ｈ=０，κ=０，σ=０，ζ_0=０.０１）

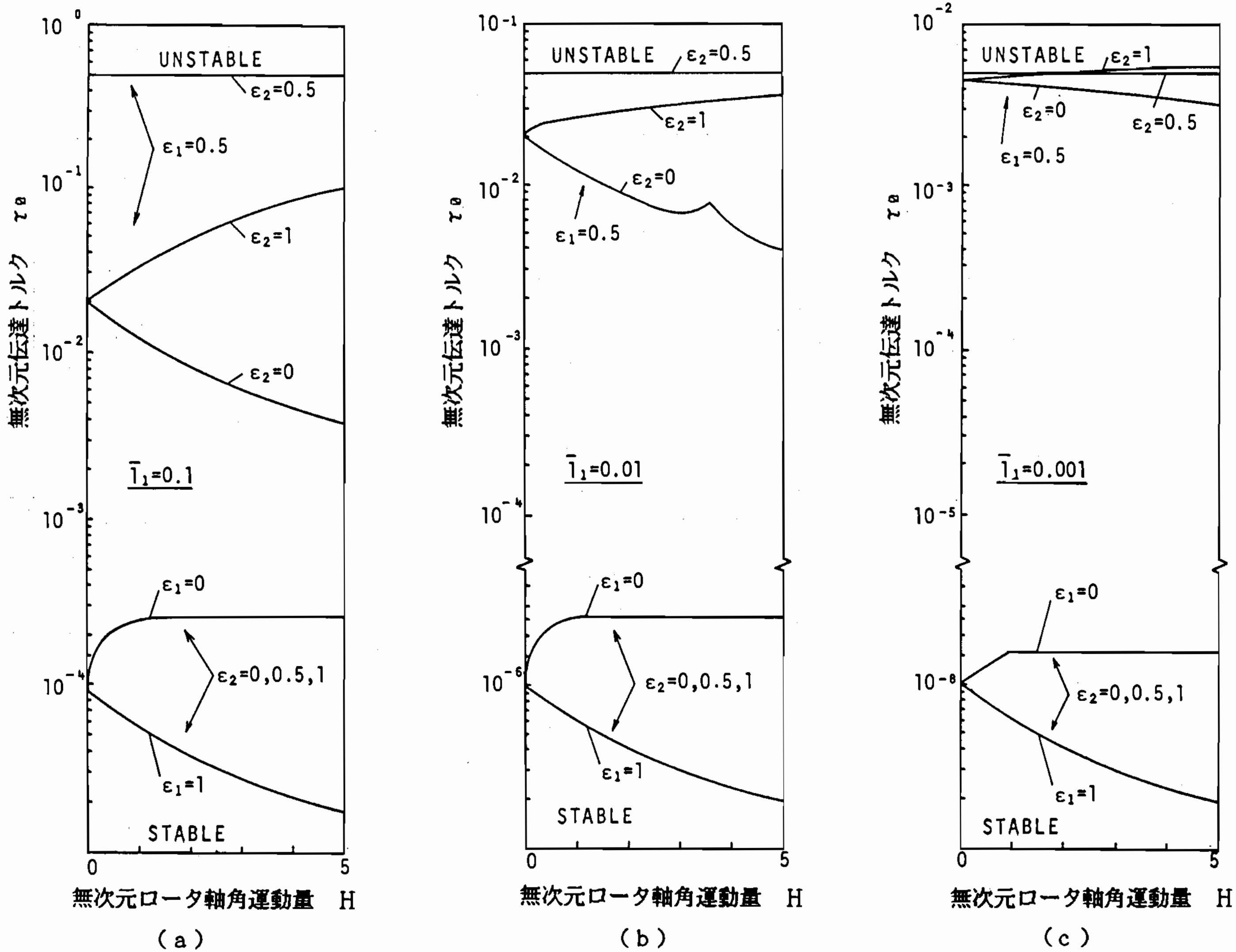


図5・5　MR4ロータの不安定領域（$\kappa=0, \sigma=0, \zeta_o=0.01$）

を含む項にしか存在しないのでε_2の影響を強く受ける。$\varepsilon_1 \neq 0.5$では逆対称成分がすべての項に存在し、しかもε_2を含む項は$\bar{I}_1^{-1}$を含まないので、ε_2の影響が$\bar{I}_1^{-1}$を含む項の影響に隠れてしまいε_2による不安定境界の差が見られなくなるものと考えられる。逆対称成分が全く存在しなくなる$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$ではジャイロモーメントの影響は全くない。$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$の場合、第３章の解析より不安定は静的であることは明かである。図５・５の$\varepsilon_1 = 0.5$，$\varepsilon_2 = 1.0$ の場合が図２・１６の場合である。第２章では、$\sigma = 0$の場合ジャイロモーメントが安定化作用をもたらすと考えたが、図５・５より負荷トルクの方向に起因して$\varepsilon_2 = 1$（第２章の場合）では安定化作用を持つが$\varepsilon_2 = 0$の場合では全く安定化作用を持たないことが分かった。

次に、図５・６に軸受剛性異方性の影響を示す。同図は$\kappa = 0$，$\sigma = 0.6$の場合である。図５・５と比較すると、$\varepsilon_1 = 0.5$，$\varepsilon_2 = 0.5$の場合を除いてごく低速域では安定化している。２・６節に示したように、対称な４自由度連成項のみ存在する$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$の場合ではHが不安定境界に影響を及ぼさない。図５・５、図５・６の$\bar{I}_1$の影響を見ると、これらの図では（ａ）→（ｂ）→（ｃ）と$\bar{I}_1$が小さくなるほど不安定化しており、しかも$\bar{I}_1$が小さくなるにつれて$\varepsilon_1 = 0.5$の場合と$\varepsilon_1 = 0$，1.0の場合の不安定境界の差が著しくなっていることが分かる。いずれの場合も大略的には$\varepsilon_1 = 0.5$の不安定境界は$\bar{I}_1^{-1}$に比例して変化しており、$\varepsilon_1 = 0$，1.0の不安定境界は$\bar{I}_1^{-2}$に比例して変化している。これらの傾向は式（５・１６）より次のように考えられる。すなわち、$\varepsilon_1 = 0.5$の場合はB_1の各要素は$\bar{I}_1^{-1}$を含まない項と$\bar{I}_1^{-1}$に比例した項のみのため不安定境界が$\bar{I}_1^{-1}$に比例して変化し、$\varepsilon_1 \neq 0.5$の場合には$\bar{I}_1^{-2}$を含む項が現れるため絶対値が最も大きくなるこれらの項に比例して不安定境界が変化する。

次に、たわみ継手のばね定数κの影響を$\bar{I}_1 = 0.1$の場合について図５・７、図５・８に示す。図５・７は$\sigma = 0$の場合、図５・８は$\sigma = 0.6$の場合である。各図とも（ａ）が$\kappa = 0$、（ｂ）が$\kappa = 0.01$、（ｃ）が$\kappa = 0.1$の場合である。ほとんどの不安定境界がκが大きくなるにつれて安定化している。明らかに剛性ロータでは$\kappa \to \infty$で振動しなくなる（完全に安定）ので、その過程としてκがそれほど大きくなくてもκが大きくなるほど安定化していくものと考えられる。

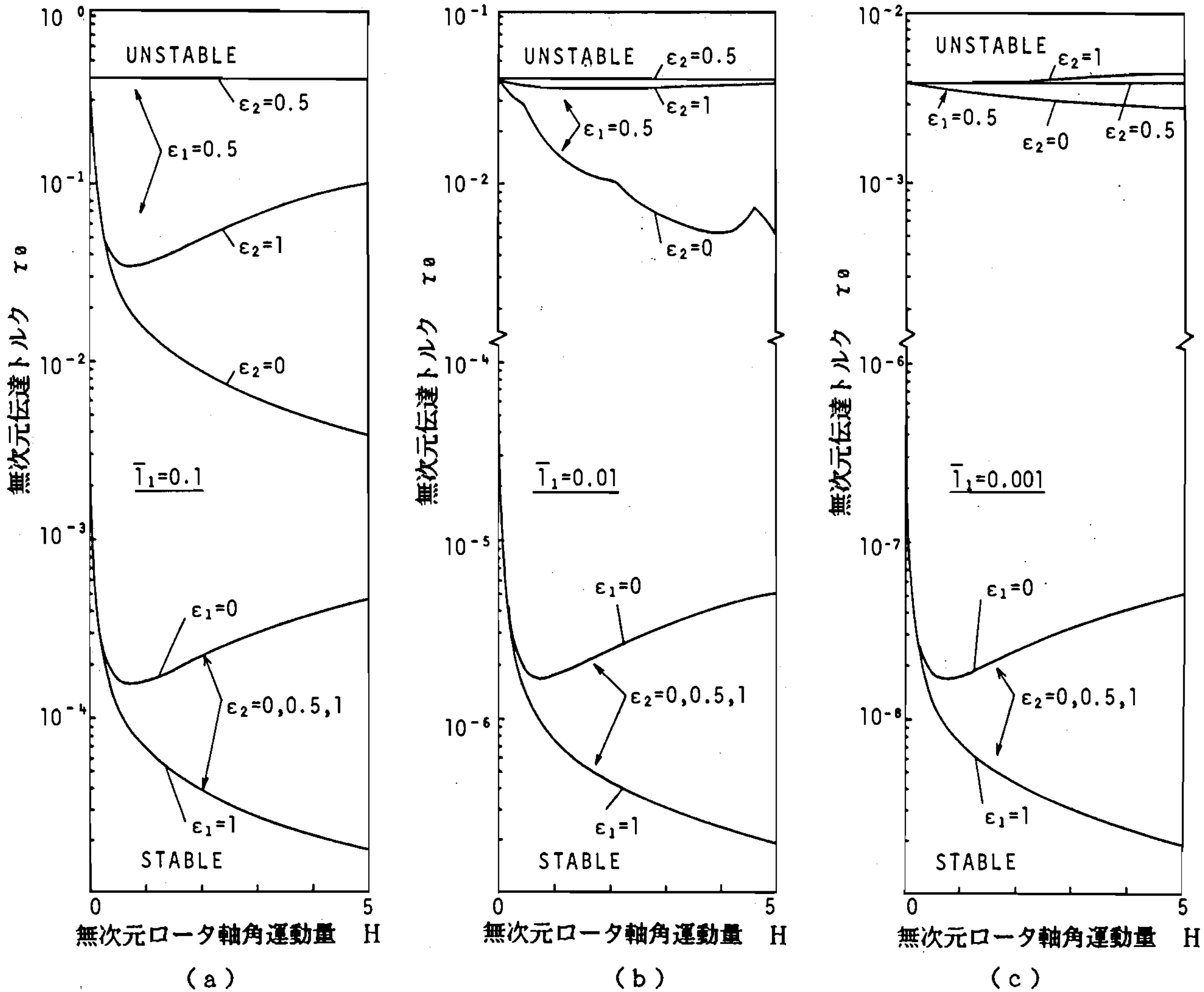


図５・６　ＭＲ４ロータの不安定領域（κ=０，σ=０．６，ζ_o=０．０１）

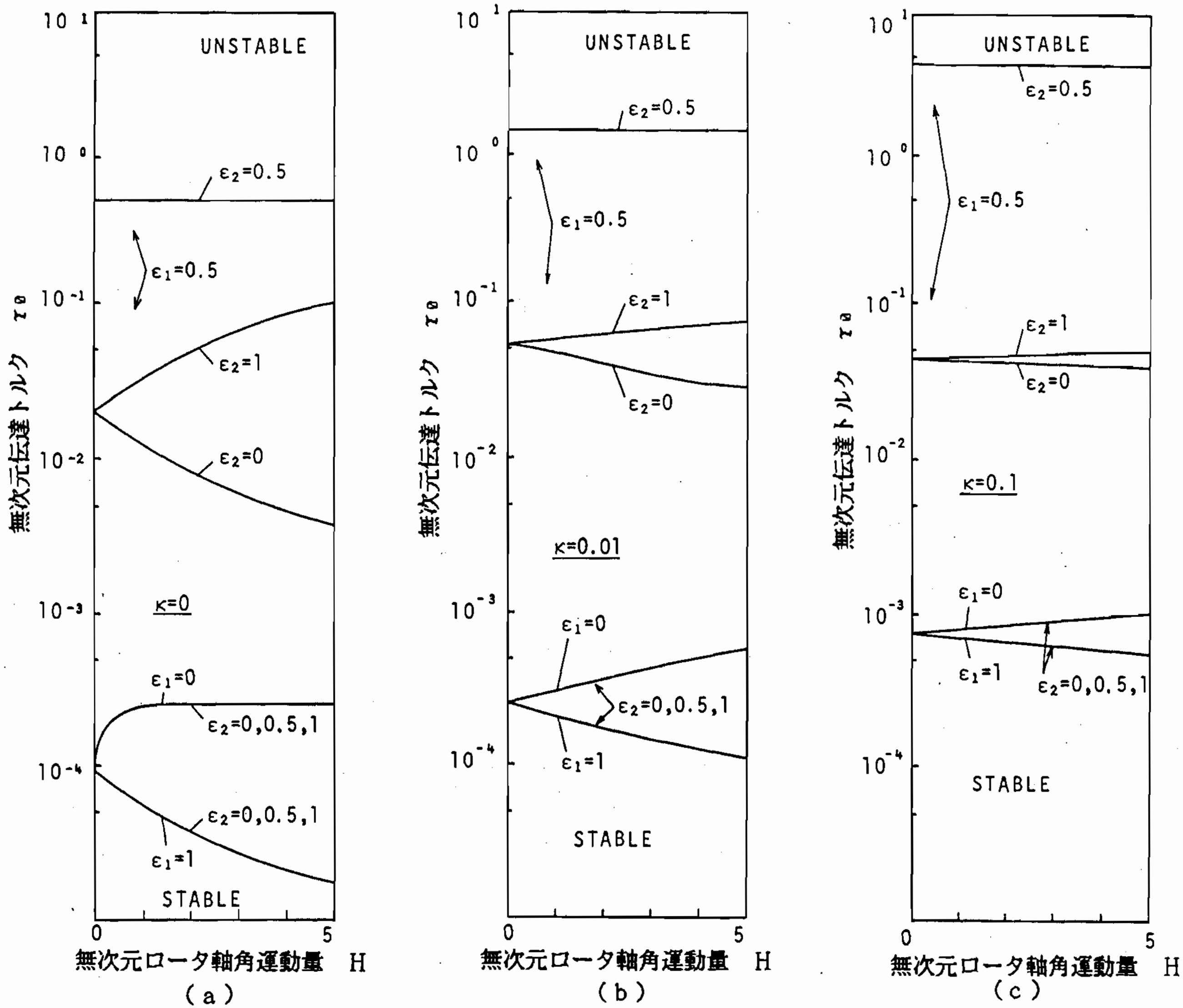


図５・７　ＭＲ４ロータの不安定領域に及ぼすκの影響（σ=0，$\bar{I}_1$=0．1，ζ_e=0．0 1）

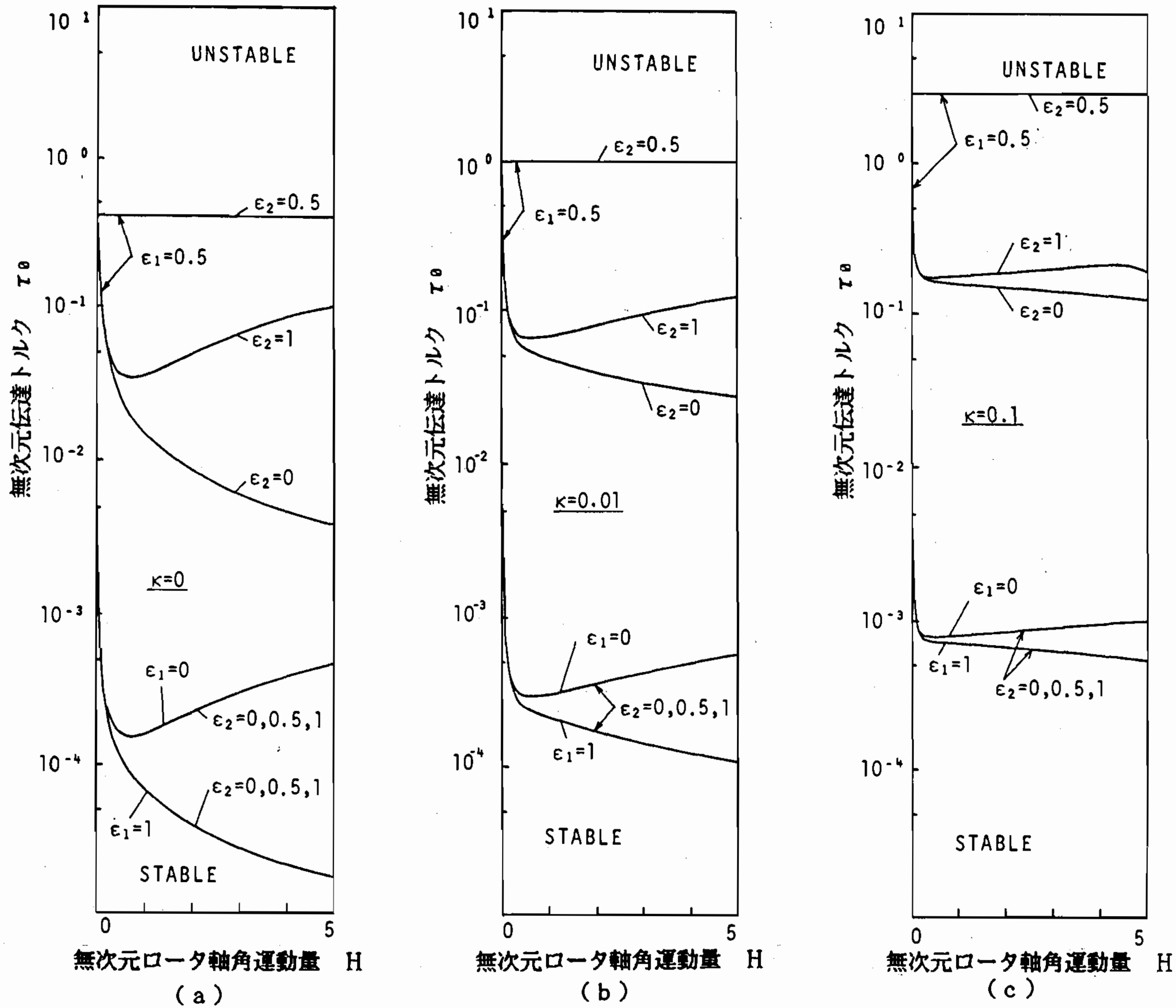


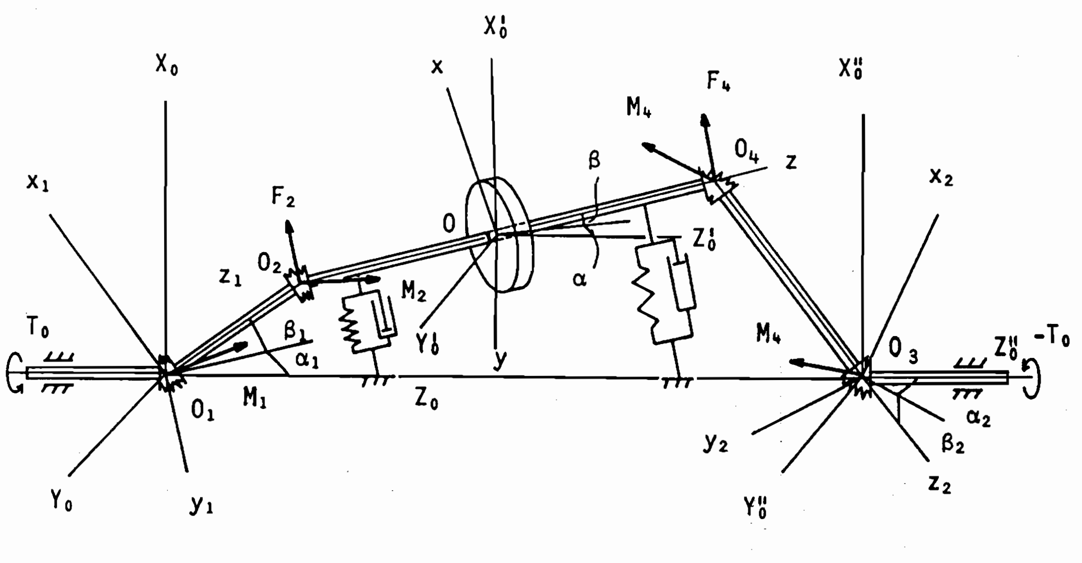
図５・８　ＭＲ４ロータの不安定領域に及ぼすκの影響（σ=０.６，$\bar{I}_1$=０.１，ζ_0=０.０１）

５・４　ＳＲ４ロータ系の安定性

考察するモデルロータの座標系を図５・９に示す。モデルは継手がたわみ継手であることを除いて第２章で解析したＳＲ４ロータと同じである。

５・４・１　運動方程式

ロータ軸に作用する駆動トルクに起因した力及びモーメントF_2とM_2は式（５・６）、式（５・７）で与えられる。負荷側の条件は駆動側の条件と同一でトルクの作用方向が逆になるだけであるので、前節と同じ過程をたどれば負荷トルクに起因したロータ軸に作用するモーメントと力 M_4，F_4を導くことができる。負荷側中間軸の回転変位角をα_2，β_2と表わす（図５・９に示す方向を正と定義する）。静止座標系$O_1-X_0Y_0Z_0$に平行な原点をO_3とする座標系$O_3-X_0''Y_0''Z_0''$及び負荷側中間軸に固定した動座標系$O_3-x_2y_2z_2$を取る。z_2軸は中間軸から負荷軸に向う方向を正とする。駆動軸側と同様に考えると、Z_0''軸方向に$-T_0$のトルクが作用し、z_2軸方向$-l_2$に継手中心があると考えればよいから、式（５・６）、式（５・７）より



