



# 感度解析を用いた振動系の同定法に関する研究

鞍谷, 文保

---

(Degree)

博士 (工学)

(Date of Degree)

1991-03-18

(Date of Publication)

2008-04-02

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

乙1521

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.11501/3085888>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001521>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



神戸大学 博士論文

感度解析を用いた振動系の  
同定法に関する研究

平成3年1月

鞍 谷 文 保

# 目 次

第1章 緒 論	1
第2章 多自由度振動系の同定法	
2.1 緒 言	9
2.2 振動解析と逆問題	10
2.3 同定法の定式化	13
2.3.1 感度解析	13
2.3.2 同定法	15
2.4 同定法の基礎的検討	17
2.5 数値実験例	21
2.5.1 三自由度ばね・質量系の同定と固有値，固有モード の選択が同定結果に及ぼす影響	21
2.5.2 五自由度ばね・質量系の同定	31
2.6 結 言	32
第3章 収束性を向上させる同定法の提案	
3.1 緒 言	33
3.2 固有モードの各成分を評価関数とした同定法とその問題点	34
3.3 固有モードベクトルの方向を評価関数とした同定法	38

3.3.1	評価関数の定式化	38
3.3.2	収束性の向上に与える効果	39
3.4	数値実験による収束性の比較	43
3.5	結 言	47
第4章	ばね要素で支持された剛体の慣性モーメント，重心位置の同定	
4.1	緒 言	48
4.2	運動方程式	49
4.3	変位センサで測定される並進変位データを用いた同定法	54
4.4	数値実験例	61
4.4.1	剛体系モデルの同定	62
4.4.2	収束性の検討	65
4.4.3	防振支持設計への応用	68
4.5	実測データによる同定とデータの選択が同定結果に及ぼす影響	70
4.6	結 言	75
第5章	ばね要素で支持された剛体の慣性主軸の同定	
5.1	緒 言	76
5.2	運動方程式	77
5.3	同定法	82
5.4	実測データによる同定	84



5.4.1	簡単な構造物の同定	84
5.4.2	実構造物の同定	88
5.4.3	防振支持設計への適用	92
5.5	結 言	95

## 第6章 剛体を支持する弾性体の減衰特性の同定

6.1	緒 言	96
6.2	運動方程式	97
6.3	同定法および減衰振動系の感度解析	102
6.4	数値実験例	107
6.5	実測データによる同定	112
6.6	結 言	117

## 第7章 柔軟構造物を有する剛体の慣性モーメント，重心位置の同定

7.1	緒 言	118
7.2	運動方程式	119
7.3	柔軟構造物の振動を考慮した同定法	126
7.4	数値実験例	130
7.4.1	柔軟構造物を有する剛体系モデルの同定	130
7.4.2	収束性の検討	134
7.5	実測データによる同定	136

7.6 結 言	143
第8章 結 論	144
発表論文	149
参考文献	150
謝 辞	154

## 要 約

近年、機械・装置に対する高速化、軽量化の要求は厳しくなっている。しかし、高速化、軽量化はいずれも振動や騒音の増大につながり、機械・装置の信頼性、性能向上あるいは公害防止などの観点から、ますます動的な特性を考慮した設計が必要となっている。そこで、設計の効率化を図るために動的応答解析法、構造変更シミュレーション手法が開発され、設計における有効な道具となっている。ところで、解析精度、シミュレーションの信頼性は、解析のモデル化の程度に依存する。そこで、機械構造物の動特性を的確に表現する物理モデルの構築、すなわち系を同定する技術の確立が大きな課題となっている。

本研究では、系に感度解析を用いて、実験データから物理モデルの多数のモデルパラメータを同定する方法について検討した。特に、感度解析を用いた同定法を実用化する上で問題となる反復計算の収束性を向上させる方法、および同定法の現実問題への応用として、これまで検討がなされていなかった防振支持設計を想定したモデル、すなわち剛体が弾性体で支持されたモデルを取り上げ、慣性主軸、重心位置などの剛体的特性を同定する方法を明らかにした。

まず、第2章では、本研究で取り上げる同定法に関する基礎的研究を行った。すなわち、振動系の基本と考えられるばねと集中質量だけからなる非減衰振動系を取り上げ、既知とした固有振動数、固有モードと同じ振動特性を有する質量、ばね定数の値を同定する方法を明らかにした。また、多数のモデルパラメータを同時に同定するために、目標とする固有振動数、固有モードの設定条件と同定対象とするモデルパラメータの選定条件について検討した。その結果、精度よい同定を行うためには、次のことを考慮すべきことが明らかになった。(1)同定しようとするモデルパラメータの数 $N_p$ は系の振動特性を支配する因子の数 $n(n+1)/2$  ( $n$ は系の自由度を表す)より少なくしなければならない。すなわち、 $N_p \leq n(n+1)/2$ とする。(2)同定しようとするモデルパラメータの数が $n(n+1)/2$ 個の場合には、目標値の中にすべてのモード次数の固有値および各質量に関する固有モードの成分を少なくとも一つづつは含まなければならない。(3)振動実験データから設計変数である質量、ばね定数などの値を推定しようとする場合には、実験で得られた情報を目標値になるべく多く採用して同定したほうがよい。

