Pade-type and Pade approximants in several variables

貴田，宗三郎

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
1989-03-17
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙1280
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001280

氏名・(本籍)	貴田宗三郎(大阪府)
学位の種類	学術博士
学位記番号	学博ろ第18号
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位授与の日付	平成元年3月17日
学位論文題目	PADÉ – TYPE AND PADÉ APPROXIMANTS IN SEVERAL VARIABLES (多変数パデ型及びパデ近似式)
審査委員	主査 教授 小川枝郎 教授 西尾真喜子 教授 村上温夫

論文内容の要旨

C.Brezinskiは、文献［1］において、1変数パデ近似理論の研究に新たな考え方を導入し、パデ型と呼ばれる近似式を構成すると共に、パデ近似式の代数的な諸性質、諸関係を統一的に理解する方法を示した。また、その考えに基づき多変数の場合についても考察している。ところで多変数の場合には、近似式の分母、分子にどの様な型の多項式を指定するかによってその考察が大きく異なったものとなる。［1］では各変数毎の次数を指定した多項式が用いられている。これに対し、多変数としての全次数を指定した多項式を用いる場合が考えられる。これを全次数型と呼ぶことにする。全次数型を扱ったものとしては［2],[3],[4］等がある。本論文は［1］の考え方、方法が全次数型の多変数パデ近似理論にも拡張、展開が可能である事を示そうとしたものである。この方向での先行する研究としては［2],[3］等が挙げられる。

［1］における考え方の基礎を簡単に述べておく。今、1変数形式べき級数 $f(t)=c_0c_1t+c_2t^2+\cdots$, $ci\in R$が与えられているとする。xの多項式に作用する線形汎関数cを$c(x^i)=c_i$, $i=0,1\cdots$によって定義する。また、任意のq次多項式$v(t)=b_0+b_1t+\cdots b_qt^q$, $b_q\neq 0$に対し、その次数を反転させた多項式 $b_0t^q+b_1t^{q-1}+\cdots+b_q$を$\tilde{v}(t)$と記し、$v(t)$の同伴多項式$w(t)$を上記の線形汎関数cを用いて$w(t)=c(\frac{v(x)-v(t)}{x-t})$と定める。この時、$w(t)$は$q-1$次の多項式となり、次の事が示される。即ち、『任意のq次多項式$v(t)$が与えられた時、有理関数$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$は、その原点におけるべき級数展開が$f(t)$のそれと$q-1$次（＝分子$\tilde{w}(t)$の次数）の項まで一致する』。この有理近似式を（$q-1/q$）パデ型近似式と呼び、パデ近似式と同様の性質を持つ事が示される。ここで任意にとることの出来る上記の$v(t)$をこのパデ型近似式の生成多項式と呼ぶ。生成多項式を適切に選ぶことによって更に高い次数まで一致する有理近似式を構成する事が考えられる。これを高位

の近似式と云う。特に、生成多項式として線形汎関数cに関するq次の（一般）直交多項式をとると2q－1次の項まで一致するいわゆるパデ近似式が、パデ型近似式の特別な場合として得られる。この様に［1］ではパデ近似式が、その生成多項式$v(t)$がcに関する直交多項式となっている事、及び、その分子が$v(t)$の同伴多項式を反転した多項式となっている事、等からパデ近似式の性質や関数について多くの新しい証明や結果を導いている。

本論文の§1では［1］と同様、以後の議論に基本的な役割をはたす多変数形式べき級数、反転多項式、同伴多項式、g－多項式（生成多項式となり得る多項式）等を定義する事から始め、パデ型近似式を構成し、その一意性を示した。まず、多変数べき級数を同次項を一まとめにして見る多変数形式べき級数（岩波数学辞典1083頁）

