Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-07-06

2次元状態空間モデルの実現とその特性改善に関する研究

下西，二郎

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
1989-09-22
(Date of Publication)
2009-03-17
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙1333
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001333

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。

神戸大学博士論文

2次元状態空間モデルの実現とその特性改善に関する研究

平成元年8月

下　西　二　郎

序　文

本論文は，２次元システムの状態空間実現問題とその特性改善に関する問題を，極配置，モデル適合および逆システムの構成の観点から考察したもので，全体は７章から成る。

第１章は緒論で，本研究で取り上げる２次元システムの状態空間モデル生誕の歴史を概説し，本研究の位置づけと意義について述べている。

第２章では，２変数有理関数から２次元状態空間モデルを実現するための二つのアルゴリズムが提案されている。このアルゴリズムによれば Roesser の状態空間モデルが正準形又は平衡形で最小実現される。

第３章では，状態フィードバックによる２次元システムの極配置問題を論じている。状態フィードバックには線形関数観測器が用いられ，これを組み込んだ閉ループシステムの極が任意に配置できるための条件が考察されている。

第４章では，出力フィードバックによる２次元システムの極配置問題が論じられている。ここでは極配置問題を２次元動的補償器の設計問題として扱っており，この動的補償器が設計できるための条件が前章の線形関数観測器によって極が配置できるための条件と一致していることが示される。

第５章では，有理関数行列で表される２次元システムを対象に，１次元動的補償器を導入した２次元システムのモデルマッチング問題を取り上げている。

第６章では，２次元システムに対する逆システムの構成法が論じられている。すなわち，弱因果的２次元システムを係数行列の要素が１変数の有理関数で与えられる１次元動的システムとみなして，因果的２次元システムに対する固有遅れ逆システムが１次元動的システムの立場で一般的に構成されている。

第７章は本論文の総括と結論であり，本研究で得られた知見と意義について述べられている。

関連発表論文と資料

第２章

（１）下西，雛元，前川：分母分離形２次元伝達関数からの正準形実現，システムと制御，Vol.30，No.2，pp.127-129（昭61-2）

（２）下西，雛元，前川：分母分離形２次元伝達関数の平衡実現，電子通信学会論文誌(A)，Vol. J69-A，No.8，pp. 1018-1021（昭61-8）

（３）下西，雛元，前川：分母分離形２次元伝達関数の状態空間実現，昭和60年電気関係学会関西支部連合大会講演論文集，G 52（昭60-10）

（４）下西，雛元，前川：分母分離形２次元伝達関数からの平衡実現の一手法，第30回システムと制御研究発表講演会論文集，pp.23-24（昭 61-5）

第３章

（１）下西，雛元，前川：未知外乱を含む２次元システムに対する状態観測器，電子通信学会論文誌(A)，Vol.J67-A，No.2，pp.119-125（昭59-02）

（２）雛元，下西，前川：２次元システムに対する外乱分離オブザーバの設計，計測自動制御学会論文集，Vol.20，No.4，pp.294-299（昭59-04）

(3) T.Hinamoto, F.W.Fairman & J.Shimonishi：Two-dimensional disturbance decoupled observers, Int. J. Systems Sci., Vol.18, No.3, pp.427-440 (1987)

（４）雛元，下西，前川： 線形関数観測器による２次元システムの極配置，電子通信学会論文誌(A)，Vol.J67-A，No.12，pp.1209-1216（昭59-12）

（５）下西，雛元，前川：２次元システムに対する Disturbance-Decoupled オブーバ，第26回自動制御連合講演会前刷，pp.141-142（昭58-11）

（６）雛元，下西，前川：２次元システムに対する Disturbance-Decoupled オブザーバの特異値分解による設計，第６回 Dynamical System The-

ory シンポジュウム資料, pp. 39-44 (昭58-12)

（7）下西, 雛元, 前川：線形関数観測器を用いた２次元システムの極配置, 第28回システムと制御研究発表講演会論文集, pp. 201-202 (昭59-5)

第４章

（1）下西, 雛元, 前川：動的補償器を用いた２次元システムの極配置, 計測自動制御学会論文集, Vol. 20, No. 3, pp. 207-213 (昭59-3)

（2）J. Shimonishi, N. K. Sinha & T. Hinamoto：Eigenvalue-assignment of linear multivariable 2D systems using 2D dinamical compensaors, Int. J. Systems Sci., Vol. 20, No. 5, pp. 779-792 (1989)

（3）下西, 雛元, 前川：動的補償器を用いた２次元システムの極配置, 第26回自動制御連合講演会前刷, pp. 143-144 (昭58-11)

第５章

（1）下西, 雛元, 前川：１次元動的補償器による２次元モデル適合問題, 計測自動制御学会論文集, Vol. 22, No. 2, pp. 136-142 (昭61-2)

（2）下西, 雛元, 前川：２次元システムのモデルマッチング問題, 第７回 Dinamical System Theory シンポジュウム資料, pp. 121-124(昭59-12)

第６章

（1）下西, 雛元, 前川：２次元システムに対する逆システムの構成, 電子通信学会論文誌(A), Vol. J69-A, No. 2, pp. 203-209 (昭61-2)

（2）下西, 雛元, 前川 :２次元逆システムの一構成法, 第29回システムと制御研究発表講演会論文集, pp. 103-104 (昭60-5)

巻末付録- A

（1）下西, 雛元, 前川：２次元状態空間モデルによるあるクラスの分布定

数系のモデリング，システムと制御，Vol.32，No.5，pp.335-337（昭63-5）

その他

（学会誌関係）

（1）雛元，下西，前川：ある特殊な形をした双線形システムに対するオブザーバ，電子通信学会論文誌（A)，Vol.61-A，No.5，pp.504-505（昭53-5）

（2）雛元，下西，前川：線形分散制御システムの状態観測器，計測自動制御学会論文集，Vol.14，No.5，pp.479-485 （昭53-10）

（3）下西，雛元，前川：２次元システムの状態観測器，システムと制御，Vol.25，No.9，pp.576-577（昭56-09）

（4）T.Hinamoto，F.W.Fairman & J.Shimonishi: Stabilization of 2D filters using 2D observers，Int. J. Systems Sci.，Vol.13，No.2 pp.177-191（1982）

（5）下西，雛元，前川：Attasi 型２次元システムに対する逆システムの構成,計測自動制御学会論文集，Vol.18，No.9，pp.898-904（昭57-9）

（6）雛元，下西，前川： Attasi 型２次元フィルタの状態空間実現問題，電子通信学会論文誌(A)，Vol.J65-A,No.11，pp.1137-1143（昭57-12）

（7）下西，雛元，前川：モード可制御性とモード可観測性に基づく分母分離形２次元システムの構造分解と実現について，システムと制御，Vol.27，No.12，pp.793-800（昭58-12）

（8）T.Hinamoto，S.Maekawa，J.Shimonishi & A.N.Venetsanopoulos:Balanced realization and model reduction of 3-D separable-denominator transfer functions，J. Franklin Inst.，Vol.325，No.2，pp.207-219（1988）

（学術講演会関係）

（１）下西，雛元，前川：分散制御システムのオブザーバの一設計法，日本自動制御協会第21回学術講演会論文集，pp.27-28（昭52-5）

（２）下西，雛元，前川： ある双線形システムのオブザーバ， 第20回自動制御連合講演会前刷，pp.209-210（昭52-12）

（３）下西，雛元，前川：双線形離散時間システムに対するオブザーバ，第17回計測自動制御学会学術講演会予稿集，pp.297-298（昭53-8）

（４）下西，雛元，前川：２次元システムの分離可能性と状態観測器，第24回システムと制御研究発表講演会論文集，pp.185-186（昭55-5）

（５）下西，雛元，前川：２次元逆フィルタの一設計法，第４回 Dinamical System Theory シンポジュウム資料，pp.133-136 （昭56-12）

（６）雛元，下西，前川：ある種の２次元フィルタに対する状態空間モデルの実現について，第26回システムと制御研究発表講演会論文集， pp.169-170（昭57-5）

（７）下西，雛元，前川：分母分離形２次元システムの最小性とモード可制御・可観測性，第27回システムと制御研究発表講演会論文集，pp.219-220（昭58-5）

（８）雛元，下西，前川：分母分離形３次元システムの平衡実現，第31回システムと制御研究発表講演会論文集， pp. 23-24 （昭62-5）

目　　次

第1章　緒　　論

ここ数年来，ディジタル画像，地震波形，重力磁気データなど各種２次元信号のディジタル処理に関する研究が多くの関心を集めている。これはこの分野が潜在的にもつ工学面への応用の広さと，解決すべき理論面を数多く含んでいるからと思われる。

従来，２次元信号の処理には２次元ディジタルフィルタが有効と考えられ，主に安定問題や設計問題などが伝達関数法を用いて解析されてきた。一方，ディジタルフィルタを状態空間モデルで表現し，状態空間法を用いて解析する方法は極めて有効な手段と思われる。例えば，フィルタの係数感度[1･1]や丸め誤差，あるいはリミットサイクルなど[1･2]フィルタの内部構造に関連する問題を系統的に取り扱うことは伝達関数法では困難である。

ディジタルフィルタを状態方程式で表現することはこれを動的システムとしてとらえようとすることに他ならない。ディジタル信号処理，特に１次元ディジタルフィルタの研究分野と線形システム理論，あるいは，制御理論の研究分野とが密接に関連している[1･3]ことはよく知られているが，２次元ディジタルフィルタの分野においても，これまでに提案されている幾つかの状態空間モデル[1･4]－[1･7]を２次元離散空間システムとみなすならば，システムの低次元化[1･8]や感度解析[1･2]，システム同定[1･9]，あるいは安定判別[1･10]などの問題は，２次元ディジタルフィルタの研究分野と２次元システム理論の両分野にとって共通で，重要な基礎的な問題であろう。さらに，画像用フィルタに関連して提案された２次元状態空間モデルの可制御性あるいは可観測性の概念[1･4]は２次元システムで近似された実在システムを制御する，という一つの応用面とその可能性を強く示唆している。

実在システムを２次元状態空間モデルで近似する研究は現在のところ少ない

が，その最初の試みは，集中ー分布素子混在回路網の合成にあたって２変数システムの実現問題を扱った Youla の研究(1・11) に見られる。さらに，２次元平面上に広がる分布定数系や Delay Differential システム(1・12)あるいは工作機械の切削刃や農耕機械の鋤などの繰り返しプロセス(1・13)（マルチプロセス）なども２次元状態空間モデルで近似できることが知られている。

巻末の付録には一階あるいは二階の偏微分方程式で記述されるあるクラスの分布定数システムを２次元状態空間モデルで近似するための一手法が与えられている（付録－Ａ）。

このように実在システムが２次元システムで近似されるとき，システムの制御や，動特性改善の問題が持ち上がろう。２次元システムにおけるこの種の問題を扱う研究分野，すなわち，１次元システムにおけるシステム理論あるいは制御理論に相当する分野を扱った研究は今のところ少ない。しかし，２次元システム理論ともいえるこの分野の探求は，実在システムに対する新たな解析法や設計法を提供するばかりでなく，２次元ディジタルフィルタの研究分野とこの研究分野との関連を明らかにすることになる。このことは，１次元信号処理とシステム理論との関係同様，２次元信号処理と２次元システム理論の両研究分野の発展へとつながろう。実際，最近出版された二冊の成本，すなわち，R.Eising 著“2-D systems, An algebraic approach”(1・14) や T.Kaczorek著“Two-dimensional linear systems”(1・15) などは２次元システム理論の分野を系統的に扱ったものといえる。

本研究は，上記２次元システム理論に相当する分野を扱ったもので，２次元システムを状態空間モデルで実現する問題と，その特性改善に関する問題を，極指定，モデル適合および逆システムの構成の立場から考察している。

まず，第２章では，２変数の有理関数で表される２次元システムを Roesser の状態空間モデルで最小実現するための二つのアルゴリズムが提案される。ここで取り上げる分母分離形 Roesser モデルは安定判別が容易で，しかも構造

が簡単であることから，実用上有用であり，２次元ディジタルフィルタなどに広く応用されている。本章では，このクラスの Roesser のモデルを正準形と平衡形で実現するするためのアルゴリズム(1・16)，(1・17) を与えている。

正準形実現のためのアルゴリズムは従来のアルゴリズムに比べて非常に簡単なもので，伝達関数から直接正準形で最小実現できる。続いて提案されるアルゴリズムは Roesser のモデルを平衡形で実現するためのアルゴリズムである。この平衡実現形では，可制御性グラミアンと可観測性グラミアンがそれぞれ対角行列になり，両者は等しい。また，対角要素の相対的な大きさは，対応する状態変数の入出力特性に対する重要度を表しており，この性質はモデルの低次元化(1・8)に利用される。

２次元システムに対する平衡実現のための手法は Lashgariら(1・8)によって最初に提案された。これは，ハンケル行列の特異値分解を用いて，有限個のマルコフパラメータを Roesser モデルで近似する方法であるが，ここで取り上げるような伝達関数からの平衡実現についてはこれまでに取り扱われていない。Lashgari らによる実現が準平衡形であるのに対し，本手法による実現は真の平衡形であり，平衡実現からは，適当な座標変換によって，厳密に量子化誤差最小の構造あるいは係数感度最小構造が得られる(1・2)。

第３章と第４章では２次元システムの極配置問題を取り上げている。これらは状態あるいは出力のフィードバックによって得られる閉ループシステムが所望の特性を持つように，フィードバック則を設計する問題であり，ここでは，この問題を２次元状態空間モデルの立場から考察している。この問題への他のアプローチとしては，２次元システムを伝達関数の立場で扱い，動的補償器の設計を２変数の多項式方程式の解を求める問題に帰着する方法 (1・18)，(1・19) と，２次元システムを環上で定義される１次元動的システムの立場で扱う方法 (1・20)，(1・21)とがある。前者では，被対象システムがスカラの入力と出力の場合に限定されるばかりでなく，解も必ずしも容易には得られない。また，後

者では，２次元システムが環上の１次元システムの特別の場合，すなわち，Principal Ideal Domain（P.I.D） 上の１次元動的システムとなることから，この方法で得られる動的補償器は必ずしも実現できない。これらに対し，本研究では，閉ループシステムが分母分離形の Roesser の状態空間モデルとなるようなフィードバック則を設計している。 これは分母分離形の Roesser モデルの持つ利点，すなわち１次元システムにおける理論を利用するためで，これによって，２次元システムに対する極あるいは特性多項式の指定などの特性改善の問題は完全に２つの１次元動的システムに対する問題に分割できる。

まず， 第３章[1・22]では状態フィードバックよる２次元極配置問題を考察している。この場合，システムの状態は観測できないから観測器を必要とする。しかも，観測器としては状態そのものを推定する状態観測器である必要はなく，その線形関数値が推定できる関数観測器が得られれば十分である。ここでは，関数観測器の設計法を与えると共に，これを状態フィードバックに組み込むことを考える。この方法による極配置法では，組み込まれる観測器の極が閉ループシステムの入出力特性に関係しない，という特長を持っている。

続いて，第４章[1・23]では極配置問題を動的補償器の設計問題として扱っている。すなわち，任意に指定された複素数対を配置するような動的補償器が存在するための十分条件が示され，その設計アルゴリズムが与えられている。この動的補償器は２次元システムを組み込んだ出力フィードバックで，この種の問題で，従来取り扱われている状態あるいは出力フィードバックによる極配置に比べて，より実用的で，極配置は容易になる。なお，前章での線形関数観測器は，この章で取り扱った動的補償器の一種とみなされるが，両者の関係と特徴についても触れている。

第５章[1・24]で取り上げるモデル適合問題は与えられたシステムに対して適当なフィードバックを施し，その閉ループシステムを理想のモデルに一致させる問題である。この章では，２次元モデル適合問題を解くために１次元動的補

償器が導入され，設計問題は１変数の有理関数を係数とする連立方程式のプロパーな有理関数解を求める問題と等価になることが示される。ここでの１次元動的補償器は２種類の遅れ素子を有する従来の動的補償器に比べて構造は簡単であり，設計は平易である。また，必要な遅れ素子は一種類のみであるから，経済的でもある。

第６章[1・25]では，２次元システムに対する固有遅れ逆システムについて考察している。すなわち，Eising[1・26]が提案した弱因果的２次元システムを，係数行列の要素が１変数の有理関数である１次元動的システムとして，取り扱う方法を述べている。 そして，Eising が２次元伝達関数の立場で取り扱った因果的２次元システムに対する固有遅れ弱因果的逆システムは，１次元動的システムの立場で一般的に議論できることが示される。逆システムあるいは逆フィルタは画質の劣化を回復させるための有力な道具となる [1・27]，[1・28]。特に，画像劣化の主な原因がノイズではない場合，逆フィルタリングは多くの場合画質回復のために効果があることはよく知られている[1・28]。この章における逆システムの構成法の特長は，（ｉ）２次元逆システムの構成に１次元システムにおける理論が利用できる。（ii）弱因果的逆システムが局所状態空間モデルの立場で比較的容易に得られる，などである。

最後に第７章では，本研究で得られた知見と意義について要約する。さらに，今後に残された解明すべき問題点および予想される発展方向など著者の見解を二，三述べている。

記　法

本論文で用いられる主な記号が以下にまとめられている。

$\mathbf{Z}$	：整数の集合
$\mathbf{Z}_+$	：非負整数の集合
$\mathbb{R}$	：実数の集合
$\mathbb{R}[z]$	：実係数 z の多項式の集合
$\mathbb{R}(z)$	：実係数 z の有理関数の集合
$\mathbb{R}_{pr}(z)$	：z の有理関数がプロパーであるものの集合
$\mathbb{R}[z_1, z_2]$	：実係数z_1とz_2の多項式の集合
$\mathbb{R}(z_1)[z_2]$	：$\mathbb{R}(z_1)$を係数とするz_2の多項式の集合
$\mathbb{R}^{n\times m}$	：$\mathbb{R}$を要素とする n × m の行列（$\mathbb{R}[z]^{n\times m}$，$\mathbb{R}(z)^{n\times m}$，$\mathbb{R}[z_1, z_2]^{n\times m}$等も同様）
I_n	：n 次単位行列
A^T	：行列 A の転置
A^{-T}	：行列 A の転置行列の逆行列，すなわち，$A^{-T}=(A^T)^{-1}$
A^+	：行列 A の一般化逆行列
$\{A\}_{ij}$	：行列 A の ij 要素
det A	：行列 A の行列式
adj A	：行列 A の余因子行列
diag $\{a_1, \cdots, a_n\}$	：要素がa_iである n × n の対角行列
deg p[z]	：多項式 p[z]の次数
rank A	：行列 A の階数
Range A	：行列 A の値域
Null A	：行列 A の零空間
$V(\mathbb{R})$	：体$\mathbb{R}$上のベクトル空間
S_H	：２次元インパルス応答 H のサポート

cs.A　　：n×m行列Aの列展開，すなわち，

$cs.A=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{nm}]$

$\min.\{a_1,\cdots,a_n\}$　：$a_1,\cdots,a_n$の最小値

$A\otimes B$　　：n×m行列Aとp×q行列Bのクロネッカ積

すなわち，$\{A\}_{ij}=a_{ij}$とするとき，

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

$(h,k)\leqq(i,j)$　：$h\leqq i$，$k\leqq j$

$(h,k)=(i,j)$　：$h=i$，$k=j$

$(h,k)<(i,j)$　：$(h,k)\leqq(i,j)$，$(h,k)\neq(i,j)$

第2章　2次元状態空間モデルの実現

2・1　緒　　言

分布・集中両素子混在回路系[2・1], [2・2]，分布定数系，　あるいは時間遅れ系など[2・3], [2・4] を２変数の有理関数で近似しようとする試みはかなり以前から多く見られる。Kamen[2・4]や Sontag[2・5]らは，あるクラスの分布定数系や時間遅れ系を１変数多項式を係数とする線形動的システムで近似し，系の安定性や特性を解析している。この動的システムは多項式環上で定義される１次元システムであり，その伝達関数は２変数の有理関数となる。

この章では，２変数の有理関数で記述されている２次元システムを状態空間モデルで実現する問題を取り上げる。すなわち，ここでは，伝達関数の分母がそれぞれ１変数の多項式の積に分解できるような，２次元システムを Roesser の状態空間モデルで実現するための二つのアルゴリズム[2・6], [2・7] が提案される。この分母分離形 Roesser モデルは，安定判別が容易でしかも構造が簡単なことから実用上有用であり，２次元ディジタルフィルタの設計などに広く利用されている。

この章で最初に示されるアルゴリズム[2・6]は，伝達関数から Roesser モデルを直接，正準形で最小実現するためのアルゴリズムであり，これは従来のアルゴリズム[2・8]-[2・11]に比べて非常に簡単である。

続いて提案されるアルゴリズムは Roesser モデルを平衡形で実現するためのアルゴリズムである [2・7]。この平衡実現形は，線形システムの一実現構造として Moore[2・12]によって提案されたもので，状態空間の可制御性と可観測性の測度に着目して構成される実現構造である。この構造は，感度最小構造[2・9] あるいは量子化誤差最小のシステム構造[2・14]-[2・16]と密接に関係していることや，この構造から低次元モデル[2・17]が得られることはよく知られている。

２次元システムに対する平衡実現問題を最初に取り上げたのは Lashgari らの研究(2・17)である。そこでは，ハンケル行列の特異値分解を用いて，有限個の２次元マルコフパラメータを Roesser モデルで近似する問題を取り上げ，準平衡実現の一手法を提案している。また，川又らは平衡実現と量子化誤差の最小構造を持つ実現との代数的等価変換行列(2・16)を導出している。しかし，川又らの統一的設計アルゴリズムでは Lashgari らの準平衡実現をベースにしているため，厳密に量子化誤差の最小構造は得られない。

ここでは，２次元マルコフパラメータからの準平衡実現ではなく，伝達関数から真の平衡実現を得るためのアルゴリズムを与えている。その結果，得られた平衡実現に適当な座標変換を施すことによって，量子化誤差の最小構造が厳密に得られる。

２・２　２次元局所状態空間モデル

いま，点(i,j)における局所状態ベクトル$x(i,j)$をn次元水平ベクトル$x^h(i,j)$とｍ次元垂直ベクトル$x^v(i,j)$の直和

$$x(i,j) \triangleq \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}$$

で定義し，次式を考える。

$$S:\quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\ y(i,j) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + D\cdot u(i,j) \qquad i,j \gg 0 \\ x^h(0,j) &= x^h_{0j}, \qquad x^v(i,0) = x^v_{i0} \qquad i,j=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{2·1}$$

(2·1)を簡単に

$$S:\quad \begin{aligned} \partial x(i,j) &= A\,x(i,j) + B\,u(i,j) \\ y(i,j) &= C\,x(i,j) + D\,u(i,j) \end{aligned}$$

あるいは，$S(A,\ B,\ C,\ D)_{n+m}$ と書くことがある。 ただし，$u(i,j)$はｑ次

元入力ベクトル，$y(i,j)$はp次元出力ベクトルであり，A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22}，B_1，B_2，C_1，C_2，D はそれぞれ適当なサイズの実行列である。この(2·1)がRoesser らによって提案された2次元システムに対する局所状態空間モデルである[2·9]。さて，

$$Z\ \{x(i,j)\} = x\,(z_1,z_2) = \sum_{i,\,j \leqq 0} x(i,j) z_1^{-i} z_2^{-j}$$

で定義される2次元Z変換を(2·1)に施せば

$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix} - A \right\} x(z_1,z_2) = Bu(z_1,z_2) + \begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^h(z_2) \\ x_0^v(z_1) \end{bmatrix}$$

$$y(z_1,z_2) = C\,x(z_1,z_2)$$

となる。ただし，$x_0^h(z_2)$，$x_0^v(z_1)$は初期状態に関するZ変換である。

次に，状態遷移行列を$A^{i,j}$を

$$\left\{ I_{n+m} - \begin{bmatrix} z_1^{-1} I_n & 0 \\ 0 & z_2^{-1} I_m \end{bmatrix} A \right\}^{-1} = \sum_{h \geqq 0} \left\{ \begin{bmatrix} z_1^{-1} I_n & 0 \\ 0 & z_2^{-1} I_m \end{bmatrix} A \right\}^{h}$$

$$\triangleq \sum_{i,\,j \geqq 0} A^{i,j} z_1^{-i}, z_2^{-j} \qquad (2\cdot 2)$$

で定義すると，以下の性質が得られる。

$$\left.\begin{aligned} & A^{-j,i} = A^{i,-j} = 0 \qquad (i,\ j \geqq 1) \\ & A^{0,0} = I_{n+m}\ , \quad A^{1,0} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ & A^{i,j} = A^{1,0} A^{i-1,j} + A^{0,1} A^{i,j-1} \qquad ((i,j) > (0,0)) \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot 3)$$

このとき，(2·3)から(2·1)の解が

$$x(i,j) = \sum_{k=0}^{j} A^{i,j-k} \begin{bmatrix} x^h(0,k) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^{i} A^{i-r,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(r,0) \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{(0,0) \leqq (k,r) < (i,j)} M(i-k, j-r) \cdot u(k,r)$$

で得られる。ただし，

$$M(i,j) \triangleq A^{i-1,j} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i,j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

【定義2·1】(2·9) 局所初期状態が$x(0,0)=0$であるとき，任意の$n+m$次元ベクトルsに対して $x(N,M)=s$となるような，ある正整数N，Mと入力系列 $u(i,j)$ $((0,0)\leqq(i,j)<(N,M))$ が存在するとき，S（A，B，C，D)$_{n+m}$は局所可制御であるという。

【補題2·1】(2·9) S(A，B，C，D)$_{n+m}$が局所可制御であるための必要十分条件は，次の行列 $Q_{n,m}$が最大階数を持つことである。

$$Q_{n,m}=[M(1,0),M(2,0),\cdots,M(n,0)\vdots M(0,1),M(1,1),\cdots \cdots,M(n,1),\vdots\cdots\vdots,M(0,m),M(1,m),\cdots,M(n,m)] \tag{2·4}$$

【定義2·2】(2·9) $u(i,j)=0$ $(i,j\geqq0)$ に対して，$y(i,j)=0$ $(i,j\geqq0)$ となるような局所初期状態が$x(0,0)=0$以外に存在しないならば，S（A，B，C，D)$_{n+m}$は局所可観測であるという。

【補題2·2】(2·9) S(A，B，C，D)$_{n+m}$が局所可観測であるための必要十分条件は，次の行列$R_{n,m}$が最大階数を持つことである。

$$R_{n,m}=[(CA^{0,0})^T,(CA^{0,1})^T,\cdots,(CA^{0,m})^T\vdots(CA^{1,0})^T,(CA^{1,1})^T,\cdots \cdots,(CA^{1,m})^T\vdots\cdots\vdots(CA^{n,0})^T,(CA^{n,1})^T,\cdots,(CA^{n,m-1})^T] \tag{2·5}$$