$O_1O_2=l_1$，$O_3O_4=l_2$，$O_2O_4=l$

図５・９　ＳＲ４ロータの座標系

$$l_2 F_4 = T_0 \begin{bmatrix} (1-2\varepsilon_1)\alpha_2+\varepsilon_1\alpha \\ (1-2\varepsilon_1)\beta_2+\varepsilon_1\beta \\ f_{43} \end{bmatrix}_{X0Y0Z0} = T_0 \begin{bmatrix} (1-2\varepsilon_1)\alpha_2+\varepsilon_1\alpha \\ (1-2\varepsilon_1)\beta_2+\varepsilon_1\beta \\ f_{43} \end{bmatrix}_{x2y2z2} \tag{5・17}$$

$$M_4 = T_0 \begin{bmatrix} -\varepsilon_1\beta+(\varepsilon_1-1)\beta_2 \\ \varepsilon_1\alpha+(1-\varepsilon_1)\alpha_2 \\ -1 \end{bmatrix}_{X0Y0Z0} = T_0 \begin{bmatrix} (1-\varepsilon_1)(\beta-\beta_2) \\ (\varepsilon_1-1)(\alpha-\alpha_2) \\ -1 \end{bmatrix}_{xyz} \tag{5・18}$$

が得られる。F_2, F_4, M_2, M_4が作用するロータ軸に仮想仕事の原理を適用すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta w =& f_{21} l_1 \delta\beta_1 - f_{22} l_1 \delta\alpha_1 - f_{41} l_2 \delta\beta_2 + f_{42} l_2 \delta\alpha_2 \\ &+ T_0\{\varepsilon_1\beta+(1-\varepsilon_1)\beta_1\}\delta\alpha + T_0(1-\varepsilon_1)(\alpha-\alpha_1)\delta\beta \\ &- T_0\{\varepsilon_1\beta+(1-\varepsilon_1)\beta_2\}\delta\alpha - T_0(1-\varepsilon_1)(\alpha-\alpha_2)\delta\beta \end{aligned} \tag{5・19}$$

変数をロータ中心の傾きθ_x, θ_yと変位x_G, y_G

$$\begin{aligned} x_G &= l_1\beta_1 + l_0\beta = -l_2\beta_2 - l_0\beta, \\ y_G &= -l_1\alpha_1 - l_0\alpha = l_2\alpha_2 + l_0\alpha, \\ \theta_x &= \beta, \qquad \theta_y = -\alpha \end{aligned}$$

（$2 l_0 = l$：ロータ軸長さ）

に置き直し、式（5・19）を変形するとx_G, y_G, θ_x, θ_yに関する一般化力、

$$\begin{aligned} F_{xG} &= 2T_0\{(1-2\varepsilon_1)l_0/l_1-\varepsilon_1\}\theta_y/l_1 \\ F_{yG} &= 2T_0\{(2\varepsilon_1-1)l_0/l_1+\varepsilon_1\}\theta_x/l_1 \\ F_{\theta x} &= 2T_0\{(1-2\varepsilon_1)l_0/l_1+1-\varepsilon_1\}y_G/l_1 \end{aligned}$$

$$F_{\theta y}=2T_0\{(2\varepsilon_1-1)l_0/l_1+\varepsilon_1-1\}x_G/l_1 \tag{5·20}$$

が得られる。なお、簡単化のため $l_1=l_2$ と置いている。

次に、ばね復元モーメントに起因する項を前節と同様に一般化力として求める。駆動軸側継手の復元モーメントに起因するモーメント及び力M_2, F_2は式(5·12)、(5·14)で与えられる。負荷側継手については、M_2, F_2に置いて $\alpha_1\to\alpha_2$, $\beta_1\to\beta_2$, $l_1\to -l_2$ と置くことによりモーメントM_4および力F_4が求められ、次のようになる。

$$M_4=k\begin{bmatrix}-(\alpha-\alpha_2)\\-(\beta-\beta_2)\\0\end{bmatrix}_{xyz(X0Y0Z0)} \triangleq \begin{bmatrix}M_{4x}\\M_{4y}\\M_{4z}\end{bmatrix} \tag{5·21}$$

$$F_4=k/l_2\begin{bmatrix}2\beta_2-\beta\\\alpha-2\alpha_2\\f_{43}\end{bmatrix}_{X0'Y0'Z0'(x1y1z1)} \triangleq \begin{bmatrix}f_{41}\\f_{42}\\f_{43}\end{bmatrix}_{xyz} \tag{5·22}$$

M_2, M_4, F_2, F_4が作用している系に仮想仕事の原理を適用すると

$$\begin{aligned}\delta w=&f_{21}l_1\delta\beta_1-f_{22}l_1\delta\alpha_1+M_{2X0}\delta\alpha+M_{2y}\delta\beta\\&-f_{41}l_2\delta\beta_2+f_{42}l_2\delta\alpha_2+M_{4X0}\delta\alpha+M_{4y}\delta\beta\end{aligned} \tag{5·23}$$

が得られる。変数をx_G, y_G, θ_x, θ_yに変換し、これらに関する一般化力を求めると次式となる。

$$F_{xG}=-2kx_G/l_1^2$$
$$F_{yG}=-2ky_G/l_1^2$$
$$F_{\theta x}=-2k(2l_0^2/l_1^2+2l_0/l_1+1)\theta_x$$
$$F_{\theta y}=-2k(2l_0^2/l_1^2+2l_0/l_1+1)\theta_y$$

$$(5\cdot24)$$

運動方程式は式（５・１６）と同じ形で表され、

$$\ddot{X}+C\dot{X}+(B_0+\kappa B_0'+\tau_0 B_1)X=0 \qquad (5\cdot25)$$

とおける。ここで、X，C，B_0は式（５・１６）と同じである。伝達トルクを含む項は式（５・２０）より式（５・２６）となり、継手の復元モーメントによる項は式（５・２４）より式（５・２７）となる。なお、同式中（$\bar{\bullet}$）はl_0で無次元化した量である。

$$B_1=2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (2\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1^2+(\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1 \\ 0 & 0 & (1-2\varepsilon_1)/\bar{l}_1^2+(1-\varepsilon_1)/\bar{l}_1 & 0 \\ 0 & \{(2\varepsilon_1-1)/\bar{l}_1^2+\varepsilon_1/\bar{l}_1\}\,\bar{i}^2 & 0 & 0 \\ \{(1-2\varepsilon_1)/\bar{l}_1^2-\varepsilon_1/\bar{l}_1\}\,\bar{i}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5\cdot26)$$

$$B_0'=2\bar{l}_6/\bar{l}_1^2 \times\begin{bmatrix} (1+\bar{l}_1+\bar{l}_1^2/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\bar{l}_1+\bar{l}_1^2/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{i}^2 \end{bmatrix} \qquad (5\cdot27)$$

B_1は式（５・１６）の場合の４自由度連成項を２倍したものであり、$\varepsilon_1=0.5$の場合は等速継手で連結されたＳＲ４ロータの運動方程式（２・４１）の

B_1マトリクスで$a_\theta=0$の場合に一致する。この場合も$\varepsilon_1\neq0.5$では$\bar{I}_1^{-2}$を含む項が現れるため各成分の絶対値が$\varepsilon_1=0.5$の場合よりもかなり大きくなり、ε_1が0.5からずれると急激に不安定化することが考えられる。前節の場合と同様に、$\varepsilon_1\neq0.5$では非対角成分の対称性がくずれ一般に対称成分と逆対称成分が存在するため、$\varepsilon_1\neq0.5$では系の安定性は2・6節で解析した等速継手で連結されたSR4ロータとは定性的にも異なると考えられる。B_θ'は式(5・16)の場合のB_θ'の対角成分のみを2倍したものであり、式(5・16)と異なり各変数間の連成成分はない。

5・4・2　安定性の数値計算例と考察

運動方程式(5・25)を前節と同様に解析したときの不安定領域の例を図5・10〜5・14に示す。図5・10は$H=0$, $\kappa=0$のときのε_1の影響を$\bar{I}_1$をパラメータにして調べたものである。MR4ロータの図5・4と同様にε_1が0.5からずれると急激に不安定化しており、しかも$\bar{I}_1$が小さいほどその差が大きくなっている。ただ、図5・4と異なり図5・10では$\bar{I}_1\approx0.1$では$\varepsilon_1=0.5$で最も安定になるのではなくε_1が0.5から少しずれた点で最も安定になっている。同図は$\varepsilon_1=0.5$に関して不安定境界が対称になっている。このことは第3章3・3節(c)の結果及び式(5・26)より理解できる。すなわち、式(5・26)の各成分の第1項は対角線に関して逆対称であり、かつその値は$\varepsilon_1=0.5$に関して逆対称である。逆対称な4自由度連成項は、式(3・16)よりその符号は不安定境界に影響を与えないから$\varepsilon_1=0.5$に関して不安定境界が対称になることは理解できる。第2項は対角線に関して対称ではないが、$\varepsilon_1=0.5$に関して対称な$1-\varepsilon_1$とε_1のみを含んでいる。復元力項非対角成分が4自由度連成項のみからなる場合には特性方程式の係数には非対角成分が積の形で現れるため、この項も$\varepsilon_1=0.5$に関して対称な不安定化作用をもつ。

図5・11、図5・12は$\kappa=0$の場合のジャイロモーメントの不安定境界に及ぼす影響を$\bar{I}_1$の値を変えて示している。図5・11は$\sigma=0$、図5・12は$\sigma=0.6$の場合である。いずれも2・6節の等速継手で連結されたSR4ロータの場合に示したように、$\varepsilon_1=0.5$ではジャイロモーメントは不安定境界に影響を及

ぼさないが、$\varepsilon_1 \neq 0.5$ではジャイロモーメントが不安定境界に影響を及ぼす。また、2・6節で示したように$\varepsilon_1 = 0.5$でH＝0では静的不安定が発生していたが、$\varepsilon_1 \neq 0.5$では常に動的不安定である。これらはいずれも$\varepsilon_1 \neq 0.5$で4自由度連成項に逆対称成分が現れるためであると考えられる。さらに、$\bar{I}_1 \approx 0.1$の時、図5・10で示した不安定境界の$\varepsilon_1 = 0.5$を中心とする上に凹な曲線の範囲内にε_1があるときは、不安定境界はジャイロモーメントの影響を受けていないことが分かる。図5・11、図5・12では不安定境界は$\varepsilon_1 = 0.5$では$\bar{I}_1^{-1}$に比例しており、$\varepsilon_1 \neq 0.5$では$\bar{I}_1^{-n}$（$1 < n < 2$）に比例している。このことはMR４ロータの場合と同様、運動方程式（5・26）のB_1の各要素が、$\varepsilon_1 = 0.5$では$\bar{I}_1^{-1}$に比例しているが、$\varepsilon_1 \neq 0.5$では$\bar{I}_1^{-2}$, $\bar{I}_1^{-1}$を含むためであると考えられる。$\varepsilon_1 \neq 0.5$では$\sigma = 0$の場合も$\sigma = 0.6$の場合も、$\bar{I}_1$に関係しないある決まったHを境にジャイロモーメントが安定化作用を持つ領域と不安定化作用を持つ領域がある。

次に、図5・13、図5・14にκの影響を$\bar{I}_1 = 0$の場合について示す。図5・13は$\sigma = 0$の場合、図5・14は$\sigma = 0.6$の場合である。何れも（a）では不安定境界は$\kappa = 0$の場合とほぼ同じ形をし

