



Approximation numbers and nuclearity

中村, 昌稔

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

1988-09-30

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

乙1211

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001211>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



氏名・(本籍)	笹 村 賢 穂 (兵庫 県)
学 位 の 種 類	学 術 博 士
学 位 記 番 号	学博ろ第14号
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位授与の日付	昭和63年9月30日
学位論文題目	Approximation numbers and nuclearity (近似数と核型性)

審 査 委 員	主査 教授 村 上 温 夫 教授 平 井 一 正 教授 奥 山 晃 弘
---------	--

論 文 内 容 の 要 旨

核型空間は有限次元線形空間の自然な拡張として Grothendieck が定義したもので、多くの重要な空間が核型になっている。この論文は核型空間の理論の発展および、それと関連して線形作用素の各種近似数の性質および、それらの相互関係を調べることを目的とした。

第1章では p -バナッハ空間 ($0 < p \leq 1$) の間の連続線形作用素の5個の近似数を取り扱った。バナッハ空間の間の線形作用素に対しては、それらの内の4個の近似数の性質はある程度すでに知られているが、本論文ではこれらを、 p -バナッハ空間の間の線形作用素 T に対して調べると共に、近似数列 $\{C_n(T)\}$ を導入することにより、さらに新しい結果を得た。主な結果は次の通りである。

E を q -バナッハ空間、 F を P -バナッハ空間とし、 Q は E^{**} から E へのメトリック・サージェクション、 T は E から F への連続な線型作用素とする。このとき等式 $C_n(T) = C_n(TQ)$ および $\delta_n(T) \leq \alpha_n(T)$ が成り立つ。さらに F がある条件を満たせば、 $\alpha_n(T)^p \leq (n+1)\delta_n(T)^p$ が成り立つ。ここで、 $\delta_n(T)$ は T のコルモゴロフ数を表す。また、 E, F がバナッハ空間の場合、 E がメトリック・リフティングの性質をもてば、 $C_n(T) = d_n(T)$ が成り立ち、 F がメトリック・イクステンションの性質をもてば、 $\alpha_n(T) = \alpha_n(T') = C_n(T')$ が成り立つ。ここで、 $\alpha_n(T)$ は $\alpha_n(T) = \inf \{\|T-S\| : S(E) \text{ は } F \text{ の高々 } n \text{ 次元部分空間}\}$ によって定義される近似数である。

$0 < p < 1$ のとき、 P -バナッハ空間ではハーン・バナッハの定理が使えないが、本研究ではこの定理を使うことなしにいくつかの結果を得た。

第2章では、 ε -核型の線形位相空間を取り扱っている。局所凸でない線形位相空間における核型性の取扱は、ハーン・バナッハの定理が使えないために大変困難で、その基本的性質さえ、今の所、解明されているとはいえない。核型線形位相空間は2つの近傍 U, V のコルモゴロフ数列

$\{\delta_n(U, V)\}$ によって次のように定義されている。すなわち、線形位相空間 E が核型であるとは、 E の任意の 0 -近傍 U に対して、 $\sum \delta_n(V, U) < \infty$ となる E の 0 -近傍 V が存在することである。ここで、 $\delta_n(V, U) = \inf \{\lambda > 0 : V \subset \lambda U + F_n\}$ 、 F_n は E の高々 n 次元部分空間である。ところがこの場合、その遺伝性が問題になる。すなわち、核型空間の部分空間や、核型空間の族の射影極限が再び核型になるかどうかの問題の解決は困難とみなされている。本論文においては、エントロピー数列 $\{e_n(V, U)\}$ を使って、 ε -核型空間というものを次のように定義した。すなわち、線形位相空間 E が ε -核型であるとは、 E の任意の 0 -近傍 U に対して、 $\sum e_n(V, U) < \infty$ が成り立つような E の 0 -近傍 V が存在することである。ただし、 $e_n(V, U) = \inf \{\lambda > 0 : V \subset \lambda U + H_n\}$ 、ここで、 H_n はその要素の個数が高々 2^n の集合を表す。本論文では ε -核型空間にたいしてその部分空間、商空間、完備化及びそのような空間の直積や射影極限も再び ε -核型になることを示した。さらに第1章の結果を使って、擬凸な核型空間は ε -核型になることを示した。

第3章では、強核型な線形位相空間の性質を調べた。局所凸な線形位相空間 E の二つの 0 -近傍 U, V に対して、 V の U に関する metrical order を $\rho(U, V)$ で表すとき、 E が核型であるための必要十分条件は、任意の $\lambda > 0$ と E の 0 -近傍 U に対して、 E の 0 -近傍 V ($V \subset U$) が存在して、不等式 $\rho(U, V) \leq \lambda$ が成立することであるという事実は知られている。著者は、この章の結果の一つとして強核型空間に対してこの種の特徴づけを行った。即ち、 E が強核型であるための必要十分条件は、 E の 0 -近傍 U に対して、他の 0 -近傍 V が存在して、 $\rho(V, U) = 0$ が成立することであることを示した。さらに functional dimension (関数次元) が有限である局所凸な線形位相空間は強核型であることを示した。