次に，Sの伝達関数$H(z_1,z_2)$を考えれば，これは次式で与えられる。

$$H(z_1,z_2)=[C_1\ C_2]\left\{\begin{bmatrix} z_1I_n & 0 \\ 0 & z_2I_m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2\end{bmatrix} \tag{2·6}$$

この伝達関数はSの状態空間の座標変換，

$$x(i,j)=T\tilde{x}(i,j),\quad T=\mathrm{diag}\{T_1,T_2\},\quad(\det T\neq0) \tag{2·7}$$

には影響されない(2·9)。この変換によって得られるシステム$\widetilde{S}$（$T^{-1}AT$，$T^{-1}B$，CT，D）とS（A，B，C，D）は代数的等価システムと呼ばれる。

(2·6)はまた，

$$\begin{aligned}H(z_1,z_2)=&D+C_2(z_2I_m-A_{22})^{-1}B_2+[C_1+C_2(z_2I_m-A_{22})^{-1}A_{21}]\\&\cdot[z_1I_n-A_{11}-A_{12}(z_2I_m-A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1}\\&\cdot[B_1+A_{12}(z_2I_m-A_{22})^{-1}B_2]\end{aligned}$$

と書けるから

$$A(z_2) \triangleq A_{11}+A_{12}(z_2 I_m - A_{22})^{-1}A_{21}$$
$$B(z_2) \triangleq B_1+A_{12}(z_2 I_m - A_{22})^{-1}B_2$$
$$C(z_2) \triangleq C_1+C_2(z_2 I_m - A_{22})^{-1}A_{21}$$
$$D(z_2) \triangleq D+C_2(z_2 I_m - A_{22})^{-1}B_2$$

と置けば,

$$H(z_1, z_2)=C(z_2)[z_1 I_n - A(z_2)]^{-1}B(z_2)+D(z_2)$$

と表現できる。これは(2·1)の Roesser モデルと伝達関数が等しい1次元システム

$$\begin{aligned} x(i+1, z_2)&=A(z_2)x(i, z_2)+B(z_2)u(i, z_2) \\ y(i, z_2)&=C(z_2)x(i, z_2)+D(z_2)u(i, z_2) \end{aligned} \qquad (2\cdot 8)$$

の伝達関数に相当している。

(2·8)は Roesser モデルを係数行列の要素がプロパーな有理関数からなる1次元システムで表現したものである[2·10]。

さらに, (2·1)において, $A_{12}=0$あるいは $A_{21}=0$であるような Roesser モデルは(2·6)の伝達関数の立場からいえば, その分母多項式 $D(z_1, z_2)$が二つの1変数の多項式 $D_1(z_1)$と $D_2(z_2)$の積に分解できるようなシステムであり, この意味で $A_{12}=0$ あるいは$A_{21}=0$ であるモデルは分母分離形 Roesser モデルと呼ばれる[2·11]。

2・3　正準形実現アルゴリズム

次の2次元伝達関数で記述されるシステムを取り上げる。

$$H(z_1 z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} r_{ij} z_1^i z_2^j}{D_1(z_1)D_2(z_2)} \qquad (2\cdot 9)$$

ここで,

$$D_1(z_1)=z_1^n+\alpha_{n-1}z_1^{n-1}+\cdots+\alpha_1 z_1+\alpha_0$$
$$D_2(z_2)=z_2^m+\beta_{m-1}z_2^{m-1}+\cdots+\beta_1 z_2+\beta_0$$

であり，$D_1(z_1)$，$D_2(z_2)$と分子多項式には共通因子が存在しないものとする。また，これらの多項式はいずれも安定とする。

さて，(2·9)の伝達関数を次の分母分離形 Roesser モデルで実現することを考える。

$$
S:\quad
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\
y(i,j) &= [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + d\cdot u(i,j) \qquad i,j \gg 0
\end{aligned}
\tag{2·10}
$$

ただし，$x^h(i,j)$はn次元水平状態ベクトル，$x^v(i,j)$はm次元垂直状態ベクトル，$u(i,j)$，$y(i,j)$はそれぞれスカラの入力と出力であり，A_{11}，A_{21}，A_{22}，b_1，b_2，c_1，c_2，dはそれぞれ適当なサイズの実行列である。以後，このモデルを$S(A_{11},\ A_{21},\ A_{22},\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ d)_{n+m}$と記す。

(2·10) において $x^h(i,j)$と $x^v(i,j)$の次元数，nとmが多項式 $D_1(z_1)$と$D_2(z_2)$の次数にそれぞれ一致するとき，(2·10)は$H(z_1,z_2)$の最小実現である。

いま，(2·9)を次のように

$$
H(z_1,z_2) = \frac{[1, z_2, \cdots, z_2^m]}{D_2(z_2)} \begin{bmatrix} r_{00} & r_{10} & \cdots & r_{n0} \\ r_{01} & r_{11} & \cdots & r_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{0m} & r_{1m} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} \frac{[1, z_1, \cdots, z_1^n]^T}{D_1(z_1)}
$$

$$
\triangleq H_2(z_2)\, R\, H_1(z_1) \tag{2·11}
$$

書換える。このとき，1次元システム$H_1(z_1)$と$H_2(z_2)$の任意の実現をそれぞれ

$$
S_1:\quad
\begin{aligned}
x^h(i+1) &= A_{11}x^h(i) + b_1u(i) \\
y_1(i) &= C_1x^h(i) + d_1u(i)
\end{aligned}
\tag{2·12}
$$

$$
S_2:\quad
\begin{aligned}
x^v(j+1) &= A_{22}x^v(j) + B_2u_2(j) \\
y(j) &= c_2x^v(j) + d_2u_2(j)
\end{aligned}
\tag{2·13}
$$

とすれば，(2·11)の$H(z_1,z_2)$は$S_1(A_{11},\ b_1,\ C_1,\ d_1)_n$と$S_2(A_{22},\ B_2,\ c_2,\ d_2)_m$および$R$のカスケード接続として，以下のように実現される。

$$S:\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ \underbrace{B_2RC_1}_{A_{21}} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ \underbrace{B_2Rd_1}_{b_2} \end{bmatrix}u(i,j)$$

$$y(i,j)=[\underbrace{d_2RC_1}_{c_1} \vdots c_2]\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}+\underbrace{d_2Rd_1}_{d}\cdot u(i,j) \qquad (2\cdot14)$$

$$i,j\gg0$$

S_1とS_2の最小次数がそれぞれ$H_1(z_1)$と$H_2(z_2)$のマクミラン次数によって決定され，これらマクミラン次数はnとmであることは$H_1(z_1)$と$H_2(z_2)$の構造から容易にわかる。すなわち，$D_1(z_1)$および$D_2(z_2)$の次数はそれぞれnとmであるから，S_1とS_2が共に最小実現であるとき，かつ，このときのみ(2·14)のSは $H(z_1,z_2)$の最小実現となる。

いま，$H_1(z_1)$を

$$H_1(z_1)=\frac{1}{D_1(z_1)}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_1^{n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表現し，これを可制御正準形，

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 0 \vdots I_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad b_1=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot\cdot \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2\cdot15)$$

$$\alpha=[-\alpha_0,-\alpha_1,\cdots,-\alpha_{n-1}]$$

で最小実現する。このとき，

$$\det(z_1I_n-A_{11})=D_1(z_1)$$

$$\mathrm{Adj}(z_1I_n-A_{11})b_1=[1,z_1,\cdots z_1^{n-1}]^T$$

であることから，S_1の C_1とd_1は次の構造

$$C_1=\begin{bmatrix} I_n \\ \cdot\cdot \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad d_1=\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot\cdot \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2\cdot16)$$

を持つことがわかる。

同様に，$H_2(z_2)$を可観測正準形

$$A_{22}=\left[\begin{array}{c:c} 0 & \\ \cdots & \beta \\ I_{m-1} & \end{array}\right], \qquad c_2=[\,0 \vdots 1\,] \qquad \beta=[-\beta_0, -\beta_1, \cdots, -\beta_{m-1}]^T \tag{2·17}$$

で最小実現すれば，S_2のB_2とd_2は次の構造

$$B_2=[I_m \vdots \beta], \quad d_2=[0 \vdots 1] \tag{2·18}$$

をもつ。

結局，$H_1(z_1)$と$H_2(z_2)$がそれぞれ(2·15)と(2·17)の正準形で最小実現されるとき，Sの A_{21}, b_2, c_1, dは次のように

$$\begin{bmatrix} A_{21} & b_2 \\ c_1 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_2 \\ d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}[C_1 \ \ d_1]$$

$$=\left[\begin{array}{c:c} R_{11}+\beta R_{21}+R_{12}\alpha+\beta R_{12}\alpha & R_{12}+\beta R_{22} \\ \hdashline R_{21}+R_{22}\alpha & R_{22} \end{array}\right] \tag{2·19}$$

得られる。ただし，R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}はそれぞれ $m\times n$, $m\times 1$, $1\times n$, 1×1のサイズを持つRの部分行列である。

以上をまとめれば，最小実現アルゴリズムは次のようになる。

Step 1. $H(z_1,z_2)$より(2·11)のRおよび(2·15)と(2·17)のαとβを構成する。

Step 2. $H(z_1,z_2)$の最小実現は(2·15)，(2·17)と(2·19)によって得られる。

2・4 平衡実現アルゴリズム

ここでは，(2·9)から Roesser モデルを平衡形で実現するためのアルゴリズムを提案する。これには前節における正準形を実現する過程で得られる二つの構造的に簡単な1次元システムS_1とS_2が用いられる。

さて，2次元システムS（A_{11}, A_{21}, A_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2, d）$_{n+m}$ の可制御性行列 $Q_{n,m}$は(2·4)から

$$Q_{n,m}=\left[\begin{array}{c:c} Q_n & 0 \\ \hdashline 0 & [B_n, A_{22}B_n, \cdots, A_{22}^{m-1}B_n] \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c:c} Q_n & 0 \\ \hdashline 0 & \bar{Q}_m \end{array}\right] \tag{2·20}$$

となる。ただし，

$$Q_h=[b_1, A_{11}b_1, \cdots, A_{11}^{h-1}b_1], \qquad B_h=[b_2 \vdots A_{21}Q_h]$$

である。また，可観測性行列 $R_{n,m}$は(2·5)から

$$R_{n,m}=\left[\begin{array}{c|c} C_m & R_m \\ C_mA_{11} & \cdots\cdots \\ \vdots & 0 \\ C_mA_{11}^{n-1} & \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \bar{R}_n & \begin{array}{c} R_m \\ \cdots \\ 0 \end{array}\end{array}\right] \tag{2·21}$$

となる。ただし，

$$C_k=\begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots\cdots \\ R_kA_{21} \end{bmatrix}, \qquad R_k=\begin{bmatrix} c_2 \\ c_2A_{22} \\ \vdots \\ c_2A_{22}^{k-1} \end{bmatrix}$$

である。これらに注意して，Ｓの可制御性グラム行列 $W=Q_{\infty,\infty}\cdot Q^T_{\infty,\infty}$および可観測性グラム行列 $K=R^T_{\infty,\infty}\cdot R_{\infty,\infty}$を考えれば，Ｓの平衡実現問題は二つの１次元システム$S_1^{(\infty)}(A_{11}, b_1, C_\infty)$と$S_2^{(\infty)}(A_{22}, B_\infty, c_2)$に対する平衡実現問題となる。すなわち，

【定義 2·3】[2·17] Ｓから構成される二つの１次元システム$S_1^{(\infty)}(A_{11}, b_1, C_\infty)$と $S_2^{(\infty)}(A_{22}, B_\infty, c_2)$に対する可制御性グラム行列 W_1と W_2および可観測性グラム行列 K_1と K_2が

$$W_1=K_1=\mathrm{diag}\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \cdots, \sigma_{1n}\}\triangleq\Sigma_1$$

$$W_2=K_2=\mathrm{diag}\{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \cdots, \sigma_{2m}\}\triangleq\Sigma_2$$

で与えられるとき，Ｓは平衡実現であるという。ただし，σ_{1i}とσ_{2j}は$\sigma_{11}\geqq\sigma_{12}\geqq\cdots\geqq\sigma_{1n}>0$および$\sigma_{21}\geqq\sigma_{22}\geqq\cdots\geqq\sigma_{2m}>0$を満たす実数である。

さて，Ｓは安定であるから，上記の W_1と K_1および W_2と K_2はそれぞれ以下のリアプノフ方程式の一意解として与えられる[2·17]。

$$W_1-A_{11}W_1A_{11}^T=b_1b_1^T \tag{2·22}$$

$$K_1-A_{11}^TK_1A_{11}=C_\infty{}^TC_\infty=A_{21}^TK_2A_{21}+c_1^Tc_1 \tag{2·23}$$

$$W_2-A_{22}W_2A_{22}^T=B_\infty B_\infty{}^T=A_{21}W_1A_{21}^T+b_2b_2^T \tag{2·24}$$

$$K_2^T - A_{22}^T K_2 A_{22} = c_2^T c_2 \tag{2·25}$$

さらに，(2·7)の座標変換によって上のグラム行列は次のように変換される。

$$\left.\begin{aligned}\tilde{W}_i &= T_i^{-1} W_i T_i^{-T}\\ \tilde{K}_i &= T_i^T K_i T_i\end{aligned}\right\} \qquad i=1,2 \tag{2·26}$$

ここでの問題は，(2·9)の伝達関数から(2·10)の Roesser モデルを平衡形で実現することである。

いま，前節における正準形での最小実現，$S(A_{11},\ A_{21},\ A_{22},\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ d)_{n+m}$ に注目しよう。Sの代数的等価システム$\tilde{S}$が二つの１次元システム，すなわち，(2·15)の可制御正準形，$S_1(A_{11},\ b_1,\ C_1,\ d_1)_n$ と(2·17)の可観測正準形 $S_2(A_{22},\ B_2,\ c_2,\ d_2)_m$の代数的等価システム，

$$\tilde{S}_1(T_1^{-1}A_{11}T_1,\ T_1^{-1}b_1,\ C_1T_1,\ d_1)_n \tag{2·27}$$

$$\tilde{S}_2(T_2^{-1}A_{22}T_2,\ T_2^{-1}B_2,\ c_2T_2,\ d_2)_m \tag{2·28}$$

から，

$$\begin{aligned}\tilde{S}(&T_1^{-1}A_{11}T_1,\ T_2^{-1}B_2RC_1T_1,\ T_2^{-1}A_{22}T_2,\ T_1^{-1}b_1,\\ &T_2^{-1}B_2Rd_1,\ d_2RC_1T_1,\ c_2T_2,\ d_2Rd_1)_{n+m}\end{aligned} \tag{2·29}$$

と得られること，さらに，S_1とS_2の簡単な構造から$\tilde{S}_1$と$\tilde{S}_2$は容易に得られることに注意されたい。

さて，Sは最小実現であるから１次元システム

$$S_1^{(m)}(A_{11},\ b_1,\ C_m)\ , \qquad S_2^{(n)}(A_{22},\ B_n,\ c_2) \tag{2·30}$$

を構成すれば(2·20)と(2·21)から次式が成立することがわかる。

$$\operatorname{rank} Q_n = n, \quad \operatorname{rank} \bar{R}_n = n \tag{2·31}$$

$$\operatorname{rank} \bar{Q}_m = m, \quad \operatorname{rank} R_m = m \tag{2·32}$$

すなわち，$(A_{11},\ b_1)$は可制御対であり，$(c_2,\ A_{22})$は可観測対である。したがって，(2·22)のリアプノフ方程式を満たすW_1と(2·25)を満たすK_2は共に正定対称行列となる。このとき，W_1と K_2は正則な三角行列 L_1と L_2によって

$$W_1 = L_1L_1^T,\ K_2 = L_2L_2^T \tag{2·33}$$

とコレスキー分解でき，(2·23)と(2·24)はそれぞれ次式のように表される。

$$K_1 - A_{11}^T K_1 A_{11} = C^T C \tag{2·34}$$

$$W_2 - A_{22} W_2 A_{22}^T = B B^T \tag{2·35}$$

ただし，

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots\cdots \\ L_2^T A_{21} \end{bmatrix}, \qquad B = [b_2 \vdots A_{21} L_1]$$

以上から，(2·22)から(2·25)を満たす各グラム行列は，結局１次元システム

$$S_1(A_{11},\ b_1,\ C)_n \tag{2·36}$$

に対する可制御と可観測性グラム行列W_1と K_1，そして

$$S_2(A_{22},\ B,\ c_2)_m \tag{2·37}$$

に対する可制御と可観測性グラム行列W_2と K_2を求める問題に帰着される。

【補題 2·3】 $S\ (A_{11},\ A_{21},\ A_{22},\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ d)_{n+m}$に対して(2·22)から(2·25)を満たすグラム行列 W_1，W_2，K_1 および K_2 はそれぞれ

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots w_{n-1} \\ w_1 & w_0 & \cdots w_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n-1} & w_{n-2} \cdots & w_0 \end{bmatrix} \tag{2·38}$$

$$K_1 = R_n^T (Q_n^{-1} W_1 Q_n^{-1} \otimes I_{m+1}) R_n \tag{2·39}$$

$$W_2 = Q_m (R_m^{-1} K_2 R_m^{-1} \otimes I_{n+1}) Q_m^T \tag{2·40}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots k_{m-1} \\ k_1 & k_0 & \cdots k_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m-1} & k_{m-2} \cdots & k_0 \end{bmatrix} \tag{2·41}$$

で与えられる。また，w_iとk_jは

$$w_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-j} w_{|i-j|} = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & 1 \leqq i \leqq n \end{cases} \tag{2·42}$$

$$k_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_{m-i}k_{|j-i|}=\begin{cases}1 & j=0\\ 0 & 1\leqq j\leqq m\end{cases} \tag{2·43}$$

を満たす実数であり，

$$R_n=\begin{bmatrix}C\\ CA_{11}\\ \vdots\\ CA_{11}^{n-1}\end{bmatrix},\qquad Q_m=[B, A_{22}B, \cdots, A_{22}^{m-1}B] \tag{2·44}$$

である。さらに，Q_n^{-1}とR_m^{-1}は $D_1(z_1)$と $D_2(z_2)$との係数から得られる対称行列

$$Q_n^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \tag{2·45}$$

$$R_m^{-1}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{m-1} & 1\\ \beta_2 & \beta_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \beta_{m-1} & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \tag{2·46}$$

である。

（証明）　まず，(2·38)の W_1はリアプノフ方程式

$$W_1-A_{11}W_1A_{11}^T=b_1b_1^T \tag{2·47}$$

を満たす解であり[2·14]，$S_1(A_{11},\ b_1,\ C)_n$の可制御性グラム行列である。

次に，(2·30)の C_mと(2·34)のCにおいて，R_mと L_2^T が正則であることに注意すればCは次式で表される。

$$C=ZC_m \tag{2·48}$$

ただし，

$$Z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & L_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & R_m^{-1}\end{bmatrix},\quad \det\ Z\neq 0$$

このとき，(2·31)の第２式と(2·44)より

$$\mathrm{rank}\ R_n=\mathrm{rank}\ \bar{R}_n=n$$

が示される。これは$(C,\ A_{11})$が可観測対であることを意味しており，可観測の同伴形$(b_1^T\otimes I_{m+1},\ A_{11}^T\otimes I_{m+1})$と次式で関係づけられる。

$$(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})R_nA_{11}=(A_{11}^T\otimes I_{m+1})(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})R_n \tag{2·49}$$

$$C=(b_1^T\otimes I_{m+1})(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})R_n \tag{3·50}$$

(2·47)を満たす W_1は

$$(W_1-A_{11}W_1A_{11}^T)\otimes I_{m+1}=b_1b_1^T\otimes I_{m+1}$$

を満たすから，この式を

$$(W_1\otimes I_{m+1})-(A_{11}\otimes I_{m+1})(W_1\otimes I_{m+1})(A_{11}\otimes I_{m+1})^T$$
$$=(b_1\otimes I_{m+1})(b_1\otimes I_{m+1})^T$$

と分解し，両辺に左右からそれぞれ $R_n^T(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})^T$と$(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})R_n$を掛ければ Q_n^{-1}の対称性と(2·49)，(2·50)の関係から

$$R_n^T(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})^T(W_1\otimes I_{m+1})(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})R_n$$
$$-A_{11}^TR_n^T(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})^T(W_1\otimes I_{m+1})(Q_n^{-1}\otimes I_{m+1})R_nA_{11}=C^TC$$

が得られる。すなわち，(2·39)は

$$K_1-A_{11}^TK_1A_{11}=C^TC$$

を満たす解で$S_1(A_{11},\ b_1,\ C)_n$の可観測性グラム行列である。

$S_2(A_{22},\ B,\ c_2)_m$のグラム行列 W_2と K_2が(2·40)と(2·41)で与えられることも同様に示される。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

【定理 2·1 】 伝達関数 $H(z_1,z_2)$に対する平衡実現 $S_B(A_{11B},\ A_{21B},\ A_{22B},\ b_{1B},\ b_{2B},\ c_{1B},\ c_{2B},\ d)_{n+m}$は

$$\begin{aligned}&A_{11B}=T_1^{-1}A_{11}T_1, && && b_{1B}=T_1^{-1}b_1\\ &A_{21B}=T_2^{-1}B_2RC_1T_1, && A_{22B}=T_2^{-1}A_{11}T_2, && b_{2B}=T_2^{-1}B_2Rd_1,\\ &c_{1B}=d_2RC_1T_1, && c_{2B}=c_2T_2, && d=d_2Rd_1\end{aligned} \tag{2·51}$$

で与えられる。ただし

$$T_1=L_1U_1\Sigma_1^{-1/2} \tag{2・52}$$

$$T_2=L_2^{-T}U_2\Sigma_2^{1/2} \tag{3・53}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_1=\mathrm{diag}\{\sigma_{11}^{1/2},\ \sigma_{12}^{1/2},\ \cdots,\ \sigma_{1n}^{1/2}\}\\ U_1=[u_{11},u_{12},\cdots,u_{1n}],\ U_1^TU_1=I_n\end{array}\right\} \tag{2・54}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_2=\mathrm{diag}\{\sigma_{21}^{1/2},\ \sigma_{22}^{1/2},\ \cdots,\ \sigma_{2m}^{1/2}\}\\ U_2=[u_{21},u_{22},\cdots,u_{2m}],\ U_2^TU_2=I_m\end{array}\right\} \tag{2・55}$$

ここで，(2・54)と(2・55)は $L_1^TK_1L_1$の固有値σ_{1i}と固有ベクトル $u_{1i}(i=1,2,\cdots,n)$および，$L_2^TW_2L_2$の固有値σ_{2j}と固有ベクトル $u_{2j}(j=1,2,\cdots,m)$ から構成される正則行列である。

（証明）　$L_1^TK_1L_1$は正定対称行列であるから，固有値σ_{1i}は非負実数で固有ベクトル u_{1i}は直交している。σ_{1i}と u_{1i}が満たす関係式

$$L_1^TK_1L_1U_1=U_1\Sigma_1^2 \tag{2・56}$$

において，各固有ベクトルを正規化すれば $U_1^T=U_1^{-1}$の関係が満たされる。

これらに注意し，(2・26)の変換を考えれば，グラム行列 W_1と K_1は，

$$\left.\begin{array}{l}T_1^{-1}W_1T_1^{-T}=\Sigma_1^{1/2}U_1^TL_1^{-1}W_1L_1^{-1}U_1\Sigma_1^{1/2}=\Sigma_1\\ T_1^TK_1T_1=\Sigma_1^{-1/2}U_1^TL_1^TK_1L_1U_1\Sigma_1^{-1/2}=\Sigma_1\end{array}\right\} \tag{2・57}$$

と変換され，同様にT_2によって W_2と K_2が

$$T_2^{-1}W_2T_2^{-T}=T_2^TK_2T_2=\Sigma_2 \tag{2・58}$$

と変換される。すなわち，T_1とT_2によって変換された$\widetilde{S}_1(T_1^{-1}A_{11}T_1,\ T_1^{-1}b_1,\ C_1T_1,\ d_1)_n$，および$\widetilde{S}_2(T_2^{-1}A_{22}T_2,\ T_2^{-1}B_2,\ c_2T_2,\ d_2)_m$ から構成される(2・29)の Roesser モデルは平衡実現であり，(2・51)で与えられる。　　（証明終）

以上を要約すれば，伝達関数 $H(z_1,z_2)$の平衡実現アルゴリズムは以下のようになる。

Step.1　前節のアルゴリズムに従い(2・9)の伝達関数から二つの正準形実現$S_1(A_{11},\ b_1,\ C_1,\ d_1)_n$，および$S_2(A_{22},\ B_2,\ c_2,\ d_2)_m$を求める。

Step.2　(2・42)を解いて得られる(2・38)の W_1と(2・43)を解いて得られる(2・

41)の K_2を(2·33)のようにコレスキー分解する。

Step. 3　(2·44)の R_nと (2·45)の Q_n^{-1}および Step. 2 で得られた W_1と L_1から構成される $L_1^T R_n^T (Q_n^{-1} W_1 Q_n^{-1} \otimes I_{m+1}) R_n L_1$ の固有値と固有ベクトルを求めた後，(2·54)のΣ_1とU_1を決定する。同様にして，$L_2 Q_m (R_m^{-1} K_2 R_m^{-1} \otimes I_{n+1}) Q_m^T L_2$ の固有値と固有ベクトルから(2·55)のΣ_2とU_2を決定する。

Step. 4　(2·52)の T_1と(2·53)の T_2を変換行列として，Step. 1で求めたS_1とS_2の代数的等価システム$\widetilde{S}_1$((2·27))と$\widetilde{S}_2$((2·28))を求め，これらとRの縦続結合で (2·10)の Roesser の状態空間モデルを構成する。

2・5　結　　言

この章では，分母分離形２次元伝達関数から Roesser の状態空間モデルを最小実現するためのアルゴリズムを二つ提案した。いづれのアルゴリズムも分母分離形２次元伝達関数から得られる二つの１次元伝達行列を同伴形で最小実現する方法に基づいている。

最初のアルゴリズムは，状態空間モデルを伝達関数から直接正準形で最小実現するためのもので，従来の方法に比べて簡単である。続いて提案されたアルゴリズムは Roesser モデルを平衡形で実現するためのアルゴリズムで，これは最初のアルゴリズムによって最小実現された正準形の状態空間座標の変換から得られる。この変換行列は，ハンケル行列の特異値分解に基づくLashgariらの方法とは異なり，グラム行列から構成される正定対称行列の固有値と固有ベクトルから導出される。このアルゴリズムによる実現は２次元マルコフパラメータからの準平衡実現とは違い，伝達関数からの真の平衡実現になっている。本アルゴリズムによれば，ｉ）得られた平衡実現に適当な座標変換を施すことによって厳密に量子化誤差最小構造が得られる，ⅱ）平衡実現が簡単な構造をもつ二つの１次元システムを経由して得られるため計算量が比較的少なくてすむ，などの特徴がある。