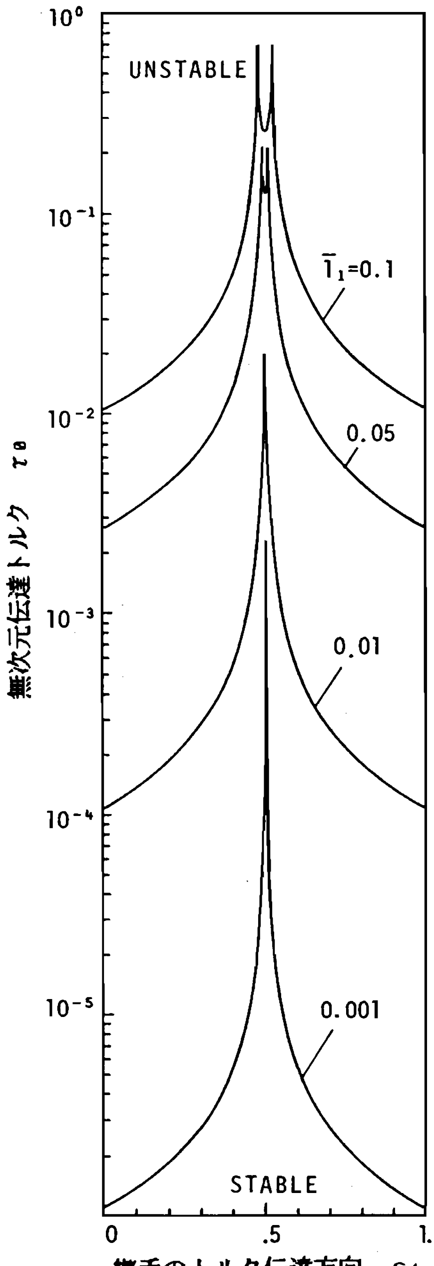


図5・10

SR４ロータの不安定境界に及ぼすε_1の影響（$H = 0$, $\kappa = 0$, $\sigma = 0$, $\zeta_0 = 0.01$）

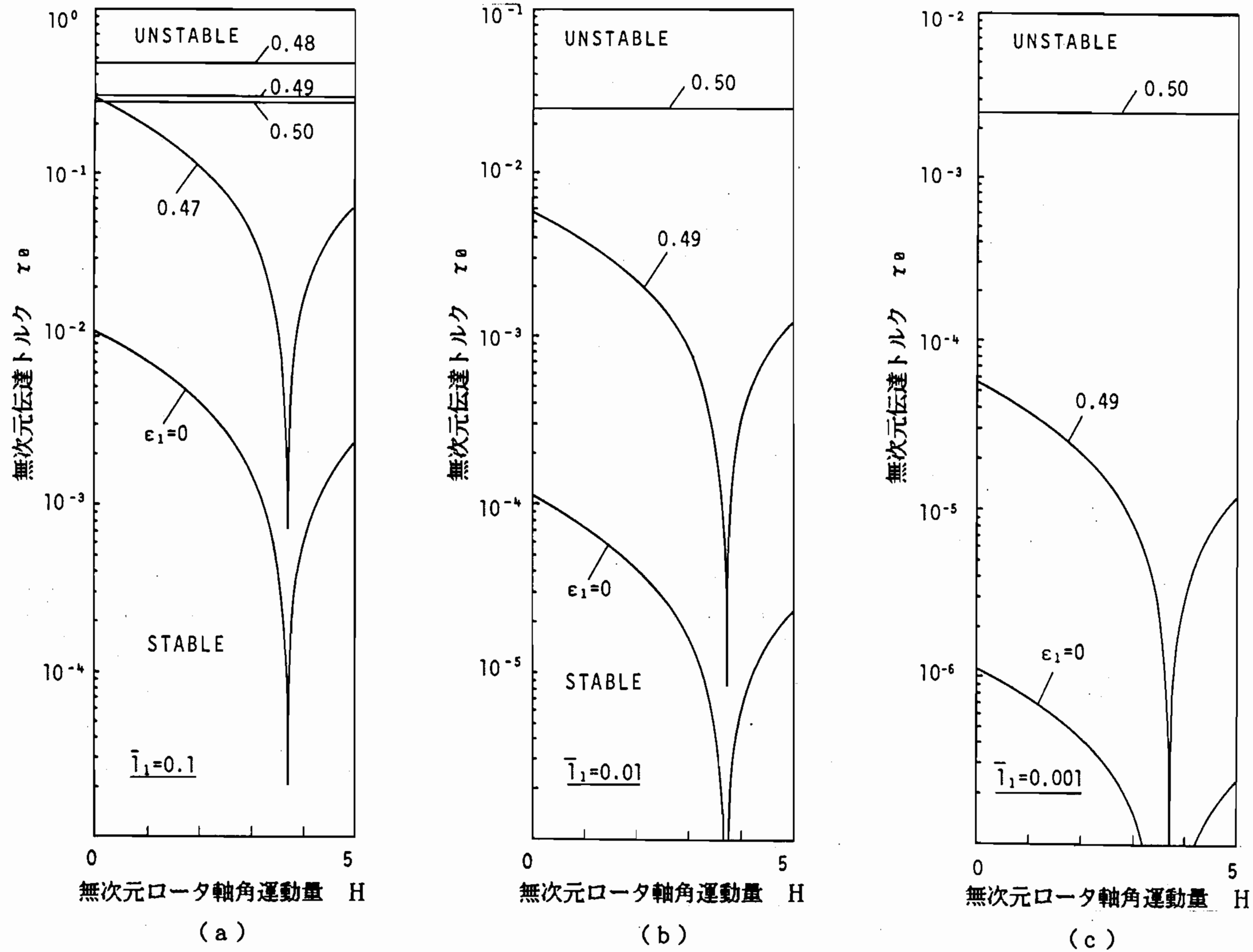


図５・１１　ＳＲ４ロータの不安定領域に及ぼす $\bar{I}_1$ の影響（$\kappa=0$，$\sigma=0$，$\zeta_e=0.01$）

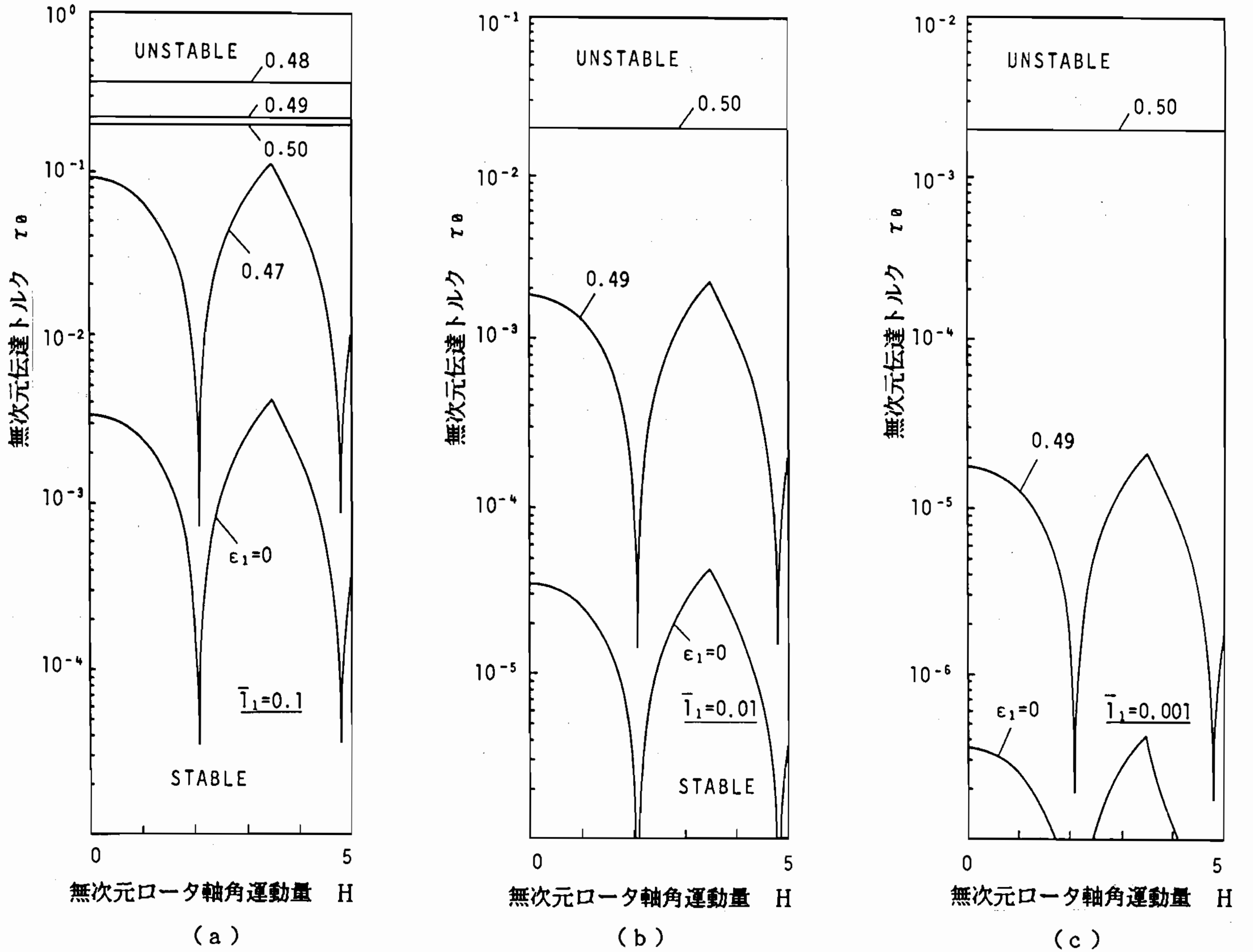


図５・１２ ＳＲ４ロータの不安定領域に及ぼす $\bar{l}_1$ の影響（κ＝０，σ＝０．６，ζ_e＝０．０１）

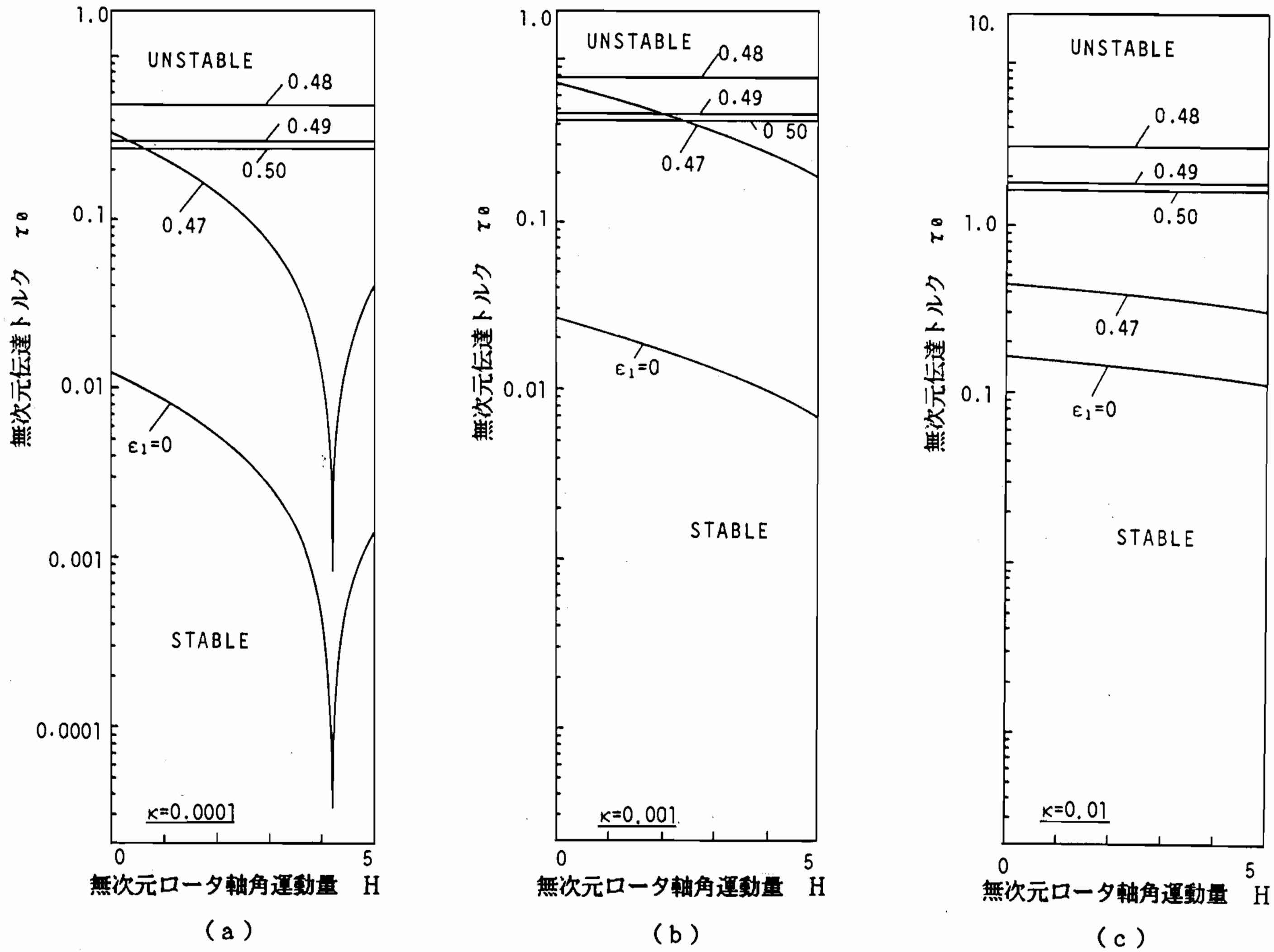


図５・１３　ＳＲ４ロータの不安定領域に及ぼすκの影響（σ=０，$\bar{I}_1$=０．１，ζ_o=０．０１）

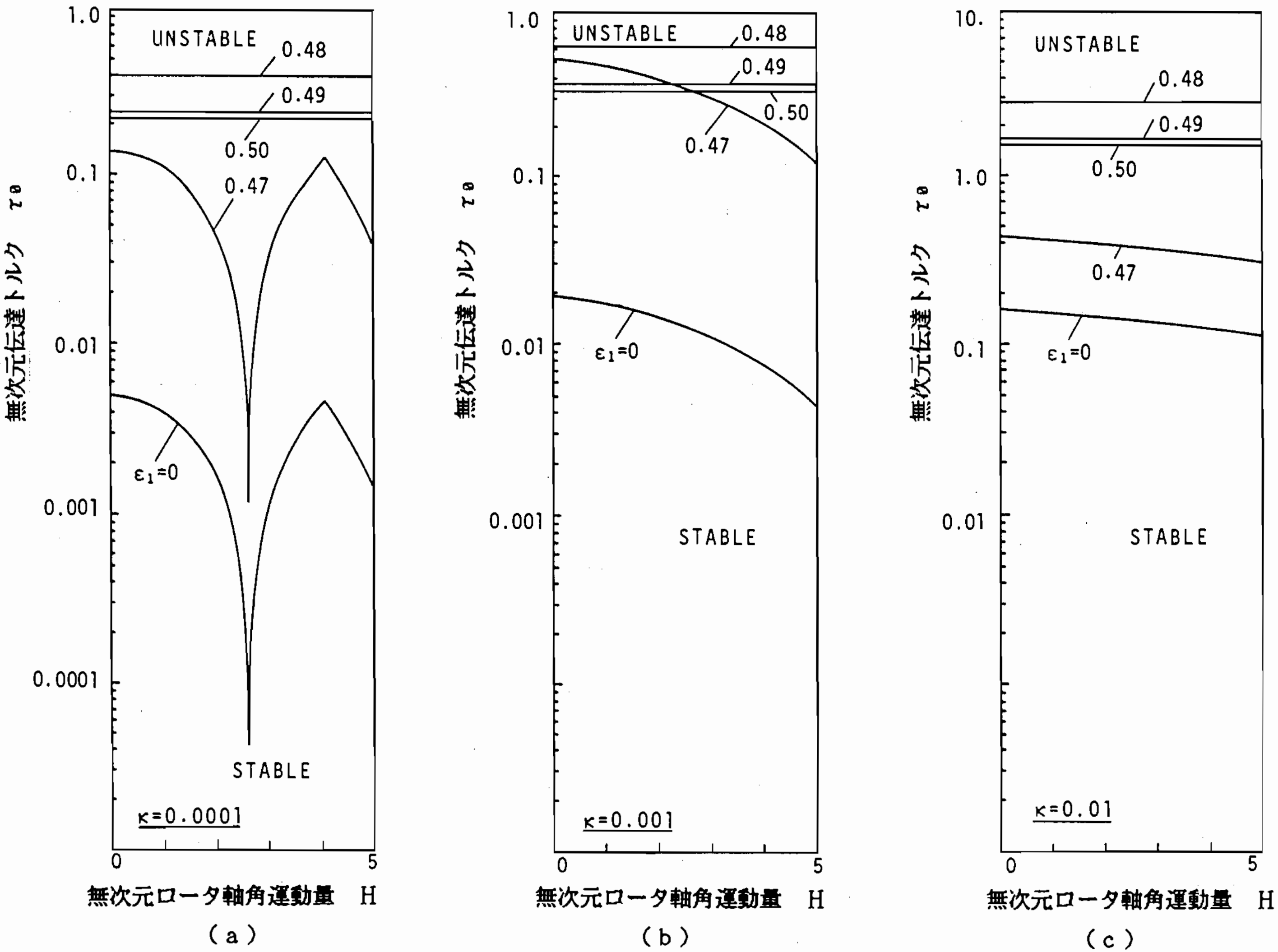


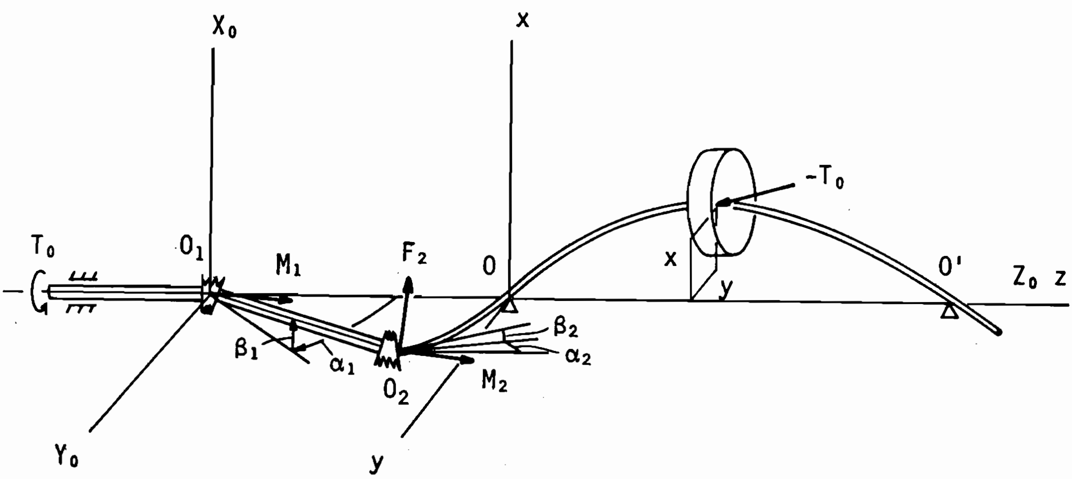
図５・１４　ＳＲ４ロータの不安定領域に及ぼすκの影響（σ＝０.６，$\bar{I}_1$＝０.１，ζ_θ＝０.０１）

ているが、（ｂ）、（ｃ）とκが大きくなると、$\varepsilon_1 \neq 0.5$でもジャイロモーメントの影響が少なくなっている。これは運動方程式のB_θ'より分かるように、κが微小であっても$\bar{I}_1$が小さいためB_θ'の各要素は１（B_1の要素の最大値のオーダ）に比べてかなり大きな値となる。このことが固有振動数を増加させて相対的にＨの影響を小さくすると考えられる。すなわち、$\kappa \neq 0$の各不安定境界は$\kappa = 0$の不安定境界を横軸方向に拡大したものと見なせる。ＳＲ４ロータの場合はκを含む項はB_θ'の対角成分に正の成分としてのみ存在するのでこのように固有振動数を変化させる効果しか持たないと考えられる。前節のＭＲ４ロータでは（図５･７、５･８）κがこの様な目だった安定化作用を持たなかったが、ＭＲ４ロータのB_θ'は各変数間の連成成分を負の成分としても持っておりその効果によるものであろうと考えられる。

以上よりＭＲ４ロータ、ＳＲ４ロータいずれの場合でも、第２章で解析した等速継手の$\varepsilon_1 = 0.5$の場合は不安定特性が極めて特異な場合であることが明かとなった。

５•５　ＭＦ４ロータ系の安定性

前章までの剛性ロータモデルの解析を基に、本節以下では弾性ロータモデル



$O_1O_2 = l_1$, $O_2O = l_2$, $OO' = l$

図５•１５　ＭＦ４ロータの座標系

（図５・２）での解析を行う。ＭＦ４ロータモデルの座標系を図５・１５に示す。ロータ軸は変位しない回転自由な軸受で支持された弾性軸で、剛な回転体（円板）を有しており、回転体部分で負荷トルクを受けるものとする。継手部は前節と同様に回転ばねとトルクの作用方向を表すパラメータを導入してモデル化したたわみ継手である。継手中間軸は解析の簡単化のため剛体と仮定する。座標系は第１継手中心に原点をおく静止座標系$O_1-X_0Y_0Z_0$と駆動軸側軸受に原点をおく静止座標系$O-xyz$を定義する。中間軸長さをl_1、第２継手と軸受までの距離をl_2、軸受間距離をl、回転体取付け位置のＯからの距離をa（$l-a=b$）とする。中間軸の横変位角を前節と同様な回転角α_1，β_1で表し、ロータ軸端の傾きをα_2，β_2とする。以下の運動方程式の導出過程では変位やそれらの微分は微小であるとし、ロータ軸のたわみには微小変位を仮定した材料力学の公式を用いる。

５・５・１　運動方程式

前節と同様にパラメータε_1を用いてトルクの伝達方向を表し、交差角に比例する復元モーメント（ばね定数：ｋ）を用いる。ロータ軸端に作用するモーメントM_2およびF_2は、駆動トルクに関してはＭＲ４ロータの場合の式（５・６）、（５・７）に於て$\alpha\to\alpha_2$，$\beta\to\beta_2$と置いた式で表される。継手復元モーメントに関しては式（５・１２）、（５・１４）に於て$\alpha\to\alpha_2$，$\beta\to\beta_2$と置いた式で表される。これらの式を原点をＯとした静止座標成分で表すと次式となる。

$$M_2=T_0\begin{bmatrix}\varepsilon_1\beta_2+(1-\varepsilon_1)\beta_1\\-\varepsilon_1\alpha_2+(\varepsilon_1-1)\alpha_1\\1\end{bmatrix}_{xyz}+k\begin{bmatrix}\alpha_1-\alpha_2\\\beta_1-\beta_2\\0\end{bmatrix}_{xyz}\qquad(5\cdot28)$$

$$l_1F_2=T_0\begin{bmatrix}(1-2\varepsilon_1)\alpha_1+\varepsilon_1\alpha_2\\(1-2\varepsilon_1)\beta_1+\varepsilon_1\beta_2\\0\end{bmatrix}_{xyz}+k\begin{bmatrix}\beta_2-2\beta_1\\2\alpha_1-\alpha_2\\0\end{bmatrix}_{xyz}\qquad(5\cdot29)$$

ここで、系の運動が微小なため軸方向力が発生しないことを考慮して　$f_{23}=0$と置いている。

弾性軸に作用する曲げモーメントは中立軸に垂直な成分であるから、M_2, F_2はxyz成分表示からx方向にα_2、新しいy方向にβ_2回転した座標成分に変換しなければならない。その方向に分解するとF_2は近似的に式（5・29）と同じであるが、M_2は

$$M_2 = T_a \begin{bmatrix} (1-\varepsilon_1)(\beta_1-\beta_2) \\ (1-\varepsilon_1)(\alpha_2-\alpha_1) \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \alpha_1-\alpha_2 \\ \beta_1-\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5・30}$$

となる。

次に、M_2とF_2に含まれているα_1, α_2, β_1, β_2をロータ軸端の傾きと変位で表す。点O_2のx，y方向の変位をx_2, y_2とし、傾きをdx_2/dz, dy_2/dzで表すと、式（5・29）、式（5・30）は式（5・31）、式（5・32）となる。

$$l_1 F_2 = \begin{bmatrix} k\,dx_2/dz - T_a\varepsilon_1 dy_2/dz \\ -2k\,x_2/l_1 + T_a(2\varepsilon_1-1)y_2/l_1 \\ T_a\varepsilon_1 dx_2/dz + k\,dy_2/dz \\ +T_a(1-2\varepsilon_1)x_2/l_1 - 2k\,y_2/l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq l_1 \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{bmatrix} \tag{5・31}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} T_a(\varepsilon_1-1)dx_2/dz + k\,dy_2/dz \\ +T_a(1-\varepsilon_1)x_2/l_1 - k\,y_2/l_1 \\ -k\,dx_2/dz + T_a(\varepsilon_1-1)dy_2/dz \\ +k\,x_2/l_1 + T_a(1-\varepsilon_1)y_2/l_1 \\ T_a \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} \tag{5・32}$$

ここで、$x_2 = l_1\beta_1$, $y_2 = -l_1\alpha_1$, $dx_2/dz = \beta_2$, $dy_2/dz = -\alpha_2$

である。

次に、軸端にF_2，M_2を受ける弾性軸に於て、回転体取付け位置にx，y方向の力及びモーメント（後に円板の慣性力及び負荷トルクに置き換える）が作用する場合の静的なたわみを材料力学の公式から求める。まず、xz平面内のたわみ曲線を求める。軸受の反力をR_{0x}，R_{1x}と置くと（図5・16上図参照）、たわみ曲線は次のように表される。

$-l_2 \leqq z \leqq 0$　で　$EJ\,d^2x/dz^2 = -M_{2y} + F_{2x}(l_2 + z)$

$0 \leqq z \leqq a$　で　$EJ\,d^2x/dz^2 = M_y + (l - z)R_{1x} + (a - z)F_x$

$a \leqq z \leqq l$　で　$EJ\,d^2x/dz^2 = (l - z)R_{1x}$

ただし、Eは軸の縦弾性係数、Jは軸の断面二次モーメント。

（5・33）

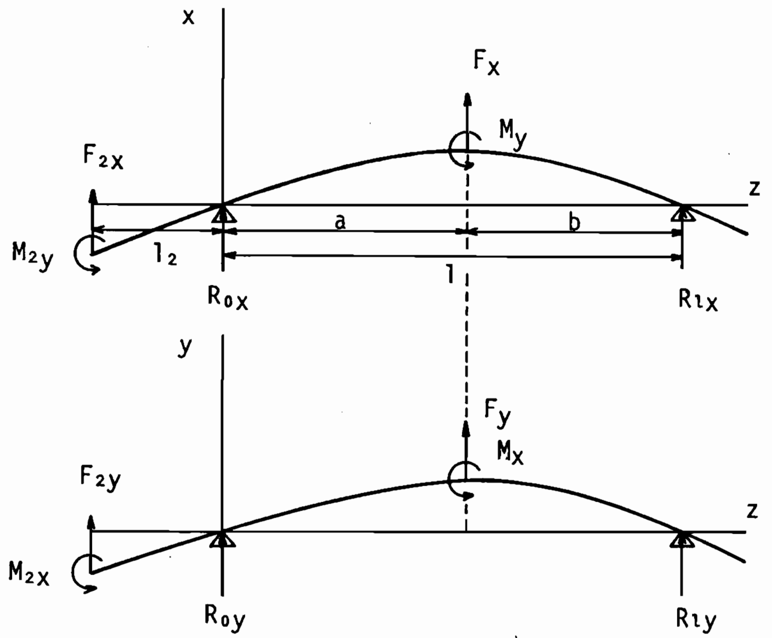


図5・16　弾性軸の座標系

O点回りのモーメントのつりあいをとると、

$$l R_{1x} = -M_{2y} + l_2 F_{2x} - M_y - a F_x \qquad (5 \cdot 34)$$

となる。式（５・３３）を積分し、境界点での変位と傾きの連続条件を用いると、軸端 $z=-l_2$ での傾きおよび変位は

$$EJ\,dx_2/dz = -F_{2x} l_2 (l_2/2 + l/3) + M_{2y}(l_2 + l/3)$$
$$+ F_x a (a^2/6l - a/2 + l/3) + M_y (a^2/2l - a + l/3)$$

$$EJ\,x_2 = F_{2x} l_2^2 (l_2 + l)/3 - M_{2y} l_2 (l_2/2 + l/3)$$
$$+ F_x l_2 a(-a^2/6l + a/2 - l/3)$$
$$+ M_y l_2 (-a^2/2l + a - l/3)$$
$$(5 \cdot 35)$$

となる。回転体取付け位置 $z=a$ の傾き dx_a/dz および変位 x_a は、

$$EJ\,dx_a/dz = (F_{2x} l_2 - M_{2y})(-a^2/2l + a - l/3)$$
$$+ F_x a (2a^2/3l - a + l/3) + M_y (a^2/l - a + l/3)$$

$$EJ\,x_a = (F_{2x} l_2 - M_{2y}) a (-a^2/6l + a/2 - l/3)$$
$$+ F_x a^2 (a^2/3l - 2a/3 + l/3)$$
$$+ M_y a (2a^2/3l - a + l/3)$$
$$(5 \cdot 36)$$

となる。式（５・３５）、式（５・３６）において F_{2x}, M_{2y} は式（５・３１）、式（５・３２）より軸端の傾きおよび変位 dx_2/dz, dy_2/dz, x_2, y_2 を用いて表すことができる。

全く同様に、yz平面内のたわみ曲線についても導くことができる（図５・１６下図参照）。$z=-l_2$ での傾きおよび変位は、

$$EJdy_2/dz=-F_{2y}l_2(l_2/2+l/3)+M_{2x}(l_2+l/3)$$
$$+F_y a(a^2/6l-a/2+l/3)+M_x(a^2/2l-a+l/3)$$

$$EJy_2=F_{2y}l_2^2(l_2+l)/3-M_{2x}l_2(l_2/2+l/3)$$
$$+F_y l_2 a(-a^2/6l+a/2-l/3)$$
$$+M_x l_2(-a^2/2l+a-l/3)$$

（5・37）

となる。 z＝aでの傾きおよび変位は

$$EJdy_a/dz=(F_{2y}l_2-M_{2x})(-a^2/2l+a-l/3)$$
$$+F_y a(2a^2/3l-a+l/3)+M_x(a^2/l-a+l/3)$$

$$EJy_a=(F_{2y}l_2-M_{2x})a(-a^2/6l+a/2-l/3)$$
$$+F_y a^2(a^2/3l-2a/3+l/3)$$
$$+M_x a(2a^2/3l-a+l/3)$$

（5・38）

となる。ただし、図5・16より分かるようにM_{2x}は式（5・32）と逆符号である。

式（5・35）と（5・37）の右辺にあるM_{2x}, M_{2y}, F_{2x}, F_{2y}に式（5・31）、（5・32）を代入すると$[dx_2/dz\ \ dy_2/dz\ \ x_2\ \ y_2]^T$と$[M_y\ \ M_x\ \ F_x\ \ F_y]^T$の関係は

$$U_1[dx_2/dz\ \ dy_2/dz\ \ x_2\ \ y_2]^T=U_2[M_y\ \ M_x\ \ F_x\ \ F_y]^T$$

の形で表される。ここで、U_1はT_θ, k, ε_1および軸長さのパラメータを含む4行4列マトリクスで、U_2は軸長さのパラメータのみを含む4行4列マトリクスである。さらに、式（5・36）と（5・38）の右辺にあるM_{2x}, M_{2y}, F_{2x}, F_{2y}に式（5・31）、（5・32）を代入すると、$[dx_a/dz\ \ dy_a/dz\ \ x_a\ \ y_a]^T$が$[M_y\ \ M_x\ \ F_x\ \ F_y]^T$と$[dx_2/dz\ \ dy_2/dz\ \ x_2\ \ y_2]^T$を用いて、

$$[dx_a/dz \quad dy_a/dz \quad x_a \quad y_a]^T$$

$$= U_3 [dx_2/dz \quad dy_2/dz \quad x_2 \quad y_2]^T + U_4 [M_y \quad M_x \quad F_x \quad F_y]^T$$