第4章では、ベクトル値連続関数の空間の核型性をおもにラドン測度を使って調べた。主な結果は、次の通りである。

G を局所コンパクト空間、 E を距離づけ可能な線形空間とすると、 G から E への連続関数の空間 $N(G, E)$ が核型であるための必要十分条件は、次の性質を持った G 上のラドン速度 μ が存在することである。すなわち、 G の各コンパクト集合 K と E の 0 -近傍 U に対して、次の不等式を満たすような K を含むコンパクト集合 H と E の 0 -近傍 V および正数 α が存在する。

$$\sup \{p_U(\phi(t))\} \leq \alpha \int_H p_V(\phi(t)) d\mu \quad (\phi \in N(G, E))$$

ここで、 $p_U(\phi(t))$ は $\phi(t)$ のセミノルムを表す。

さらに、2つの局所凸線形位相空間 E, F に対して、 E から F へのすべての連続線形作用素の空間 $C(E, F)$ がもし核型であれば、じつは F が核型になることを示した。

第4章の結果より、核型空間が有限次元のベクトル空間のある意味での自然な拡張になっていることが示された。

以上のことをまとめると、本研究の主内容は、局所凸とは限らない一般の線形位相空間にエントロピーの概念を使うことによって、 ε -核型空間の理論を作り上げたことにある。その際、本論文において導入された線形作用素 T の近似数列 $\{C_n(T)\}$ の概念がこの理論の展開に役立った。

論文審査の結果の要旨

核型空間は有限次元線形空間の自然な拡張としてグロタンディエックが定義したもので、多くの重要な空間が核型になっている。本論文は核型空間の理論の発展およびそれと関連して線形作用素の各種近似数の性質およびそれらの相互関係を調べることを目的としている。以下に本論文の要旨を述べる。

第1章では、 p -バナッハ空間 ($0 < p \leq 1$) の間の連続線形作用素の5個の近似数を取り扱っている。バナッハ空間の間の線形作用素に対しては、それらのうちの4個の近似数の性質はある程度すでに知られているが、本論文提出者はこれらを、 p -バナッハ空間の間の線形作用素 T に対して調べるとともに、近似数列 $\{C_n(T)\}$ を導入することにより、さらに新しい結果を得た。 $0 < p \leq 1$ のとき、 p -バナッハ空間ではハーン・バナッハの定理が使えないが、本論文提出者はこの定理を使うことなしにいくつかの結果を得ている。

第2章では、 ε -核型の線形位相空間を取り扱っている。局所凸でない線形位相空間における核型性の取扱は、ハーン・バナッハの定理が使えないために大変困難で、その基本的性質さえ、今の所、解明されているとはいえない。核型線形位相空間は、通常、2つの近傍のコルモゴロフ数列を用いて定義される。ところがこの場合、その遺伝性が問題になる。すなわち、核型空間の部分空間や、核型空間の族の射影極限が再び核型になるかどうかの問題の解決は困難である。本論文では、エントロピー数列を導入して、 ε -核型空間というものを定義した。そして、この ε -核型空間に対してはほとんどの遺伝性が成立することを示し、さらに第1章の結果を使って、擬凸な核型空間は ε -核型になることを示した。

第3章では、強核型な線形位相空間の性質を調べている。局所凸な線形位相空間が核型であるための必要十分条件は *metrical order* という概念を用いてあらわすことが出来ることは、従来から知られていた。本論文では、強核型空間に対してこの種の特徴づけを行い、局所凸な線形位相空間が強核型であるための必要十分条件はその *metric order* が0になることである、ということを示した。

第4章では、ベクトル値連続関数の空間の核型性を主としてラドン測度を使って調べている。主な結果は、 G を局所コンパクト空間、 E を距離づけ可能な線形空間とすると、コンパクトな台を持った G から E への連続関数の空間のクラス $N(G, E)$ が核型であるための必要十分条件を、ある性質を持った G 上のラドン速度 μ の存在で書き表したことである。さらにこの章では、2つの局所凸線形位相空間 E, F に対して、 E から F へのすべての連続線形作用素の空間 $C(E, F)$ がもし核型であれば、じつは F が核型になることが示されている。

以上のように、本研究では、エントロピーを使うことによって、必ずしも局所凸とは限らない線形位相をもった ε -核型空間の理論をつくり、その構造を調べるのに成功した。その際、本論文で導入された線形作用素 T の近似数列 $\{c_n(T)\}$ は従来の核型空間と ε -核型空間との関係をしらべるのに重要な役割を果たすものであって、極めて有力な道具であり、それを用いて成功した本

研究は、非常に価値のあるものである。本論文で得られた結果は、位相空間論、特に、核型空間の理論について重要な知見を得、価値ある集積をしたもので、学問に寄与するところ大である。

よって、学位申請者中村昌稔は、学術博士の学位を得る資格があると認める。