第3章　2次元システムの極配置 I

3・1　緒　　言

システムの極を配置する問題は，システムの安定化あるいは動特性の改善上からも重要であり，これまでに多くの研究結果が1次元システムにおいて得られている[3・1],[3・2]。一方，2次元システムにおいても極配置問題は興味ある問題で，この問題に対する研究[3・3]-[3・7]が幾つか見られる。2次元極配置問題に対するこれまでのアプローチを，被対象システムの表現法によって大別すれば次の三つになる。すなわち，その一つはシステムを伝達関数の立場で取り扱うもので[3・3]，この場合，フィードバックは出力に限られ，多入力あるいは多出力システムに対しては，伝達関数の立場での扱いは困難である。次のアプローチは2次元システムを環上で定義された1次元システムとして扱う場合である[3・4],[3・5]。この場合，1次元システムの係数行列はプロパーな有理関数であり，かつ，このプロパーな有理関数は部分環であることから，解は必ずしも容易には得られない。他の一つは2次元システムが状態空間モデルで記述される場合[3・6],[3・7]である。このアプローチでは，多くの場合，Roesser の状態空間モデルが対象とされており，Paraskevopoulosら[3・6]は状態あるいは出力フィードバックよる2次元極配置問題を考察している。

本章で考察する2次元極配置問題に対する取り扱いは上記の第三番めのアプローチに属する。すなわち，Roesser モデルで記述される2次元システムを対象とし，状態フィードバックによる極配置問題を考察する[3・8],[3・9]。

一般にはシステムの状態のすべては観測できないから，状態フィードバックを達成するためには，観測器が必要となる。さらに，観測器としては状態そのものを推定する状態観測器である必要はなく，その線形関数値が推定できる線形関数観測器が得られれば十分である。ここでは，線形関数観測器の一設計手

法を提案し，これを状態フィードバックに組み込むことを考える。すなわち，線形関数観測器を組み込んだ状態フィードバックによって，閉ループシステムの極が任意に配置できるための十分条件が与えられる。また，合成システムの極が状態フィードバックを施した閉ループシステムの極と観測器の極の集合に分離されることが示され，観測器の極は合成システムの入出力特性に影響を与えないことが明らかにされる。これは１次元システムにおいてよく知られている，観測器を用いた閉ループシステムに対する観測器の分離性が，２次元システムにおいても成り立つことを示している。

３・２　観測器による状態フィードバック

次の２次元システムに対する状態空間モデル $S(A,\ B,\ C)_{n+m}$ を考える。

$$S:\quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\ y(i,j) &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \qquad i,j \geqq 0 \qquad (3\cdot1) \\ x^h(0,j) &= x^h_{0j}, \qquad x^v(i,0) = x^v_{i0} \qquad i,j=1,2,3\cdots \end{aligned}$$

(3·1)を簡単に

$$\partial x(i,j) = Ax(i,j) + Bu(i,j)$$

$$y(i,j) = Cx(i,j)$$

あるいは $S(A,\ B,\ C)_{n+m}$ と書くことにする。 ただし，$x^h(i,j)$は，ｎ次元水平状態ベクトル，$x^v(i,j)$はｍ次元垂直状態ベクトル， $u(i,j)$はｑ次元既知入力ベクトル，$y(i,j)$はｐ次元出力ベクトルであり，A，B，C はそれぞれ適当なサイズの実行列である。また，

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = q \ ,\ \mathrm{rank}\ B_1 = q_1 \leqq q$$

$$\mathrm{rank}\ [C_1\ C_2] = p \ ,\ \mathrm{rank}\ C_2 = p_2 \leqq p$$

を仮定しておく。このとき，システム $S(A, B, C)_{n+m}$ の適当な入力変換および出力変換によって B，C は一般性を失うことなく

$$
\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \overset{q_1}{\leftrightarrow} \quad \overset{q-q_1}{\leftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rank}\ B_{11} = q_1 \\ \mathrm{rank}\ B_{22} = q - q_1 \end{array}
$$

$$
[C_1\ C_2] = \begin{bmatrix} C_{11} & \vdots & 0 \\ C_{12} & \vdots & C_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p-p_2 \\ \updownarrow p_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rank}\ C_{11} = p - p_2 \\ \mathrm{rank}\ C_{22} = p_2 \end{array} \tag{3·2}
$$

と置ける(付録－B 1参照)。以後，$S(A, B, C)_{n+m}$ の B と C は(3·2)の形で与えられるものとする。

続いて,(3·1)のシステムに対する観測器[3・10]として，次の２次元システムを考える。

$$
S_o: \begin{array}{l} \begin{bmatrix} z^h(i+1, j) \\ z^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^h(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} y(i, j) + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u(i, j) \\ \hat{w}(i, j) = [N_1\ N_2] \begin{bmatrix} z^h(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix} + My(i, j) \end{array} \tag{3·3}
$$

$$
z^h(0, j) = z^h_{0j}, \qquad z^v(i, 0) = z^v_{i0} \qquad i, j = 0, 1, \cdots,
$$

(3·3)を簡単に

$$
\partial z(i, j) = Fz(i, j) + Hy(i, j) + Gu(i, j)
$$

$$
\hat{w}(i, j) = Nz(i, j) + My(i, j)
$$

あるいは $S_o(F, H, G, N, M)_{\mu+\nu}$ と書く。ただし，$z^h(i, j)$ は μ 次元水平状態ベクトル，$z^v(i, j)$ は ν 次元垂直状態ベクトル，F, H, G, N, M はそれぞれ適当なサイズの実行列をそれぞれ表す。さらに，$\hat{w}(i, j)$ は S の状態の線形関数値

$$
w(i, j) = [K_1\ K_2] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}
$$

の推定値となる s 次元出力ベクトルであり，K_1 と K_2 はそれぞれ，$q \times n$，$q \times m$

の実行列である。

【定義 3·1】(3·10) SとS。において，初期局所状態 $x^h(0,\ j)$, $x^v(i,\ 0)$, $z^h(0,j)$, $z^v(i,0)$ $(i,j=0,1,\cdots)$ と入力 $u(i,j)$に関係なく，

$$\lim_{i,\,j\to\infty} \hat{w}(i,j)-w(i,j)=0$$

が成立するならば，S。はSに対する$\mu+\nu$次元線形関数観測器という。特に，$[K_1\ K_2]=I_{n+m}$ の場合を状態観測器という。

いま，誤差ベクトル

$$\begin{bmatrix} e^h(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} z^h(i,j) \\ z^v(i,j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{3·4}$$

を定義する。ただし，$T_1 \in R^{\mu\times n}$, $T_2 \in R^{\nu\times n}$。このとき，(3·1)と(3·3)より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e^h(i+1,j) \\ e^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^h(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 - T_1B_1 \\ G_2 - T_2B_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\ &\quad + \left\{ \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} [C_1\ C_2] \right\} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3·5}$$

が得られる。(3·5)に対する状態遷移行列を $F^{i,j}$とおけば，これは次式で与えられる(3·11)。

$$F^{1,0} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$F^{i,j} = F^{1,0}F^{i-1,j} + F^{0,1}F^{i,j-1} \qquad (i,j)>(0,0) \tag{3·6}$$

$$F^{0,0} = I_{\mu+\nu}, \quad F^{-i,j} = F^{i,-j} = 0 \qquad i,j \geqq 1$$

【定理 3·1】 $S(A,\ B,\ C)_{n+m}$とS。$(F,\ H,\ G,\ N,\ M)_{\mu+\nu}$の係数行列の間に次の関係

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} [C_1\ C_2] \tag{3·7}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3·8}$$

$$[N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + M [C_1 \ C_2] = [K_1 \ K_2] \tag{3·9}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{i \to \infty} F^{i,j} = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, \\ &\lim_{j \to \infty} F^{i,j} = 0 \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned} \tag{3·10}$$

を満たす行列 $T_1 \in \mathrm{R}^{\mu \times n}$ および $T_2 \in \mathrm{R}^{\nu \times m}$ が存在するならば(3·3)は(3·1)に対する$\mu+\nu$次元線形関数観測器になる。

（証明）　(3·9)が成立するとき，(3·1)と(3·3)より

$$\hat{w}(i,j) - w(i,j) = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} e^h(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{3·11}$$

が導ける。次に(3·7)から(3·9)が成立するとき(3·5)は

$$\begin{bmatrix} e^h(i+1,j) \\ e^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^h(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{3·12}$$

と書換えられ，(3·12)の解は次式で与えられる[3·11]。

$$\begin{bmatrix} e^h(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} = \sum_{h=0}^{j} F^{i,j-h} \begin{bmatrix} e^h(0,h) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{i} F^{i-k,j} \begin{bmatrix} 0 \\ e^v(k,0) \end{bmatrix} \tag{3·13}$$

したがって，(3·10)が成立するとき，初期状態 $e^h(0,j)$，$e^v(i,0)$ $(i, j = 0, 1, \cdots)$に関係なく

$$\lim_{i,j \to \infty} \begin{bmatrix} e^h(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} = 0 \tag{3·14}$$

が得られ，(3·11)より

$$\lim_{i,j \to \infty} \hat{w}(i,j) - w(i,j) = 0 \tag{3·15}$$

となる。(3·15)が入力 $u(i,j)$に無関係に成立することは明らかである。

（証明終）

さて，ここではシステム(3·1)に対する状態フィードバック

$$u(i,j)=[K_1\ \ K_2]\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\ x^v(i,j)\end{bmatrix}+v(i,j) \tag{3·16}$$

を線形関数観測器S。(F, H, G, N, M)$_{\mu+\nu}$の出力$\hat{w}(i,j)$で代用することを考える。すなわち，(3·1)の入力$u(i,j)$を

$$u(i,j)=\hat{w}(i,j)+v(i,j) \tag{3·17}$$

で指定する。ただし，$v(i,j)\in\mathbb{R}^q$ は制御入力である。このとき，(3·1)と(3·3)より次の閉ループシステムが得られる。

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\partial x(i,j)\\ \partial z(i,j)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}A+BMC & \vdots & BN\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ GMC+HC & \vdots & F+GN\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\ z(i,j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ G\end{bmatrix}v(i,j)\\ y(i,j)&=[C\ \ 0]\begin{bmatrix}x(i,j)\\ z(i,j)\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3·18}$$

閉ループシステム(3·18)に対し，座標変換

$$\begin{bmatrix}x(i,j)\\ \tilde{z}(i,j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{n+m} & 0\\ -T & I_{\mu+\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\ z(i,j)\end{bmatrix}\quad ,\ T\triangleq\begin{bmatrix}T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{bmatrix} \tag{3·19}$$

を施し，(3·7)から(3·9)を用いれば(3·18)は

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}\partial x(i,j)\\ \partial \tilde{z}(i,j)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}A+BK & \vdots & BN\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\ \tilde{z}(i,j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}v(i,j)\\ y(i,j)&=[C\ \ 0]\begin{bmatrix}x(i,j)\\ \tilde{z}(i,j)\end{bmatrix}\end{aligned}\right. \tag{3·20}$$

で表される。ただし，$K\triangleq[K_1 \vdots K_2]$である。

(3·20)の特性多項式は

$$\begin{aligned}\phi(z_1,z_2)&=\det\ [\mathrm{diag}\ \{z_1I_n, z_2I_m\}-A-BK]\cdot\det\ [\mathrm{diag}\ \{z_1I_\mu, z_2I_\nu\}-F]\\ &\triangleq\phi_1(z_1,z_2)\cdot\phi_2(z_1,z_2)\end{aligned}$$

で与えられ，その伝達関数は

$$H(z_1,z_2)=C\,[\mathrm{diag}\ \{z_1I_n, z_2I_m\}-A-BK]^{-1}B \tag{3·21}$$

となる。

一方，(3·16)の状態フィードバックを(3·1)に対して施して得られる閉ループシステム

$$S_f:\begin{array}{l}\partial x(i,j)=(A+BK)x(i,j)+v(i,j)\\ y(i,j)=Cx(i,j)\end{array}\qquad(3\cdot22)$$

の特性多項式は

$$\phi_1(z_1,z_2)=\det\,[\mathrm{diag}\,\{z_1I_n,z_2I_m\}-A-BK]\qquad(3\cdot23)$$

で与えられ，その伝達関数は(3·21)と一致する。

以上をまとめれば次の定理が得られる。

【定理 3·2】　(i) 観測器を組み込んだ閉ループシステムの特性多項式は，観測器を用いない場合の状態フィードバックによる閉ループシステムの特性多項式と，観測器の特性多項式の積で表される。(ii) 観測器を組み込んだ閉ループシステムの伝達関数は，観測器を用いない場合の状態フィードバックによる閉ループシステムの伝達関数と一致する。

この定理は，1次元システムにおいてよく知られている，観測器を用いた閉ループシステムに対する観測器の分離性が，2次元システムにおいても成り立つことを示している。

3・3　極　配　置

最初に，2次元システムの極（固有値）を定義しよう。

【定義 3·2】[3·11] $S(A,\ B,\ C)_{n+m}$の特性多項式を

$$\phi_1(z_1,\ z_2)\triangleq\det\,[\mathrm{diag}\,\{z_1I_n,\ z_2I_m\}-A\,]$$

とするとき，Sの極は以下の方程式を満たす対(z_1,z_2)として与えられる。

$$\begin{array}{ll}\phi_1(z_1,z_2)=0 & \\ z_1^{-i}z_2\,\phi_1(z_1,z_2)=0 & 0\leqq i\leqq n\\ z_1z_2^{-j}\,\phi_1(z_1,z_2)=0 & 0\leqq j\leqq m\end{array}\qquad(3\cdot24)$$

ただし，負のべき乗項は零とする。

一般に，２次元システムの極を決定することは容易ではないが，特性多項式が二つの１変数多項式

$$\phi_1(z_1, z_2) = \phi_{11}(z_1) \cdot \phi_{12}(z_2)$$
$$= (z_1 - z_1^1)(z_1 - z_1^2) \cdots (z_1 - z_1^n)(z_2 - z_2^1) \cdots (z_2 - z_2^m) \tag{3·25}$$

に分解されるとき，その極の対は次の複素数対の集合で与えられる。

$$\Lambda_1 \triangleq \{(z_1^i, z_2^j) \mid (0,0) < (i,j) \leqq (n,m)\} \tag{3·26}$$

本章では (3·3)の観測器を組み込んだ状態フィードバックによって，任意に指定された複素数対の集合Λ_1を閉ループシステム $S(A+BK, B, C)_{n+m}$の極として配置することを考える。すなわち，定理 3·2を考慮すればここでの問題は以下のように記述される。

“任意に指定された(3·26)の極対を配置する(3·16)のフィードバック係数Kとこの Kx-値を推定する線形関数観測器$S(F, H, G, N, M)_{\mu+\nu}$を設計せよ。”

さて，Λ_1を配置するために

$A_{12}+B_1K_2=0$　または　$A_{21}+B_2K_1=0$

が満たされるようなフィードバック則を，また，線形関数観測器としては，観測器自身の安定化を容易にするために，

$F_{12}=0$　または　$F_{21}=0$

を満たす構造を考えることにする。上の条件については幾つかの組合せが考えられるが，ここでは $A_{12}+B_1K_2=0$，かつ，$F_{12}=0$ の場合を取り上げる。$A_{21}+B_2K_1=0$，かつ，$F_{21}=0$ の場合についても，(3·2)のB，Cを上ブロック三角行列で表現すれば，以下同様の議論が展開できる。

$A_{12}+B_1K_2=0$ を満たす線形関数観測器が存在するためには，(3·9)より

$$A_{12}+B_1K_2 = A_{12}+B_1MC_2+B_1N_2T_2 = 0 \tag{3·27}$$

が満たされなくてはならない。以下では

$$A_{12}+B_1MC_2=0 \tag{3·28}$$

$$B_1N_2=0 \tag{3·29}$$

および，$F_{12}=0$ を同時に満たす構造の観測器を考える。

まず，(3·28)を満たす M が存在するための条件とその解は次のように与えられる。

【補題 3·1】 (3·28)を満たす M が存在するための必要十分条件は

$$B_1B_1^{+}A_{12}C_2^{+}C_2=A_{12} \tag{3·30}$$

が成立することである。また，(3·30)が成立するとき，その解は

$$M=\left[\begin{array}{c:c} M_{11} & -B_{11}^{+}A_{12}C_{22}^{+} \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] \tag{3·31}$$

で与えられる。ただし，M_{11}，M_{21}，M_{22} はそれぞれ$q_1\times(p-p_2)$，$(q-q_1)\times(p-p_2)$，$(q-q_1)\times p_2$の任意実行列である。

（証明） (3·28)を満たす解 M が存在するための必要十分条件は(3·30)が成立することであり，その一般解は

$$M=-B_1^{+}A_{12}C_2^{+}+(Z+B_1^{+}B_1ZC_2C_2^{+}) \tag{3·32}$$

で与えられる[3·12]。 ただし，Z は $q\times p$ の任意の実行列である。

いま，Z を次のように

$$Z=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{p-p_2}{\longleftrightarrow} & \overset{p_2}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1 \end{array} \end{array} \tag{3·33}$$

分解し， $Z_{12}=0$ と置く。さらに，B_1とC_2の構造に注意すれば，B_1とC_2の一般化逆行列はそれぞれ

$$B_1^{+}=\begin{bmatrix} B_{11}^{+} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2^{+}=[0 \vdots C_{22}^{+}] \tag{3·34}$$

で与えられることがわかる。(3·32)に(3·33)と(3·34)を代入すれば(3·31)を得る。

（証明終）

補題 3·1の条件は幾分厳しいように思えるが，例えば分母分離形２次元システムや Roesser モデルに埋め込まれた Attasi 型の２次元システムなどでは $A_{12}=0$ となり，この条件が満たされる(3・13)。

次に，(3·29)に(3·2)のＢを代入し，rank $B_{11}=q_1$である点に注意すれば，(3·29)を満たすN_2は

$$N_2=\begin{bmatrix} 0 \\ N_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1 \end{array} \tag{3·35}$$

の構造に限られることがわかる。ただし，N_{22}は任意の実行列である。

いま，(3·31)のＭを

$$M=M_s+M_p$$

$$M_s \triangleq \left[\begin{array}{c:c} 0 & -B_{11}^{+}A_{12}C_{22}^{+} \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right], \quad M_p \triangleq \left[\begin{array}{c:c} M_{11} & 0 \\ \hdashline M_{21} & M_{22} \end{array}\right]$$

と分解し，N_2が(3·35)の構造をもつような $N=[N_1\ N_2]$を

$$N_p \triangleq \left[\begin{array}{c:c} N_{11} & 0 \\ N_{12} & N_{22} \end{array}\right]$$

と置いて，(3·1)に出力フィードバック

$$u(i,j)=M_s y(i,j)+\bar{v}(i,j) \tag{3·36}$$

を施した閉ループシステム

$$\overline{S}: \begin{array}{l} \partial x(i,j)=\bar{A}x(i,j)+B\bar{v}(i,j) \\ y(i,j)=Cx(i,j) \end{array} \tag{3·37}$$

$$\bar{A} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{11}+B_1M_sC_1 & 0 \\ \hdashline A_{21}+B_2M_sC_1 & A_{22}+B_2M_sC_2 \end{array}\right]$$

を考える。 このとき，N_p，M_pを(3·9)に代入して得られる状態フィードバック係数の構造

$$[K_1\ \ K_2]=\left[\begin{array}{c:c} K_{11} & 0 \\ K_{12} & K_{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1 \end{array}$$

から結局，Λ_1の配置問題は(3·37)の$\overline{S}(\bar{A},\ B,\ C)_{n+m}$に対して$\Lambda_1$を配置する状態フィードバック則

$$\bar{v}(i,j)=\begin{bmatrix} K_{11} & \vdots & 0 \\ K_{12} & \vdots & K_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{3·38}$$

と，(3·38)を推定するための線形関数観測器$\overline{S}_o(F,\ H,\ G,\ N_p,\ M_p)_{\mu+\nu}$ をそれぞれ設計する問題に帰着できる。

3・4　関数観測器の設計

最初に，(3·37) のシステム$\overline{S}(\bar{A},\ B,\ C)_{n+m}$に対して極の集合$\Lambda_1$を配置する状態フィードバック則 K を設計しよう。

【定理 3·3】　システム$\overline{S}(\bar{A},\ B,\ C)_{n+m}$に対し，状態フィードバック(3·38)によって，極の集合Λ_1が配置できるための必要十分条件は

（ i ）　$(\bar{A}_{11},\ B_{11})$が可制御対

（ ii ）　$(\bar{A}_{22},\ B_{22})$が可制御対

である。

（証明）　(3·37)に(3·38)のフィードバックを施せば，その閉ループシステムの特性多項式は(3·23)より

$$\phi_1(z_1,z_2)=\det\,[z_1I_n-\bar{A}_{11}-B_{11}K_{11}]\cdot\det\,[z_2I_m-\bar{A}_{22}-B_{22}K_{22}]$$

となる。すなわち，閉ループシステムの極は$\bar{A}_{11}+B_{11}K_{11}$の固有値$\{z_1^i \mid i=1,2,\cdots,n\}$と $\bar{A}_{22}+B_{22}K_{22}$ の固有値$\{z_2^j \mid j=1,2,\cdots,m\}$の和集合で与えられ，よく知られているように，これらの固有値が自由に配置できるための必要十分条件が（ i ）と（ ii ）である。　（証明終）

続いて，(3·38)を推定する線形関数観測器 $S_o(F,\ H,\ G,\ N_p,\ M_p)_{\mu+\nu}$を設計する。この場合，推定すべきフィードバック則は

$$\bar{v}(i,j)=\begin{bmatrix} k_{11} & \vdots & 0 \\ k_{12} & \vdots & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j)\end{bmatrix} \tag{3·39}$$

を考えれば十分である。ただし，k_{11}，k_{12}はｎ次の，また，k_{22}はｍ次の行ベクトルである。なぜならば，(3·37)に適当な出力フィードバック

$$\bar{v}(i,j)=\bar{M}y(i,j)+[p_1 \vdots p_2]\,\hat{v}(i,j) \tag{3·40}$$

$$\bar{M}\triangleq\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p-p_2}{\leftarrow\rightarrow} & \overset{p_2}{\leftarrow\rightarrow} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{22}\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1\end{array},\qquad [p_1 \vdots p_2]\triangleq\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{1}{\leftarrow\rightarrow} & \overset{1}{\leftarrow\rightarrow} \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & \vdots & 0 \\ p_{12} & \vdots & p_{22}\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1\end{array}$$

を施して得られる閉ループシステム

$$\partial x(i,j)=\hat{A}x(i,j)+\hat{B}\hat{v}(i,j) \tag{3·41}$$

$$\hat{A}\triangleq\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}+B_{11}\bar{M}_{11}C_{11} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ \bar{A}_{23}+B_2\bar{M}C_1 & \vdots & \bar{A}_{22}+B_{22}\bar{M}_{22}C_{22}\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}\triangleq\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11}p_{11} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ B_2p_1 & B_{22}p_{22}\end{bmatrix}$$

を考えれば，任意の $q_1\times(p-p_2)$行列 M_{11}と$(q-q_1)\times p_2$行列 M_{22}および q_1次列ベクトル $p_{11}\neq 0$と$(q-q_1)$次列ベクトル $p_{22}\neq 0$ に対して

$(\bar{A}_{11},\ B_{11})$が可制御対ならば$(\hat{A}_{11},\ b_{11})$が可制御対

$(\bar{A}_{22},\ B_{22})$が可制御対ならば$(\hat{A}_{22},\ b_{22})$が可制御対

が成立し(3·2)，システム$\overline{S}$ $(\bar{A},\ B,\ C)_{n+m}$が定理 3·3を満たすとき(3·39)のフィードバックによってΛ_1を配置できるからである。

さて，$\overline{S}$ $(\bar{A},\ B,\ C)_{n+m}$に対し(3·39)を推定する線形関数観測器$S_o(F,\ H,\ G,\ N_p,\ M_p)_{\mu+\nu}$は(3·7)から(3·10)に基づいて設計される。

まず，ここでは観測器の構造を$F_{12}=0$と選ぶことから，その特性多項式は

$$\phi_2(z_1,z_2)=\det[z_1I_\mu-F_{11}]\cdot\det[z_2I_\nu-F_{22}]=\phi_{21}(z_1)\cdot\phi_{22}(z_2) \tag{3·42}$$

となる。したがって，もしF_{11}とF_{22}のいずれの固有値も単位円内に指定できる

なら(3·10)が自動的に満たされる[3·14]。

次に，M_pと N_pの構造に合わせて H_1と G_1をそれぞれ

$$H_1=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p-p_2}{\leftrightarrow} & \overset{p_2}{\leftrightarrow} \end{array} \\ [\ H_{11} \ \vdots\ H_{12}\ ] \end{array},\quad G_1=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{q_1}{\leftrightarrow} & \overset{q-q_1}{\leftrightarrow} \end{array} \\ [\ G_{11} \ \vdots\ G_{12}\ ] \end{array}$$

と分割し，これらを (3·7)と(3·8)にそれぞれ代入し，(3·2)の B_1と C_2の構造に注意すれば，

$$\begin{aligned} &H_{12}C_{22}=0 \Leftrightarrow H_{12}=0 \\ &\quad G_{12}=0 \end{aligned} \qquad (3\cdot43)$$

を得る。このような構造をもつ

$$H=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_p=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p-p_2}{\leftrightarrow} & \overset{p_2}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad N_p=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{\mu}{\leftrightarrow} & \overset{\nu}{\leftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} n_{11} & \vdots & 0 \\ n_{12} & \vdots & n_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow 1 \\ \updownarrow 1 \end{array} \end{array}$$

を(3·7)から(3·9)へ代入すれば，

$$\left.\begin{aligned} &T_1\bar{A}_{11}-F_{11}T_1=H_{11}C_{11} \\ &T_1B_{11}=G_{11} \\ &n_{11}T_1+m_{11}C_{11}=k_{11} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot44)$$

$$\left.\begin{aligned} &T_2\bar{A}_{22}-F_{22}T_2=H_{22}C_{22} \\ &T_2B_{22}=G_{22} \\ &n_{22}T_2+m_{22}C_{22}=k_{22} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot45)$$

$$\left.\begin{aligned} &T_2\bar{A}_{21}-F_{21}T_1=H_2C_1 \\ &T_2B_{21}=G_{21} \\ &n_{12}T_1+[m_{21} \vdots m_{22}]C_1=k_{12} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot46)$$

が得られる。 したがって，これらを満たし，かつ，F_1と F_2の固有値が単位円に存在するように，すなわち，(3·42)の$\phi_{21}(z_1)$と$\phi_{22}(z_2)$が指定された特性

多項式を持つように T_1, T_2を決定すればよいことがわかる。

いま，(3·37)のシステムにおける観測行列Cの構造を

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \vdots & 0 \\ C_{12} & \vdots & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{p-p_2} & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ C_{121} & C_{122} & \vdots & 0 & I_{p_2} \end{bmatrix}$$