の形で表される。ここで、U_3はT_0，k，ε_1および軸長さのパラメータを含む4行4列マトリクスで、U_4は軸長さのパラメータのみを含む4行4列マトリクスである。上の二つの関係式を用いると、

$$[dx_a/dz \quad dy_a/dz \quad x_a \quad y_a]^T = (U_3 U_1^{-1} U_2 + U_4)[M_y \quad M_x \quad F_x \quad F_y]^T$$

となる。ここで、$(U_3 U_1^{-1} U_2 + U_4)^{-1} = K_0$ と置けば、この関係は、

$$[m_y \quad m_x \quad f_x \quad f_y]^T = K_0(k_{0ij})[dx_a/dz \quad dy_a/dz \quad x_a \quad y_a]^T \tag{5・39}$$

の形で表すことができる。ここで、無次元量

$$m_{x(y)} = M_{x(y)} l / EJ, \quad f_{x(y)} = F_{x(y)} l^2 / EJ$$

を用いている。また、K_0に含まれるトルクT_0および継手部のばね定数kは

$$\tau_0 = T_0 l / EJ, \quad \kappa = k l / EJ$$

で無次元化している。長さはロータ軸長lで無次元化している。

軸部の慣性力を無視し、回転体にのみ慣性力が存在するとして式（5・39）の左辺を回転体の慣性力と負荷トルクの曲げモーメント成分で置き換えると、

$$m_y = (-d^2\theta_x/dt^2 - B\omega d\theta_y/dt) I_t^G l / EJ + \tau_0(1 - \varepsilon_2)\theta_y$$

$$m_x = (-d^2\theta_y/dt^2 + B\omega d\theta_x/dt) I_t^G l / EJ + \tau_0(\varepsilon_2 - 1)\theta_x$$

$$f_x = -d^2\bar{x}_G/dt^2(I_t{}^G l/EJ)/\bar{i}^2$$

$$f_y = -d^2\bar{y}_G/dt^2(I_t{}^G l/EJ)/\bar{i}^2$$

$$(5\cdot40)$$

となる。ただし、$I_t{}^G$は回転体の極慣性モーメント（$=mi^2$, m：回転体質量）Bは回転体の極慣性モーメント／横慣性モーメント、ωは軸の回転速度、$(\bar{\bullet})$はlによる無次元化を示す。また、

$$\theta_x = dx_a/dz,\quad \theta_y = dy_a/dz,\quad \bar{x}_G = x_a/l,\quad \bar{y}_G = y_a/l \qquad (5\cdot41)$$

と置いている。式（5・40）を式（5・39）に代入し、無次元時間$T=\Omega_0 t$（$\Omega_0{}^2 = (3l^2/ab)EJ/I_t l$：無負荷時の傾き振動の固有振動数）を導入すると、回転体の運動方程式として、式（5・42）が得られる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x + B\nu\dot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_y - B\nu\dot{\theta}_x \\ \ddot{\bar{x}}_G \\ \ddot{\bar{y}}_G \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \bar{x}_G \\ \bar{y}_G \end{bmatrix} = 0 \qquad (5\cdot42)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{011} & k_{012} & k_{013} & k_{014} \\ k_{021} & k_{022} & k_{023} & k_{024} \\ \bar{i}_2 k_{031} & \bar{i}_2 k_{032} & \bar{i}_2 k_{033} & \bar{i}_2 k_{034} \\ \bar{i}_2 k_{041} & \bar{i}_2 k_{042} & \bar{i}_2 k_{043} & \bar{i}_2 k_{044} \end{bmatrix} \bar{a}\bar{b}/3$$

ここで、$\nu=\omega/\Omega_0$、$(\dot{\bullet})$はTによる微分。

さらに、傾き振動と並進振動に対して減衰係数ζ_1, ζ_2に比例する外部減衰力を仮定すると、運動方程式は式（5・43）となる。なお、Kは逆行列の演算を含むので、剛性ロータの場合にように簡単な形では表せない。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\bar{x}}_G \\ \ddot{\bar{y}}_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 & H & 0 & 0 \\ -H & \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\bar{x}}_G \\ \dot{\bar{y}}_G \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \bar{x}_G \\ \bar{y}_G \end{bmatrix} = 0 \qquad (5\cdot43)$$

$$;\ H = B\nu$$

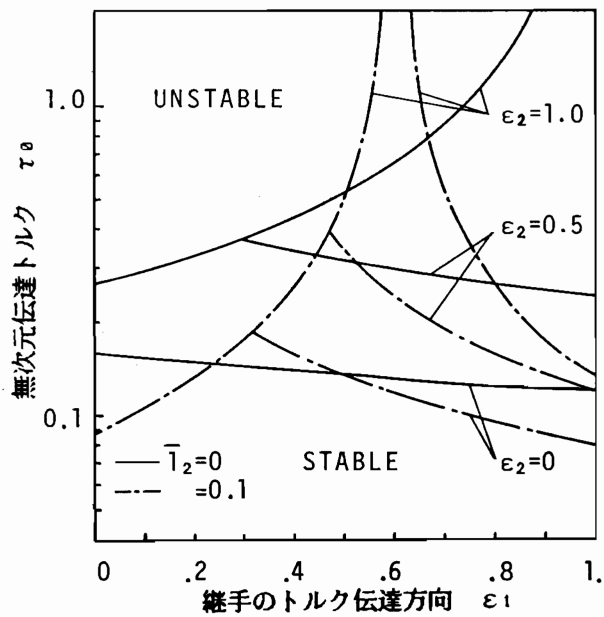
5・5・2　安定性の数値計算例と考察

前節で調べたように$\varepsilon_1 = 0.5$は不安定特性がきわめて特異な場合であったので、まずε_1の影響を調べることにする。H＝0、$\kappa = 0$の場合のε_1に対する不安定領域の例を図5・17に示す。同図（a）は回転体がスパンの中央にある$\bar{a} = 0.5$の場合、（b）は$\bar{a} = 0.3$の場合である。実線は$\bar{l}_2 = 0$、一点鎖線は$\bar{l}_2 = 0.1$の場合である。

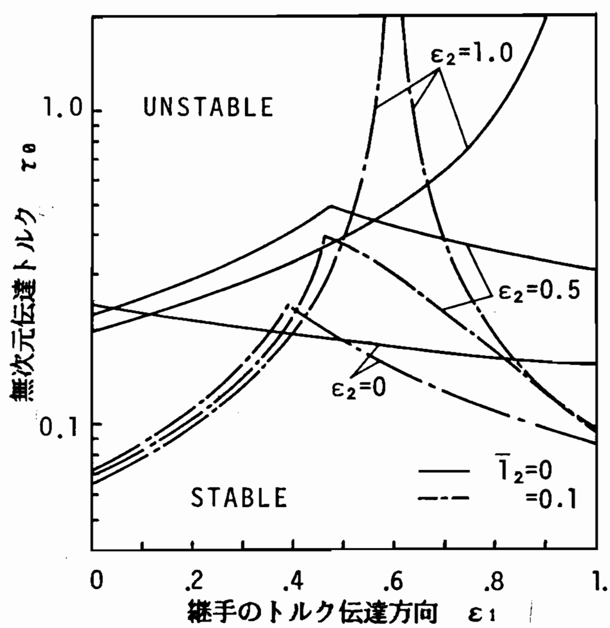
$\bar{l}_2 = 0$の場合は継手の中間軸に変位がなく一つの継手を介した場合と見なせるのでこのときの特性はMR２ロータと定性的に類似であろうと考えられる。そこで、MR２ロータで伝達トルクの方向を一般化して考察してみる。駆動トルクに関しては式（5・3）の$x_1y_1z_1$座標表現式で$\alpha_1 \to \alpha$, $\beta_1 \to \beta$, $M_1 \to \tau_B$と置けばよい。負荷トルクに関しては（5・8）でxyz表現式を用いればよい。これらを合わせると、伝達トルクに起因する復元力項は、

$$\tau_B \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad (5\cdot44)$$

となる。これより、$\varepsilon_2 = 1$では$\varepsilon_1 = 0$で最も不安定で$\varepsilon_1 = 1$で不安定は発生しない。逆に、$\varepsilon_2 = 0$では$\varepsilon_1 = 0$で不安定は発生せず$\varepsilon_1 = 1$で最も不安定になる。明らかに、$\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$は、それぞれ、駆動トルク、負荷トルクの横方向の影響がない場合であり、上述の関係は容易に理解できる。また、$\varepsilon_2 = 0.5$では$\varepsilon_1 < 0.5$でε_1の増加に伴なって安定化し、$0.5 < \varepsilon_1$では逆にε_1の増加に伴



（ａ）$\bar{a}$ ＝ ０．５ の場合



（ｂ）$\bar{a}$ ＝ ０．３ の場合

図５・１７　ＭＦ４ロータの不安定領域に及ぼす ε_1 の影響

（Ｈ＝０，κ ＝０，$\zeta_1 = \zeta_2$ ＝０．０１）

なって不安定化する。図5・17（a）を見ると、回転体に作用する負荷トルクの曲げモーメント成分のない$\varepsilon_2=1$の場合、$\varepsilon_1=1$で不安定が発生しなくなり、$\varepsilon_1=0$で最も不安定でε_1の増加と共に安定化している。この傾向は式（5・44）で表されるMR2ロータの場合と同じである。$\varepsilon_2=0$の場合にはε_1によって不安定境界があまり変わらずMR2ロータの場合とは定量的には異なっているが、ε_1の増加にともなって不安定化することはMR2ロータと似ている。$\bar{I}_2=0$の場合について$\bar{a}=0.5$の場合（5・17図（a））と$\bar{a}=0.3$の場合（同図（b））を比較すると、負荷トルクの影響がない$\varepsilon_2=1.0$では$\bar{a}=0.3$の方が全体的に不安定である。これはトルクによる不安定の主たる要因が傾き振動に関する非対称成分であるため円板が軸端に近くなって傾きが大きくなるほど不安定化するものと考えられる。逆に、$\varepsilon_2=0$，0.5の境界は$\bar{a}=0.3$の場合の方が$\bar{a}=0.5$の場合より一部を除いて安定化している。これは負荷トルクの不安定化作用は、その作用点が軸中央から離れるに従って少なくなることを意味している。

$\bar{I}_2\neq0$の場合には二つの継手を含むMR4ロータの場合に似た傾向が現れるものと予測される。図5・17（a）では負荷トルクの影響がなくなる$\varepsilon_2=1.0$の場合にはMR4ロータの場合の図5・4のような曲線となり、ε_1がある値でかなり極端なピーク値を持つ。$\varepsilon_2=0$，0.5ではそのようなピークはないが、$\varepsilon_1\approx0.5$で最も安定になることはMR4ロータの場合と同じである。

以上のように、駆動トルクと負荷トルクの影響は剛性ロータと弾性ロータとでは定量的には異なっている。この原因は、剛性ロータでは駆動トルクと負荷トルクがロータ軸に対して同じ程度で影響を与えるが、弾性ロータでは軸中央部に直接作用する負荷トルクによる曲げモーメントの方がたわみに強い影響を与えるためであろうと考えられる。なお、図が煩雑になるので記入していないが、$\kappa=0.1$，0.2としてたわみ継手のばね復元力を考慮しても類似な境界曲線となり、$\bar{I}_2=0.2$としても類似な境界が得られる。定量的には不安定境界はこれらのパラメータで複雑に変わるがその程度はそれほど大きなものではなく、剛性ロータの場合のように極端な不安定化や安定化は生じない。

次にジャイロモーメントの影響を含む不安定境界の例を図5・18〜5・21に示す。図5・18は$\bar{I}_2=0$、$\tau_0 H>0$の場合である。同図（a）が$\kappa=0$、（b）が$\kappa=0.1$の場合である。ジャイロモーメントはκにかかわらず$H<4.0$では

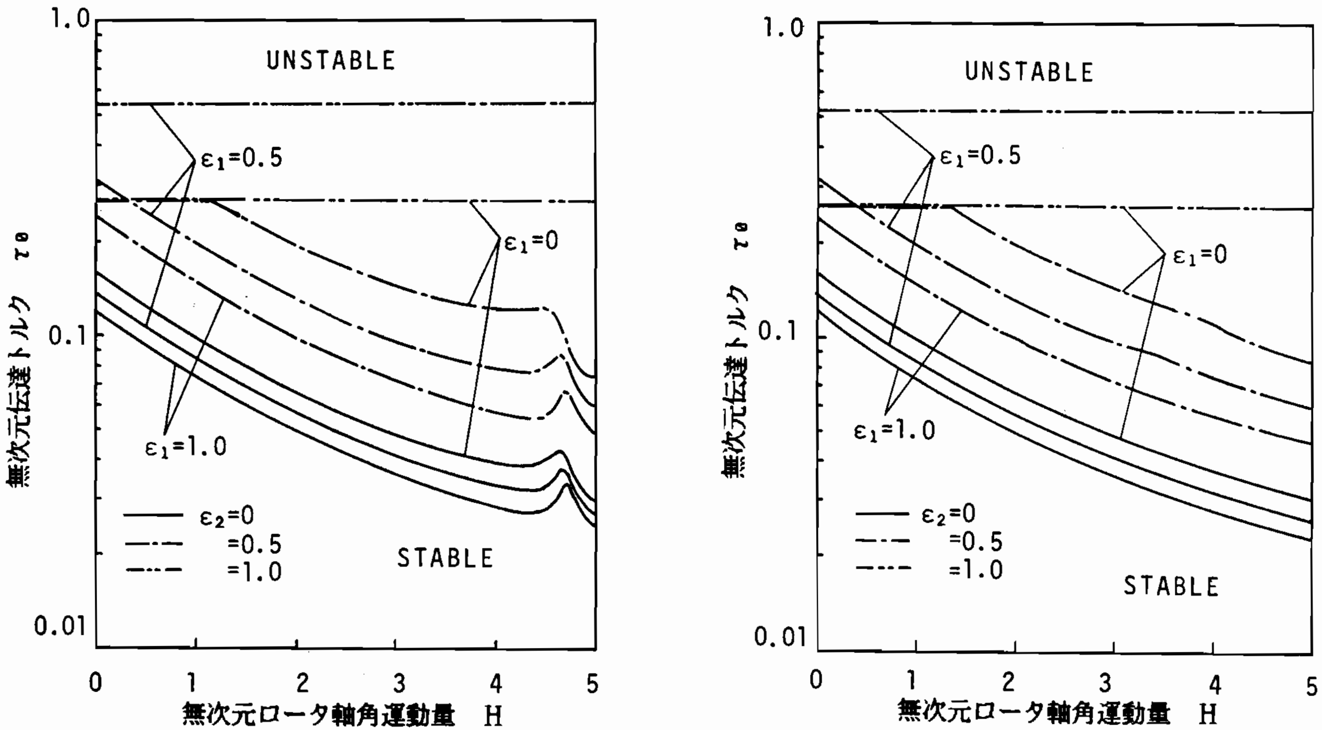
系を不安定化するか影響を与えないかであり、ε_1, ε_2によって不安定境界の傾向はあまり変わっていない。また、$\varepsilon_2=1.0$でジャイロモーメントの影響がほとんどなくなる。これは、以下に示すように、弾性ロータでは回転体に直接作用する負荷トルクによる曲げモーメントの影響が軸端に作用する駆動トルクよりも強く、負荷トルクによってθ_x, θ_yの2自由度連成項の符号が反転するためである。式(5・43)のKは、例えば、図5・18(a)で、$\tau_B=0.2$ のとき、$\varepsilon_2=0$では、

$$K=\begin{bmatrix} 1.00\ 10^{0} & -1.25\ 10^{-2} & -6.24\ 10^{-4} & -2.50\ 10^{-2} \\ 1.25\ 10^{-2} & 1.00\ 10^{0} & 2.50\ 10^{-2} & -6.24\ 10^{-4} \\ -6.37\ 10^{-6} & -2.55\ 10^{-4} & 4.08\ 10^{-2} & 1.53\ 10^{-3} \\ 2.55\ 10^{-4} & -6.37\ 10^{-6} & -1.53\ 10^{-3} & 4.08\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

である(系は不安定)のに対し、$\varepsilon_2=1$では、

$$K=\begin{bmatrix} 1.00\ 10^{0} & 4.16\ 10^{-2} & -6.24\ 10^{-4} & -2.50\ 10^{-2} \\ -4.16\ 10^{-2} & 1.00\ 10^{0} & 2.50\ 10^{-2} & -6.24\ 10^{-4} \\ -6.37\ 10^{-6} & -2.55\ 10^{-4} & 4.08\ 10^{-2} & 1.53\ 10^{-3} \\ 2.55\ 10^{-4} & -6.37\ 10^{-6} & -1.53\ 10^{-3} & 4.08\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

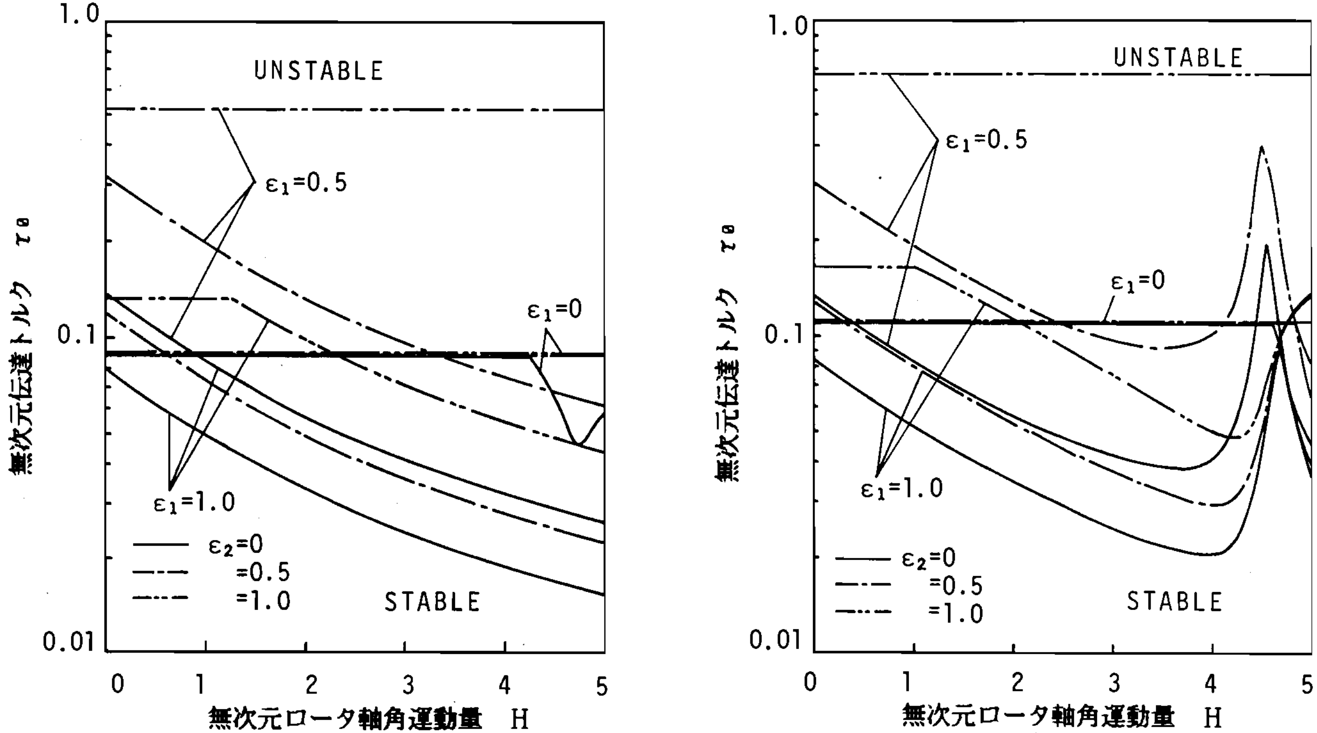
となる(系は安定)。剛性ロータの場合(式(5・16))と同様に負荷トルクの影響はθ_x, θ_yの2自由度連成項(░部)にのみ現れており、しかも$\varepsilon_2=0$と$\varepsilon_2=1$ではその符号が逆転している。剛性ロータの解析で明らかにしたように、ジャイロモーメントと同符号の連成項は不安定境界に影響を与えないため、2自由度連成項が対称となる$\varepsilon_2=1$でジャイロモーメントが不安定境界に影響を与えなくなるものと考えられる。図5・18(a)、(b)を比較すると、不安定境界はほとんど変わらず継手のばね復元力は不安定境界にそれほど影響を持たないが、κの大きい方がわずかではあるが安定化している。$\kappa=0$ではH>4.5になるとジャイロモーメントの影響が強く現れ、この速度域で境界曲線を与える条件式が変わっている。図5・19は$\bar{I}_2=0.1$, $\tau_B>0$の場合であり、同図(a)が



（a） $\kappa=0$ の場合

（b） $\kappa=0.1$ の場合

図5・18　MF4ロータの不安定領域（$\tau_\theta H>0$； $\bar{I}_2=0$，$\bar{a}=0.5$，$\zeta_1=\zeta_2=0.01$）