$$f(t)=c_0+c_1+c_2+\cdots+c_i+\cdots, \qquad t=(t_1, \cdots, t_N),$$

（但し、c_iは$t_1,\cdots,t_N$のi次同次多項式）と見る事から始め、（$t_1,\cdots,t_N$の多項式を係数とする）Xの多項式に$t_1,\cdots,t_N$の多項式を対応させる作用素Cを$C(X^i)=Ci,=i=0,1,\cdots$によって定めた（詳しくは本論参照）。また、N＋1個の変数$t_1,\cdots,t_N$, Xに関する同次多項式$V(X)=b_mX^q+b_{m+1}X^{q-1}+\cdots+b_{m+q}$（係数$b_i$は$t_1,\cdots,t_N$のi次同次多項式）をshift mのq次$g^{\sim}$多項式と定義した。さらに$v(t)=V(1)=b_m+b_{m+1}+\cdots+b_{m+q}$, $w(t)=c\left(\frac{v(t)-X^{p-q+1}V(X)}{1-X}\right)$, $t=(t_1,\cdots,t_N)$をそれぞれ$V(X)$の反転多項式及び$p-q+1$同伴多項式と定義した。この時、べき級数$f(t)v(t)-w(t)$がp次の項まで消える事を示し、有理関数$\frac{w(t)}{v(t)}$をshift m のパデ型近似式$(p/q)_f^m(t)$と定義した。ここで分母の次数が一般にmから始まる場合を扱ったのは全次数型のパデ近似式がこの様に分母、分子の次数をシフトした型の近似式で考えるのが自然である［4］からである。この結果、多変数全次数型の場合には1変数の時と同様、パデ近似式をパデ型近似式の特別な場合として導く事が可能となった。

§2では、上記のパデ型近似式が1変数の場合と全く同様の代数的諸性質を満たす事を示した。例えば、Reciprocal covariance Homographic covariance,Compact formula等、また多変数の場合として、Symmetry,Projection等の性質が成り立つことを示した。

§3では、パデ型近似式のある1つの行列式表現が定義から容易に導ける事を示し、それを用いて、Compact formula及び、生成多項式の零点（我々の場合には、これは$t_1,\cdots,t_N$の関数となっている）を用いた行列式表現を導いた。

［1］でBrezinskiは、パデ型近似式を形式的な補間型の数値積分公式とみなし得る事を述べている。即ち、$f(t)$はcを用いて

$$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots=c(1+xt+x^2t^2+\cdots)=c\left(\frac{1}{1-xt}\right)$$

と表す事ができ、tをparameterとするxについての形式的な積分と見る事が出来る。ここで、$\frac{1}{1-xt}$を点$x_1,\cdots,x_q$を補間点とする補間多項式$p(x)$で置き換えると、$c(p(x))$が丁度$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_q)$を生成多項式とするパデ型近似式となっている。特に、補間点としてcに関する直交多項式の零点をとるとパデ近似式が得られ形式的なガウス型積分公式と見る事が出来る。

§4では、我々の観点からこの関係を考察した。我々の場合には

$$f(t)=c_0+c_1+\cdots=c(1+X+\cdots)=c\left(\frac{1}{1-X}\right),\quad t=(t_1,\cdots,t_N)$$

が成り立ち、$\frac{1}{1-X}$を$t_1,\cdots,t_N$の有理関数を係数とするXの多項式で補間するという考えのもとに、すべてのパデ型近似式が上述の意味での補間型として導かれる事を示した。[2],[3] においても別の観点から、この補間型公式の考えのもとに、特殊なパデ型近似式が導かれている。§4の後半では、[2],[3] における議論との関係を明らかにした。

§5では、生成多項式に関して高位の近似式を得るための必要十分条件をまず示し、特に、[4] のパデ近似式が、作用素cに関する直交多項式を生成多項式とするパデ型近似式として得られる事を示した。また、この近似式の基本的な性質、定理を我々の観点から証明した。さらに、近似式の分母の因子が一部指定されている場合の最高位のパデ型近似式についても考察した。

最後に、§6では、固定したnに対し、$p-q+1=n$を満たす [p/q] パデ近似式の生成多項式の系が一つの直交系をなす事より、生成多項式の系、近似式の分母の系、分子の系について、それぞれ漸化式を導き、さらに、$n-1,n,n+1$ の時の隣接する直交多項式系の間の関係式を導き、これらの関係式をもとにパデ近似式の基本的な漸化関係（Cross rule,2項関係、3項関係、等）を我々の観点から導く方法を示した。

参 考 文 献

[1] C. Brezinski,Padé−type Approximation and General Orthogonal Polynomials, ISMM 50 (Birkhauser,Basel,1980).