と仮定しても一般性を失わない[3·15]から，これに合わせて他の係数行列を

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \leftarrow p-p_2 \rightarrow & \leftarrow n-p+p_2 \rightarrow & \leftarrow m-p_2 \rightarrow & \leftarrow p_2 \rightarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{112} & & \\ & & 0 & \\ A_{113} & A_{114} & & \\ \hline A_{121} & A_{122} & A_{221} & A_{222} \\ A_{123} & A_{124} & A_{223} & A_{224} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p-p_2 \\ \\ \updownarrow n-p+p_2 \\ \updownarrow m-p_2 \\ \updownarrow p_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} B_{111} & \\ & 0 \\ B_{112} & \\ \hline B_{211} & B_{221} \\ B_{212} & B_{222} \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow p-p_2 \\ \\ \updownarrow n-p+p_2 \\ \updownarrow m-p_2 \\ \updownarrow p_2 \end{array}$$

のように分割して考える。

【定理 3·4】 (3·37)のシステム$\bar{S}(\bar{A}, B, C)$において

(i) $(C_{11}, \bar{A}_{11})$が可観測対

(ii) $(C_{22}, \bar{A}_{22})$が可観測対

ならば，(3·39)を推定する$(n-p+p_2)+(\zeta-1)$次線形関数観測器$S_o(F, H, G, N_p, M_p)_{\mu+\nu}$が構成できる。ただし，$\zeta$は対$(C_{22}, \bar{A}_{22})$の可観測性指数である。

（証明） $T_1=[T_{11} \vdots T_{12}]$, $T_{11}\in R^{\mu\times(p-p_2)}$, $T_{12}\in R^{\mu\times(n-p+p_2)}$と分割し$T_{12}$を正則行列に選ぶことにする。このとき，(3·44)から(3·46)により，ここでの問題は，二つの1次元システム$\bar{S}_1(\bar{A}_{11}, B_{11}, C_{11})_n$と$\bar{S}_2(\bar{A}_{22}, B_{22}, C_{22})_m$に対して，任意の特性多項式$\phi_{21}(z_1)$と$\phi_{22}(z_2)$を持つ1次元汎関数観測器$S_{o1}(F_{11}, H_{11}, G_{11}, n_{11}, m_{11})_\mu$と$S_{o2}(F_{22}, H_{22}, G_{22}, n_{22}, m_{22})_\nu$をそれぞれ設

計する問題となる。すなわち，これらS_{o1}，S_{o2}が設計できれば，(3·46)を満たす係数行列は，$C_{11}=[I_{p-p2} \vdots 0]$であることから，次のように

$$\left.\begin{aligned}
F_{21}&=(T_2\begin{bmatrix}A_{212}\\A_{214}\end{bmatrix}-H_{22}C_{122})T_{12}^{-1}\\
H_{21}&=T_2\begin{bmatrix}A_{211}\\A_{213}\end{bmatrix}-H_{22}C_{121}-F_{21}T_{11}\\
n_{12}&=(k_{122}-m_{22}C_{122})T_{12}^{-1}\\
m_{21}&=k_{121}-m_{22}C_{121}-n_{12}T_{11}\\
G_{21}&=T_2B_{21}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot47)$$

それぞれ求まる。ただし，

$$k_{12}=[\overset{\xleftrightarrow{p-p_2}}{k_{121}} \vdots \overset{\xleftrightarrow{n-p+p_2}}{k_{122}}]$$

まず，最初に$S_{o1}(F_{11}, H_{11}, G_{11}, n_{11}, m_{11})_\mu$の設計を考える。

任意に与えられた特性多項式

$$\phi_{21}(z_1)=z_1^{\mu}+\alpha_{\mu-1}z_1^{\mu-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0 \qquad (3\cdot48)$$

に対し，F_{11}を

$$F_{11}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_0\\1&0&\cdots&0&-\alpha_1\\0&1&\cdots&0&-\alpha_2\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&-\alpha_{\mu-1}\end{bmatrix} \qquad (3\cdot49)$$

と選ぶことにする。

いま，(3·37)のシステムにおいて，対（C_{11}，$\bar{A}_{11}$）が可観測であるならば対(A_{112}，A_{114})もまた可観測であり，対(A_{112}，A_{114})を次のように変換する変換行列 T_{12}が存在する[3·16]。

$$\hat{A}_{114}=T_{12}A_{114}T_{12}^{-1}=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\cdots & \hat{A}_{1r} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\cdots & \hat{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{A}_{r1} & \hat{A}_{r2}\cdots & \hat{A}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{ii}=\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots 0 & \gamma_1^{ii} \\ 1 & 0\cdots 0 & \gamma_2^{ii} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots 1 & \gamma_{\eta_i}^{ii} \end{bmatrix}\in R^{\eta_i\times\eta_i}$$

$$\hat{A}_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots 0 & \gamma_1^{ij} \\ 0 & 0\cdots 0 & \gamma_2^{ij} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots 0 & \gamma_{\eta_i}^{ij} \end{bmatrix}\in R^{\eta_i\times\eta_j} \tag{3·50}$$

$$\hat{A}_{112}\triangleq A_{112}T_{12}^{-1}=\begin{bmatrix} \hat{C}_{11}\cdots\hat{C}_{1r} \\ \hat{C}_{21}\cdots\hat{C}_{2r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \hat{C}_{r1}\cdots\hat{C}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{ii}=[0\cdots 0\ 1]\in R^{1\times\eta_i}$$

$$\hat{C}_{ij}=[0\cdots 0\ \delta_{ij}] \qquad (i>j)$$

$$\hat{C}_{ij}=0 \qquad (i<j)$$

ただし，$r=\mathrm{rank}\ A_{112}$であり，η_i は対$(A_{112},\ A_{114})$の可観測性指数である。また，$\delta_{ij}(i>j)$は零とは限らない実数である。

このとき，(3·44)の前半から得られる

$$T_{11}A_{112}+T_{12}A_{114}=F_{11}T_{12} \tag{3·51}$$

は(3·50)を用いて次のように

$$F_{11}=\hat{A}_{114}+T_{11}\hat{A}_{112} \tag{3·52}$$

変形でき，F_{11}が(3·49)の構造を持つように T_{11}を選ぶことができる[3·16]。

このようにして得られた T_{11}，T_{12}を(3·44)に代入することにより

$$\left.\begin{aligned} &G_{11}=T_{11}B_{111}+T_{12}B_{112}\\ &H_{11}=T_{11}A_{111}+T_{12}A_{113}-F_{11}T_{11}\\ &n_{11}=k_{112}T_{12}^{-1}\\ &m_{11}=k_{111}-n_{11}T_{11}\quad (k_{11}=[\ \overset{\overset{p-p_2}{\longleftrightarrow}}{k_{111}}\ \vdots\ \overset{\overset{n-p+p_2}{\longleftrightarrow}}{k_{112}}\ ]) \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot 53)$$

が得られ，$S_{o1}(F_{11},\ H_{11},\ G_{11},\ n_{11},\ m_{11})_{n-p+p2}$ の設計は完了する。なお，ここで得られた汎関数観測器の次数は $n-p+p_2$ であり，これは必ずしも最小次数とは限らない点に注意されたい。

1次元システム $S_2(\bar{A}_{22},\ B_{22},\ C_{22})_m$に対し，対$(C_{22},\ \bar{A}_{22})$が可観測で，その可観測性指数が$\zeta$であれば，任意に指定された特性多項式$\phi_{22}(z_2)$をもつ，次数$\zeta-1$の汎関数観測器$S_{o2}(F_{22},\ H_{22},\ G_{22},\ n_{22},\ m_{22})$が設計できることはよく知られている。 （証明終）

システム(3·37)に対する状態観測器の最小次元数[3·15]は$(n-p+p_2)+(m-p_2)=n+m-p$であるが，$m-p_2\geqq\zeta-1$であることに注意すれば，ここでの線形関数観測器の次数は $(n-p+p_2)+(\zeta-1)\leqq n+m-p$であり，最小次元状態観測器に比べて，より低次数となることがわかる。

以上，得られた結果は次のようにまとめられる。

【定理 3·5】

(ⅰ) $B_1B_1^{+}A_{12}C_2^{+}C_2=A_{12}$

(ⅱ) $(\bar{A}_{11},\ B_{11},\ C_{11})$が可制御，かつ，可観測

(ⅲ) $(\bar{A}_{22},\ B_{22},\ C_{22})$が可制御，かつ，可観測

が満たされるとき， $(n-p+p_2)+(\zeta-1)$次元線形関数観測器$S_o(F,\ H,\ G,\ N,\ M)$が構成でき，これを組込んだフィードバックによって，任意に指定された複素数対の集合

$$\Lambda_1 = \{(z_1^i, z_2^j) \mid (0,0) < (i,j) \leqq (n,m)\} \quad (z_1^0 = z_2^0 = 0)$$

を閉ループシステムの極として配置できる。このとき，観測器の極は閉ループシステムの入出力特性に関係しない。

3・5 結　言

この章では，Roesser のモデルで記述される２次元システムを対象として，線形関数観測器を組み込んだ状態フィードバックによる２次元システムの極配置問題を考察した。

最初に，閉ループシステムの極が状態フィードバックを施した極と線形関数観測器の極に分離でき，かつ，観測器の極は閉ループシステムの入出力特性に影響しないことを示した。続いて，極配置問題は，被対象システムに適当な出力フィードバックを施せば，二つの１次元システムに対する状態フィードバック則および汎関数観測器をそれぞれ設計する問題に帰着できることを述べた。最後に，任意に指定された複素数対を閉ループシステムの極として配置できるための十分条件を導いた。本方法は組み込まれる観測器の極が閉ループシステムの入出力に無関係であるという特徴を持つが，この閉ループシステムにおける観測器の分離性は極指定問題に限らず，閉ループシステムの入出力特性に注目するような状態フィードバックの設計，例えば非干渉化問題[3・17]，あるいはモデル適合問題[3・18]などに，ここでの観測器が利用できることを意味している。

第4章　2次元システムの極配置 II

4・1　緒　　言

前章では状態フィードバックによる２次元極配置問題を考察したが，すべての状態は直接得られないことから，状態フィードバックを達成するためには状態観測器，あるいは状態の線形関数値を推定する線形関数観測器を必要とした。状態が直接得られない場合，極配置問題を解くもっと直接的な方法はシステムの出力をフィードバックして，なおかつ，状態フィードバックと同様な効果を持つような補償器を考えることである。補償器としては動的システムの利用が極配置を容易にすることも１次元システムの場合と同様である。２次元極配置問題に動的フィードバックを取り扱ったものとしてはParaskepoulos [4・1] らの研究と Šebek [4・2] の研究がある。しかし，前者で扱われている補償器は一般的なタイプではなく P.I.D 形（ Proportional＋Integral＋Derivative）に限定されている。また，後者では伝達関数で記述されたシステムが扱われており，補償器の設計問題は２変数有理関数の立場から考察されている。さらに，そこでの被対象システムはスカラの入出力を持つ場合に限定されている。

この章では Roesser の状態空間モデルで記述された多入出力の２次元システムを対象とし，２次元動的システムを組み込んだ出力フィードバック（２次元動的補償器）によって，２次元システムの極を任意に配置する [4・3]－[4・5] ことを考える。

最初に，被対象システムに対し，その特性多項式を１変数多項式の積にするような出力フィードバック則を導出し，ここでの問題を二つの１次元システムに対する極配置問題に分割する。続いて任意に指定された複素数対を配置するような２次元動的補償器が存在するための十分条件が示され，その設計アルゴリズムが与えられる。

4・2　問題の定式化

次の Roesser の状態空間モデルを考える。

$$
S:\quad
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\
y(i,j) &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \qquad i, j \geqq 0
\end{aligned}
\tag{4·1}
$$

(4·1)は簡単に

$$\partial x(i,j) = Ax(i,j) + Bu(i,j)$$

$$y(i,j) = Cx(i,j)$$

あるいは$S(A,\ B,\ C)_{n+m}$と書かれる。ただし，$x^h(i,j)$は，n次元水平状態ベクトル，$x^v(i,j)$はm次元垂直状態ベクトル，$u(i,j)$はq次元入力ベクトル，$y(i,j)$はp次元出力ベクトルであり，A, B, C はそれぞれ適当なサイズの実行列である。また，

$$\mathrm{rank}\,B = q,\ \ \mathrm{rank}\ B_1 = q_1 \leqq q,\ \ \mathrm{rank}\ B_2 = q_2 \leqq q \quad (q_1 + q_2 \geqq q)$$

$$\mathrm{rank}\,C = p,\ \ \mathrm{rank}\ C_1 = p_1 \leqq p,\ \ \mathrm{rank}\ C_2 = p_2 \leqq p \quad (p_1 + p_2 \geqq p)$$

と仮定する。

$S(A,\ B,\ C)_{n+m}$に対し，その入力を次の２次元システム

$$
S_c:\quad
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} z^h(i+1,j) \\ z^v(i,j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^h(i,j) \\ z^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} y(i,j) \\
u(i,j) &= [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} z^h(i,j) \\ z^v(i,j) \end{bmatrix} + My(i,j) + v(i,j)
\end{aligned}
\tag{4·2}
$$

によって定めることにする。ただし，$z^h(i,j)$はμ次元水平状態ベクトル，$z^v(i,j)$はν次元垂直状態ベクトル，$v(i,j)$はq次元制御ベクトルである。 以後，(4·2)は簡単に

$$\partial z(i,j) = Fz(i,j) + Hy(i,j)$$

$$u(i,j) = Nz(i,j) + My(i,j) + v(i,j)$$

あるいは $S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$と書かれる。ここで，F, H, N, M はそれぞれ適当なサイズの実行列である。

$S(A, B, C)_{n+m}$の入力が上記システム$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$に支配されるとき，$S_c$をSに対する２次元動的補償器と呼ぶことにする。 ここで，$\mu+\nu$は補償器の次数を表すが，次数零の動的補償器$S_c(0, 0, 0, M)_{0+0}$は

$$u(i,j)=My(i,j)+v(i,j) \tag{4·3}$$

と記述され，$S(A, B, C)_{n+m}$に対する出力フィードバックと一致する。(4·2)の第１式には前章における線形関数観測器とは違ってSの入力 u(i, j) が含まれないことに注意されたい。

次に，(4·2)を(4·1)に代入すればその閉ループシステムは

$$S_f^*: \begin{bmatrix} \partial x(i,j) \\ \partial z(i,j) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+BMC & \vdots & BN \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ HC & \vdots & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(i,j) \\ z(i,j) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(i,j) \tag{4·4}$$

となる。このとき，S_f^*の特性多項式は

$$\phi(z_1, z_2)\triangleq\det [\mathrm{diag}\{z_1 I_n, z_2 I_m, z_1 I_\mu, z_2 I_\nu\}- A_f^*] \tag{4·5}$$

で定義さる。ただし，

$$A_f^*\triangleq\begin{bmatrix} A+BMC & \vdots & BN \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ HC & \vdots & F \end{bmatrix}$$

である。

さて，この特性多項式が二つの１変数多項式

$$\phi(z_1,z_2)=\phi_1(z_1)\cdot\phi_2(z_2)$$

に分割されるとき，前章の定義 3·2 から，その極の対(z_1,z_2)は次の複素数対の集合

$$\Lambda\triangleq\{(z_1^i,z_2^j)\,|\,(0,0)<(i,j)\leqq(n+\mu,m+\nu)\} \tag{4·6}$$

で与えられる。

この章での目的は， 任意に指定された(4·6)の極対Λを配置する２次元動的補償器$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$を設計することである。また，このような動的補償

器が存在するとき，Λは配置可能であるという。

さて，(4·4)に(4·1)と(4·2)の係数行列を代入し， 行と列を適当に入れ替えれば，S_f^*の特性多項式は次式

$$\phi(z_1, z_2) = \det\left[\mathrm{diag}\{z_1 I_{n+\mu}, z_2 I_{m+\nu}\} - A_f\right] \tag{4·7}$$

$$A_f = \begin{bmatrix} A_{f11} & A_{f12} \\ A_{f21} & A_{f22} \end{bmatrix} \triangleq \left[\begin{array}{cc:cc} A_{11}+B_1MC_1 & B_1N_1 & A_{12}+B_1MC_2 & B_1N_2 \\ H_1C_1 & F_{11} & H_1C_2 & F_{12} \\ \hdashline A_{21}+B_2MC_1 & B_2N_1 & A_{22}+B_2MC_2 & B_2N_2 \\ H_2C_1 & F_{21} & H_2C_2 & F_{22} \end{array}\right]$$

に一致する。すなわち，ここでの動的補償器は $A_{f12}=0$ あるいは $A_{f21}=0$ を満足するように設計すればよいことが知れる。

ここでは，Λを配置するための動的補償器を$A_{f12}=0$ を満足するように設計する。$A_{f21}=0$ を満足する動的補償器についても，以下同様の議論が可能であるが，ここではその結果のみを示す。

いま，$S(A, B, C)_{n+m}$において rank $B_1=q_1\leqq q$とrank $C_2=p_2\leqq p$ であることに着目すれば，適当な入力変換

$$\begin{bmatrix} u_1(i,j) \\ u_2(i,j) \end{bmatrix} = Pu(i,j) \quad (\det P \neq 0) \tag{4·8}$$

および出力変換

$$\begin{bmatrix} y_1(i,j) \\ y_2(i,j) \end{bmatrix} = Qy(i,j) \quad (\det Q \neq 0) \tag{4·9}$$

を施すことによってBとCは，一般性を失うことなく，次のように

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{q_1}{\leftarrow\rightarrow} & \overset{q-q_1}{\leftarrow\rightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} B_{11} & 0 \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rank}\ B_{11} = q_1 \\ \mathrm{rank}\ B_{22} = q - q_1 \end{array} \tag{4·10}$$

$$
[C_1\ C_2]=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{n}{\leftrightarrow} & \overset{m}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p-p_2 \\ \updownarrow p_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{rank}\ C_{11}=p-p_2 \\ \mathrm{rank}\ C_{22}=p_2 \end{array} \tag{4·11}
$$

表現できる。さらに，(4·10) と (4·11) の分割に着目すれば，$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$の係数行列を

$$
\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p-p_2}{\leftrightarrow} & \overset{p_2}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ \hdashline H_{21} & H_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow \mu \\ \updownarrow \nu \end{array}, \qquad [N_1\ N_2]=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{\mu}{\leftrightarrow} & \overset{\nu}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1 \end{array}
$$

$$
M=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p-p_2}{\leftrightarrow} & \overset{p_2}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow q_1 \\ \updownarrow q-q_1 \end{array} \tag{4·12}
$$

と分割して考えることができる。ここで，上記の入力および出力変換は$S(A, B, C)_{n+m}$に対する動的補償器の設計に何ら影響を与えない。なぜならば，入出力変換されたシステムに対して得られた動的補償器$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$の入力$y(i, j)$ および出力 $u(i, j)$を(4·8)と(4·9)の関係を用いて逆変換すれば，もとのシステムに対する動的補償器$S_c(F, HQ, P^{-1}N, P^{-1}MQ)_{\mu+\nu}$が直ちに得られるからである。 したがって，ここでは$S(A, B, C)_{n+m}$の入力と出力は(4·8)と(4·9)の立場で与えられるものとして議論を進める。

4・3　2次元動的補償器

ここでは(4·7)において $A_{f12}=0$，すなわち

$$
A_{f12}=\begin{bmatrix} A_{12}+B_1MC_2 & B_1N_2 \\ H_1C_2 & F_{12} \end{bmatrix}=0 \tag{4·13}
$$

を満足するように動的補償器$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$を設計する。

いま，(4·12)のMを次のように

$$M = M_s + M_p, \qquad M_s \triangleq \begin{bmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_p \triangleq \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \tag{4·14}$$

分解して考える。 このとき，$S(A,\ B,\ C)_{n+m}$に対する動的補償器$S_c(F,\ H,\ N,\ M_s+M_p)_{\mu+\nu}$の設計問題は，Sに対し出力フィードバック $S_c(0,\ 0,\ 0,\ M_s)_{0+0}$を施した後の閉ループシステムに対して， 動的補償器$S_c(F,\ H,\ N,\ M_p)_{\mu+\nu}$を設計する問題と等価になる。

以下ではまず，(4·13)の左上ブロック行列 $A_{12}+B_1MC_2$を適当な出力フィードバック

$$u(i,j) = M_s y(i,j) + v(i,j) \tag{4·3'}$$

を$S(A,\ B,\ C)_{n+m}$に施すことによって零行列にすることを考える。

【補題 4·1】 $A_{12}+B_1MC_2=0$ とするような(4·3′)の出力フィードバック係数 M_sが存在するための必要十分条件は

$$B_{11}B_{11}^{+}A_{12}C_{22}^{+}C_{22} = A_{12} \tag{4·15}$$

が成り立つことである。

(証明) B_1とC_2の構造((4·10)，(4·11))およびのMの分解((4·14))に注意すれば，次の関係

$$A_{12}+B_1MC_2 = A_{12}+B_1M_sC_2+B_1M_pC_2 = A_{12}+B_1M_sC_2 \tag{4·16}$$

が導かれる。 すなわち，$A_{12}+B_1MC_2=0$ とする出力フィードバック係数は次の行列方程式

$$B_1M_sC_2 = B_{11}M_{12}C_{22} = -A_{12} \tag{4·17}$$

の解として与えられ，この解が存在するための必要十分条件は(4·15)であることはよく知られている[(4·6)]。 (証明終)

さて，上記補題が満たされるとき，(4·17)の解は

$$M_s = \left[\begin{array}{c:c} 0 & -B_{11}^{+}A_{12}C_{22}^{+} \\ \hdashline M_{21} & 0 \end{array}\right] \qquad M_{21} \in R^{(q-q1)\times(p-p2)}：任意行列 \tag{4·18}$$

で与えられ，(4·3′)のフィードバックを施した後の閉ループシステムは

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{f11} & 0 \\ \bar{A}_{f21} & \bar{A}_{f22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} v(i,j)$$

$$\overline{S}_f: \quad \begin{bmatrix} y_1(i,j) \\ y_2(i,j) \end{bmatrix} = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \qquad i,j \geqq 0 \qquad (4\cdot19)$$

となる。ただし，

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{f11} & 0 \\ \bar{A}_{f21} & \bar{A}_{f22} \end{bmatrix} \triangleq \left[\begin{array}{c:c} A_{12}+B_1M_sC_2 & 0 \\ \hdashline A_{21}+B_2M_sC_1 & A_{22}+B_2M_sC_2 \end{array}\right]$$

である。

続いて，上記$\overline{S}_f$ $(\bar{A}_f,\ B,\ C)_{n+m}$に対して動的補償器$S_c(F,\ H,\ N,\ M_p)_{\mu+\nu}$を設計することを考える。

いま，(4·2)における$S_c(F,\ H,\ N,\ M)_{\mu+\nu}$の係数行列を次のように

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} H_{11} & 0 \\ \hdashline H_{21} & H_{22} \end{array}\right]$$

$$M = M_p = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \qquad [N_1 \ \ N_2] = \left[\begin{array}{c:c} N_{11} & 0 \\ N_{12} & N_{22} \end{array}\right] \qquad (4\cdot20)$$

選ぶ。このとき，BとCの構造に留意すれば，(4·13)が満たされていることが容易に確かめられる。すなわち，この構造を持つ動的補償器を組み込んだ閉ループシステム$\hat{S}_f$の特性多項式は(4·7)より

$$\begin{aligned} \phi(z_1,z_2) &= \det\ [\mathrm{diag}\ \{z_1I_{n+\mu},\ z_2I_{m+\nu}\} - \hat{A}_f] \\ &= \det\ [z_1I_{n+\mu} - \hat{A}_{f11}] \cdot \det\ [z_2I_{m+\nu} - \hat{A}_{f22}] \end{aligned} \qquad (4\cdot21)$$

$$\hat{A}_f = \begin{bmatrix} \hat{A}_{f11} & \hat{A}_{f12} \\ \hat{A}_{f21} & \hat{A}_{f22} \end{bmatrix} \triangleq \left[\begin{array}{cc:cc} \bar{A}_{f11}+B_{11}M_{11}C_{11} & B_{11}N_{11} & 0 & 0 \\ H_{11}C_{11} & F_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline \bar{A}_{f21}+B_2M_pC_1 & B_2N_1 & \bar{A}_{f22}+B_{22}M_{22}C_{22} & B_{22}N_{22} \\ H_2C_1 & F_{21} & H_{22}C_{22} & F_{22} \end{array}\right]$$

となる。ここで，$\hat{A}_{f11}$および$\hat{A}_{f22}$の固有値の集合をそれぞれ，

$$\Lambda_1 \triangleq \{z_i \mid i=1,2,\cdots,n+\mu\} \tag{4·22}$$

$$\Lambda_2 \triangleq \{z_j \mid j=1,2,\cdots,m+\nu\} \tag{4·23}$$

と置けば，システムの極の集合はΛ_1とΛ_2の和集合Λ，すなわち(4·6)で与えられることがわかる。

以上の結果から，ここでの問題は次のように言い換えられる。

“二つの１次元システム$S_1(\bar{A}_{f11},\ B_{11},\ C_{11})_n$

$$S_1:\ \begin{array}{l} x^h(i+1)=\bar{A}_{f11}x^h(i)+B_{11}u_1(i) \\ y_1(i)=C_{11}x^h(i) \end{array} \tag{4·24}$$

および$S_2(\bar{A}_{f22},\ B_{22},\ C_{22})_m$

$$S_2:\ \begin{array}{l} x^v(j+1)=\bar{A}_{f22}x^v(j)+B_{22}u_2(j) \\ y_2(j)=C_{22}x^v(j) \end{array} \tag{4·25}$$

に対して，任意に与えられた複素数の集合，Λ_1およびΛ_2を配置するような１次元動的補償器$S_{c1}(F_{11},\ H_{11},\ N_{11},\ M_{11})_\mu$

$$S_{c1}:\ \begin{array}{l} z^h(i+1)=F_{11}z^h(i)+H_{11}y_1(i) \\ u_1(i)=N_{11}z^h(i)+M_{11}y_1(i) \end{array} \tag{4·26}$$

と$S_{c2}(F_{22},\ H_{22},\ N_{22},\ M_{22})_\nu$

$$S_{c2}:\ \begin{array}{l} z^v(j+1)=F_{22}z^v(j)+H_{22}y_2(j) \\ u_2(j)=N_{22}z^v(j)+M_{22}y_2(j) \end{array} \tag{4·27}$$

をそれぞれ設計せよ。”