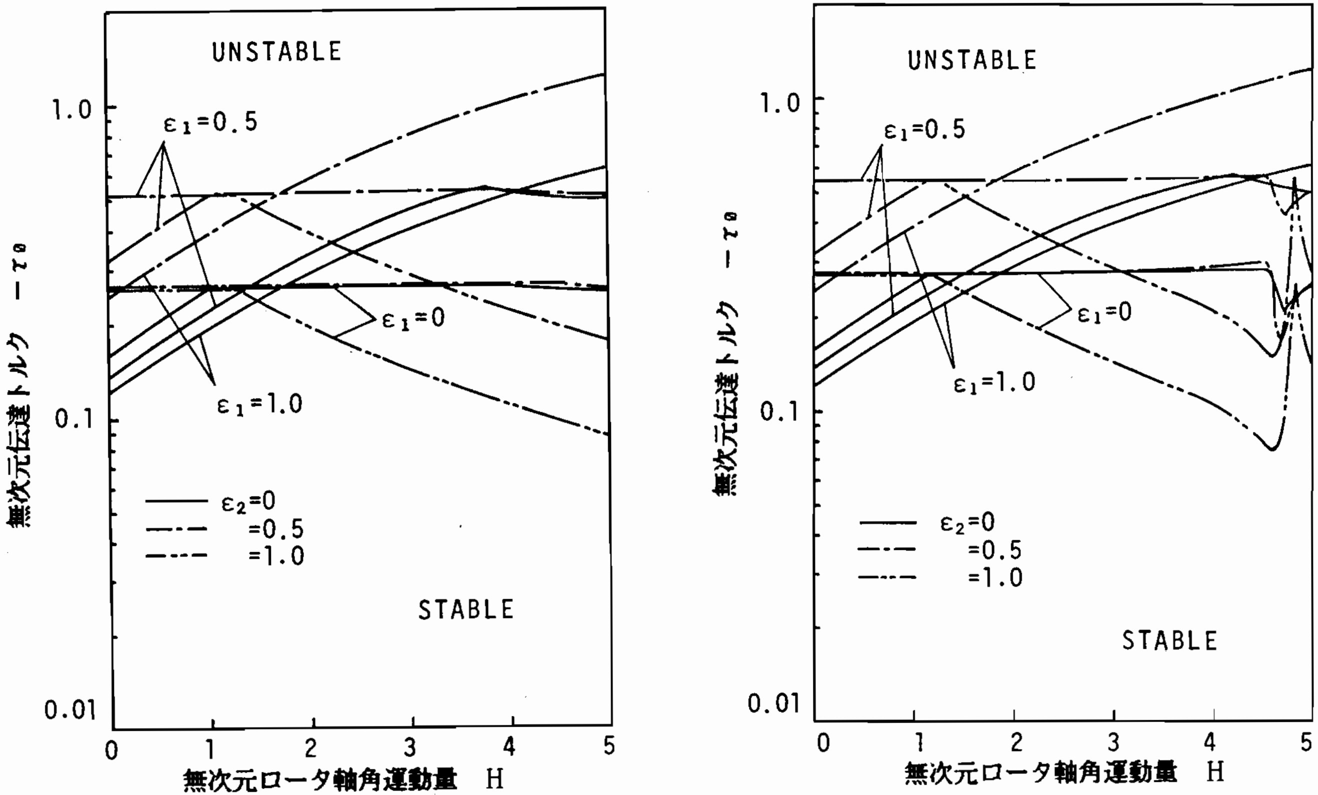
（ａ）κ＝０の場合　　　　（ｂ）κ＝０．１の場合

図５・１９　ＭＦ４ロータの不安定領域（$\tau_0 H>0$；$\bar{I}_1=\bar{I}_2=0.1$，$\bar{a}=0.5$，$\zeta_1=\zeta_2=0.01$）

$\kappa=0$の場合、（b）が$\kappa=0.1$の場合である。これらは定性的には$\bar{I}_2=0$の場合に似ておりジャイロモーメントが不安定化作用を示している。$\kappa=0.1$では$4<H<5$の速度域で境界が急激に変化している。$\bar{I}_2=0$，0.1の何れの場合でもパラメータの値によって$1<H<2$，$4<H<5$の範囲で不安定条件が切り替わっている。

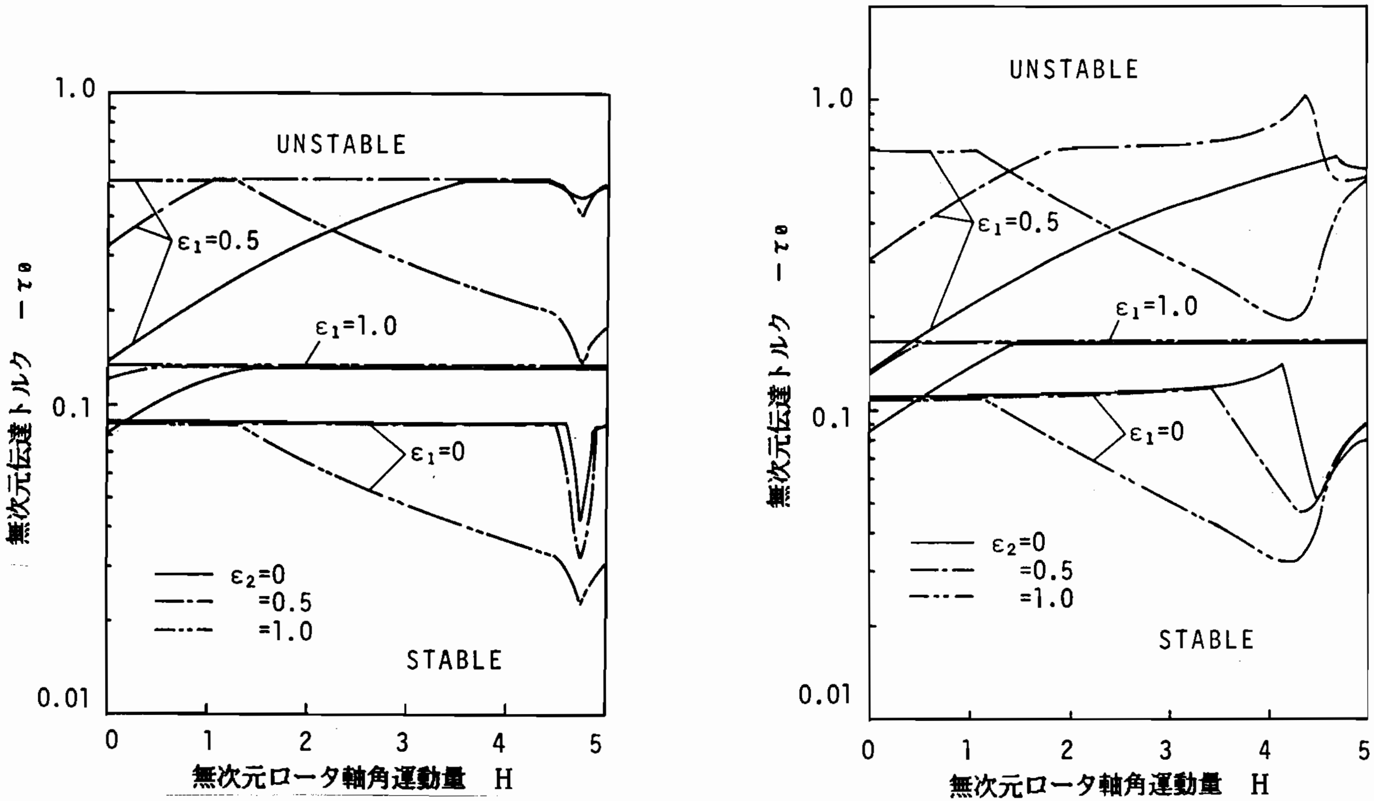
以上はロータ軸から仕事を取り出している状態の場合であるが、図5·20、図5·21にロータ軸に仕事を加える場合（$\tau_\theta H<0$）の不安定領域図を示す。それぞれ$\bar{I}_2=0$，$\bar{I}_2=0.1$の場合である。これらの図ではジャイロモーメントの影響が$\tau_\theta>0$の場合の図5·18、図5·19と逆に現れている場合がある。$\bar{I}_2=0$の低速域では、$\tau_\theta>0$でジャイロモーメントが不安定化作用を持つか影響を与えないかであるのに対し、$\tau_\theta<0$ではジャイロモーメントは安定化作用を持つか影響を与えないかである。同様な傾向は等速継手で連結されたMR4ロータの場合にも見られ（図2·9と図2·13の関係）、同じ効果によるものと考えられる。図5·20と図5·18を比較すると全般的にも$\tau_\theta<0$の方が$\tau_\theta>0$の場合より安定である。図5·20（a）と（b）を比較すると、図5·18と同様に$H<4$では定性的にはもちろん定量的にもほとんど差はなくκの影響は少ないが、わずかに安定化している。$\bar{I}_2=0.1$の図5·21を図5·19と比較すると、$\tau_\theta<0$では$\tau_\theta>0$の場合に比べて境界曲線がジャイロモーメントの影響を受けない場合が多くなっている。また、図5·21（a）と（b）を比較するとそれぞれ図5·19（a）、（b）よりもκの影響が強くなり定量的にはかなり境界が変化している。$\bar{I}_2=0.1$の場合もごく低速域に限って言えば、$\tau_\theta>0$でジャイロモーメントが不安定化作用を持つか影響を与えないかであるのに対し、$\tau_\theta<0$ではジャイロモーメントは安定化作用を持つか影響を与えないかである。

ところで、本章の解析では軸自身に及ぼす伝達トルクの影響を無視しているが、トルクを受ける弾性軸もトルクによって不安定（座屈）が発生する。この限界トルクは軸端の境界条件によって変わるが、両端が単純支持された軸では、$\varepsilon_1=0$（軸受け中心線方向トルク）の場合で $\tau_{\theta crit}=6.25$、$\varepsilon_1=1$（接線方向トルク）の場合で $\tau_{\theta crit}=4.82$ である[84]。これらの限界トルクは明らかに本章で得られた不安定境界より大きく、本章での不安定解析に軸自体に及ぼすト



（a） κ ＝０の場合　　（b） κ ＝０．１の場合

図５・２０　ＭＦ４ロータの不安定領域（$\tau_0 H<0$； $\bar{I}_2=0$，$\bar{a}=0.5$，$\zeta_1=\zeta_2=0.01$）



（ａ） κ ＝ ０ の 場 合

（ｂ） κ ＝ ０ . １ の 場 合

図５・２１　ＭＦ４ロータの不安定領域（$\tau_\theta H<0$； $\bar{I}_1=\bar{I}_2=0.1, \bar{a}=0.5, \zeta_1=\zeta_2=0.01$）

ルクの影響は無視して問題のないことが分かる。一方、現実に設計される回転軸ではこれらの座屈荷重まで強度的に耐える材料はなく限界トルクは強度的に決まる。いま、簡単のために最大せん断応力τ_{all}で決まるねじりトルクが限界トルクであるとすると、この限界トルクT_{crit}は

$$T_{crit} = \tau_{all} d^3 / 16 \quad (d：軸直径)$$

で与えられる。このとき本章で用いている無次元トルクτ_θは

$$\tau_{\theta crit} = \tau_{all} 4 l / E d \qquad (5 \cdot 45)$$

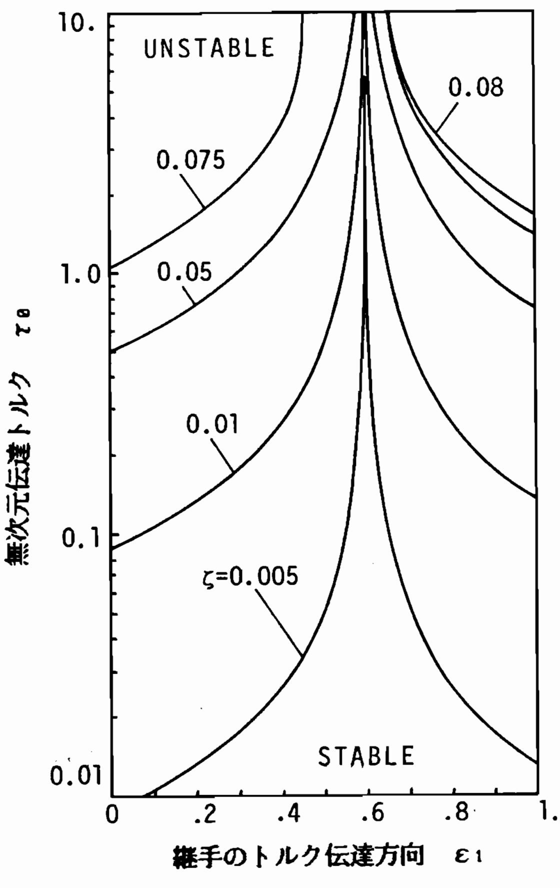


図５・２２
ＭＦ４ロータの不安定領域に及ぼす減衰係数の影響
$(H = 0, \varepsilon_2 = 1.0, \kappa = 0, \bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 0.1, \bar{a} = 0.5)$

となる。$E=2.1\times10^4$kgf/mm²，$\tau_{all}=35$kgf/mm² を用いると、

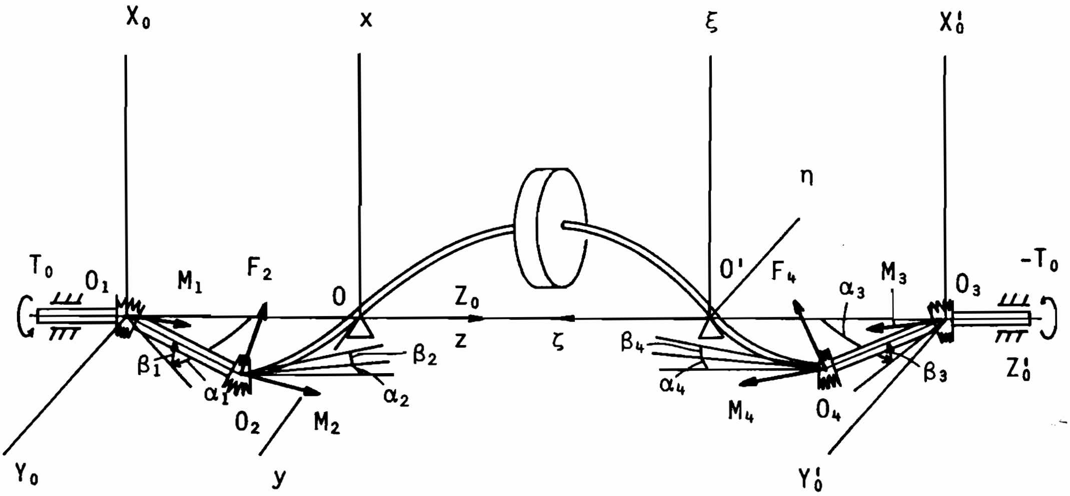
$$\tau_{\theta crit}=(l/d)/150 \qquad (5\cdot46)$$

となる。安全側に見積っても $l/d=15$ すなわち $\tau_\theta=0.1$ 程度は実際の設計に用いられる値であると考えられ、図5・17～図5・21で得られた結果は伝達トルクによる不安定を防止するためパラメータの組合せを十分検討する必要があることを示している。

ロータ軸系を安定化させる最も普通の方法は外部減衰力を付加することである。図5・22に減衰力の安定化効果を示す。同図は $\zeta_1=\zeta_2=\zeta$ としてζをパラメータにして示してある。$\zeta=0.08$で$\varepsilon_1<0.6$では限界トルクが軸の座屈トルクを越える。すなわち、実際上完全に安定になる。

5・6　SF4ロータ系の安定性

SF4ロータの座標系を図5・23に示す。SF4ロータの駆動条件はMF4ロータと全く同一であり、負荷条件もMF4ロータの駆動条件と同様で対称である。



$O_1O_2=l_1, O_2O=l_2, O_3O_4=l_3, O_4O'=l_4, OO'=l$

図5・23　SF4ロータの座標系

5・6・1　運動方程式

負荷トルクを駆動トルクと等しいとして運動方程式を導く。駆動側ロータ軸端に作用する力およびモーメントF_2，M_2は前節と同様に式（5・31）、式（5・32）で与えられる。負荷側ロータ軸端に作用する力およびモーメントF_4，M_4は駆動側とトルクが逆向きである以外は条件が同じであるから、図5・23中のO'－ξηζ座標で表せばそれらは式（5・31）、式（5・32）と同じ形である。しかるにO'－ξηζ座標とO－xyz座標の間には、$\xi = x$，$\eta = -y$，$\zeta = l - z$ の関係がある。結局、F_4とM_4は式（5・31）、式（5・32）で$x_2, y_2 \to x_4, y_4$，$l_1, l_2 \to l_3, l_4$，y成分→－y成分，z成分→－z成分 と置き換えたものに他ならないず、式（5・47）、（5・48）で与えられる

$$
l_3 F_4 = \begin{bmatrix} -k\,dx_4/dz - T_\theta \varepsilon_1 dy_4/dz \\ -2k\,x_4/l_3 + T_\theta(1-2\varepsilon_1)y_4/l_3 \\ T_\theta \varepsilon_1 dx_4/dz - k\,dy_4/dz \\ +T_\theta(2\varepsilon_1 - 1)x_4/l_3 - 2k\,y_4/l_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{xyz} \triangleq l_3 \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{bmatrix}_{xyz}
$$

（5・47）

$$
M_4 = \begin{bmatrix} T_\theta(1-\varepsilon_1)dx_4/dz + k\,dy_4/dz \\ +T_\theta(1-\varepsilon_1)x_4/l_3 + k\,y_4/l_3 \\ -k\,dx_4/dz + T_\theta(1-\varepsilon_1)dy_4/dz \\ -k\,x_4/l_3 + T_\theta(1-\varepsilon_1)y_4/l_3 \\ -T_\theta \end{bmatrix}_{xyz} \triangleq \begin{bmatrix} M_{4x} \\ M_{4y} \\ M_{4z} \end{bmatrix}_{xyz} \qquad (5\cdot48)
$$

ここで、x_4，y_4は負荷側軸端の変位、l_3は負荷側継手の中間軸長さ。

前節と同じ手順でF_{4x}，F_{4y}，F_{2x}，F_{2y}，M_{4x}，M_{4y}，M_{2x}，M_{2y}およびF_x，M_xを用いて両軸端の傾き、変位および回転体取付け位置の傾き、変位を求

めると次のようになる。xz平面内の軸端の傾きおよび変位は式（5・49）でで表される。

$$EJ\,dx_2/dz=-F_{2x}l_2(l_2/2+l/3)+M_{2y}(l_2+l/3)$$
$$-(l_4F_{4x}+M_{4y})l/6+F_x(l-b^2/l)b/6$$
$$+M_y(b^2/2l-l/6)$$

$$EJ\,x_2=F_{2x}l_2^2(l_2+l)/3-M_{2y}l_2(l_2/2+l/3)$$
$$+(l_4F_{4x}+M_{4y})l\,l_2/6+F_xl_2(b^2/l-l)b/6$$
$$+M_yl_2(l/6-b^2/2l)$$

$$EJ\,dx_4/dz=(l_2F_{2x}-M_{2y})l/6+F_{4x}l_4(l/3+l_4/2)$$
$$+M_{4y}(l_4+l/3)+F_xa(a^2/l-l)/6$$
$$+M_y(a^2/2l-l/6)$$

$$EJ\,x_4=(l_2F_{2x}-M_{2y})l\,l_4/6+F_{4x}l_4^2(l_4+l)/3$$
$$+M_{4y}l_4(l/3+l_4/2)+F_xal_4(a^2/l-l)/6$$
$$+M_yl_4(a^2/2l-l/6)$$

（5・49）

yz平面内の傾きおよび変位は、

$EJ\,dy_2/dz=$（式（5・49）のdx_2/dzの式でF_x, F_{2x}, F_{4x}, M_y, M_{2y}, M_{4y}をそれぞれF_y, F_{2y}, F_{4y}, M_x, M_{2x}, M_{4x}で置き換えた式）

$EJ\,y_2=$（　〃　x_2　〃　）

$EJ\,dy_4/dz=$（　〃　dx_4/dz　〃　）

$$EJy_4 = (\quad〃 \quad x_4 \quad 〃 \quad)$$

(5・50)

で表される。また、回転体取付け位置の傾きおよび変位は次式系となる。

$$\begin{aligned} EJ\,dx_a/dz = {} & F_{2x} l_2 (l/6 - b^2/2l) + M_{2y}(b^2/2l - l/6) \\ & + F_{4x} l_4 (a^2/2l - l/6) + M_{4y}(a^2/2l - l/6) \\ & + F_x ab(b-a)/3l + M_y(a^2 - ab + b^2)/3l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJx_a = {} & F_{2x} l_2 b(b^2/l - l)/6 + M_{2y} b(l - b^2/l)/6 \\ & + F_{4x} l_4 a(a^2/l - l)/6 + M_{4y} a(a^2/l - l)/6 \\ & + F_x a^2 b^2/3l + M_y ab(b-a)/3l \end{aligned}$$

$EJ\,dy_a/dz =$ (dx_a/dz の式でF_x, F_{2x}, F_{4x}, M_y, M_{2y}, M_{4y}を
それぞれF_y, F_{2y}, F_{4y}, M_x, M_{2x}, M_{4x}と置き換えた式)

$$EJy_a = (x_a \quad 〃 \quad)$$

(5・51)

式(5・49)、(5・50)に式(5・47)、(5・48)を代入すると、

$$\begin{aligned} & V_1 [dx_2/dz \;\; dy_2/dz \;\; dx_4/dz \;\; dy_4/dz \;\; x_2 \;\; y_2 \;\; x_4 \;\; y_4]^T \\ & \quad = V_2 [M_y \;\; M_x \;\; F_x \;\; F_y]^T \end{aligned}$$

V_1はτ_θ, κおよび軸長さのパラメータを含む8行8列マトリクス

V_2は軸長さのパラメータのみを含む8行4列マトリクス

と表せる。さらに、式(5・51)に式(5・47)、(5・48)を代入すると、

$$\begin{aligned} & [dx_a/dz \;\; dy_a/dz \;\; x_a \;\; y_a]^T \\ & \quad = V_3 [dx_2/dz \;\; dy_2/dz \;\; dx_4/dz \;\; dy_4/dz \;\; x_2 \;\; y_2 \;\; x_4 \;\; y_4]^T \\ & \qquad + V_4 [M_y \;\; M_x \;\; F_x \;\; F_y]^T \end{aligned}$$

V_3はτ_B, κおよび軸長さのパラメータを含む４行８列マトリクス

V_4は軸長さのパラメータのみを含む４行４列マトリクス

で表せる。これらの関係を用いると、

$$[dx_a/dz \quad dy_a/dz \quad x_a \quad y_a]^T = (V_3 V_1^{-1} V_2 + V_4)[M_y \quad M_x \quad F_x \quad F_y]^T$$