[2] P. Sablonnière,A new familiy of Padé−type approximants in R^k, J.Comput. Appl.Math.9 (1983),347−359.

[3] S. Arioka,Padé−type approximants in multivariables,Appl.Numer.Math.Vol.3, No.6 (1987),497−511.

[4] A. Cuyt, Padé Approximants for Operators : Theory and Applications,L.N.M. Vol.1065 (Springer,1984).

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

関数$f(x)$をべき級数に展開し、適当に有理関数$Q(x)$を構成して、$f(x)$から$Q(x)$を引いたとき、$f(x)$のべき級数展開式の初項からn項までが消えたとする。このとき、有理関数$Q(x)$を$f(x)$をn次まで合わせるPadé近似式と呼ぶ。合わせたい次式を設定して、その次数まで合わせるPadé近似式を如何にして構成するかを考察したり、Padé近似式の諸性質を調べることが、Padé近似理論研究の目的である。

最近この分野における研究の動向の一つとして多変数関数に対するPadé近似理論の研究が挙げられる。この場合、与えられた多変数関数のべき級数展開式を多変数有理関数で初項から或る次数の項までを合わせたいわけである。合わせたい部分は多変数多項式であるが、その表現方法に

2通りあることがわかる。2変数x,yの多項式を例にとって考えれば、xに関してn次、yに関してm次の項までを考慮した表現式と、xとyの2変数の次数の合計で見る表現式とがある。前者を分離次数型、後者を全次数型ということにする。

Brezinskiは、最近の著書において、1変数Padé近似理論の研究に新しい考え方を導入して、Padé近似式の構成法やその代数的諸性質・諸関係を新見地より統一的に理解できる方法を案出した。彼も2変数Padé近似理論を考察したが、それは分離次数型の立場からで、全次数型の場合には触れなかった。

貴田氏の学位論文は多変数Padé近似理論を全次数型の立場から取り扱い、Brezinskiの上述の新しい考え方を上手に工夫することによって、この場合にも適用できることを示した独創性に富んだものである。

論文は6章より成っている。

第1章では、以後の議論において基本的役割を果たす作用素c等を定義し、Padé型近似式をその分母が全く任意の多変数多項式である場合に対して定義した。この導入方法はBrezinskiの1変数の場合の考え方に工夫を加えた独創的なものである。

第2章では、上記のPadé型近似式が、1変数の場合と同様な代数的諸性質を有することが示される。

第3章では、Padé型近似式の行列式表現が与えられ、それを用いて有名なCompact Formulaや生成多項式の零点を考慮したPadé型近似式の行列式表現が導かれた。

第4章では、生成関数を有理関数を係数とする多項式で補間したものに作用素cを作用させれば、Padé型近似式が得られることを示し、既に他の研究者によって得られたPadé型近似式がこの立場から関連付けられることを示した。

第5章では、生成多項式に対して、高位のPadé型近似式を得るための必要十分条件を先ず示し、特にshiftした次数をもつPadé近似式が、作用素cに関する直交多項式を生成するPadé型近似式として得られることを示した。

第6章においては、固定したnに対して、$n=p-q+1$を満たすp,qに対して、分子、分母の次数がそれぞれp,qであるPadé近似式の生成多項式が直交多項式系を成すことが示され、それ等についての漸化式が導かれた。その他、Padé近似式間の基本的な漸化関係についても考察した。

以上のように本研究は多変数Padé型及びPadé近似式に対する新構成法を示し、その立場から近似式の代数的性質や諸関係を統一的に明快に理解できるようにした独創性に富んだ新知見の集積であると認めた。

よって、学位申請者貴田宗三郎は、学術博士の学位を得る資格があると判断した。