また，(4·1)のシステム$S(A,\ B,\ C)_{n+m}$において，$\mathrm{rank}\ B_2=q_2\leqq q$と$\mathrm{rank}\ C_1=p_1\leqq p$である点に着目すれば，入力および出力変換によって，BとCは次のようにも

$$\tilde{B}\triangleq\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{q-q_2} & \overleftrightarrow{q_2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \hdashline 0 & \tilde{B}_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n, \quad \mathrm{rank}\ \tilde{B}_{11}=q-q_2 \\ \updownarrow m, \quad \mathrm{rank}\ \tilde{B}_{22}=q_2 \end{array} \tag{4·28}$$

$$\tilde{C}\triangleq[\tilde{C}_1\ \ \tilde{C}_2]=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overset{\leftarrow\ n\ \rightarrow}{} & \overset{\leftarrow\ m\ \rightarrow}{}\end{array}\\ \left[\begin{array}{c:c}\tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{21}\\ 0 & \tilde{C}_{22}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\updownarrow p_1\ ,\\ \updownarrow p-p_1\ ,\end{array}\qquad\begin{array}{l}\mathrm{rank}\ \tilde{C}_{11}=p_1\\ \mathrm{rank}\ \tilde{C}_{22}=p_2\end{array}\tag{4·29}$$

表現でき，ここまでとまったく同様の議論ができる。すなわち補題 4·1の系として次を得る。

【系 4·1】 $A_{21}+\tilde{B}_2M\tilde{C}_1=0$ とするような(4·3′)の出力フィードバック係数$\tilde{M}_s$が存在するための必要十分条件は

$$\tilde{B}_{22}\tilde{B}_{22}^{+}A_{21}\tilde{C}_{11}^{+}\tilde{C}_{11}=A_{21}$$

が成り立つことである。

S(A, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$)が系 4·1を満たすとき，出力フィードバック

$$\tilde{u}(i,j)=\left[\begin{array}{c:c}0 & M_{22}\\ \hdashline -\tilde{B}_{22}^{+}A_{21}\tilde{C}_{11}^{+} & 0\end{array}\right]\tilde{y}(i,j)+v(i,j)\tag{4·30}$$

を施せば，閉ループシステム

$$\begin{bmatrix}x^h(i+1,j)\\ x^v(i,j+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{f11} & \tilde{A}_{f12}\\ 0 & \tilde{A}_{f22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\ x^v(i,j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\end{bmatrix}v(i,j)$$

$$\tilde{S}_f:\quad\begin{bmatrix}\tilde{y}_1(i,j)\\ \tilde{y}_2(i,j)\end{bmatrix}=[\tilde{C}_1\quad\tilde{C}_2]\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\ x^v(i,j)\end{bmatrix}\qquad i,j\geqq 0\tag{4·31}$$

が得られる。ただし，$M_{22}\in R^{(q-q2)\times(p-p1)}$任意行列であり

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}_{f11} & \tilde{A}_{f21}\\ 0 & \tilde{A}_{f22}\end{bmatrix}\triangleq\left[\begin{array}{c:c}A_{12}+\tilde{B}_1M_s\tilde{C}_2 & A_{21}+\tilde{B}_2M_s\tilde{C}_1\\ \hdashline 0 & A_{22}+\tilde{B}_2M_s\tilde{C}_2\end{array}\right]$$

である。さらに，$\tilde{S}_f$に対する動的補償器の係数行列 F, H, M_p, Nを

$$F=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ 0 & F_{22}\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}H_{11} & H_{21}\\ \hdashline 0 & H_{22}\end{array}\right]$$

$$M_p=\begin{bmatrix}M_{11} & 0\\ 0 & M_{22}\end{bmatrix},\qquad[N_1\ \ N_2]=\left[\begin{array}{c:c}N_{11} & N_{21}\\ 0 & N_{22}\end{array}\right]\tag{4·32}$$

と，それぞれ選ぶことにより，Λを配置する２次元動的補償器$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$は$A_{f21}=0$（（4·7）参照）を満たすように設計する問題となり，以下のように言い換えられる。

“１次元システム$S_1(\tilde{A}_{f11}, \tilde{B}_{11}, \tilde{C}_{11})_n$と$S_2(\tilde{A}_{f22}, \tilde{B}_{22}, \tilde{C}_{22})_m$に対して，$\Lambda_1$と$\Lambda_2$を配置するような１次元動的補償器$S_{c1}(F_{11}, H_{11}, N_{11}, M_{11})_\mu$および$S_{c2}(F_{22}, H_{22}, N_{22}, M_{22})_\nu$をそれぞれ設計せよ。”

４・４　極配置のアルゴリズム

ここでは，前節の結果を用いて，Λを配置するための２次元動的補償器の設計アルゴリズムを導く。

１次元システムにおいて得られている次の結果が有用となる。

【補題 4·2】(4·7)　１次元システム$S(A, B, C)_n$において，対(A, B)は可制御，対(C, A)は可観測とする。 このとき，自由な極配置を許す動的補償器$S_c(F, H, N, M)_p$が存在し，その次数pは $p \geqq \min(\alpha-1, \beta-1)$ あれば十分である。ただし，αとβは次のように

$$\alpha = \min\{i \mid \mathrm{rank}\ [B, AB, \cdots, A^{i-1}B]=n\}$$
$$\beta = \min\{i \mid \mathrm{rank}\ [C^T, A^TC^T, \cdots, (A^T)^{i-1}C^T]=n\}$$

定義される正整数である。

さて，$S_1(\bar{A}_{f11}, B_{11}, C_{11})_n$と$S_2(\bar{A}_{f22}, B_{22}, C_{22})_m$に対し，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \min\{i \mid \mathrm{rank}\ [B_{11}, \bar{A}_{11f}B_{11}, \cdots, (\bar{A}_{f11})^{i-1}B_{11}]=n\}\\ \beta_1 &= \min\{i \mid \mathrm{rank}\ [C_{11}^T, \bar{A}_{f11}^TC_{11}^T, \cdots, (\bar{A}_{f11}^T)^{i-1}C_{11}^T]=n\}\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot33)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 &= \min\{j \mid \mathrm{rank}\ [B_{22}, \bar{A}_{22f}B_{22}, \cdots, (\bar{A}_{f22})^{j-1}B_{22}]=m\}\\ \beta_2 &= \min\{j \mid \mathrm{rank}\ [C_{22}^T, \bar{A}_{f22}^TC_{22}^T, \cdots, (\bar{A}_{f22}^T)^{j-1}C_{22}^T]=m\}\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot34)$$

を定義する。このとき，補題 4·2よりS_1とS_2が共に可制御かつ可観測であれば， Λ_1およびΛ_2を配置するような動的補償器$S_{c1}(F_{11}, H_{11}, N_{11}, M_{11})_\mu$と$S_{c2}(F_{22}, H_{22}, N_{22}, M_{22})_\nu$がそれぞれ存在することがわかる。 さらに，動的

補償器の次数μとνはそれぞれ

$$\mu \geqq \min(\alpha_1-1,\ \beta_1-1)$$

$$\nu \geqq \min(\alpha_2-1,\ \beta_2-1)$$

であればよい。

補題 4·1に留意し，ここまでの結果をまとめれば，本章の結論として次の定理を得る。

【定理 4】　任意に与えられた複素数対の集合

$$\Lambda \triangleq \{(z_1^i, z_2^j) \mid (0,0) < (i,j) \leqq (n+\mu, m+\nu)\} \qquad z_1^0 = z_2^0 = 0$$

を配置する２次元動的補償器が存在するための十分条件は

(ｉ) $B_{11}B_{11}^{+}A_{12}C_{22}^{+}C_{22}=A_{12}$

(ii) $(\bar{A}_{f11},\ B_{11},\ C_{11})$が可制御，かつ，可観測

(iii) $(\bar{A}_{f22},\ B_{22},\ C_{22})$が可制御，かつ，可観測

で与えられる。このとき動的補償器の次数$(\mu+\nu)$は

$$\mu \geqq \min(\alpha_1-1,\ \beta_1-1),\ \nu \geqq \min(\alpha_2-1,\ \beta_2-1)$$

であればよい。

一方，$S(A,\ \tilde{B},\ \tilde{C})_{n+m}$に対しても，$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\beta}_2$，$\tilde{\alpha}_2$，$\tilde{\beta}_2$を(4·33)と(4·34)と同様に定義することにより，次の系を得る。

【系 4·2】　任意に与えられた複素数対の集合Λを配置する２次元動的補償器が存在するための十分条件は

(ｉ) $\tilde{B}_{22}\tilde{B}_{22}^{+}A_{21}\tilde{C}_{11}^{+}\tilde{C}_{11}=A_{21}$

(ii) $(\tilde{A}_{f11},\ \tilde{B}_{11},\ \tilde{C}_{11})$が可制御，かつ，可観測

(iii) $(\tilde{A}_{f22},\ \tilde{B}_{22},\ \tilde{C}_{22})$が可制御，かつ，可観測

で与えられる。このとき動的補償器の次数$(\mu+\nu)$は

$$\mu \geqq \min(\tilde{\alpha}_1-1,\ \tilde{\beta}_1-1),\ \nu \geqq \min(\tilde{\alpha}_2-1,\ \tilde{\beta}_2-1)$$

であればよい。

上の定理 4 および系 4·2 の条件（ｉ）から（iii）は，前章において考察し

た観測器を組み込んだ状態フィードバックによって2次元システムの極配置ができるための条件（定理【3·5】）と一致している。すなわち，同じ構造をもつ2次元システムの極配置問題に対して，動的出力フィードバック（動的補償器）は関数観測器を組み込んだ状態フィードバックと同様の効果を持たすことができる。

以上の結果に対し，1次元システムで得られている結果を応用すれば，2次元動的補償器を用いた2次元極配置のためのアルゴリズムは以下のように要約できる。

<動的補償器による極配置のアルゴリズム>

Step 1. 被対象システム$S(A, B, C)_{n+m}$が定理 4·1 の条件（i）を満たすかどうかチェックする。満たせば，M_sを(4·18)とし，$S(A, B, C)$に出力フィードバック，(4·3′)を施す。

Step 2. Step 1.によって得られた閉ループシステム$\overline{S}_f$に対して，定理 4·1の条件（ii)と（iii)が満たされているかどうかチェックする。

Step 3. $\overline{S}_f$が定理 4·1の条件（ii）と（iii）を満たせば$\overline{S}_f$から得られた二つの1次元システム$S_1(\overline{A}_{f11}, B_{11}, C_{11})_n$と$S_2(\overline{A}_{f22}, B_{22}, C_{22})_m$に対し，任意に指定された$\Lambda_1$と$\Lambda_2$を配置するような1次元動的補償器 $S_{c1}(F_{11}, H_{11}, N_{11}, M_{11})_\mu$と$S_{c2}(F_{22}, H_{22}, N_{22}, M_{22})_\nu$をそれぞれ設計する。なお，このような1次元動的補償器の設計については，例えば，文献(4·7)を参照されたい。

Step 4. Step 3.で得られた F_{11}, F_{22}, H_{11}, H_{22}, M_{11}, M_{22}, N_{11}, N_{22} を(4·20)に代入し，続いて $M=M_s+M_p$を求めれば，$S(A, B, C)_{n+m}$に対する動的補償器$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$が得られる。

もし，$S(A, B, C)$ に(4·8)と(4·9)の入出力変換が施されている場合には，動的補償器$S_c(F, H, N, M)_{\mu+\nu}$は入出力変換行列PとQを用いてもとの座標に$S_c(F, HQ, P^{-1}N, P^{-1}MQ)_{\mu+\nu}$戻される。

ここで，F_{21}，H_{21}，M_{21}，N_{12}はそれぞれ任意に選べる行列である。

4・5　結　言

本章では Roesser の状態空間モデルで記述される２次元システムを対象とし，２次元動的補償器を用いた極配置の問題を考察した。ここで，配置すべき極の集合は複素数対の集合であり，このような極を持つ２次元システムの特性多項式は１変数多項式の積で表される。

最初に，被対象システムに対し，その特性多項式を１変数多項式の積とするような出力フィードバック則を導出し，ここでの問題が二つの１次元システムに対する極配置問題に帰着されることを示した。続いて，任意に指定された複素数の対を配置するような２次元動的補償器が存在するための十分条件を導き，その設計アルゴリズムを与えた。

本章における動的補償器は２次元動的システムを組み込んだ出力フィードバックであり，任意の複素数対を配置できるための十分条件が，前章で示した観測器を組み込んだ状態フィードバックによって極配置できるための条件と一致していることは興味深い。また，ここでの動的補償器は，従来この種の問題で取り扱われている状態あるいは出力の静的なフィードバックに比べ，より実用的であり，極配置は容易となる。

第5章　2次元モデル適合問題

5・1　緒　言

前章ではフィードバックによってシステムの特性多項式を改善する問題を考察した。一般に，フィードバック補償は，システムの伝達関数の分母多項式を変化させることはできるが，分子多項式を変化させることはできない。したがって，伝達関数の分子多項式をも改善するためにはなんらかの前向きの補償が必要になる。本章で取り上げるモデル適合問題は，フィードバック補償に加えて，適当な入力変換によってシステムを理想のモデル，例えば所望の伝達行列に一致させる問題で，これまでに数多くの研究結果が１次元システムに対して報告されている[5・1],[5・2]。

２次元モデル適合問題は，最初に Eisingら[5・3]によって考察されたが，これは Dynamic Cover の概念を用いた幾何学的アプローチであり，完全な解を得るに至っていない。また，Paraskevopupolos[5・4],[5・5] は静的な状態フィードバックを，また Yasuda[5・6]は動的な状態フィードバックを扱った場合をそれぞれ報告している。しかし，すべての状態は直接測定できるとは限らないから，直接観測できる出力を用いた方が実用上好ましいと考えられる。さらに，動的システムを組み込んだ出力フィードバック（動的補償器）の利用が問題の解決を容易にする。 動的補償器を扱ったものとしては Paraskevopupolos[5・7]の研究および Šebek[5・8]の研究がある。しかし，前者での動的補償器はP.I.D 型に限定されており，関連方程式の導出もかなり煩雑で，解を得るためには大行列の演算を必要とする。一方，後者では，２次元動的補償器が一般的に取り扱われ，補償器の設計が２変数の多項式方程式の解を求める問題に帰着されている。しかし，そこではスカラの入出力システムが対象であり，解は必ずしも容易には得られない。

本章では，２次元モデル適合問題を解くために１次元動的補償器が導入される。すなわち，１次元動的補償器を組み込んだ出力フィードバックによって閉ループシステムを所望のモデルに一致させるための必要十分条件が与えられ，その一般解が与えられる(5・9)，(5・10)。本１次元動的補償器は，二種類の遅れ素子を有する２次元動的補償器に比べて構造は簡単であり経済的である。さらに，２次元モデル適合問題に対する静的出力フィードバック則の設計法は，ここでの特別な場合として与えられるが，これは Paraskevopupolos の示した文献(5・5)での方法よりも簡単である。

５・２　問題の定式化

伝達行列が

$$S : H(z_1, z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{\bar{n}}\sum_{j=0}^{\bar{m}} N_{ij} z_1^i z_2^j}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} z_1^i z_2^j} \quad (a_{nm}\neq 0,\ n\geqq \bar{n},\ m\geqq \bar{m}) \qquad (5\cdot 1)$$

で記述される q 入力 p 出力の２次元システムを考える。ただし，N_{ij}は $p\times q$ の実行列であり，a_{ij}は実数である。

次に，所望のモデルとして，伝達行列

$$S_m : H_m(z_1, z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{\bar{h}}\sum_{j=0}^{\bar{r}} \hat{N}_{ij} z_1^i z_2^j}{\sum_{i=0}^{h}\sum_{j=0}^{r} \hat{a}_{ij} z_1^i z_2^j} \quad (\hat{a}_{hr}\neq 0,\ h\geqq \bar{h},\ r\geqq \bar{r}) \qquad (5\cdot 2)$$

で記述される２次元システムが与えられるものとする。ただし，$\hat{N}_{ij}$は $p\times s$ の実行列であり，$\hat{a}_{ij}$は実数である。

この章では，システム (5・1)に対し適当なフィードバックと入力変換を施すことによって，その閉ループシステムを(5・2)に一致させることを考える。す

なわち，システム(5·1)の入力 $U(z_1, z_2)$と出力 $Y(z_1, z_2)$の関係を

$$Y(z_1, z_2)=H(z_1, z_2)U(z_1, z_2)$$

と表現し，この入力を

$$U(z_1, z_2)=G(z_2)V(z_1, z_2)+K(z_2)Y(z_1, z_2) \qquad (5\cdot3)$$

の形で指定する。ここで，$G(z_2)$と$K(z_2)$はそれぞれ $q\times s$ と $q\times p$ のサイズを持つプロパーな有理関数行列で，$V(z_1, z_2)$は s 次元制御入力ベクトルである。

(5·3)を(5·1)の入力としたときの閉ループシステムは図 5·1のようになり，その伝達関数は

$$H_c(z_1, z_2)=[I_p-H(z_1, z_2)K(z_2)]^{-1}H(z_1, z_2)G(z_2) \qquad (5\cdot4)$$

で与えられる。このとき，ここでの問題は次のようになる。

“システム(5·1)と所望のモデル(5·2)に対し

$$H_c(z_1, z_2)=H_m(z_1, z_2) \qquad (5\cdot5)$$

を満たす(5·3)におけるプロパーな有理関数行列$G(z_2)$と$K(z_2)$を見つけよ。”

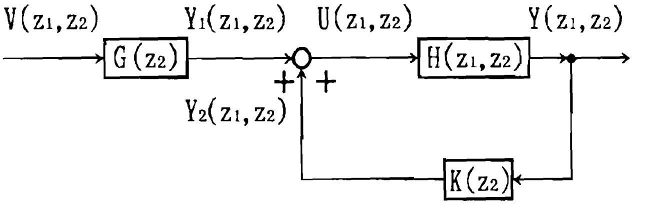

Fig.5·1 Closed-loop system with a 1-D dynamic compensator

ちなみに，図 5·1 からもわかるように(5·3)は前向きに組み込まれる1次元動的補償器$G(z_2)$と後向きに組み込まれる1次元動的補償器$K(z_2)$の合成システムとみなせる。この合成されたシステムは1次元動的システムであり，システム(5·1)に対する1次元動的補償器になることが以下のように示される。

いま，$G(z_2)$と$K(z_2)$の状態空間モデルをそれぞれ

$$S_G:\left.\begin{aligned} z_1^{\vee}(j+1)&=A_1 z_1^{\vee}(j)+B_1 v(j)\\ y_1(j)&=C_1 z_1^{\vee}(j)+D_1 v(j)\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot6)$$

$$S_K:\left.\begin{aligned} z_2^{\vee}(j+1)&=A_2 z_2^{\vee}(j)+B_2 y(j)\\ y_2(j)&=C_2 z_2^{\vee}(j)+D_2 y(j)\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot7)$$

とする。ここで，μとνをそれぞれ$G(z_2)$と$K(z_2)$のマクミラン次数とするとき，$z_1^v(j)$はS_Gのμ次元状態ベクトル，$z_2^v(j)$はS_Kのν次元状態ベクトルである。また，A_1，B_1，C_1，D_1，A_2，B_2，C_2，D_2は適当なサイズの実行列である。

これらS_GとS_Kを用いれば(5·3)は次のように

$$S_c: \left.\begin{aligned} z^v(i,j+1) &= Fz^v(i,j)+Hy(i,j)+Gv(i,j) \\ u(i,j) &= Nz^v(i,j)+My(i,j)+Wv(i,j) \end{aligned}\right\} \tag{5·8}$$

表現できる。ただし，iは任意の非負整数であり，

$$z^v(i,j) \triangleq \begin{bmatrix} z_1^v(i,j) \\ z_2^v(i,j) \end{bmatrix},\quad F \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\quad H \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix},\quad G \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N \triangleq [C_1\ \ C_2],\quad M \triangleq D_2,\quad W \triangleq D_1$$

である。すなわち，$S_c(F,\ H,\ G,\ N,\ M,\ W)_{\mu+\nu}$はシステム(5·1)に対する1次元動的補償器である。特に，$G(z_2)$と$K(z_2)$が定係数のとき$S_c(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ M,\ W)_{0+0}$は

$$u(i,j)=My(i,j)+W\cdot v(i,j) \tag{5·9}$$

と書け，Paraskevopoulos らの扱った出力フィードバックに一致する[5·5]。図5·2はここでの動的償器をシステム (5·1)に組み込んだときのブロック図である。

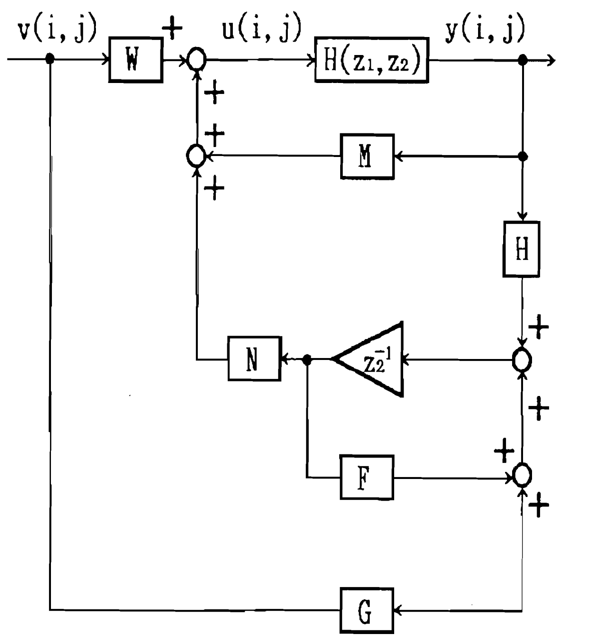

Fig.5·2 Block diagram of the closed-loop system with the controller

5・3 問題の展開

いま，システム(5·1)の分子と分母を

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} z_1^i z_2^j = \sum_{i=0}^{n} a_i[z_2] z_1^i$$

$$a_i[z_2] \triangleq \sum_{j=0}^{m} a_{ij} z_2^j \qquad i=1,2,\cdots,n$$

および

$$\sum_{i=0}^{\bar{n}}\sum_{j=0}^{\bar{m}} N_{ij} z_1^i z_2^j = \sum_{i=0}^{\bar{n}} N_i[z_2] z_1^i$$

$$N_i[z_2] \triangleq \sum_{j=0}^{\bar{m}} N_{ij} z_2^j \qquad i=1,2,\cdots,\bar{n}$$

と書き直せば(5·1)は次のように

$$S: H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{i=0}^{\bar{n}} M_i(z_2) z_1^i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(z_2) z_1^i} \triangleq \frac{M(z_2)[z_1]}{\alpha(z_2)[z_1]} \tag{5·10}$$

表現できる。ただし,

$$\alpha_i(z_2) \triangleq \frac{a_i[z_2]}{a_n[z_2]} \in R_{pr}(z_2) \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$M_i(z_2) \triangleq \frac{N_i[z_2]}{a_n[z_2]} \in R_{pr}(z_2)^{p\times q} \qquad i=1,2,\cdots,\bar{n}$$

である。(5·2)についても同様に

$$S: H_m(z_1, z_2) = \frac{\sum_{i=0}^{\bar{h}} \hat{M}_i(z_2) z_1^i}{\sum_{i=0}^{h} \hat{\alpha}_i(z_2) z_1^i} \triangleq \frac{\hat{M}(z_2)[z_1]}{\hat{\alpha}(z_2)[z_1]} \tag{5·11}$$

と表現する。ただし,

$$\hat{\alpha}_i(z_2) \triangleq \frac{\hat{a}_i[z_2]}{\hat{a}_h[z_2]} \in R_{pr}(z_2) \qquad i=1,2,\cdots,h$$

$$\hat{M}_i(z_2) \triangleq \frac{\hat{N}_i[z_2]}{\hat{a}_h[z_2]} \in R_{pr}(z_2)^{p \times s} \qquad i=1,2,\cdots,\bar{h}$$

である。

(5·10)あるいは(5·11)は2次元システムをプロパーな有理関数を係数として持つ1次元システムで表現したものである。なお，プロパーな有理関数は部分環であって，かつ，Principai Ideal Domain (P.I.D) である(5·11)。すなわち，以下の議論は2次元システムに限らず，P.I.D 上で定義されるような1次元システム，例えば，中立型 Delay Differential システム，あるいは時間遅れシステムなど(5·11)，に対しても可能である。

さて，(5·5)の左辺を(5·4)とし，これに(5·10)と(5·11)を代入すれば次式

$$\hat{\alpha}(z_2)[z_1]M(z_2)[z_1]G(z_2)+M(z_2)[z_1]K(z_2)\hat{M}(z_2)[z_1]$$

$$=\alpha(z_2)[z_1]\hat{M}(z_2)[z_1] \qquad (5\cdot12)$$

が得られる。この式はプロパーな有理関数を係数とするz_1の多項式行列に関する恒等式であるから，これが成り立つためには両辺のz_1の同一べきの係数が等しいことが必要十分である。 以下，この関係を用いて，(5·5)を満たす$G(z_2)$と$K(z_2)$を求めることを考える。

まず，クロネッカ積を導入して(5·12)を次のように

$$\Lambda(z_2)[z_1]g(z_2)+\Gamma(z_2)[z_1]k(z_2)=r(z_2)[z_1] \qquad (5\cdot13)$$

展開する(5·4)。 ただし，

$$\Lambda(z_2)[z_1]=I_s\otimes\hat{\alpha}(z_2)[z_1]M(z_2)[z_1]\in R(z_2)[z_1]^{ps\times qs}$$

$$\Gamma(z_2)[z_1]=\hat{M}^T(z_2)[z_1]\otimes M(z_2)[z_1]\in R(z_2)[z_1]^{ps\times pq}$$

$$r(z_2)[z_1]=\alpha(z_2)[z_1]\{cs.\hat{M}(z_2)[z_1]\}\in R(z_2)[z_1]^{ps\times 1}$$

$$g(z_2)=cs.G(z_2)\in R_{pr}(z_2)^{qs\times 1}$$

$$k(z_2)=cs.K(z_2)\in R_{pr}(z_2)^{pq\times 1}$$

である。続いて，(5·13)を

$$[\sum_{i=0}^{\bar{n}+h}\Lambda_i(z_2)z_1^i]g(z_2)+[\sum_{i=0}^{\bar{n}+\bar{h}}\Gamma_i(z_2)z_1^i]k(z_2)=\sum_{i=0}^{n+\bar{h}}r_i(z_2)z_1^i \tag{5·14}$$

と表現し,

$$\tau=\max\{\bar{n}+h,\bar{n}+\bar{h},n+\bar{h}\}$$

を定義する。このとき,

$$\Lambda_i(z_2)=0 \qquad i=\bar{n}+h+1,\ \bar{n}+h+2,\ \cdots,\ \tau$$

$$\Gamma_i(z_2)=0 \qquad i=\bar{n}+\bar{h}+1,\ \bar{n}+\bar{h}+2,\ \cdots,\ \tau$$

$$r_i(z_2)=0 \qquad i=n+\bar{h}+1,\ n+\bar{h}+2,\ \cdots,\ \tau$$

と置けば,(5·14)の両辺におけるz_1の同一べきの係数が等しいことから

$$\Lambda_i(z_2)g(z_2)+\Gamma_i(z_2)k(z_2)=r_i(z_2) \qquad i=0,1,\cdots,\tau \tag{5·15}$$