と表せる。$(V_3 V_1^{-1} V_2 + V_4)^{-1} = K_B$ と置き、前節と同様な無次元化を行えば、

$$[m_y \quad m_x \quad f_x \quad f_y]^T = K_B [dx_a/dz \quad dy_a/dz \quad x_a \quad y_a]^T$$

と表せる。 m_x, m_y, f_x, f_yを式（５・４０）でτ_Bを含む負荷トルクの項を落した式で置き換えれば回転体の運動方程式が得られる。

５・６・２　安定性の数値計算例と考察

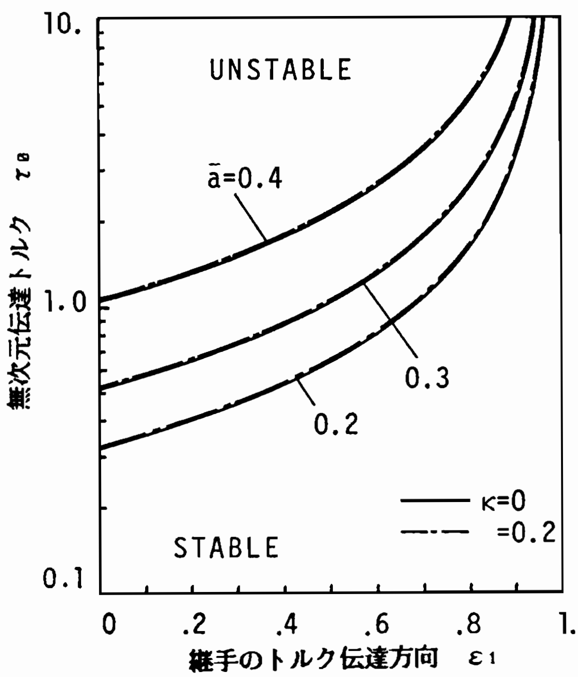
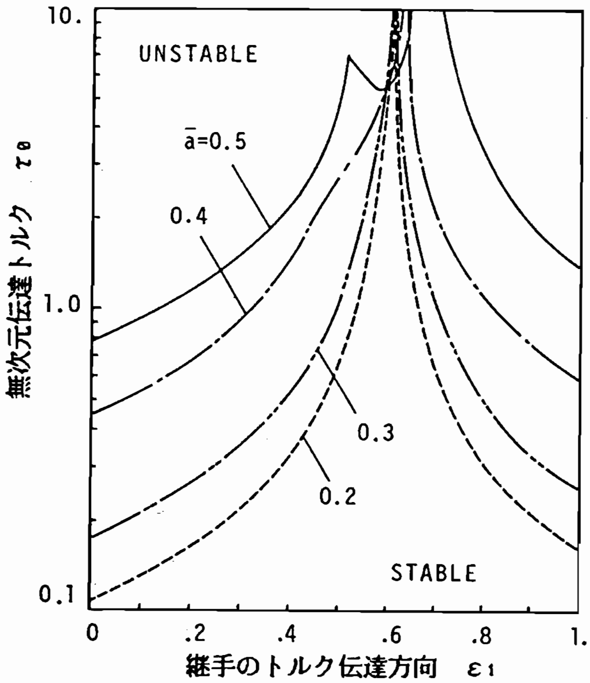


図５・２４
ＳＦ４ロータの不安定領域に及ぼすε_1の影響
（$\bar{I}_2 = 0$, $H = 0$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$）

本項での数値計算は駆動条件と負荷条件が等しい $I_1=I_3$, $I_2=I_4$ の場合についてのみ行っている（以下、I_3, I_4については特に記述していない）。

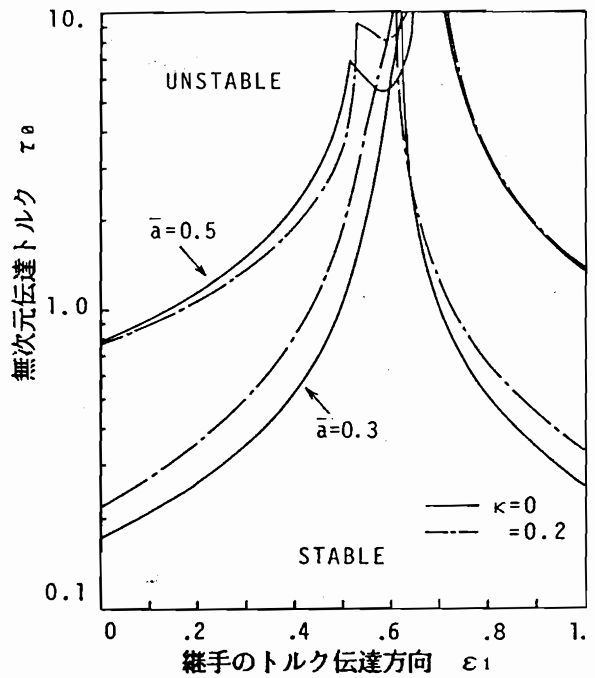
前節と同様にまずH＝０のときのε_1の影響を調べる。図５・２４に$\bar{I}_2=0$の場合を示す。明らかに$\bar{a}=0.5$では駆動トルクと負荷トルクの影響は打ち消しあって不安定は発生しない。$\varepsilon_1=1.0$でもトルクの曲げモーメント成分がないので不安定は生じない。回転体取付け位置が中央からずれるほど不安定化している。これは回転体が中央からずれるほど振動モードが左右非対称になり駆動トルクと負荷トルクの影響の差が生じるためと、軸端に近いほど傾き振動が強く現れるためであると考えられる。継手の復元モーメントのばね定数κは前節までに検討したモデルと同様にわずかに安定化作用をもっている。なお、この場合に対応すると考えられる２自由度剛性ロータモデルでは初期交差角が存在しないので不安定は生じていない。

次に $\bar{I}_2=\bar{I}_1=0.1$ の場合を図５・２５に示す。同図（ａ）、（ｂ）、（ｃ）

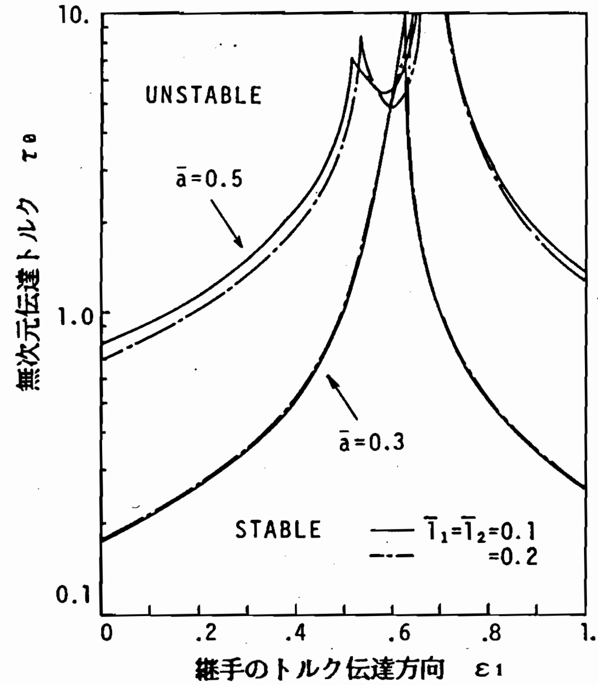


（ａ）回転体位置ａの影響（$\bar{I}_2=\bar{I}_1=0.1$）

図５・２５　ＳＦ４ロータの不安定領域（$H=0, \zeta_1=\zeta_2=0.01$）



(b) 継手ばね定数 κ の影響 ($\bar{I}_2 = \bar{I}_1 = 0.1$)



(c) $\bar{I}_2$ ($= \bar{I}_1$) の影響

図５・２５　ＳＦ４ロータの不安定領域（続き）

はそれぞれ回転体取付け位置a、継手のばね定数κ、中間軸長さ$\bar{l}_2$（$=\bar{l}_1$：ロータ軸の継手から軸受までの長さ）をパラメータにした場合である。何れの場合も大略的には剛性ロータモデルの場合（図５・１０）と同じ傾向が存在する。すなわち、$\varepsilon_1=0.5$近くで最も安定化しており、$\bar{a}=0.5$では二つの極値が存在する。また、$\bar{l}_2=0$の場合と同様、$\bar{a}$が０．５から離れるにともなって不安定化している。同図（ｂ）によるとκによって各境界には多少の差は生じているものの定性的にはそれほど差異はない。しかし、κは$\bar{l}_2=0$の場合とは異なり常に安定化作用を持つとは限らない。同図（ｃ）でも$\bar{l}_2$によってそれほど差異はないが、$\bar{l}_2$も長い方が安定であるとは言えないことが分かる。これらＳＦ４ロータではいずれの場合もＭＦ４ロータに比べて不安定境界がかなり安定側にある。

次に、ジャイロモーメントの影響の計算例を図５・２６、図５・２７に示す。図５・２６は$\bar{l}_2=0$の場合である。$\bar{a}=0.5$ではＨの低い回転数域での安定限界は高いがＨが大きくなるとジャイロモーメントの影響が強く現れている。$\bar{a}=0.3$

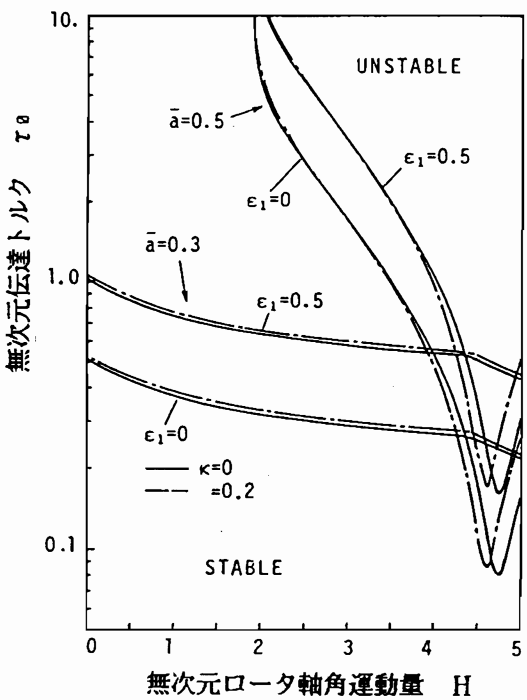
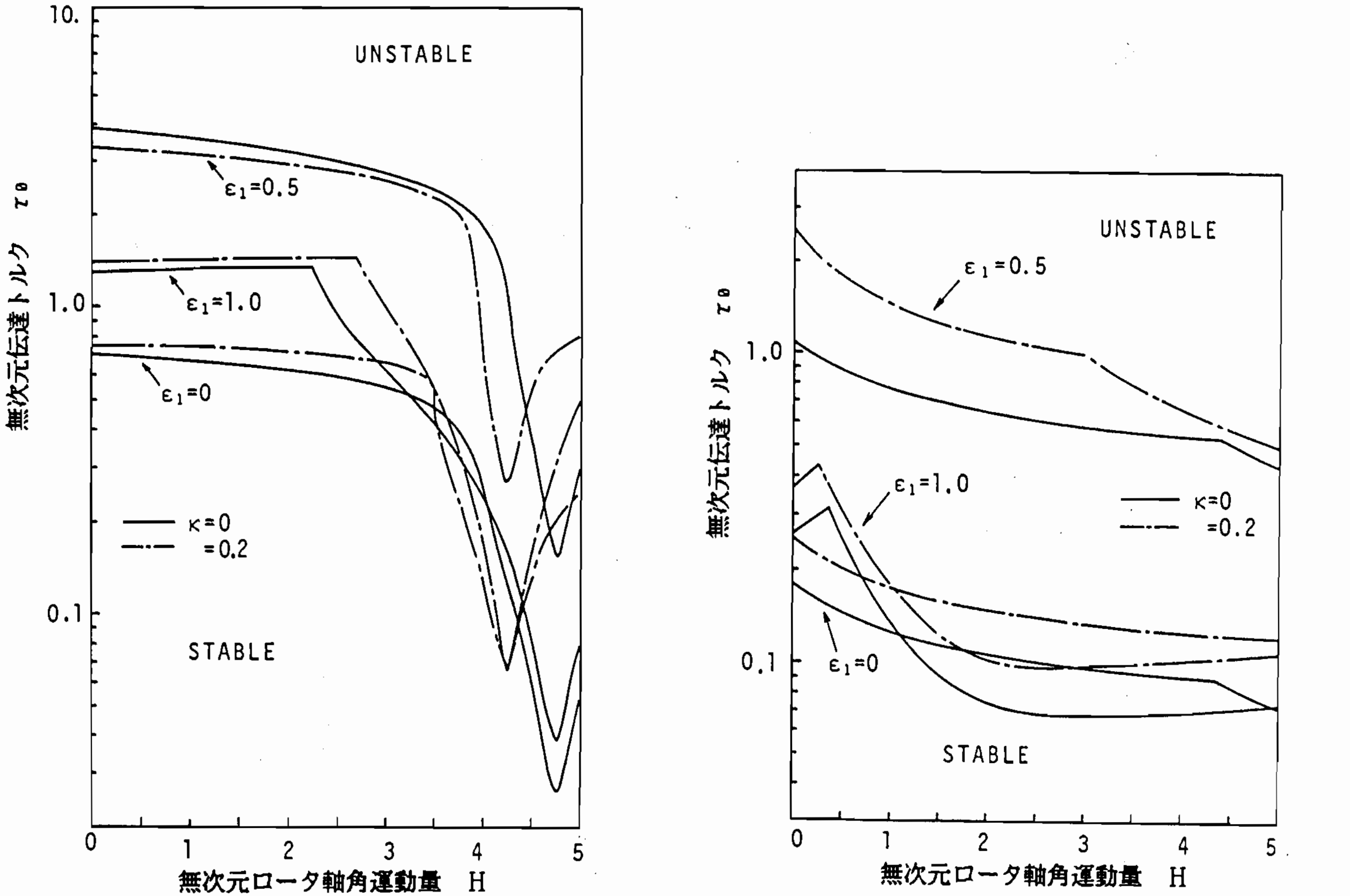


図５・２６
ＳＦ４ロータの不安定領域に及ぼすジャイロモーメントの影響
（$\bar{l}_2=0$，$\zeta_1=\zeta_2=0.01$）



（a）$\bar{a}$＝0.5の場合　　　（b）$\bar{a}$＝0.3の場合

図5・27　SF4ロータの不安定領域（$\bar{I}_1=\bar{I}_2=0.1, \zeta_1=\zeta_2=0.01$）

ではジャイロモーメントの影響が$\bar{a}=0.5$の場合に比べかなり小さい。何れの場合もHがそれほど大きくない回転数域ではジャイロモーメントは不安定化作用のみ示す。図５・２７は$\bar{I}_1=\bar{I}_2=0.1$の場合である。同図（ａ）は$\bar{a}=0.5$、（ｂ）は$\bar{a}=0.3$の場合である。$H<4$の場合では$\bar{a}=0.5$の方が$\bar{a}=0.3$の場合より安定である。$H>4$では$\bar{a}=0.5$の方がジャイロモーメントの影響を強く受け不安定になる。同図（ａ）、（ｂ）とも$H<4$の低速域ではジャイロモーメントはほとんどの場合不安定化作用を持っており、$\bar{I}_2=0$の場合とよく似ている。全体的な不安定傾向はε_1に関わらずほぼ同じ様な傾向であり、いずれも$\varepsilon_1=0.5$が最も安定である。継手ばねの復元モーメントは図５・２７（ａ）の$\varepsilon_1=0.5$を除いて定量的には常に安定化作用を持っているが、定性的にはそれほど変化を与えない。

ところで、$\bar{a}=0.5$と$\bar{a}=0.3$の場合とではジャイロモーメントの不安定化作用がかなり異なっている。これはＫマトリクスの差によるものと考えられる。例えば、図５・２６で、$\kappa=0,\varepsilon_1=0,\tau_0=1.0$ では、$\bar{a}=0.5$で

$$K=\begin{bmatrix} 1.01\ 10^{0} & -2.74\ 10^{-18} & 1.25\ 10^{-18} & -2.46\ 10^{-1} \\ -3.56\ 10^{-18} & 1.01\ 10^{0} & 2.46\ 10^{-1} & -6.66\ 10^{-18} \\ -1.13\ 10^{-20} & -2.51\ 10^{-3} & 4.27\ 10^{-2} & -8.15\ 10^{-18} \\ 2.51\ 10^{-3} & 6.94\ 10^{-20} & -1.29\ 10^{-18} & 4.27\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

であり（系は安定）、$\bar{a}=0.3$では、

$$K=\begin{bmatrix} 1.00\ 10^{0} & 4.22\ 10^{-4} & -1.91\ 10^{0} & -2.47\ 10^{-1} \\ -4.22\ 10^{-4} & 1.00\ 10^{0} & 2.47\ 10^{-1} & -1.91\ 10^{0} \\ -1.94\ 10^{-2} & -2.52\ 10^{-3} & 8.75\ 10^{-2} & 1.46\ 10^{-2} \\ 2.52\ 10^{-3} & -1.94\ 10^{-2} & -1.46\ 10^{-2} & 8.75\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

である（系は不安定）。すなわち、$\bar{a}=0.5$では２自由度連成項はなく（　の項；パラメータの値に依存しないことを確認している）４自由度連成項のみであるが、$\bar{a}=0.3$では全ての連成項が存在する。このため$\bar{a}=0.5$の場合と$\bar{a}$

＝０．３の場合ではジャイロモーメントの影響に差異が生ずるものと考えられる。ＳＲ４ロータの場合の復元力項は対角線に関して対称な４自由度連成項のみからなりジャイロモーメントは不安定境界に影響を持たなかったが、ＳＦ４ロータでは$\bar{a}$＝０．５でも逆対称成分が存在するため、わずかではあるがジャイロモーメントが不安定境界に影響を持つ。

以上より、ＳＦ４ロータでは各パラメータの値に関わらず$\bar{I}_2$＝０ではε_1＝１．０で最も安定で、$\bar{I}_2 \neq 0$ではε_1＝０．５付近で最も安定であると言える。

最後に減衰力の影響を図５・２８に示す。ＳＦ４ロータはＭＦ４ロータに比べてもともと安定であるが、さらに、ＭＦ４ロータよりも小さい減衰力で安定化していることが分かる。

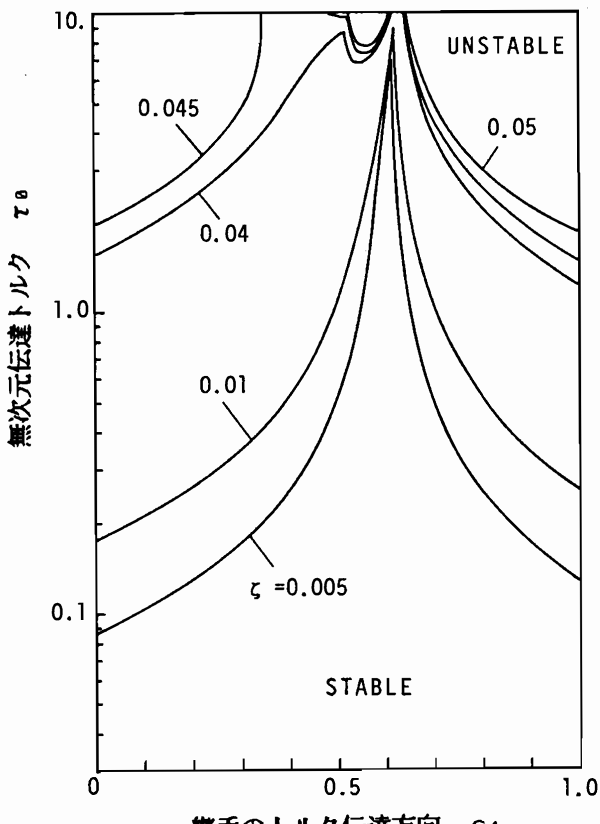


図５・２８　ＳＦ４ロータの不安定領域に及ぼす減衰係数の影響
（Ｈ＝０，κ＝０，$\bar{I}_1$＝$\bar{I}_2$＝０．１，$\bar{a}$＝０．５）

５・７　結言

トルクの伝達方向をモデル化した一般的なたわみ継手を想定し、このたわみ継手で連結されたロータ軸の伝達トルクによる不安定化作用を、軟支持剛性ロータモデルであるＭＲ４ロータとＳＲ４ロータ、剛支持弾性ロータモデルであるＭＦ４ロータとＳＦ４ロータについて解析した結果、以下のことが明かとなった。

（１）ＭＲ４ロータ、ＳＲ４ロータの運動方程式は、それぞれ式（５･１６）、式（５･２５）で表される。ＭＦ４ロータ、ＳＦ４ロータの運動方程式は式（５･４３）の形で与えられる。

（２）剛性ロータ、弾性ロータのいずれの場合でもトルクの伝達方向は系の安定性に大きな影響を持つ。

（３）等速継手では連結される二軸のなす角の二等分方向でトルクが伝達されるが、この場合の不安定特性は極めて安定で特異な場合である。この場合から一般の場合を推定することはできない。

（４）剛性ロータではＭＲ４ロータでもＳＲ４ロータでも継手におけるトルクの作用方向が交差角の二等分方向からずれると急激に不安定化する。

（５）ＭＲ４ロータでは継手におけるトルクの作用方向が交差角の二等分方向からずれるとジャイロモーメントの影響が等速継手の場合の作用と全く逆になることがある。

（６）ＳＲ４ロータでは等速継手の場合と異なりジャイロモーメントが不安定境界に影響を与える。継手のばね復元モーメントはＭＲ４ロータと異なりかなり安定化作用を持つ。

（７）ジャイロモーメントの影響が無視できるＭＦ４ロータでは、一つの継手で連結されるときは、継手のトルク伝達方向を表すパラメータε_1と負荷トルクの作用方向を表すパラメータε_2との影響は定性的にはＭＲ２ロータと類似である。二つの継手で連結されるときは、負荷トルクが軸に沿う方向の場合にはＭＲ４ロータと定性的に類似の不安定傾向を示すが、負荷トルクが軸方向からずれるとＭＲ４ロータとは差が生じ不安定化する。