が得られ,これは

$$P(z_2)x(z_2)=h(z_2) \tag{5·16}$$

と置き換えることができる。ただし,

$$P(z_2)=\begin{bmatrix}\Lambda_0(z_2) & \vdots & \Gamma_0(z_2)\\ \Lambda_1(z_2) & \vdots & \Gamma_1(z_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Lambda_\tau(z_2) & \vdots & \Gamma_\tau(z_2)\end{bmatrix},\quad x(z_2)=\begin{bmatrix}g(z_2)\\ \cdots\cdots\\ k(z_2)\end{bmatrix},\qquad h(z_2)=\begin{bmatrix}r_0(z_2)\\ r_1(z_2)\\ \vdots\\ r_\tau(z_2)\end{bmatrix}$$

である。 なお,$\Lambda_i(z_2)$,$\Gamma_i(z_2)$および $r_i(z_2)$の具体的な計算法については付録- B 2 を参照されたい。

(5·16)における$P(z_2)$と$h(z_2)$は$\alpha_i(z_2)$,$M_i(z_2)$,$\hat{\alpha}_i(z_2)$および$\hat{M}_i(z_2)$から作られる既知なるプロパーな有理関数行列であり,$x(z_2)$は$G(z_2)$と$K(z_2)$の列展開からなる未知の有理関数ベクトルである。したがって,ここでの問題は与えられた二つの1次元伝達行列$P(z_2)$と$h(z_2)$に対して方程式(5·16)をみたすプロパーな有理関数ベクトル解 $x(z_2)$を求める問題に帰着される。この問題は1次元システムにおけるモデル適合問題,逆システムの構成などを周波数領域で設計する問題としても知られている[(5·12), (5·13)]。

5・4　解の存在性と導出

いま$P(z_2)$および$h(z_2)$における要素の最小公倍分母多項式を$\sigma[z_2]$とし，これを(5・16)の両辺に掛ければ(5・16)はz_2の多項式を係数とする方程式

$$Q[z_2]x(z_2)=t[z_2] \tag{5・17}$$

に書換えられる。ただし，$Q[z_2]\triangleq\sigma[z_2]P(z_2)$は$(\tau+1)ps\times(qs+pq)$の多項式行列，$t[z_2]\triangleq\sigma[z_2]h(z_2)$は$(\tau+1)ps$次元多項式ベクトルである。

以下，方程式(5・17)に対するプロパーな有理解の存在性について考察する。

【定義 5・1】(5・12) $n\times m$の多項式行列 $Q[z_2]$の第i行ベクトルを $q_i^T[z_2]$とする。このとき，$q_i^T[z_2]$の要素を構成する多項式の最高次数υ_iを $Q[z_2]$の第i行次数と呼び，$\deg q_i^T[z_2]$と記す。次に，$q_i^T[z_2]$における第j要素の$z_2^{\upsilon_i}$の係数$\{q_{ij}\}$を要素とするm次元行ベクトル q_i^Tを構成する。この q_i^Tを行ベクトルとする$n\times m$の実行列$Q=[q_1\ q_2\cdots q_n]^T$が最大階数を持つならば，多項式行列$Q[z_2]$は行プロパーであるという。

【補題 5・1】(5・13)　行次数 $\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n$ なる行プロパーな$n\times n$の多項式行列を$Q[z_2]$とし，n次列ベクトル $t[z_2]$の行次数を$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$とする。このとき，$\gamma_i\leqq\upsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$ ならば，かつ，このときのみ$Q[z_2]^{-1}\cdot t[z_2]$ はプロパーな有理関数ベクトルとなる。

【補題 5・2】(5・13) $n\times m$の多項式行列$Q[z_2]$が$\mathbb{R}(z_2)$上において $\operatorname{rank} Q[z_2]=\rho$とする。このとき，$Q[z_2]$を

$$U[z_2]Q[z_2]=\begin{array}{c}\leftarrow m\rightarrow\\ \begin{bmatrix} Q_1[z_2] \\ 0 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\updownarrow\rho\\ \\ \end{array}$$

と変換するような，$n\times n$ のユニモデュラー行列 $U[z_2]$が存在する。ここで，多項式行列 $Q_1[z_2]$は行プロパーであり，その行次数は$\upsilon_1\geqq\upsilon_2\geqq\cdots\geqq\upsilon_\rho$ の関係を満たす。

さて，よく知られているように，(5・17)が解を持つためには，体$\mathbb{R}(z_2)$上で

$$\mathrm{rank}[Q[z_2]]=\mathrm{rank}\ [Q[z_2] \vdots t[z_2]]$$

が満たされねばならない。また，解がプロパーであるためには，補題 5·1より $\deg q_i^T[z_2] \geqq \deg t_i[z_2]$でなくてはならない。

これらのことを考慮すれば，次の定理が得られる。

【補題 5·3】[5·13] (5·17)の$Q[z_2]$と$t[z_2]$が適当なユニモデュラー行列によって

$$U[z_2]Q[z_2]=\begin{bmatrix} Q_1[z_2] \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U[z_2]t[z_2]=\begin{bmatrix} t_1[z_2] \\ t_2[z_2] \end{bmatrix} \tag{5·18}$$

と変形されているものとする。このとき，方程式(5·17)がプロパーな有理関数を解として持つための必要十分条件は

$$\begin{aligned} &\text{i）}\quad t_2[z_2]=0 \\ &\text{ii）}\quad \upsilon_i \geqq \gamma_i \quad i=1,2,\cdots,\rho \end{aligned} \tag{5·19}$$

で与えられる。ただし，$\rho=\mathrm{rank}\ Q[z_2]$であり，$\upsilon_i$と$\gamma_i$ はそれぞれ $Q_1[z_2]$と$t_1[z_2]$の行次数である。

補題 5·3 は次のようにも表現できる。

【系 5·1】[5·13] 方程式(5·17)がプロパーな有理関数解$x(z_2)$を持つための必要十分条件は

$$\text{i）}\ \mathrm{rank}\ Q[z_2]=\mathrm{rank}\ [Q[z_2] \vdots t[z_2]] \tag{5·20}$$

$$\text{ii）}\ \deg q_i^T[z_2]=\deg [q_i^T[z_2] \vdots t_i[z_2]] \quad i=1,2,\cdots,(\tau+1)ps \tag{5·21}$$

で与えられる。ただし，$q_i^T[z_2]$は$Q[z_2]$の第 i 行である。

結局，補題5·3が満たされるとき(5·17)の解は

$$Q_1[z_2]x(z_2)=t_1[z_2] \tag{5·22}$$

の解として求められる。

以下，(5·22)の解について考察を進める。

一般に$\mathrm{rank}\ Q_1[z_2]=\rho \leqq qs+pq$ であるから，$Q_1[z_2]$を次のように分割する列変換行列 L が存在する。

$$Q_1[z_2]L=[Q_{11}[z_2] \vdots Q_{12}[z_2]] \tag{5·23}$$

ここで，$Q_{11}[z_2]$は$\rho\times\rho$の行プロパーな行列であり，その行次数は$Q_1[z_2]$の行次数υ_iと一致する。また，$Q_{12}[z_2]$の行次数をη_iとすれば

$$\upsilon_i \geqq \eta_i \quad i=1,2,\cdots,\rho \tag{5·24}$$

の関係が満たされている。

いま，(5·23)のLを用いて (5·22)を

$$[Q_{11}[z_2] \vdots Q_{12}[z_2]] \begin{bmatrix} x_1(z_2) \\ x_2(z_2) \end{bmatrix} = t_1[z_2]$$

と変形する。ただし，

$$L^{-1}x(z_2) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(z_2) \\ x_2(z_2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \rho \\ \updownarrow qs+pq-\rho \end{matrix}$$

である。このとき，(5·22)の解は任意に選ぶことができる$qs+pq-\rho$個の解$x_2(z_2)$と，それに従属するρ個の解

$$x_1(z_2)=Q_{11}^{-1}[z_2](t_1[z_2]-Q_{12}[z_2]x_2(z_2))$$

に分割されることがわかる。 この解 $x_1(z_2)$は補題 5·1からプロパーであること注意されたい。

また，$\rho=qs+pq$のとき，つまり，$Q_1[z_2]$が正方であるとき(5·22)は一意解

$$x_1(z_2)=Q_1^{-1}[z_2]t_1[z_2]$$

を持つことも明らかである。

さらに，$R[z_2]^{\rho\times 1}$ を体R上のベクトル空間$V(R)$とみるとき，$t_1[z_2]\in V(R)$が$Q_1[z_2]$の列ベクトル$q_i[z_2]\in V(R)$によって張られるとき，かつ，このときのみ(5·17)の実数解が存在することがわかる。

以上をまとめれば次の定理となる。

【定理 5】 (5·1)の２次元システム $H(z_1,z_2)$を(5·2)のモデル $H_m(z_1,z_2)$に一致させるような(5·8)の１次元動的補償器 $S_c(F, H, G, N, M, W)_{\mu+\nu}$が存在するための必要十分条件は，(5·17)から構成される行列，$Q[z_2]$と$[Q[z_2] \vdots$

$t[z_2]]$の階数と行次数がいずれも等しいことである。

この定理において$Q[z_2]$と$[Q[z_2] \vdots t[z_2]]$の階数が$R(z_2)$上において等しいためにはτの定義と(5・16)の構造から被対象システム$H(z_1, z_2)$とモデル $H_m(z_1, z_2)$の間には$h-\bar{h} \geqq n-\bar{n}$あるいは$\bar{n} \geqq n$の関係が満たされなくてはならないことに注意されたい。

【系 5・2】 定理5が満たされるとき，(5・3)の前向き補償器 $G(z_2)$とフィードバック補償器 $K(z_2)$は

$$\begin{bmatrix} cs.G(z_2) \\ cs.K(z_2) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1}[z_2](t_1[z_2] - Q_{12}[z_2]x_2(z_2)) \\ x_2(z_2) \end{bmatrix}$$

で与えられる。ただし，$x_2(z_2)$は任意に選ぶことのできる有理関数ベクトルであり，Lは $Q_1[z_2]$を(5・23)のように分割する適当な列変換行列である。

【系 5・3】 (5・1)の2次元システム$H(z_1, z_2)$を(5・2)のモデル $H_m(z_1, z_2)$に一致させるような(5・9) の出力フィードバック則が設計できるための必要十分条件は，(5・17)における$Q[z_2]$を体R上のベクトル空間$W(R)$ ($\dim W(R)=qs+pq$) から$V(R)$ ($\dim V(R)=\rho$) への線形写像とみなすとき，

$$t[z_2] \in \text{Range}\ \{Q[z_2]\}$$

で与えられる。

系 5・3は静的出力フィードバックによってモデル適合問題が解けるための条件を与えた文献(5・5)での結果に相当している。

ここまでの議論は被対象システム(5・1)の入力を

$$U(z_1, z_2) = G(z_1)V(z_1, z_2) + K(z_1)Y(z_1, z_2)$$

で指定しても同様に展開できる((5・3)参照)。 すなわち，5・3 節以降におけるz_1とz_2を置き換え，かつ，非負整数の組$(\bar{n}, n, \bar{h}, h)$と$(\bar{m}, m, \bar{k}, k)$をそれぞれ置き換えれば，まったく同様にして，上記の定理5と系 5・2および系 5・3に相当する結果が導かれる。このとき，定理5と系 5・2に相当する結果はここで

のモデル適合問題が解けるためのもう一つの条件とその解を与える。また，系5·3 に相当する結果はその系に対する別の表現となる。

5・5 結　　言

２次元伝達関数行列で記述される多入力多出力の２次元システムを対象とし，２次元モデル適合問題を考察した。ここでは，１次元動的補償器が閉ループシステムの伝達行列を所望のモデルと一致させるために導入された。このとき，１次元動的補償器の設計問題は１変数の有理関数を係数とするような連立方程式におけるプロパーな有理関数解を求める問題と等価になることを示した。この問題は１次元システムにおけるモデル適合問題，あるいは逆システム構成問題などの周波数領域での設計問題として知られており，これらの結果から本動的補償器が設計できるための必要十分条件を導いた。この１次元動的補償器は二種類の遅れ素子から構成される２次元動的補償器に比べて構造が簡単であり，設計は容易である。また，必要な遅れ素子は一種類のみであり経済的である。さらに，ここでの設計法は，特別な場合として，出力フィードバックによる２次元モデル適合問題の解法を与えており Paraskevopoulos の方法に比べて計算量が軽減できる。

なお，本動的補償器の次数は(5·17)を満たす解 $x(z_2)$のマクミラン次数によって決定されるが，マクミラン次数最小の求解法については文献(5·14)などを参照されたい。また，ここでの動的補償器の設計には幾分自由度があたえられており，これを安定度などの補償器の特性改善に利用することが考えられ，今後の研究課題である。

第6章　2次元逆システムの構成

6・1　緒　言

逆システムとはシステムの出力を観測することによって，その入力を再構成するシステムのことである。一方，見方を変えるならば，逆システムの構成問題は，適当なフィードバック則を設計することによって，閉ループシステムの伝達行列を単位行列にする問題と考えることもできる。これは前章におけるモデル適合問題において，所望のモデルを $H_m(z_1, z_2) = I_p$ とした，特別な場合に相当する。

さて，2次元システムを対象とした逆システムの研究は最初に Eising によって報告された[6・1]。すなわち，因果的システムを拡張した弱因果的システムの概念を Eising は提唱し，スカラ入出力の因果的2次元システムには弱因果的逆システムが常に存在することを証明した。弱因果的システムは，そのインパルス応答が実平面内の第1象現を含む非対称半平面内で定義される2次元システムで，これは巡回形局所状態空間モデルで表すことができる。その後，Raina[6・2]はこれを多入出力を持つ場合に拡張して取り扱っているが，これらはいずれも伝達関数あるいは伝達行列で記述されるシステムを対象に議論している。2次元逆システムを状態空間モデルの立場で扱った研究[6・3]もあるが，これは Attasi 型局所状態空間モデルに対して固有遅れを持つ因果的逆システムが存在するための必要十分条件と，その構成法を与えたものであり，対象とされた Attasi 型モデルは Fornasini－Marchsini のモデルあるいは Roesser のモデルのサブシステムとして取り扱えるなど，2次元システムに対する一般的な局所状態空間モデルとは言えない。これは，そこで得られている逆システムがもはや Attasi 型でないことからもいえる。

ここでは因果的2次元システムに対する局所状態空間モデルである Roesser

の状態空間モデルを取り上げ，これに対する固有遅れ逆システムの構成法について考察する[6・4], [6・5]。 すなわち，Eising が提案した弱因果的２次元システムを，係数行列が１変数の有理関数である１次元動的システムとして取り扱う方法を述べる。 そして，Eising が２次元伝達関数の立場で扱った因果的２次元システムに対する固有遅れ弱因果的逆システムは，１次元システムの立場で一般的に議論できることを示す。本方法の特徴は，（ i ）２次元逆システムの構成に１次元システムにおける理論が利用できる，（ ii ）弱因果的逆システムが局所状態空間モデルの立場で比較的容易に得られる，ことである。

なお， Raina による P.I.D 上の１次元動的システムに対する固有遅れ逆システムの存在条件[6・6]は， ここでの特別な場合であるM遅れ逆システムの存在条件に相当する。

6・2　被対象システムの記述

Roesser の状態空間モデルで記述される次の２次元システムを考える。

$$
S:\quad
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\
&y(i,j) = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + d\cdot u(i,j) \qquad i,j \geqq 0 \qquad (6\cdot1)
\end{aligned}
$$

$$
x^h(0,j)=0, \quad x^v(i,0)=0 \qquad i,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots
$$

(6·1)は簡単に

$$
\begin{aligned}
\partial x(i,j) &= Ax(i,j) + bu(i,j) \\
y(i,j) &= cx(i,j) + du(i,j)
\end{aligned}
$$

あるいは$S(A,\ b,\ c,\ d)_{n+m}$と書かれる場合がある。ただし，$x^h(i,j)$は， n 次元水平状態ベクトル，$x^v(i,j)$は m 次元垂直状態ベクトル，$u(i,j)$と $y(i,j)$はスカラの入力と出力であり， A, b, c, d はそれぞれ適当なサイズの実行列，あるいは実数である。

$S(A,\ b,\ c,\ d)_{n+m}$の伝達関数は

$$H_0(z_1, z_2)=c[\mathrm{diag}\ \{z_1 I_n, z_2 I_m\}-A]^{-1}b+d \tag{6·2}$$

で与えられる。さらに，

$$\tilde{A}(z_2) \triangleq A_{11}+A_{12}[z_2 I_m-A_{22}]^{-1}A_{21} \in \mathbf{R}_{pr}(z_2)^{n\times n}$$

$$\tilde{b}(z_2) \triangleq b_1+A_{12}[z_2 I_m-A_{22}]^{-1}b_2 \in \mathbf{R}_{pr}(z_2)^{n\times 1}$$

$$\tilde{c}(z_2) \triangleq c_1+c_2[z_2 I_m-A_{22}]^{-1}A_{21} \in \mathbf{R}_{pr}(z_2)^{1\times n}$$

$$\tilde{d}(z_2) \triangleq d+c_2[z_2 I_m-A_{22}]^{-1}b_2 \in \mathbf{R}_{pr}(z_2)$$

と置けば，(6·2)は

$$H_0(z_1, z_2)=\tilde{c}(z_2)[z_1 I_n-\tilde{A}(z_2)]^{-1}\tilde{b}(z_2)+\tilde{d}(z_2) \tag{6·3}$$

と表現できる。これは$S(A,\ b,\ c,\ d)_{n+m}$と伝達関数が等しい次の１次元システム$\tilde{S}_0(\tilde{A}(z_2),\ \tilde{b}(z_2),\ \tilde{c}(z_2),\ \tilde{d}(z))_n$

$$\tilde{S}_0:\begin{array}{l}\tilde{x}(i+1, z_2)=\tilde{A}(z_2)\tilde{x}(i, z_2)+\tilde{b}(z_2)u(i, z_2)\\ y(i, z_2)=\tilde{c}(z_2)\tilde{x}(i, z_2)+\tilde{d}(z_2)u(i, z_2)\end{array} \tag{6·4}$$

が存在することを意味している。ただし，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対して

$$\tilde{x}(i, z_2)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{x}_{ij}z_2^{-j}$$

$$u(i, z_2)=\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}z_2^{-j}$$

$$y(i, z_2)=\sum_{j=0}^{\infty}y_{ij}z_2^{-j}$$

である。$\tilde{S}_0(\tilde{A}(z_2),\ \tilde{b}(z_2),\ \tilde{c}(z_2),\ \tilde{d}(z_2))_n$ は２次元システム$S(A,\ b,\ c,\ d)_{n+m}$ を係数行列の要素がプロパーな有理関数からなる１次元システムで表現したものである。

さて，$\tilde{S}_0$のインパルス応等系列$\{h_i(z_2)\}$は

$$\begin{array}{l}h_0(z_2)=\tilde{d}(z_2)=\sum_{j=0}^{\infty}h_{0j}z_2^{-j}\\ h_i(z_2)=\tilde{c}(z_2)\tilde{A}^{i-1}(z_2)\tilde{b}(z_2)=\sum_{j=0}^{\infty}h_{ij}z_2^{-j}\quad i=1, 2, \cdots\end{array} \tag{6·5}$$

で与えられるから，(6·3)はインパルス応答の立場で次のように書ける。

$$H_0(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{\infty} h_i(z_2)z_1^{-i}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_{ij}z_1^{-i}z_2^{-j} \tag{6·6}$$

無限系列 $\{h_{ij}\}$ は２次元インパルス応答と呼ばれ，サポート

$$S_{H0}=\{(i,j)\,|\,(i,j)\in Z^2,\ h_{ij}\neq 0\}$$

を定義したとき，これはR^2平面の第１象現H_0に存在している。

以下，(6·4)の１次元システム $\tilde{S}_0(A(z_2),\ \tilde{b}(z_2),\ \tilde{c}(z_2),\ \tilde{d}(z_2))_n$を因果的システムと呼ぶ。 すべての因果的システムは(6·1)の局所状態空間モデルで記述できる[6·7]。

【定義 6·1】 ある可逆行列 $T(z_2)\in R(z_2)^{n\times n}$が存在して，$S_0(A(z_2),\ b(z_2),\ c(z_2),\ d(z_2))_n$ と $\tilde{S}_0(\tilde{A}(z_2),\ \tilde{b}(z_2),\ \tilde{c}(z_2),\ \tilde{d}(z_2))_n$の間に

$$A(z_2)=T(z_2)\tilde{A}(z_2)T^{-1}(z_2),\qquad b(z_2)=T(z_2)\tilde{b}(z_2)$$

$$c(z_2)=\tilde{c}(z_2)T^{-1}(z_2),\qquad d(z_2)=\tilde{d}(z_2)$$

の関係があるとき，S_0と$\tilde{S}_0$は$R(z_2)$上において代数的等価であるという。

$R(z_2)$上において代数的に等価なシステムの伝達関数は等しいことに注意されたい。

さて，$\tilde{S}_0$は$R(z_2)$上において可到達，すなわち，

$$\mathrm{rank}\ [\tilde{b}(z_2),\tilde{A}(z_2)\tilde{b}(z_2),\cdots,\tilde{A}^{n-1}(z_2)\tilde{b}(z_2)]=n$$

であると仮定しても一般性は失われない[6·8]から，可逆行列

$$T(z_2)\triangleq[\tilde{b}(z_2),\tilde{A}(z_2)\tilde{b}(z_2),\cdots,\tilde{A}^{n-1}(z_2)\tilde{b}(z_2)]^{-1}$$

を構成することができ， これを用いれば$\tilde{S}_0$と$R(z_2)$上で代数的に等価な因果的システムS_0

$$S_0:\begin{array}{l} x(i+1,z_2)=A(z_2)x(i,z_2)+b(z_2)u(i,z_2) \\ y(i,z_2)=c(z_2)x(i,z_2)+d(z_2)u(i,z_2)\end{array} \tag{6·7}$$

が得られる。ただし，

$$A(z_2)=T(z_2)\tilde{A}(z_2)T^{-1}(z_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n(z_2) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1(z_2) \end{bmatrix}$$

$$b(z_2)=T(z_2)\tilde{b}(z_2)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c(z_2)=\tilde{c}(z_2)T^{-1}(z_2)\triangleq[c_1(z_2), c_2(z_2), \cdots, c_n(z_2)]$$

$$d(z_2)=\tilde{d}(z_2)$$

であり，$a_i(z_2)$および $c_i(z_2)$ ($i=1,2,\cdots,n$) は次式

$$\det\ [z_1I_n-\tilde{A}(z_2)]=z_1^n+a_1(z_2)z_1^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(z_2)z_1+a_n(z_2)$$

$$c_i(z_2)=\tilde{c}(z_2)\tilde{A}^{i-1}(z_2)\tilde{b}(z_2)$$

をそれぞれ満たす$R_{pr}(z_2)$の元である。

(6·7)の構造から，$c(z_2)$の要素 $c_i(z_2)$が$\widetilde{S}_0$のインパルス応答系列 $h_i(z_2)$($i=1,2,\cdots,n$) に相当していることに注意されたい。

この章の目的は，因果的２次元システムＳ$(A,\ b,\ c,\ d)_{n+m}$を(6·7)で記述される１次元システム$S_0(A(z_2),\ b,\ c(z_2),\ d(z_2))_n$の立場で扱い，因果的２次元システムＳに対する逆システムを構成することである。

６・３　Ｍ遅れ因果的逆システムの構成

ここでは，因果的システム$S_0(A(z_2),\ b,\ c(z_2),\ d(z_2))_n$に対して固有遅れを持つ，因果的逆システムについて考察する。 これは(6·1)の立場で言えば，水平方向のみ遅れを持つような因果的２次元逆システムに相当する。

【定義 6·2】　因果的システム$S_0(A(z_2),\ b,\ c(z_2),\ d(z_2))_n$に対して

$$\hat{H}_0(z_1,z_2)\cdot H_0(z_1,z_2)=\frac{1}{z_1^M} \qquad M\in \mathbf{Z}_+ \tag{6·8}$$

を満たす因果的システム$\hat{S}_0(\hat{A}(z_2)$, $\hat{b}(z_2)$, $\hat{c}(z_2)$, $\hat{d}(z_2))_n$が存在するとき$\hat{S}_0$をS_0に対するM遅れ因果的逆システムという。

いま，S_0において

$$\left.\begin{aligned} &d(z_2)=0 \\ &c_i(z_2)=c(z_2)A^{i-1}(z_2)b=0 \qquad i=1,2,\cdots,M-1 \\ &c_M(z_2)=c(z_2)A^{M-1}(z_2)b\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{6·9}$$

を仮定する。このとき，(6·5)と(6·6)により次の因果的システムS_Mの伝達関数は $z_1^M\cdot H_0(z_1,z_2)$ に一致することがわかる。

$$S_M:\begin{aligned} &x(i+1,z_2)=A(z_2)x(i,z_2)+b\,v(i,z_2) && (6·10·1) \\ &w(i,z_2)=c_M(z_2)x(i,z_2)+d_M(z_2)v(i,z_2) && (6·10·2) \end{aligned}$$

ただし，$v(i,z_2)$と $w(i,z_2)$は，それぞれS_Mの入力と出力で，

$$c_M(z_2)=c(z_2)A^M(z_2)\triangleq[c_{M+1}(z_2),c_{M+2}(z_2),\cdots,c_{M+n}(z_2)]$$

$$c_{M+i}(z_2)=c(z_2)A^{M+i-1}(z_2)b \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$d_M(z_2)=c_M(z_2)$$

である。(6·10·2)を$v(i,z_2)$について解き，これを(6·10·1)に代入すれば

$$\hat{S}_M:\begin{aligned} &x(i+1,z_2)=\hat{A}(z_2)x(i,z_2)+\hat{b}(z_2)w(i,z_2) \\ &v(i,z_2)=\hat{c}_M(z_2)x(i,z_2)+\hat{d}_M(z_2)w(i,z_2) \end{aligned} \tag{6·11}$$

を得る。ただし，

$$\hat{A}(z_2)\triangleq A(z_2)-d_M^{-1}(z_2)b\cdot c_M(z_2)$$

$$\hat{b}(z_2)\triangleq d_M^{-1}(z_2)b$$

$$\hat{c}_M(z_2)\triangleq -d_M^{-1}(z_2)c_M(z_2)$$

$$\hat{d}_M(z_2)\triangleq d_M^{-1}(z_2)$$

と置いた。

$\hat{S}_M$の伝達関数は$\hat{H}_0(z_1,z_2)$は

$$\hat{H}_0(z_1, z_2) = \hat{c}_M(z_2)[z_1 I_n - \hat{A}(z_2)]^{-1}\hat{b}(z_2) + \hat{d}_M(z_2)$$