（８）ＭＦ４ロータにおけるジャイロモーメントは、Ｈ＜４ではロータ軸から仕事を取り出す場合には常に不安定化作用を持つ。ロータ軸に仕事を与える場合

には安定化作用を持つことも不安定化作用を持つこともある。

（9）ＭＦ４ロータでは継手のばね復元モーメントは低速域では不安定境界にほとんど影響を及ぼさないが、Ｈ＞４では不安定境界を大幅に変化させる。

（１０）ジャイロモーメントの影響が無視できるＳＦ４ロータでは、一つの継手で連結されるときはε_1＝１．０で最も安定であるが、二つの継手で連結されるときはε_1＝０．５付近で最も安定である。回転体がスパンの中央からずれるほど不安定になる。

（１１）ＳＦ４ロータにおけるジャイロモーメントの影響は、回転体が軸中央にある場合の方が中央からずれた位置にある場合よりもきつい。

（１２）ＳＦ４ロータにおける継手の復元モーメントの影響は定量的には安定化させることも不安定化させることもあるが、定性的にはほとんど変化がない。

（１３）弾性ロータモデルでの不安定境界は実際の材料の強度限界よりも十分低くなり得る。

第6章　実　験

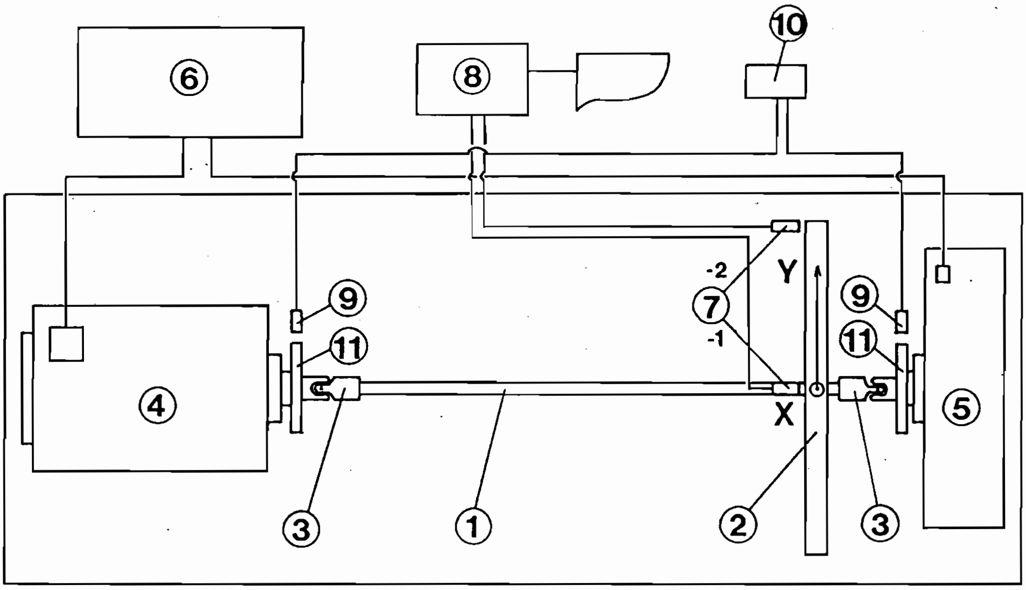
前章までに解析した伝達トルクによる不安定の現象を確認するための実験を行った。

本論文で解析した自励振動現象は強制振動などのいわゆる共振現象ではないので実験的に確認するのは難しい。特に、不安定が発生するか否かは減衰力が大きく作用するため不安定現象を見るには減衰力を抑えて十分なトルクをかけられる実験装置が必要である。さらに、解析モデルからも明らかなように、伝達トルクによる不安定現象を発生させるためにはロータ軸のたわみがある程度必要である。市販の継手を利用することを考慮した場合、ロータ軸をたわみやすくするためには軸継手は自在継手が好ましい。また、継手内の減衰力の小さいものでは構造の簡単な十字軸継手（ころ軸受入り）が最も良いと思われる。これらのことを考慮して、十字軸継手を用いた実験装置を製作した。しかしながら、たとえ上述の十字軸継手でも軸継手を介してトルクをかけるとトルクが増大するにともない継手内の減衰力（クーロン摩擦）も増大し不安定が発生しにくい。種々の試みを行ったが、特別な継手を製作して使用しない限り前章までの解析結果をそのままのかたちで確認することが無理であることが分かったので、本実験では、不安定には至らないがトルクに起因する連成力が確かに存在することを確認するにとどめた。

6・1　実験装置及び実験方法

実験装置を図6・1及び写真6・1に示す。本論文で解析した継手の種類に関わらず発生するトルクに起因する自励現象は、本質的に軸の回転速度は関係がない。そこで、軸の回転速度がほぼ0の状態で現象を見た。

図6・1の装置で直流サーボモータ④をごく低速（1rpm 程度）に保ち、その状態で電磁ブレーキ⑤をかけ（トルク＝1.4kgfm）、一定トルクを伝達している状態を実現した。円板位置は軸端にある場合と軸スパンの中央にある場合で行った。軸端にある場合には円板の傾き振動を、軸中央にある場合は並進運動を測定した。軸端にある場合の計測手順は、変位計⑦-1の取付位置付近を打撃して



① 軸（材質：ＳＫロッド材，長さ：８０６㎜，直径：１０㎜）

② 円板（直径：３００㎜，厚み：２０㎜）

③ 十字軸形自在継手（サンユー製 ＫＨ－１２；コロ軸受型）

④ 直流サーボモータ（安川電機製 ＵＧＣＭＥＤ－３７ＡＡ；
定格出力：３．７kw，定格トルク：２．０６kgfm）

⑤ 水冷式電磁ブレーキ（三菱電機製 ＺＫＢ－１０W_3）

⑥ ④及び⑤の制御装置

⑦ 渦電流式変位計（KAMAN SCIENCES社製 ＫＤ－２３００－２Ｓ）

⑧ ＦＦＴアナライザ（小野測器製 ＣＦ９１０）

⑨ 回転検出ピックアップ（小野測器製 ＭＰ９８１）

⑩ 回転計（小野測器製 ＨＭ６）

⑪ 回転検出用歯車（歯数６０枚）

図６・１ 実験装置

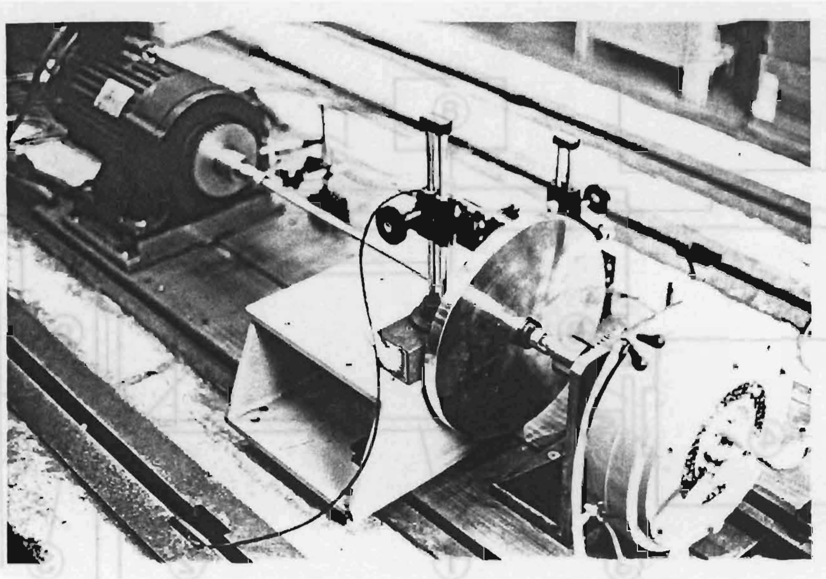
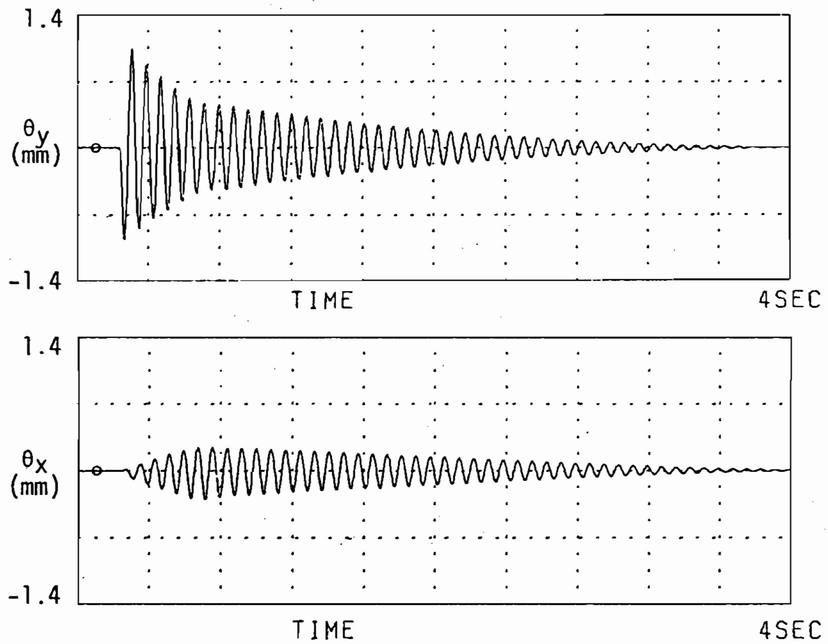


写真6・1　実験装置

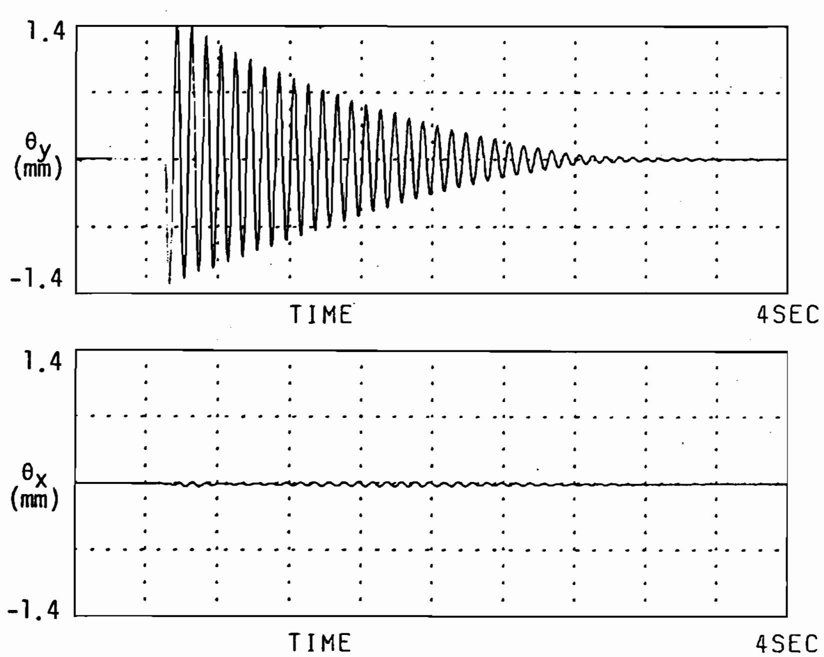
初速度を与え、その時の円板の水平回りの傾き振動（変位計⑦-1）と垂直軸回りの傾き振動（変位計⑦-2）を測定した。円板が中央にある場合は、垂直振動の初速度を与えて垂直振動（変位計⑦-1）と水平振動（変位計⑦-2）を計測した。なお、ロータ軸の両端の十字軸継手はヨークの位相角が一致していなく10°程度のずれがある。本章では図6・1中に記入した座標系で円板の傾き、変位を表す。

6・2　実験結果と考察

円板が軸端（ブレーキ側）にある場合の実験結果の一例を図6・2、図6・3に示す。図6・2は1.4kgfmのトルクをかけた場合で、図6・3は図6・2と比較するためのトルクが0kgfmの場合の結果である。両図とも（a）はヨークがほぼ45°の位置にある時に打撃を与えた場合であり、（b）はヨークがほぼ真上にあるときに打撃を与えた場合である。それぞれ、上側が変位計⑦-1の出力（θ_y）で、下側が変位計⑦-2の出力（θ_x）である。図6・2（a）よりヨークがほぼりの角変位が誘起されている。これと同じ条件でトルクの作用していない図6・3
45°の位置にある場合は水平軸回りの初期速度による角変位に対して垂直軸回

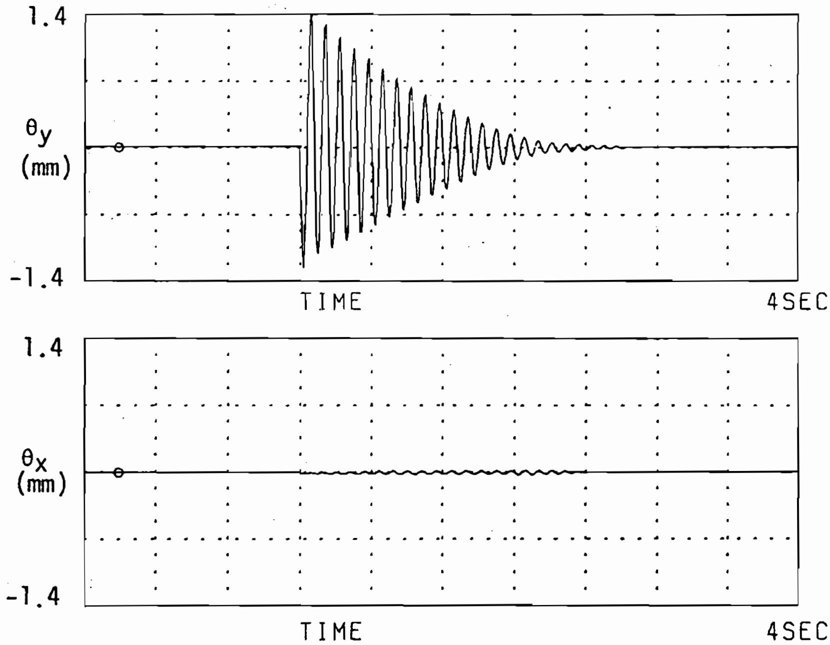


（ａ）ヨーク角度が４５°の場合

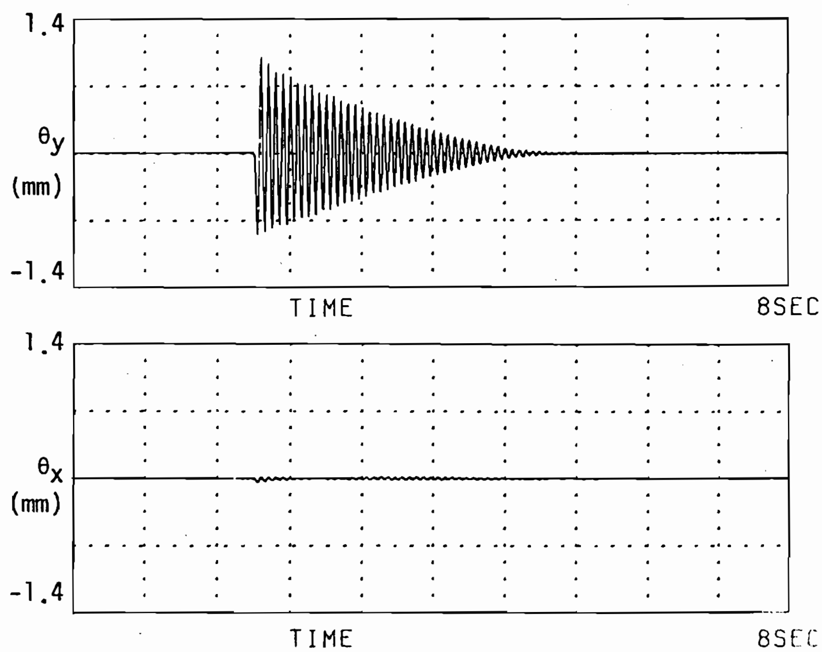


（ｂ）ヨーク角度が０°の場合

図６・２　実験結果の一例（円板位置：軸端，トルク：１．４kgfm）



（ａ）ヨーク角度が４５°の場合



（ｂ）ヨーク角度が０°の場合

図６・３　実験結果の一例（円板位置：軸端，トルク：０kgfm）

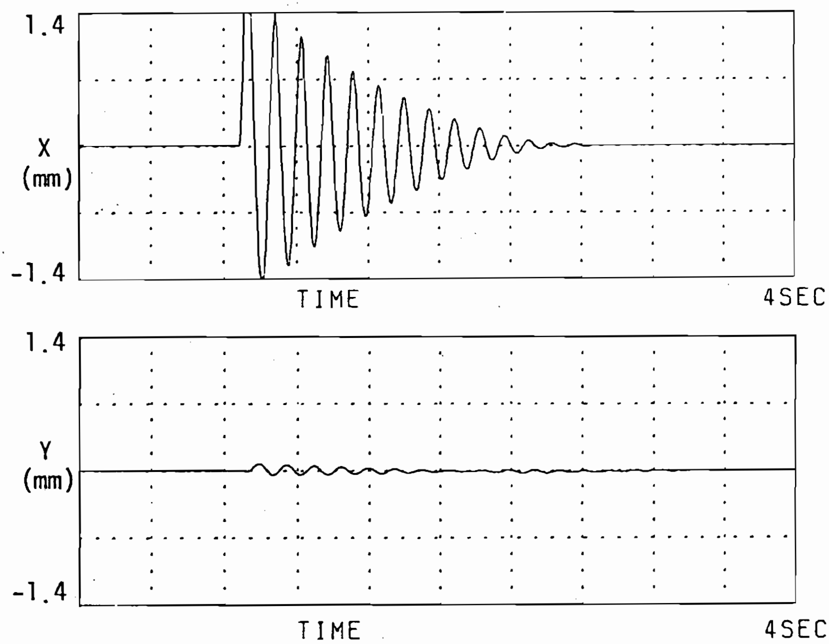
（a）では図6·2（a）の場合よりも大きい水平軸回りの振動に対して垂直軸回りの振動が誘起されていない。それゆえ、図6·2（a）の連成振動は伝達トルクに起因するものであると考えられる。さらに、図6·2（a）では、垂直軸回りの変位（θ_x）が増加している期間と減少する期間では水平軸回りの振動（θ_y）の減衰の強さが明らかに異なっている。このことは減衰の強い前の期間では、連成効果のため水平軸回りの運動エネルギが垂直軸回りの運動エネルギに変換しているが、水平軸回りの振動振幅がある程度まで減少し連成力がなくなると何れの方向の振動も自由減衰をしているものと考えられる。ここで、継手内の減衰力（内部減衰）は自転速度は無視できる程度であるから連成力は持たず、連成効果はトルクに起因する成分以外には存在しない。図6·2（b）に示すヨークがほぼ0°（90°）の位置にある場合にはトルクをかけていても垂直軸回りの角変位は誘起されていないが、これは第4章で解析したようにトルクに起因する連成振動がヨーク角度に依存するためである。

今、簡単に傾向を見るため2自由度剛性ロータモデルを考えると、式（4·11）よりトルクによる横方向の励振力は、回転角をθとして、

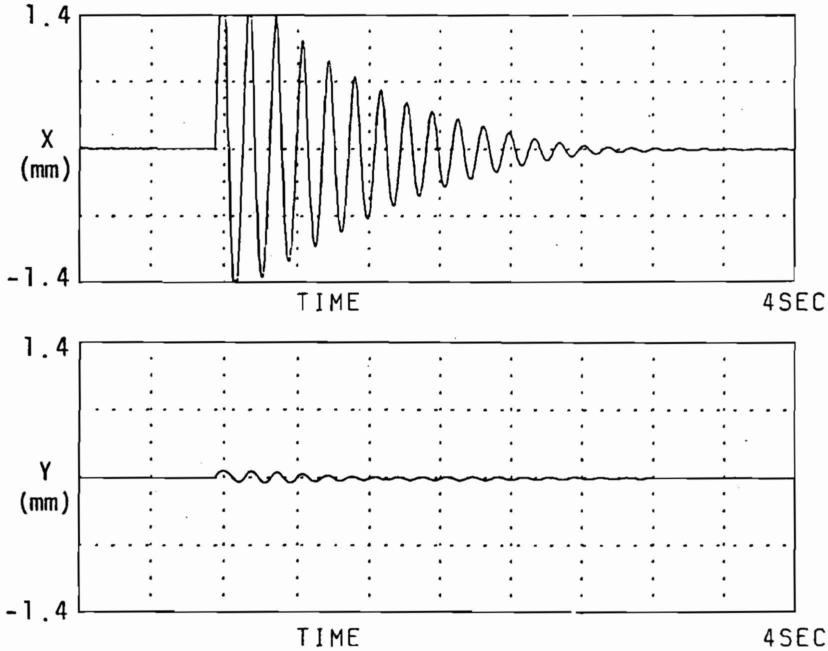
$$\tau_0\begin{bmatrix} \sin 2\theta & 1-\cos 2\theta \\ -1-\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix}$$

となる。連成効果は$\theta=\pi/4$で最大であり、$\theta=0$、$\pi/2$で消滅することが分かる。このことからも、図6·2（a）、（b）の実験結果が伝達トルクに起因する現象であることが分かる。なお、ヨーク角度が0°でも若干垂直振動がみられるのは、2つの十字軸継手の位相が完全に一致していないこと、目視による打撃のため初期条件の与え方が正確でないこと、ロータ軸がごく低速ではあるが回転しているためx，y方向の振動波形が時間が経過するにともない本来のx，y成分を表さなくなってくること などによると考えられる。