であるから，Ｓの伝達関数$z_1^M \cdot H_0(z_1, z_2)$との間には逆行列の恒等式の関係から

$$\hat{H}_0(z_1, z_2) \cdot z_1^M H_0(z_1, z_2) = 1$$

が成立している。すなわち，$\hat{H}_0(z_1, z_2)$と $H_0(z_1, z_2)$の間には(6･8)の関係が満たされている。

一方，(6･11)より$\hat{S}_M$が因果的であるためには$d_M^{-1}(z_2) \in \mathbb{R}_{pr}(z_2)$であることが必要十分である。これは$d_M(z_2)$が$\in \mathbb{R}_{pr}(z_2)$上における可逆元であることを意味し，この可逆元は双プロパーと呼ばれる[6･9]。

以上より次の定理を得る。

【定理 6･1】 (6･9) を満たす因果的システム$S_0(A(z_2),\ b,\ c(z_2))_n$に対して，M遅れ因果的逆システムが存在するための必要十分条件は，$c_M(z_2)$が双プロパー($\mathbb{R}_{pr}(z_2)$上の可逆元)となることである。このとき，M遅れ因果的逆システム$\hat{S}_0(\hat{A}(z_2),\ \hat{b}(z_2),\ \hat{c}_M(z_2),\ \hat{d}_M(z_2))_n$は(6･11)で与えられる。

この定理は文献（6･6）の定理 2.3 から得られる結果と一致する。

6・4　MN遅れ弱因果的逆システムの構成

因果的システム$S_M(A(z_2),\ b,\ c_M(z_2),\ d_M(z_2))_n$ における $d_M(z_2)$は双プロパーとは限らない。この場合，因果的逆システムは存在しない。そこで，因果的システムを含む次のシステムを考える。

$$S_q: \begin{array}{l} x(i+1, z_2) = z_2^q A(z_2) x(i, z_2) + z_2^q b(z_2) u(i, z_2) \\ y(i, z_2) = c(z_2) x(i, z_2) + d(z_2) u(i, z_2) \end{array} \qquad (6\cdot12)$$

ただし，$q \geqq \mathbf{Z}_+$であり，$A(z_2)$，$b(z_2)$，$c(z_2)$，$d(z_2)$は(6･7)と同様に与えられる。また，$i = 0, 1, 2, \cdots$に対して

$$x(i, z_2) = \sum_{j=-qi}^{\infty} x_{ij} z_2^{-j}$$

$$u(i, z_2)=\sum_{j=-qi}^{\infty} u_{ij} z_2^{-j}$$

$$y(i, z_2)=\sum_{j=-qi}^{\infty} y_{ij} z_2^{-j}$$

である。

S_qの伝達関数 $H_q(z_1, z_2)$は

$$H_q(z_1, z_2)=c(z_2)[z_1 z_2^{-q} I_n - A(z_2)]^{-1} b(z_2)+d(z_2) \tag{6·13}$$

で与えられ， これをS_qのインパルス応答系列 $\{h_i(z_2)\}$ を用いて表せば，次式となる。

$$H_q(z_1, z_2)=\sum_{j=0}^{\infty} h_i(z_2) z_1^{-j}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-qi}^{\infty} h_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j} \tag{6·14}$$

ただし，

$$h_0(z_2)=d(z_2)=\sum_{j=0}^{\infty} h_{0j} z_2^{-j}$$

$$h_i(z_2)=z_2^{qi} c(z_2) A^{i-1}(z_2) b(z_2)=\sum_{j=-qi}^{\infty} h_{ij} z_2^{-j} \quad i=1, 2, \cdots$$

このとき，２次元インパルス応答 $\{h_{ij}\}$ のサポートS_{Hq}は因果的コーン*

$$H_q=\{(x, y) \mid (x, y)\in \mathbb{R}^2, x\geqq 0,\ y\geqq -qx\}$$

内に存在していることがわかる。インパルス応答が因果的コーン内で定義される２次元システムは一般に弱因果的システムと呼ばれる(6·1)が， ここでは係数行列の要素が$\mathbb{R}(z_2)$の元からなる(6·12)の１次元システム$S_q(z_2^q A(z_2),\ z_2^q b(z_2),\ c(z_2),\ d(z_2))_n$を取り扱い，これを弱因果的システムと呼ぶ。

すべての弱因果的システムS_qは次式

$$H_0(s_1, s_2)=H_q(z_1, z_2)\Big|_{z_1=s_1 s_2^q,\ z_2=s_2}$$

---

* 因果的コーンは二つの半平面

$$H_{pr}=\{(x, y) \mid (x, y)\in \mathbb{R}, px+ry\geqq 0\}$$

$$H_{qt}=\{(x, y) \mid (x, y)\in \mathbb{R}, qx+ty\geqq 0\}$$

の積集合で定義される。ここで，p, r, q, t は qr-pt=-1を満たす$\mathbb{Z}_+$の元である。(6·1)

$$=c(s_2)[s_1 I_n - A(s_2)]^{-1} b(s_2) + d(s_2) \qquad (6\cdot15)$$

によって因果的システム$S_0(A(s_2),\ b(s_2),\ c(s_2),\ d(s_2))_n$に変換でき，これが(6·1)で表現できることから，(6·15)の逆変換

$$H_q(z_1,z_2)=H_0(s_1,s_2)\Big|_{s_1=z_1 z_2^{-q},\ s_2=z_2}$$

$$=c(z_2)[z_1 z_2^{-q} I_n - A(z_2)]^{-1} b(z_2) + d(z_2) \qquad (6\cdot16)$$

を考慮すれば，次の局所状態空間モデル[(6·1)]

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j-q) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(i, j)$$

S_w:

$$y(i, j) = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + d\cdot u(i, j) \qquad (6\cdot17)$$

$$i \geqq 0,\quad qi + j \geqq 0$$

で記述できる。 ただし，

$$x^h(0, j) = 0,\qquad x^v(i, -qi) = 0 \qquad\qquad i, j = 0, 1, 2, \cdots$$

である。 このモデルの特徴は(i, j)地点における局所状態が回帰的に得られることである。

【定義 6·3】　因果的システム$S_0(A(z_2),\ b,\ c(z_2),\ d(z_2))_n$に対して

$$\hat{H}_q(z_1,z_2)\cdot H_0(z_1,z_2) = \frac{1}{z_1^M z_2^N} \qquad (M, N) \in \mathbf{Z}_+^2 \qquad (6\cdot18)$$

を満たす弱因果的システム$\hat{S}_q(z_2^q \hat{A}(z_2),\ z_2^q \hat{b}(z_2),\ \hat{c}(z_2),\ \hat{d}(z_2))_n$が存在するとき，$\hat{S}_q$を$S_0$に対するMN遅れ弱因果的逆システムという。

$\hat{H}_q(z_1,z_2)$ と $H_0(z_1,z_2)$ に関するサポートおよび対 (M,N) は共に因果的コーン内に存在することに注意されたい。

さて，任意の$R(z_2)$の元$t(z_2) \triangleq q[z_2]/p[z_2]$，$q[z_2] \in \mathbf{R}[z_2]$，$p[z_2] \in \mathbf{R}[z_2]$，$p[z_2] \neq 0$ に対して次の関数

$$\delta(t(z_2)) \triangleq \deg\ p[z_2] - \deg\ q[z_2] = \tau \in \mathbf{Z} \qquad (6\cdot19)$$

を定義すれば，これは次の性質を持つ[6・9]。

$$
\begin{aligned}
&\delta(t_1(z_2)\cdot t_2(z_1))=\delta(t_1(z_2))+\delta(t_2(z_2))\\
&\delta(t_1(z_2)+t_2(z_2))\geqq\min\{\delta(t_1(z_2)),\ \delta(t_2(z_2))\}
\end{aligned}
\tag{6·20}
$$

いま，(6·10)のシステムS_Mにおいて$\delta(d_M(z_2))=N$と仮定する。このとき，S_Mの伝達関数にz_2^Nを乗じた $z_1^M z_2^N\cdot H_0(z_1,z_2)$は次式で表されるシステムの伝達関数に等しい。

$$
S_{MN}:\ \begin{aligned}
&x(i+1,z_2)=A(z_2)x(i,z_2)+bv(i,z_2)\\
&w(i,z_2)=z_2^N\cdot c_M(z_2)x(i,z_2)+z_2^N\cdot d_M(z_2)v(i,z_2)
\end{aligned}
\tag{6·21}
$$

(6·21)において，$z_2^N\cdot d_M(z_2)\in R_{pr}(z_2)$は明らかに双プロパーであるが，$z_2^N\cdot c_M(z_2)$の要素 $z_2^N\cdot c_{M+i}(z_2)$ ($i=1,2,\cdots$) はもはやプロパーとは限らない。以下，S_{MN}が弱因果的システムであることを示す。

いま，$z_2^N\cdot c_{M+i}(z_2)$に対して

$$
\delta(z_2^N\cdot c_{M+i}(z_2))=\tau_i \qquad i=1,2,\cdots,n-M \tag{6·22}
$$

とする。このとき，$c_{M+i}(z_2)=c(z_2)A^{M+i-1}(z_2)\,b$ であることから， ケーリーハミルトンの定理および(6·20)の性質より

$$
\delta(z_2^N\cdot c(z_2)A^{h-1}(z_2)b)\geqq\min\{\tau_i\,|\,i=1,2,\cdots,n-M\}
$$

$$
h=n-M+1,\ n-M+2,\cdots
$$

が導かれ，これよりすべての $i=1,2,\cdots$に対して

$$
-\bar{q}\cdot i\leqq\tau_i \tag{6·23}
$$

を満たす$\bar{q}\in \mathbf{Z}_+$が存在することがわかる。

(6·23)を満たす最少数をqとし，可逆行列

$$
T_M(z_2)\triangleq \mathrm{diag}\ \{z_2^q, z_2^{2q},\cdots,z_2^{nq}\}
$$

を構成すれば，これを用いてS_{MN}と$R(z_2)$上において代数的等価な次の弱因果的システム$\overline{S}_{MN}$が得られる。

$$
\overline{S}_{MN}:\ \begin{aligned}
&\bar{x}(i+1,z_2)=z_2^q\cdot\bar{A}(z_2)\bar{x}(i,z_2)+z_2^q\cdot\bar{b}v(i,z_2) &&(6·24·1)\\
&w(i,z_2)=\bar{c}_{MN}(z_2)\bar{x}(i,z_2)+\bar{d}_{MN}(z_2)v(i,z_2) &&(6·24·2)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$z_2^q\bar{A}(z_2)=T_M(z_2)A(z_2)T_M^{-1}(z_2)=z_2^q\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_n(z_2)\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{n-1}(z_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\bar{a}_1(z_2)\end{bmatrix}$$

$$z_2^q\bar{b}=T_M(z_2)b=z_2^q\cdot b$$

$$\bar{c}_{MN}(z_2)=z_2^N\cdot c_M(z_2)T_M^{-1}(z_2)\triangleq[\bar{c}_1(z_2),\bar{c}_2(z_2),\cdots,\bar{c}_n(z_2)]$$

$$\bar{d}_{MN}(z_2)=z_2^N\cdot d_M(z_2)$$

であり，$\bar{a}_i(z_2)$と$\bar{c}_i(z_2)$（$i=1,2,\cdots$）は次式で与えられる$R_{pr}(z_2)$の元である。

$$\bar{a}_i(z_2)=z_2^{-qi}\cdot a_i(z_2)$$

$$\bar{c}_i(z_2)=z_2^{-qi}(z_2^N\cdot c_{M+i}(z_2))$$

さて，$\overline{S}_{MN}$において$\bar{d}_{MN}(z_2)$が双プロパーであることに注意し，(6·24·2) を$v(i,j)$について解き，(6·24·1)に代入すれば次のシステム

$$\hat{S}_{MN}:\begin{aligned}\bar{x}(i+1,z_2)&=z_2^q\hat{A}(z_2)\bar{x}(i,z_2)+z_2^q\hat{b}\cdot w(i,z_2)\\ v(i,z_2)&=\hat{c}_{MN}(z_2)\bar{x}(i,z_2)+\hat{d}_{MN}(z_2)\cdot w(i,z_2)\end{aligned}\qquad(6\cdot25)$$

が得られ，これは弱因果的システムであることがわかる。ただし，

$$\hat{A}(z_2)\triangleq\bar{A}(z_2)-\bar{d}_{MN}^{-1}(z_2)\,\bar{b}\,\bar{c}_{MN}(z_2)$$

$$\hat{b}(z_2)\triangleq\bar{d}_{MN}^{-1}(z_2)\bar{b}$$

$$\hat{c}_{MN}(z_2)\triangleq-\bar{d}_{MN}^{-1}(z_2)\bar{c}_{MN}(z_2)$$

$$\hat{d}_{MN}(z_2)\triangleq\bar{d}_{MN}^{-1}(z_2)$$

さらに，$\hat{S}_{MN}$の伝達関数

$$\hat{H}_{MN}(z_1,z_2)=\hat{c}_{MN}(z_2)[z_1z_2^{-q}I_n-\hat{A}(z_2)]^{-1}\hat{b}(z_2)+\hat{d}_{MN}(z_2)$$

とS_{MN}の伝達関数 $z_1^Mz_2^N\cdot H_0(z_1,z_2)$ との間には

$$\hat{H}_{MN}(z_1,z_2)\cdot z_1^Mz_2^NH_0(z_1,z_2)=1$$

の関係が成立しており，これは(6·18)の関係を意味している。すなわち，次の

定理を得る。

【定理 6·2】 (6·9)を満たす因果的システム $S_0(A(z_2),\ b,\ c(z_2))_n$ において$\delta(c_M(z_2))=N$とする。このとき，(6·23)を満たす$q\in Z_+$が存在し，Sに対するMN遅れ弱因果的システム $\hat{S}_{MN}(z_2^q\hat{A}(z_2),\ z_2^q\hat{b},\ \hat{c}_{MN}(z_2),\ \hat{d}_{MN}(z_2))_n$は(6·25)で与えられる。

(6·23)が$q=0$に対して満たされるとき，かつ，このときのみ$\overline{S}_{NM}$と$\hat{S}_{MN}$は共に因果的であることから次の系を得る。

【系 6·1】 (6·9)を満たす因果的システムS_0に対しMN遅れ因果的逆システムが存在するための必要十分条件は

$$\delta(z_2^N\cdot c_{M+i}(z_2))\geqq 0 \quad i=1,2,\cdots,n-M$$

が成り立つことである。

なお，この結果は Eising が2次元伝達関数の立場で与えた条件（文献（6·1）の定理 3.4））と等価である。

ところで，得られた逆システムが安定となることは応用上重要である。

いま， 弱因果的システムと因果的システムとの間に存在する可逆変換（(6·15)，(6·16))に注意すれば，(6·25)の弱因果的逆システムが BIBO（Bounded-Input Bounded-Output）安定であることと，それを(6·15)によって変換した因果的システムが BIBO 安定であることとは等価になる。因果的システムがBIBO安定であるための必要十分条件がインパルス応答の立場で，また，その十分条件が伝達関数の立場で与えられている。 これらについては文献(6·7)を参照されたい。

6・5 結 言

この章では，因果的2次元システムに対して，固有遅れ逆システムを構成する問題を取り上げた。

最初に Roesser の状態空間モデルを１変数の有理関数行列を係数とする１次元動的システムとして取り扱うことによって，一方向にのみ遅れを有する因果的逆システムが存在するための必要十分条件が得られた。これはP.I.D 上の１次元動的システムに対して固有遅れ逆システムが存在するための条件[6・6]と見ることもできる。

次に， Eising によって導入された弱因果的２次元システムも同様に１次元動的システムで表されることを示し，すべての因果的２次元システムに対して，水平および垂直の二方向に固有遅れを有する弱因果的逆システムが，この１次元動的システムの立場で求められることを示した。この１次元動的システムの立場で記述された弱因果的システムからは Eising による巡回形局所状態空間モデルが比較的容易に得られる。また，２次元逆システムの構成に１次元動的システムにおける理論が利用できる。

さらに，(6·1) をz_1の有理関数行列を係数とする１次元システムとして取り扱えば，まったく同様の議論によって， 定理 6·1 に相当する垂直方向のみ遅れを有する（Ｎ遅れ）因果的逆システムが存在するための条件が得られるが，定理 6·1とこの条件が共に満たされるとき，かつ，このときのみＭＮ遅れ逆システムが存在する。これは系 6·1 に対する別の表現である。

なお， ここでの逆システムの最小次元性は Roesser モデルの最小実現問題とも深く関係しており，今後の研究課題である。

第7章　結　　論

２次元状態空間モデルの出現は２次元ディジタルフィルタの２次元離散空間システムとしての扱いを可能にし，伝達関数法では困難であった，フィルタの係数感度や丸め誤差，あるいはリミットサイクルなどフィルタの内部構造に関する問題の系統的な扱いを可能にした。一方，２次元離散空間システムに対するモデルの低次元化，感度解析あるいはシステムの安定化などの特性改善に関する問題は，２次元システム理論ともいうべき分野であり，２次元平面に広がる分布定数系や時間遅れ系などの実在系を２次元システムで近似する研究と共に，発展が期待される新しい分野といえる。

本研究は２次元システム理論の一分野を扱ったもので，２次元システムを状態空間モデルで実現する問題と，これら状態空間モデルで実現された２次元システムの安定化や極指定あるいはモデル適合問題など，システムの特性改善に関する問題を考察した。

第２章では，２変数の有理関数で記述される２次元システムを Roesser の状態空間モデルで最小実現するための二つのアルゴリズムが提案された。提案されたアルゴリズムからは Roesser モデルが正準形または平衡形で実現できる。正準形実現のためのアルゴリズムは非常に簡単で，この正準形が平衡形実現のためのアルゴリズムに使われた。平衡実現からは低次元システムや量子化誤差最小構造のモデル構造が容易に得られる。

第３章と第４章では，２次元システムの特性改善に関する問題を極配置問題の観点から考察した。すなわち，これらは状態のフィードバックによって得られる閉ループシステムが所望の特性を持つようにフィードバック則を設計する問題であり，ここでは，問題を２次元状態空間モデルの立場から考察した。さらに，本研究では，分母分離型 Roesser モデルの持つ利点，すなわち，１次

元システムにおける理論を利用するために，フィードバック則は閉ループシステムが分母分離形 Roesser モデルとなるように設計された。これにより，2次元システムに対する極あるいは特性多項式の指定問題は完全に2つの1次元動的システムに対する問題に分割される。

まず，第3章では，状態フィードバックによる2次元極配置を取り上げた。状態フィードバックは状態観測器を閉ループに組み込むことによって達成されるが，この場合，観測器としては状態そのものを推定する状態観測器である必要はなく，その線形関数値が推定できる関数観測器が得られれば十分である。ここでは，線形関数観測器の設計法を与えると共に，これを組み込んだ状態フィードバックによって2次元閉ループシステムの極が任意に配置できるための条件を導いた。この方法による極配置法は，組み込まれる観測器の極が閉ループシステムの入出力特性に関係しない，という特長をもっている。

続いて，第4章では極配置問題を動的補償器の設計問題として扱った。すなわち，任意に指定された複素数対を配置するような動的補償器が存在するための十分条件が示され，その設計アルゴリズムが与えられた。第3章での線形関数観測器は，ここで取り扱った動的補償器の一種とみなされ，両者の関係についても触れた。

第5章で取り上げたモデル適合問題は与えられたシステムに対して，その閉ループシステムを理想のモデルに一致させるようなフィードバック則を設計する問題である。本研究では，この問題を解くために1次元動的補償器が導入され，フィードバック則の設計問題が1変数の有理関数を係数とするような連立方程式におけるプロパーな有理関数解を求める問題に置き換えられた。ここでの1次元動的補償器は2種類の遅れ素子を有する，従来の動的補償器に比べて構造は簡単であり，設計は簡単である。また，必要な遅れ素子は一種類のみであり，経済的でもある。なお，静的出力フィードバックによるモデル適合問題はここでの特別の場合であり，これは従来の方法に比べて簡単である。

第6章では，２次元システムに対する固有遅れ逆システムについて考察した。すなわち，弱因果的２次元システムを係数行列の要素が１変数の有理関数である１次元動的システムとして取り扱う方法を述べた。そして,Eising が２次元伝達関数の立場で取り扱った因果的２次元システムに対する固有遅れ弱因果的逆システムは，１次元動的システムの立場で一般的に議論できることを述べた。この章における逆システムの構成法の特長は，(ｉ)２次元逆システムの構成に１次元システムにおける理論が利用できる。(ⅱ)弱因果的逆システムが局所状態空間モデルの立場で比較的容易に得られる，などである。また，Raina によるP.I.D 上の１次元動的システムに対する固有遅れ逆システムの存在条件は，この章の特別な場合であるM遅れ因果的逆システムの存在条件に相当している。

以上，本研究で取り扱った２次元システムの状態空間モデルの実現と特性改善に関する研究は，分布定数系や時間遅れ系など２次元システムで表現できるシステムに対するシステム理論とも言える分野における研究であり，従来伝達関数法によって取り扱われていた２次元ディジタルフィルタの研究分野との橋渡しとなり得ると考える。例えば，第２章で得られた２次元平衡実現構造からは丸め誤差最小構造を持つディジタルフィルタが得られるし，この構造から２次元システムに対する局所状態空間モデルの低次元化が図れる。本研究で得られた結果が２次元システム理論ともいえる研究分野発展の一助となり，２次元デジタルフィルタの研究分野の発展にも役立てば幸いである。

今後に残された重要な問題の一つは実在系を２次元システムで近似する問題である。例えば，分布定数系や時間遅れ系の２次元状態空間モデリングの問題などは早急に検討すべき研究課題であると考える。また，第５章での動的補償器の設計には幾分自由度が与えられており，これを安定度などの補償器の特性改善に利用することや，第６章における逆システムの最小次元性の検討なども今後の研究課題である。

謝　　　　辞

本研究を遂行するに当たって，御懇切なる御指導御鞭撻を賜った神戸大学工学部前川禎男教授に謹んで深謝の意を表します。

また，本研究の全過程を通じて，直接御指導御鞭撻を賜った鳥取大学工学部雛元孝夫教授に心から感謝の意を表します。さらに，本研究をまとめるに当たって種々の御指導と御助言を頂いた神戸大学工学部の平井一正教授，小川枝郎教授ならびに高森　年教授に深謝いたします。

本研究の途上において有益な御指導と御助言を頂いた，筆者の外地留学先であるカナダ国マックマスター大学の N.K.Sinha 教授に深く感謝します。

筆者の学生時代において電気工学や研究の進め方などについて手ほどきをして頂き，かつ，現在に至まで変わらぬ暖かい御指導と御鞭撻を頂いている津山工業高等専門学校の西山宗弘教授に心からお礼を申し上げます。

最後に，日頃親切な御援助を頂く津山工業高等専門学校電気工学科ならびに情報工学科の各位，特に三木成彦教授，岡田　正助教授にお礼を申し上げます。

参　考　文　献

第１章

(1·1)　川又，樋口：分母分離形２次元ディジタルフィルタにおける丸め誤差最小構造の合成，電子通信学会論文誌(A)，Vol.J68-A, No.11, pp.1200-1208 (昭60-11)

(1·2)　趙，川又，樋口：ハンケル行列の特異値分解に基づく分母分離型２次元ディジタルフィルタの統一的設計法，第8回 Dynamical System Theory シンポジュウム資料，pp.111-116 (昭60-12)

(1·3)　A.S.Willsky：Relationships between digital signal processing and control and estimation theory, Proc.IEEE, Vol.66, No.9, pp.996-1017 (1978)

(1·4)　R.P.Roesser：A discret state-space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-20, No.1, pp.1-10 (Feb.1975)

(1·5)　E.Fornasini & G.Machesini：Doubly-indexed dynamical systems: state-space models and structural properties,Mathematical Sys-Systems Theory, Vol.12, NO.1, pp.59-72 (1978)

(1·6)　E.Fornasini & G.Machesini：State-space realization theory of two-dimensional filters, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-21 No.4, pp.484-491 (Aug.1976)

(1·7)　S.Attasi：Systemes lineaires homogenes a deux indices, IRIA Rapport Laboria, No.31 (Sept.1973)

(1·8)　B.Lashgari, L.M.Silverman & J.F.Abramatic:Appoloximation of 2D separable in denominator filters, IEEE Trans.Circuit & Syst.

Vol. CAS-30, No.2, pp.107-121 (Feb. 1983)

(1·9) H.Kaufman, J.W.Wood, S.Dravida & A.M.Tekalp: Estimation and identification of two-dimensional images, IEEE Trans.Autom.Control, Vol.AC-28, No.7, pp.745-756 (July 1983)

(1·10) D.Goodman: Some stability properties of two-dimensional linear sift-invariant digital filers, IEEE Trans. Circuit & Syst., Vol.CAS-24, No.4, pp.201-208 (April 1977)

(1·11) D.C.Youla:The synthesis of networks containing lumped and dis-distributed elements：partⅠ, Network and Switching Theory, Academic Press (1968)

(1·12) E.D.Sontag：Linear systems over commutative rings：a survey, Ricerche di automatica, Vol.7, No.1, pp.1-34 (July 1976)

(1·13) F.M.Boland & D.H.Owens：Linear multipass process：A two dimensional interpretation", IEE Proc.Vol.127, Pt.D, No.5, pp. 189-193 (Sept. 1980)

(1·14) R.Eising : 2-D systems, an algebraic approach, Mathematic centre tracts 125, Amsterdam (1980)

(1·15) T.Kaczorek：Two-dimensional linear systems, Lecture notes in control and information sciences, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, (1985)

(1·16) 下西, 雛元, 前川：分母分離型２次元伝達関数からの正準形実現, システムと制御, Vol.30, No.2, pp.127-129 (昭61-2)

(1·17) 下西, 雛元, 前川：分母分離型２次元伝達関数の平衡実現, 電子通信学会論文誌(A), Vol. J69-A, No.8, pp. 1018-1021 (昭61-8)

(1·18) M.Sebek: On 2-D pole placement, IEEE Trans.Autom.Control, Vol. AC-30, No.8, pp.819-822 (Aug. 1985)

(1·19) T. Kaczorek: Pole assignment problem in two dimensional linear systems, Int. J. Control, Vol.37, No.1, pp.183-190 (1983)

(1·20) R.Eising : Pole placement for systems over ring, Syst. Cont. Lett., Vol.2, pp.225-229 (Dec. 1982)

(1·21) E.Emre & P.P.Khargonekar : Regulation of split linear systems over rings ; Coefficient-assignment and observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-27, No.1, pp.104-113 (Feb. 1982)

(1·22) 雛元, 下西, 前川 : 線形関数観測器による２次元システムの極配置, 電子通信学会論文誌(A),Vol.J67-A, No.12, pp.1209-1216 (昭59-12)

(1·23) 下西, 雛元, 前川 : 動的補償器を用いた２次元システムの極配置, 計測自動制御学会論文集, Vol.20, No.3, pp.207-213 (昭59-3)

(1·24) 下西, 雛元, 前川 : １次元動的補償器による２次元モデル適合問題, 計測自動制御学会論文集, Vol.22, No.2, pp.136-142 (昭61-2)

(1·25) 下西, 雛元, 前川 : ２次元システムに対する逆システムの構成, 電子通信学会論文誌(A), Vol.J69-A, No.2, pp.203-209 (昭61-2)

(1·26) R.Eising:State space realization and inversion of 2-D systems, IEEE Trans. Circuit & Syst., Vol. CAS-27, No.7, pp. 612-619 (July 1980)

(1·27) M.M.Sondhi: Image restoration: the removal of spatially invariant degradations, Proc. IEEE, Vol.63, pp.842-853 (July 1972)

(1·28) B.G.Hunt: Digital image processing, Proc. IEEE, Vol.63, pp.693-708 (April 1975)

第２章

(2·1) H.Ozaki & T.Kasami : Positive real functions of several variable and their application to variable networks, IRE Trans.CT-7

(July 1960)

(2·2) 尾崎 弘：多変数正実関数，電子通信学会論文誌 (A)，Vol.55, No. 12, pp. 1589-1596 (昭47-12)

(2·3) V.Zakian : Rational approximation to transfer function matrix of distributed system, Electron. Letters, Vol.6, No.15, pp. 474-476 (1970)

(2·4) E.W.Kamen : On algebraic theory of systems defined by convolution operators, Mathematical Systems Theory, Vol. 9, No. 1, pp.57-74 (1975)

(2·5) E.D.Sontag : Linear systems over commutative rings : a survey, Ricerche di automatica, Vol.7, No.1, pp.1-34 (July 1976)

(2·6) 下西，雛元，前川：分母分離型２次元伝達関数からの正準形実現，システムと制御，Vol.30, No.2, pp.127-129 (昭61-2)

(2·7) 下西，雛元，前川：分母分離型２次元伝達関数の平衡実現， 電子通信学会論文誌(A)，Vol. J69-A, No.8, pp. 1018-1021 (昭61-8)

(2·8) S.Kung, B.C.Levéy, M.Morf & T.Kailath: New results in 2-D systems theory, PartII, Proc.IEEE, Vol.65, No.6, pp.946-961 (1977)

(2·9) R.P.Roesser: A discret state-space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-20, No.1, pp.1-10 (Feb.1975)

(2·10) R.Eising : Realization and stabilization of 2-D systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-23, No.5, pp.793-799 (Oct. 1978)

(2·11) T.Hinamoto : Realization of state-space model from two-dimensional input-output map, IEEE Trans. Circuit & Syst. Vol. CAS-27, No.1, pp.36-44 (Jan. 1980)

(2·12) B.C.Moore: Sigular value analysis of linear systems, Part I, II, System Control Report No.7801, 7802, Univ. of Toront, (1978)

(2·13) 川又，岩月，樋口：線形システムにおける感度最小構造としての平衡実現，計測自動制御学会論文集，Vol.21,No.9, pp.900-906（昭60-9）

(2·14) C.T.Mullis & R.A.Roberts : Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters, IEEE Trans. Circuit & Syst. Vol. CAS-23, No.9, pp.551-562 (Sep. 1976)

(2·15) 川又，樋口：分母分離形２次元ディジタルフィルタにおける丸め誤差最小構造の合成，電子通信学会論文誌（A），Vol. J68-A, No.11, pp. 1200-1208（昭60-11）

(2·16) 趙，川又，樋口：ハンケル行列の特異値分解に基づく分母分離型２次元ディジタルフィルタの統一的設計法，第8回 Dynamical System Theory シンポジュウム資料，pp.111-116（昭60-12）

(2·17) B.Lashgari, L.M.Silverman & J.F.Abramatic : Appoloximation of 2-D separable in denominator filters, IEEE Trans. Circuit & Syst. Vol. CAS-30, No.2, pp.107-121 (Feb. 1983)

第３章

(3·1) F.W.Brach & J.B.Peason: Pole placement using dynamic compensators, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-15, No.1, pp. 34-43 (Feb. 1970)

(3·2) E.J.Davison & S.H.Wang : Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary output and state feedback, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-18, No.1, pp. 24-32 (Feb. 1973)

(3·3) M.Šebek: On 2-D pole placement, IEEE Trans.Autom.Control, Vol. AC-30, No.8, pp.819-822 (Aug. 1985)

(3·4) R.Eising: Pole placement for systems over ring, Syst. Cont. Lett., Vol.2, pp.225-229 (Dec. 1982)

(3·5) E.Emre & P.P.Khargonekar : Regulation of split linear systems over rings ; Coefficient-assignment and observers, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-27, No.1, pp.104-113 (Feb.1982)

(3·6) P.N.Paraskevopoulos : Eigenvalue assignment of linear multi-variable 2-dimensional systems, Proc. IEE, Vol.126, No.11, pp. 1204-1208 (Novem. 1979)

(3·7) T. Kaczorek: Pole assignment problem in two dimensional linear systems, Int. J. Control, Vol.37, No.1, pp.183-190 (1983)

(3·8) 雛元, 下西, 前川：線形関数観測器による２次元システムの極配置, 電子通信学会論文誌 (A), Vol. J67-A, No.12, pp.1209-1216 (昭59-12)

(3·9) 下西, 雛元, 前川：線形関数観測器を用いた２次元システムの極配置 第28回システムと制御研究発表講演会論文集, pp. 201-202 (昭59-5)

(3·10) T.Hinamoto, F.W.Fairman & J.Shimonishi: Two-dimensional disturbance decoupled observers, Int. Systems Sci., Vol.18, No.3, pp.427-440 (1987)

(3·11) R.P.Roesser: A discret state-space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-20, No.1, pp.1-10 (Feb.1975)

(3·12) 児玉・須田：制御工学者のためのマトリクス理論（26），システムと制御, Vol.17, No.10, pp.621-627 (昭48)

(3·13) S.Attasi : Systèmes lineaires homogènes à deux indices, IRIA Rapport Laboria, No.31 (Sept.1973)

(3·14) T.Hinamoto: Realization of state-space model from two-dimen-

sional input-output map, IEEE Trans. Circuit & Syst., Vol.CAS-27, No.1, pp.36-44 (Jan. 1980)
(3·15) 川路, 阿波: 2次元システムに対する状態観測器, 計測自動制御学会論文集, Vol.19, No.10, pp.773-779 (昭58-10)
(3·16) 伊藤, 木村, 細江：線形制御系の設計, 計測自動制御学会, (1978)
(3·17) P.N.Paraskevopoulos & P.Stavroulakis : Decoupling of linear multivariable two-dimensional systems via state feedback, Proc. IEE Vol.129, Pt.D, No.1, pp.15-20 (Jan.1982)
(3·18) P.N.Paraskevopoulos: Exact model maching of 2-D systems via state feedback, J. Franklin Inst., Vol.308, No.5, pp.475-486 (Nov. 1979)

第4章

(4·1) P.N.Paraskevopoulos & O.I.Kosmidou: Eigenvalue assignment of two-dimensional systems using PID controllers, Int. J. Systems Sci., Vol.12, No.4, pp.407-422 (1981)
(4·2) M.Sebek : On 2-D pole placement, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-30, No.8, pp.819-822 (August 1985)
(4·3) 下西, 雛元, 前川：動的補償器を用いた2次元システムの極配置, 計測自動制御学会論文集, Vol.20, No.3, pp.207-213 (昭59-3)
(4·4) J.Shimonishi, N.K.Sinha & T.Hinamoto：Eigenvalue assignment of linear multivariable 2D systems using 2D dinamical compensators, Int.J.Systems Sci., Vol.20, No.3, pp.779-792 (May 1989)
(4·5) 下西, 雛元, 前川：動的補償器を用いた2次元システムの極配置, 第26回自動制御連合講演会前刷, pp.143-144 (昭58-11)
(4·6) 児玉, 須田：制御工学者のためのマトリクス理論(26), システムと

制御, Vol.17, No.10, pp.621-629 (昭48)

(4·7) 伊藤, 木村, 細江：線形制御系の設計, 計測自動制御学会, (1978)

第5章

(5·1) B.C.Moore & L.M.Silverman: Model matching by state feedback and dynamic compensation, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-17, No.4, pp.491-497 (Aug. 1972)

(5·2) P.N.Paraskevopoulos: Exact transfer-function design using output feedback, Proc. IEE, Vol.123, No.8, pp.831-834 (Aug. 1976)

(5·3) R.Eising & E.Emre: Exact model matching of 2-D systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-24, No.1, pp.134-135 (Feb. 1976)

(5·4) P.N.Paraskevopoulos: Exact model-matching of 2-D systems via state feedback, J.Franklin Inst., Vol.308, No.5, pp.475-486 (Nov. 1979)

(5·5) P.N.Paraskevopoulos: Transfer function matrix synthesis of two dimensional systems, IEEE Trans. Autom.Control, Vol.AC-25, No. 2, pp.321-324 (April 1980)

(5·6) Y.Yasuda : On the synthesis of model-following two-dimensional digital systems, Int.J.Control, Vol.34, No.2, pp.201-217 (Feb. 1981)

(5·7) P.N.Paraskevopoulos & O.I.Kosmidou: Dynamic compensation for exact model-matching of two-dimensional systems, Int. J. Syst. Sci., Vol.11, No.10, pp.1163-1175 (Octo. 1980)

(5·8) M.Šebek: 2-D exact model matching, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-28, No.2, pp.215-217 (Feb. 1983)

(5·9) 下西, 雛元, 前川：１次元動的補償器による２次元モデル適合問題,

計測自動制御学会論文集, Vol.22, No.2, pp.136-142 (昭61-2)
(5·10) 下西, 雛元, 前川：２次元システムのモデルマッチング問題, 第７回 Dinamical System Theory シンポジュウム資料, pp. 121-124 (昭59-12)
(5·11) E.D.Sontag: On linear systems and noncommutative rings, Mathematical Systems Theory, Vol.9, No.4, pp.327-344 (1976)
(5·12) W.A.Wolovich : Linear multivariable systems, Springer-Verag, New York (1974)
(5·13) E.Emre & M.L.J.Hautus: A polynomial characterization of (A,B)-invariant and reachability subspaces, SIAM J.Control and Optimization, Vol.18, No.4, pp.420-436 (July 1980)
(5·14) S.H.Wang & E.J.Davison: A minimization algorithm for the design of linear multivariable systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-18, No.3, pp.220-225 (June 1973)

第６章

(6·1) R.Eising: State space realization and inversion of 2-D systems, IEEE Trans. Circuit & Syst., Vol. CAS-27, No.7, pp. 612-619 (July 1980)
(6·2) A.Raina : Invertibility of 2-D systems, IEEE Trans. Circuit & Syst., Vol.CAS-31, No.7, pp.663-665 (July 1984)
(6·3) 下西, 雛元, 前川：Attasi型２次元システムに対する逆システムの構成, 計測自動制御学会論文集, Vol.18, No.9, pp.898-904 (昭57-9)
(6·4) 下西, 雛元, 前川：２次元システムに対する逆システムの構成, 電子通信学会論文誌(A), Vol.J69-A, No.2, pp.203-209 (昭61-2)
(6·5) 構下西, 雛元, 前川：２次元システム逆システムの一構成法, 第29回

システムと制御研究発表講演会論文集, pp.103-104 (昭60-5)

(6·6) A.Raina & T.Karunakaran: Invertibility of linear dynamical systems over commutative rings, IEEE Trans.Autom.Control, Vol. AC-28, No.2, pp.227-228 (Feb. 1983)

(6·7) R.Eising : Realization and stabilization of 2-D systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-23, No.5, pp.793-799 (Oct. 1978)

(6·8) 下西, 雛元, 前川：モード可制御性とモード可観測性に基づく分母分離形２次元システムの構造分解と実現について, システムと制御, Vol.27, No.12, pp.793-800 (昭58-12)

(6·9) A.I.G.Vardulakis, D.N.J.Limebeer & N.Karcanias: Structure and Smith-Mcmillan Form of a rational matrix at infinit, Int. J. Control, Vol.35, No.4, pp.701-725 (1982)

付 録

(A1·1) 下西, 雛元, 前川: ２次元状態空間モデルによるあるクラスの分布定数系のモデリング", システムと制御, Vol.32, No.5, pp. 335-337 (昭63-5)

(A1·2) E.Fornasini & G.Machesini: Doubly-indexed dynamical systems: state-space models and structural properties, Mathematical Systems Theory, Vol.12, NO.1, pp.59-72 (1978)

(A1·3) E.Fornasini & G.Machesini: State-space realization theory of two-dimensional filters, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.AC-21 No.4, pp.484-491 (Aug. 1976)

付録－A　分布定数系の２次元状態空間モデル近似 (A1・1)

（A－１）双曲型偏微分方程式の２次元状態空間モデル近似

次の偏微分方程式

$$\frac{\partial T(s,t)}{\partial s}+\frac{\partial T(s,t)}{\partial t}=\alpha T(s,t)+\beta U(t) \qquad (A1\cdot1)$$

で記述されるシステムを FornasiniとMachesini による第２モデル (A1・2)

$$\begin{aligned}&x(i+1,j+1)=A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1)\\&x(i,0)=x_{i0},\qquad x(0,j)=x_{0j}\qquad\qquad i,j=1,2,\cdots\end{aligned} \qquad (A1\cdot2)$$

によって差分近似することを考える。ただし，$\alpha<0$，β は実数であり，初期条件と境界条件は

$$T(s,0)=f_1(s),\qquad T(0,t)=f_2(t)$$

で，それぞれ与えられる。(A1･1) 式は化学反応炉あるいは熱交換器などの熱システムを記述する方程式で，$T(s,t)$は空間 $s\in[0,s_k]$，と時間 $t\,[0,\infty]$における温度である。

いま，

$$\begin{aligned}&x(i,j)\triangleq T(i\Delta s,j\Delta t)\\&u(i,j)\triangleq U(j\Delta t)\quad \text{for all } i\end{aligned} \qquad (A1\cdot3)$$

と置き，$\partial T(s,t)/\partial s$と$\partial T(s,t)/\partial t$を後進差分によって近似すれば，(A1･1)式は

$$\frac{x(i,j)-x(i-1,j)}{\Delta s}+\frac{x(i,j)-x(i,j-1)}{\Delta t}=\alpha x(i,j)+\beta u(i,j) \qquad (A1\cdot4)$$

となる。(A1･3)式の $u(i,j)$ の定義に注意して式を書き直せば，次のように

$$x(i+1,j+1)=a_1x(i+1,j)+a_2x(i,j+1)+b_2u(i,j+1) \qquad (A1\cdot5)$$

$$x(i,0)=f_1(i\Delta s)\qquad\qquad i=1,2,3,\cdots$$

$$x(0,j)=f_2(j\Delta t)\qquad\qquad j=1,2,3,\cdots$$

Fornasini-Machesini の第２モデルが導かれる。 ただし,

$$a_1=\frac{\Delta s}{\Delta s+\Delta t-\alpha\Delta s\Delta t},\quad a_2=\frac{\Delta t}{\Delta s+\Delta t-\alpha\Delta s\Delta t},\quad b_2=\frac{\beta\Delta s\Delta t}{\Delta s+\Delta t-\alpha\Delta s\Delta t}$$

(A1･4)式が漸近安定であるための十分条件は

$$|a_1|+|a_2|<1$$

であることが知られている(A1･2)。すなわち，任意の $\alpha<0$ に対して,

$$|a_1|+|a_2|=\frac{\Delta s+\Delta t}{\Delta s+\Delta t-\alpha\Delta s\Delta t}<1$$

の関係があるから，差分幅に関係なく(A1･5)の安定性が保証される。これは，後進差分で近似されたモデルが差分幅に関係なく安定になる，という常微分方程式の差分近似で知られている性質（A-安定性）に相当している。

（A－２）放物型偏微分方程式の２次元状態空間モデル近似

続いて，次の偏微分方程式

$$\frac{\partial T(s,t)}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T(s,t)}{\partial s^2}+\beta U(s,t) \qquad \text{(A1･6)}$$

で表されるシステムを（A1･2）の FornasiniとMachesini による第２モデルで差分近似する。ただし，$\alpha<0$, β は実数であり，初期条件と境界条件は

$$T(s,0)=f_1(s),\qquad T(0,t)=f_2(t)$$

で与えられるものとする。また，$T(s,t)$は位置 $s\in[0,s_k]$, と時間 $t\ [0,\infty]$における未知関数で，$U(s,t)$は既知関数である。

(A1･6)は例えば，片端がある温度に固定され他の端は無限に延びているような（準無限物体と呼ばれる物体）が外界と断熱されているときの物体の温度分布を記述している方程式である。

いま,

$$T(i,j)\triangleq T(i\Delta s,j\Delta t)$$

$$u(i,j) \triangleq u(i\Delta s, j\Delta t)$$

を定義し，(A1·6)を

$$\frac{\partial T(s,t)}{\partial t} = \frac{T(i,j)-T(i,j-1)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T(s,t)}{\partial s^2} = \frac{T(i,j)-2T(i-1,j)+T(i-2,j)}{(\Delta s)^2}$$

で差分近似すれば，

$$\frac{T(i,j)-T(i,j-1)}{\Delta t} = \alpha\frac{T(i,j)-2T(i-1,j)+T(i-2,j)}{(\Delta s)^2} + \beta u(i,j) \tag{A1·7}$$

を得る。(A1·7)を

$$\left\{\frac{1}{\Delta t} - \frac{\alpha}{(\Delta s)^2}\right\} T(i,j) = \frac{1}{\Delta t} T(i,j-1) - \frac{2\alpha}{(\Delta s)^2} T(i-1,j) + \frac{\alpha}{(\Delta s)^2} T(i-2,j) + \beta u(i,j) \tag{A1·8}$$

と変形して，局所状態を

$$\begin{aligned} x_1(i,j) &\triangleq \frac{1}{\Delta t} T(i,j-1) + \frac{\alpha}{(\Delta s)^2} T(i-2,j) \\ x_2(i,j) &\triangleq -\frac{2\alpha}{(\Delta s)^2} T(i-1,j) \end{aligned} \tag{A1·9}$$

と定義すれば，Fornasini-Machesini の第２モデルが次のように導かれる。

$$x(i+1,j+1) = A_1 x(i+1,j) + A_2 x(i,j+1) + b_1 u(i+1,j) + b_2 u(i,j+1) \tag{A1·2}$$

ただし，

$$x(i+1,j) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(i,j) \\ x_2(i,j) \end{bmatrix}$$

であり，A_1，A_2，b_1，b_2は

$$A_1 \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{(\Delta s)^2}{(\Delta s)^2-\alpha\Delta t} & \dfrac{(\Delta s)^2}{(\Delta s)^2-\alpha\Delta t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -\dfrac{2\alpha\Delta t}{(\Delta s)^2-\alpha\Delta t} & -\dfrac{2\alpha\Delta t}{(\Delta s)^2-\alpha\Delta t} \end{bmatrix}$$

$$b_1 \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\beta(\Delta s)^2}{(\Delta s)^2-\Delta t\,\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{2\alpha\beta\Delta t}{(\Delta s)^2-\alpha\Delta t} \end{bmatrix}$$

である。また，初期局所状態はそれぞれ

$$T(i,0)=f_1(i\Delta s), \quad T(0,j)=f_2(j\Delta t) \quad i,j=1,2,3,\cdots$$

を(A1·9)に代入したものが用いられる。

(A－３）２階（Darboux型）偏微分方程式の２次元状態空間モデル近似

次の方程式で記述される分布定数システムを考える。

$$\frac{\partial^2 T(s,t)}{\partial s \partial t} = \alpha_1 \frac{\partial T(s,t)}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial T(s,t)}{\partial s} + \alpha_0 T(s,t) + \beta g(s,t) \quad (A1\cdot 10)$$

ただし，初期条件と境界条件は，それぞれ

$$T(s,0)=f_1(s), \qquad T(0,t)=f_2(t)$$

で与えられる。ここで，$T(s,t)$は空間 $s\in[0,s_f]$と時間 $t\in[0,\infty]$における未知関数，$g(s,t)$は既知の入力関数である。さらに，α_0，α_1，α_2，β は実数で，$f_1(s)$と$f_2(t)$は既知とする。

(A1·10)は蒸気加熱・ガス吸収プロセスなどを記述する方程式である。

(A1·10)を FornasiniとMachesini[A1·4]によって最初に提案された状態空間モデル

$$\begin{aligned} &x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+Bu(i,j) \\ &x(i,0)=x_{i0}, \qquad x(0,j)=x_{0j} \qquad i,j=1,2,\cdots \end{aligned} \quad (A1\cdot 11)$$

で差分近似する。

さて，(A1·10)において

$$x(i,j) \triangleq T(i\Delta s, j\Delta t)$$
$$u(i,j) \triangleq g(i\Delta s, j\Delta t) \qquad (A1\cdot 12)$$

を定義して，以下の差分近似

$$\frac{\partial T(s,t)}{\partial t} = \frac{x(i,j+1)-x(i,j)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T(s,t)}{\partial x} = \frac{x(i+1,j)-x(i,j)}{\Delta s}$$

$$\frac{\partial^2 T(s,t)}{\partial x \partial t} = \frac{x(i+1,j+1)-x(i+1,j)-x(i,j+1)+x(i,j)}{\Delta s \Delta t}$$

を用いれば(A1·6)は次のように近似できる。

$$\frac{x(i+1,j+1)-x(i+1,j)-x(i,j+1)+x(i,j)}{\Delta s \Delta t}$$
$$= \alpha_1 \frac{x(i,j+1)-x(i,j)}{\Delta t} + \alpha_2 \frac{x(i+1,j)-x(i,j)}{\Delta s} + \alpha_0 x(i,j) + \beta u(i,j)$$

(A1·13)

上式を整理すれば，Fornasini-Machesini の第１モデル

$$x(i+1,j+1) = a_0 x(i,j) + a_1 x(i+1,j) + a_2 x(i,j+1) + bu(i,j) \qquad (A1\cdot 14)$$

が得られる。ただし

$$a_0 = \alpha_0 \Delta s \Delta t - \alpha_1 \Delta s - \alpha_2 \Delta t - 1,$$
$$a_1 = 1 + \alpha_2 \Delta t, \qquad a_2 = 1 + \alpha_1 \Delta s,$$
$$b = \beta \Delta s \Delta t$$

であり，初期局所状態は

$$x(i,0) = f_1(i\Delta s), \quad x(0,j) = f_2(j\Delta t) \qquad i,j = 0,1,2,\cdots$$

である。

付 録-B

（B - 1） (3·2)の導出

rank $B_1 = q_1 \leqq q$, rank $C_2 = p_2 \leqq p$ である点に着目すれば，

$$B_1 P = [\underbrace{B_{11}}_{\leftarrow q_1 \rightarrow} \; \vdots \; \underbrace{0}_{\leftarrow q-q_1 \rightarrow}], \qquad \text{rank } B_{11} = q_1$$

$$QC_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ C_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p-p_2 \\ \\ \updownarrow p_2 \end{array}, \qquad \text{rank } C_{22} = p_2$$

とするような列変換行列 $P \in R^{q \times q}$ および $Q \in R^{p \times p}$ が存在する。この P と Q を用いて (3·1) の入力と出力を次のように

$$\begin{bmatrix} u_1(i,j) \\ u_2(i,j) \end{bmatrix} = Qu(i,j), \qquad \begin{bmatrix} y_1(i,j) \\ y_2(i,j) \end{bmatrix} = Qy(i,j)$$

変換すれば(3·2)を得る。また，rank $B = q$，rank $C = p$ であることからrank $B_{22} = q - q_1$，rank $C_{11} = p - p_2$ でなくてはならない。

（B－2）　(5·15)のΛ_iとΓ_iの導出

二つのz_2の有理関数を係数とするz_1の多項式

$$F(z_2)[z_1]=\sum_{i=0}^{n} F_i(z_2)z_1^i \quad と \quad R(z_2)[z_1]=\sum_{i=0}^{m} R_i(z_2)z_1^i$$

の積

$$\Phi(z_2)[z_1]=F(z_2)[z_1]\cdot R(z_2)[z_1]=\sum_{i=0}^{n+m} \Phi_i(z_2)z_1$$

を考える。このとき，これら係数間には次の関係がある。

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(z_2) \\ \Phi_1(z_2) \\ \\ \vdots \\ \\ \Phi_{n+m}(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0(z_2) & & \\ F_1(z_2) & F_0(z_2) & 0 \\ \vdots & F_1(z_2) & \\ F_n(z_2) & \vdots & F_0(z_2) \\ & F_n(z_2) & \vdots \\ 0 & & F_n(z_2) \end{bmatrix} \tag{B2·1}$$

いま，

$$M^*(z_2)[z_1]=\beta(z_2)[z_1]I_pM(z_2)[z_1]=\sum_{i=0}^{n+\bar{h}} M_i^*(z_2)z_1^i$$

と置き，これに（B2·1）を適用し，$M_i^*(z_2)$を計算すれば，（5·16）の$\Lambda_i(z_2)$は次のように

$$\Lambda_i(z_2)=I_s\otimes M_i^*(z_2) \qquad i=0,2,\cdots,\bar{n}+h$$

与えられる。

次に，$\hat{M}^T(z_2)$の(k,h)要素を$\hat{m}_{kh}$とし

$$\hat{M}_{kh}^*(z_2)[z_1]=\hat{m}_{kh}(z_2)I_pM(z_2)[z_1]=\sum_{i=0}^{\bar{n}+\bar{h}}(\hat{M}_i^*(z_2))_{kh}z_1^i \tag{B2·2}$$

$$k=1,2,\cdots,s, \qquad h=1,2,\cdots,p$$

と置いて，(B2·1)を適用すれば(B2·2)より $(\hat{M}_i^*(z))_{kh}$ が得られる。(5·13)の$\Gamma(z_2)[z_1]$はこれを用いて次のように

$$\Gamma(z_2)[z_1]=\hat{M}^T(z_2)[z_1]\otimes M(z_2)[z_1]=[\hat{m}_{kh}(z_2)[z_1]I_pM(z_2)[z_1]]$$

$$=\sum_{i=0}^{\bar{n}+\bar{h}}[(\hat{M}_i^*(z))_{kh}]z_1^i=\sum_{i=0}^{\bar{n}+\bar{h}}\Gamma_i(z_2)z_1^i$$

変形でき，(5·15)の$\Gamma_i(z_2)$が次のように

$$\Gamma_i(z_2)=[(\hat{M}_i^*(z))_{kh}]=\begin{bmatrix}(\hat{M}_i^*(z_2))_{11}\cdots(\hat{M}_i^*(z_2))_{1p}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ (\hat{M}_i^*(z_2))_{s1}\cdots(\hat{M}_i^*(z_2))_{sp}\end{bmatrix}\quad i=1,2,\cdots,\bar{n}+\bar{h}$$

得られる。

$r_i(z_2)$についても同様。