つぎに、図6·4、図6·5は円板が中央にある場合の垂直振動（x）、水平振動（y）を見たものである。円板が中央にある場合には、継手部に十分な変動をべた。図6·4は1.4kgfmのトルクをかけた場合であり、図6·5はトルクのない与えるような円板の傾き振動を起こすことは無理であるので、並進振動のみを調

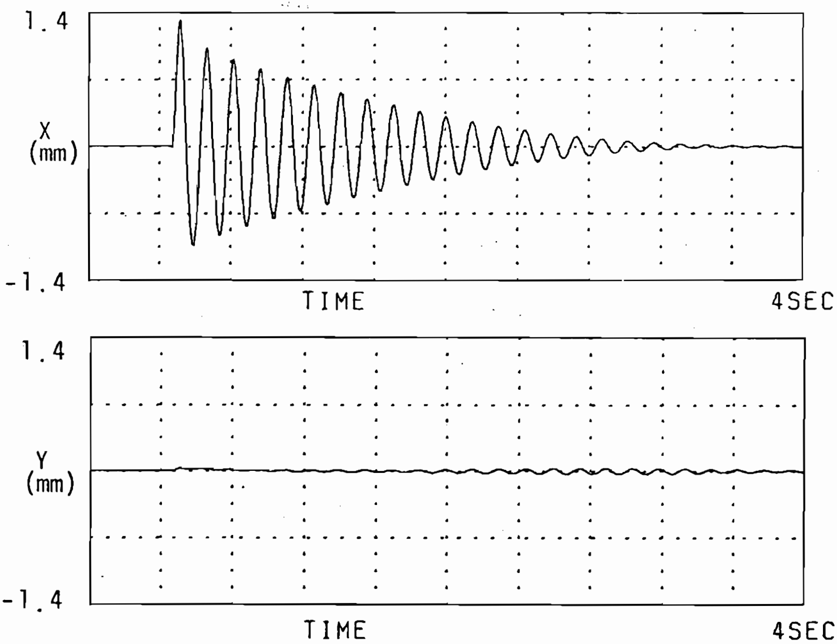


（ａ）ヨーク角度が４５° の場合

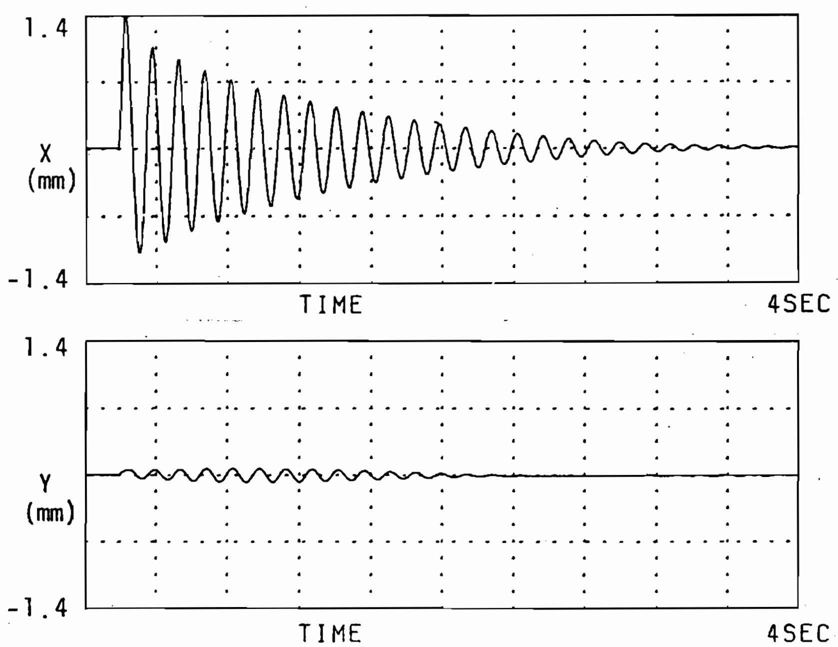


（ｂ）ヨーク角度が０° の場合

図６・４　実験結果の一例（円板位置：中央，トルク：１．４kgfm）



（ａ）ヨーク角度が４５°の場合



（ｂ）ヨーク角度が０°の場合

図６・５　実験結果の一例（円板位置：中央，トルク：０kgfm）

場合の結果である。これらの実験結果は継手部分での軸の傾き変位が図6・2、6・3とほぼ同じオーダとなるように初期速度を与えたものである。この場合はトルクが作用している状態であっても連成振動は発生していない。第5章の解析では円板が中央にある場合には連成効果が打ち消されることを理論的に示している。同図では初速度を与えない方向の振動がみられるが、これらの振動は図6・2に比べて十分弱いものであり、すでに述べたような誤差要因のため実験結果に初速度を与えない方向の振動がみられるものと思われる。

以上より、定性的にではあるが伝達トルクによる連成効果が存在することが確認された。

第７章　結　論

本論文は今後の回転機器の高性能化のためにその特性解明が強く望まれている軸継手について、継手の種類、回転軸系の構成別に動力伝達時の安定性を明らかにすることを目的とした研究である。そのため、等速形と十字軸形の自在継手及びたわみ継手を取り上げ、発電機、圧縮機などの一方の軸端が他の軸に結合されていないモデルと、一般の伝達軸を表す両端が軸継手によって他の軸に結合されているモデルについて安定解析を行った。以下に各章ごとの主な結論をまとめておく。

第２章では図２・１の等速形自在継手で連結されたロータ軸系の４つのモデル、すなわち、ＭＲ２、ＭＲ４、ＳＲ２、ＳＲ４の各ロータについて伝達トルクに起因する安定性を解析した。各々の運動方程式は式（２・２５）、式（２・３２）、式（２・３７）、式（２・４１）で与えられる。何れのモデルロータの場合でも伝達トルクの横方向成分が運動方程式の復元力項に非対角成分として現れ、系を不安定にする。ＭＲ２ロータでは動的不安定のみ発生し、軸受剛性異方性は安定化作用を持つ。ＭＲ４ロータでは動的不安定のみならず、中間軸が短い場合や軸受剛性異方性が１に近いと静的不安定も発生する。軸受剛性異方性は動的安定性に対して安定化作用、静的安定性に対して不安定化作用を持つ。ＭＲロータではロータ軸が外部に仕事をする場合と外部から仕事をされる場合では、ジャイロモーメントの不安定境界に及ぼす影響が定量的のみならず定性的にもかなり異なっている。ＳＲ２ロータでは静的不安定のみ発生する。軸受剛性異方性は不安定化作用を持ち、減衰項は不安定境界に影響を与えない。ＳＲ４ロータでは静的不安定、動的不安定何れも発生するが、ＳＲ２ロータと同様に軸受剛性異方性が不安定化作用を持ち減衰項は不安定境界に影響を与えない。

第３章では、第２章で明らかになった運動方程式復元力項非対角成分の不安定化特性を一般的に把握するため、復元力項に一般的な非対角成分を持つ振動系の不安定特性を２自由度系と４自由度系の場合について示した。２自由度系では逆対称な非対角成分は動的不安定を発生させ、対称な非対角成分は静的不安定を発

生させる。復元力項非対角成分が対称成分と逆対称成分を持つ減衰項が存在しない系では、対称な非対角成分は静的不安定に対し不安定化作用を持ち、動的不安定に対して安定化作用を持つ。逆対称な非対角成分は静的不安定に対して安定化作用、動的不安定に対して不安定化作用を持つ。ジャイロモーメントと外部減衰項を考慮すると、動的不安定についてはジャイロモーメントの影響を受け非対角成分の作用が減衰項のない場合と異なるが、静的不安定は影響を受けない。固有振動数の異方性は、減衰項に関わらず動的不安定に対して安定化作用、静的不安定に対して不安定化作用を持つ。４自由度系では２自由度系のように単純に動的不安定か、静的不安定かで復元力項非対角成分の不安定化作用を分類できない。しかし、減衰項が存在しない場合には、対角線に関して対称成分または逆対称成分のみからなる復元力項非対角成分は、それぞれ静的不安定、動的不安定のみを発生させ、固有振動数の異方性は静的不安定に対して不安定化作用を持つ。

第４章では第２章と同じモデルロータについて十字軸継手で連結された場合の安定性を解析した。ＭＲ２、ＭＲ４、ＳＲ４の各ロータの運動方程式は式（４·３９）、式（４·６５）、式（４·７９）で与えられる。十字軸継手を介して駆動されるロータ系では、伝達トルクは第２章の等速継手の場合と同じ自励振動不安定化作用と回転数の２倍と４倍の周波数成分を持つ係数励振不安定化作用を持つ。振動系は自励振動と係数励振振動が合わさって現れ、それらの相互干渉が問題となる。自励振動の不安定化作用と係数励振振動の不安定化作用を比べると、初期交差角が存在しない場合には、最も振動数の高い主共振の係数励振不安定領域より低速側では係数励振不安定化作用が強く、それより高速側では自励振動の方が強い。初期交差角が存在すると、低速域でも自励振動不安定化作用が顕著になる。軸受剛性異方性は自励振動が顕著な場合には第２章の等速継手の場合と同じ安定化作用を持つが、係数励振振動に対しては不安定領域を拡大する効果を持ち回転数域によって安定化作用になることも不安定化作用になることもある。ジャイロモーメントも不安定領域を拡大するので安定化効果は回転数域に依存する。ＭＲロータでは、等速継手系と同様に、ロータ軸が外部に仕事をする場合と外部から仕事をされる場合ではジャイロモーメントの影響は全く異なったものとなる。

第５章では一般的なトルク伝達特性を持つたわみ継手で連結された第４章までの剛性モデルロータと剛な軸受で支持された弾性モデルロータ（ＭＦ４ロータ、

ＳＦ４ロータ）について伝達トルクによる不安定を解析した。ＭＲ４とＳＲ４ロータの運動方程式はそれぞれ式（５・１６）、式（５・２５）で表され、ＭＦ４とＳＦ４ロータの運動方程式は式（５・４３）の形で表される。何れのロータでもトルクの伝達方向は系の安定性に大きな影響を持ち、等速継手は一般のたわみ継手からみると極めて特異で安定なトルク伝達特性を持つ継手であることが明かとなった。剛性ロータではトルクの作用方向が連結された二軸の交差角の二等分方向からずれると急激に不安定化する。ＭＲ４ロータではジャイロモーメントの影響はトルクの伝達方向を表すパラメータに依存して等速継手の場合と逆になることがある。ＳＲ４ロータでも不安定境界がジャイロモーメントの影響をうけ等速継手系の場合のようにはならない。ＭＲ４ロータでは継手のばね復元モーメントは不安定境界にそれほど影響を与えない。ＳＲ４ロータではばね復元モーメントはかなり安定化作用を持っている。ＭＦ４ロータでは、中間軸のない一つの継手で駆動される場合にはＭＲ２ロータと定性的に類似な傾向を示すが、二つの継手を含む場合には負荷トルクの作用方向によってはＭＲ４ロータとはかなり差異が生じることがある。継手のばね復元モーメントは低速域では影響は殆どないが、高速域では不安定境界を大幅に変える。ＳＦ４ロータは一つの継手で駆動される場合にはＳＲ２ロータと異なり不安定が発生するが、二つの継手で駆動される場合にはＳＲ４ロータに似た傾向を示す。これら弾性ロータモデルでの不安定境界は材料の設計強度限界よりも十分低くなり得るため、実際の設計時には構造のパラメータと減衰力を十分検討する必要がある。

第６章では実験的に伝達トルクに起因する横方向の連成成分が存在することを確認した。

以上、自在継手とたわみ継手を介して駆動されるロータ軸系における動力伝達時の安定性を２自由度系と４自由度系のモデルロータを用いて解析し、トルクによる不安定化の機構を明らかにした。実際の機器の設計のためにはより自由度の多いモデルの解析が必要となるであろうが、本論文で明らかにした基本的性質はどの様なモデルでも共通であり、本論文で明らかにした事項が複雑な系の解析の糸口になると信じるものである。

参考文献

(1) 染谷, 日本機械学会第631回講習会資料(昭61), 1-8

(2) Shiraki, K. and Kanki, H., Proc. Dynamics of Rotors, IUTAM Symp., Lyngby/Denmark, (1974), 494, Springer Verlag

(3) Lemke, D.G. and Trumpler, P.R., Trans. ASME, J. Eng. Ind., 94-2(1972), 507

(4) Klompas, N., Trans. ASME, J. Eng. Power, Oct. 1983, (105), 927

(5) Bannister, R.H., Trans. ASME, J. Mech. Des., 102-1(1980), 168

(6) Dewell, D.L. and Mitchell L.D., Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des., 106-1(1984), 9

(7) Ehrlenspiel, K. and Henkel, G., VDI－Berichte, Nr.299 (1977), 161

(8) 矢鍋・岡崎, 機構論, No.844-3(昭84-3)

(9) 矢鍋・他2名, 機論, 53-487, C(昭62), 560

(10) 白木・梅村, 三菱重工技報, 6-3(1969), 49

(11) 山内・染谷, 機論, 45-399, C(昭54), 1277

(12) 山内・染谷, 機論, 46-407, C(昭55), 806

(13) Fleiss, R., VDI Berichte, Nr.299(1977), 153

(14) Kirk, R.G., et al. ASME Paper, 83-DET-93

(15) Heinz, R., Konstruktion, 30(1978), H.12, 483

(16) Brown, H.W., Trans. ASME, J. Eng. Ind., 101(1979), 421

(17) Marmol, R.A., et al., Trans. ASME, J. Mech. Des., 102-1(1980), 168

(18) 神戸・山本, 自動車技術会誌, 37-12(1983), 1365

(19) 藤井, 機論, 22-115(昭31), 178

(20) 藤井, 機論, 22-119(昭31), 489

(21) 太田・加藤, 機論, 50-460, C(昭59), 2309

(22) 太田・加藤, 機論, 52-479, C(昭61), 1908

(23) 高橋ほか, 日産技報, 9(昭49-2), 31

(24) 高橋ほか, 自動車技術, 29-10(1975), 919

(25) 木全, 潤滑, 31-10(1986), 697

(26) Wagner, E.R., Universal Joint and Drive Shaft Manual (1979), SAE, 97

(27) Beer, F.P. and Johnston, Jr.E.R., Vector Mechanics for Engineer(1962), McGraw-Hill, 714

(28) 亘理, 機械振動(1966), 丸善, 175

(29) V.V.ボローチン 著(関谷, 杉山訳), 非保存的弾性安定問題(昭52), 培風館, 48

(30) Wells, D.A., Lagrangian Dynamics(1967), McGraw-Hill, 176

(31) Vance, J.M., Trans.ASME, J.Eng.Power, 100-2(1978), 235

(32) Vance, J.M. and Laudadio, F.J., Trans.ASME, J.Eng. Power, 103-2(1981), 289

(33) Nelson, C.C., ASME Paper, 79-DET-76(1979)

(34) Newkirk, B.L. and Taylor, H.P., General Electric Review, August 1925, 559-568

(35) Hori, Y., Trans.ASME, Vol 81(1959), Ser.E, No.2, 189-198

(36) Someya, T., Ingenier-Archiv, 33(1963), H.2, 85-108

(37) Thomas, H.F., Konstruktion, 30(1978), H.9, 339

(38) Alford, J.S., Trans.ASME, Ser.A, 87-4(1965), 333

(39) Spurk, J.K. and Keiper, R., Ingenier-Archiv, 43(1974), 127

(40) Kostuk, A.G., Teploenergetica, 22-3(1975), 41

(41) Iwatubo, T., NASA Conf. Pub., 2133(1980), 139

(42) 文献(29)の166ページ

(43) 斉藤・染谷, 機論, 44-388(昭53), 4115

(44) 斉藤ほか, 機論, 45-427, C(昭57), 321

(45) 陣内ほか, 機論, 51-467, C(昭60), 1463

(46) Shimogo,T., et.al., Proc. International Conference on Rotordynamics(1986), Tokyo, 453
(47) 川本・漆谷, 機論, 45-400, C(昭54), 1451
(48) F.F.Ehrich, Shock and Vibration Handbook, 2nd Edition, McGraw-Hill
(49) 杉山, 大阪府立大学学位論文(昭47)
(50) 杉山・野田, 機論, 46-412, A(昭55), 1431
(51) 岩壺, 機論, 48-430, C(昭57), 835
(52) 岩壺, 日本機械学会関西支部第5回セミナー資料(昭60)
(53) Gasch,R., Konstruktion, 23(1971), 5-13
(54) 吉田ほか, 応用数学便覧(昭29), 丸善, 14
(55) 文献(59)の16ページ
(56) 影山, 自動車技術, 21-3(1967), 230
(57) Patterson,C., et al., 2nd International Conf. Vibration in Rotating Machinery, Cambridge, 1980-9, 315
(58) Duditza,F., Kardangerenkgetriebe und ihre Anwendungen(1973), VDI-Verlag GmbH
(59) Hein,W. und Stuhler,W., VDI Zeitschrift 107, Reihe 11, Nr.27(1977)
(60) Zemann,V., Mechanism and Machine Theory, 13(1978)
(61) Rosenberg,R.M., J. Appl. Mech., 25(1958), 47
(62) Wehrli,C., Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik, 15(1964), 154
(63) Burdess,J.S., Proc. 1974 Congress of the International Conference of Theoretical and Applied Mechanics
(64) Barr,A.D.S. and McWhannell,D.C., J.Sound Vib. 14-4(1971), 491
(65) Burnery,S.Z.H. and Jaeger,L.G., J.Sound Vib., 15-1(1971), 15
(66) 岩壺・他2名, 機論, 40-334(昭49), 1576

(67) Sato, K., et al., J. Appl. Mech., 45, Sep. (1978), 643
(68) A. Tondle著（前沢訳），回転軸の力学(昭46)，コロナ社
(69) Bandlani, M., et al., Mechanism and Machine Theory, 13(1978), 543
(70) 岩壷・他２名，機論，45-398(昭５４)，1055
(71) 太田・他２名，機論，46-401, C (昭55)，1225
(72) 岩壷・他２名，機論，46-404，C (昭55)，354
(73) 原，機論，42-360(昭51)，2400
(74) 矢野，京都大学学位論文(昭59)
(75) ポントリヤーギン（千葉訳），常微分方程式(昭55)，共立出版，115
(76) 小寺，機論，45-395, C (昭54)，747
(77) Hsu, C. S., Trans. ASME, Ser. E, 30-3(1963), 367
(78) Schmidt, V. G. and Weidenhammer, F., Mach. Nach, 23(1961), 301
(79) 小寺，機論，46-410，C (昭55)，1181
(80) Wilkinson, J. H. and Reinsch, C., Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation, Vol.2, Springer-Verlag, (1971), 359
(81) 中川，日本機械学会誌，80-706(昭52)，960
(82) R.ガッシュ，H.ピュッツナー（三輪訳），回転体の力学(1978)
(83) 文献(30)の139ページ
(84) Cohen, R. and Porat, I., Trans. ASME, J. Dynamic System, Measurement, and Control, March 1984, (106), 70

（注）機（構）論：日本機械学会（講演）論文集

発表論文

本論文は下記の発表論文をまとめたものである。

（１） 西郷・岩壷，カルダン継手を介して駆動されるロータ軸の横振動（第１報、一継手の場合），日本機械学会論文集，49-442，C（昭58-6），921

（２） Iwatsub,T. and Saigo,M., Transverse Vibration of a Rotor System Driven by a Cardan Joint, Journal of Sound and Vibration, 95(1),(1984),9

（３） 西郷・岩壷，カルダン継手を介して駆動されるロータ軸の横振動（第２報、二継手の場合），日本機械学会論文集，50-455，C（昭59-7），1158

（４） 西郷・岩壷，等速継手を介して駆動される回転体のふれまわり振動，日本機械学会論文集，51-470，C（昭60-1），2473

（５） 西郷・岩壷，等速継手を介して駆動される回転体のふれまわり振動（第２報），日本機械学会論文集，52-473，C（昭61-1），258

（６） Saigo,M. and Iwatubo,T., Lateral Vibration of Rotating Body Driven through Constant-Velocity Joint, Proceeding of International Conference on Rotordynamics, IFToMM Symposium, Tokyo, (1986), 499

（７） 西郷・岩壷，等速継手を介して駆動される回転体のふれまわり振動（第３報，復元力項非対角成分の不安定化効果に関する考察），日本機械学会論文集，52-483，C（昭61-1），2808

（８） Saigo,M. and Iwatsub,T., Transverse Vibration of a Rotor System Driven by two Cardan Joints, Journal of Sound and Vibration, 114(3), (1987), 405

（９） 西郷・岩壷，カルダン継手を介して駆動されるロータ軸の横振動（第３報、初期交差角及びトルクの符号の影響），日本機械学会論文集，

（投稿中）

（１０）　西郷・岩壺，たわみ継手を介して駆動される回転体の不安定振動，日本機械学会論文集，（投稿予定）

謝辞

本研究を行うに当たり、御指導を頂いた岩壺卓三教授（神戸大学工学部）に深く感謝致します。

岩壺先生には、本研究テーマを頂きますとともに、学部、修士課程在学当時から今日に至るまで絶えず懇切なる御教示と激励を賜りました。ここに厚く感謝致します。

また、中川隆夫教授（神戸大学工学部）、森脇俊道教授（神戸大学工学部）には御多忙中にも関わらず労をいとわず論文の校閲を賜りました。ここに深く感謝致します。

昨年急逝された故川井良次名誉教授（神戸大学）には学部、修士課程在学当時から今日に至るまで機会ある度に有形無形の御助言を頂きました。ここに深く感謝致しますとともに論文をまとめることができましたことを御報告いたします。

また、大滝英征教授（埼玉大学工学部、元機械技術研究所自動車安全公害部安全設計課長）からは変わらぬ御支援を賜りました。心より感謝致します。

種々の面で御支援頂いた神戸大学工学部機械系の諸先生方、機械技術研究所自動車安全公害部、ロボティクス部の諸氏に感謝致します。