第3章では、反復計算の収束性を向上させる同定法を提案した。同定法の数学的手法は第2章と同様であるが、振動工学の立場から収束性を向上させる方法について検討したものである。その中で、第2章の同定法では、同定の評価に固有モードの個々の成分を用いることが、収束性を悪くする要因の1つであることを示した。また、収束性を向上させるためには、目標とする固有モードベクトルと力学モデルの固有値解析で得られる固有モードベクトルの相違を、各モード次数ごとに両固有モードベクトルを同じ座標系で表したときのベクトルの方向の違いで評価することが有効であることを示した。そして、ベクトルの方向の違い、すなわち両ベクトルのなす角により一義的に定まる量を評価関数に用いて同定する方法を提案した。また、数値実験を行い、提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束速度、収束安定性が大幅に向上することを確認した。

第4章では、同定法を機械の防振支持設計に適用することを想定した。そして、剛体の慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を実験データから同定する方法を提示した。その中で、剛体の重心位置を同定するために、重心位置の座標を空間に固定した座標系からの偏差のパラメータを用いて表し、重心位置を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示した。また、実験では回転角変位を直接測定することが困難であるため、通常の変位センサを用いて得られる並進変位データを同定計算に用いるための方法を明らかにした。そして、数値実験を行い、同定法の妥当性を検証した。また、実測データによる同定において、目標とする固有振動数、固有モードと同定されたモデルパラメータの関係を考察した。その結果、精度よい同定を行うためには、目標値として一次モードから六次モードまでのすべての固有振動数、固有モードを採用するか、少なくとも一次モードから六次モードまでの固有振動数は採用すべきである。採用しない場合には、同定されたモデルパラメータに誤差の大きなものが生じる可能性が高いことが明らかになった。また、本章で扱ったモデルにおいても、第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が大幅に向上し、収束性が同定しようとするモデルパラメータの初期値の影響を受けにくいことを確認した。

第5章では、第4章では同定できなかった剛体の慣性主軸方向および主慣性モーメントの値を実験データから同定する方法を提示した。その中で、剛体の

慣性主軸方向を同定するために、空間に固定した座標系の各座標軸方向と慣性主軸方向との角度のずれを表すパラメータを用いて慣性主軸方向を表し、慣性主軸方向を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示した。そして、実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を検証した。また、本章で対象とした慣性主軸方向、主慣性モーメントの値を同定する場合の初期値の設定について検討した結果、次のことが明らかになった。(1)オイラー角の初期値が精度よく設定できても、初期値として設定した主慣性モーメント $J_{\xi}$ 、 $J_{\eta}$ 、 $J_{\zeta}$ の相対的な大きさの順序が実構造物の $J_{\xi}$ 、 $J_{\eta}$ 、 $J_{\zeta}$ の大きさの順序と異なっている場合には、収束性が悪くなる場合がある。(2)収束性を向上させるためには、あらかじめ実構造物を検討し、対応する慣性主軸方向と主慣性モーメントの相対的な大きさの順序を求め、初期値に反映させる必要がある。

また、同定法を防振支持設計の特性改善に適用し、設計の効率化に有効であることを確認した。

第6章では、防振ゴムなどの減衰特性を同定するために、減衰振動系を取り上げ、その同定法を提示した。そして、防振ゴムで支持された剛体系モデルに対して、実験データから防振ゴムの減衰係数、ばね定数が同定できることを確認した。また、同定の目標とする減衰固有振動数、モード減衰比、複素固有モードの組み合わせを変えた同定計算結果をもとに、減衰係数などのパラメータが同定可能となる目標値の設定条件について検討した。その結果、少なくともすべてのモード次数の減衰固有振動数、モード減衰比を目標値の中に含まなければならないことが明らかになった。

第7章では、第4章から第6章までの剛体が弾性支持されたモデルに対する同定法を拡張し、剛体に柔軟構造物が付属した構造物において、柔軟構造物を剛体とみなした系全体の慣性モーメント、重心位置などの値を柔軟構造物が振動する状況で計測したデータから効率よく同定する方法を提示した。すなわち、柔軟構造物の弾性変形を考慮し、弾性変形を柔軟構造物単体の振動解析で得られたモード座標を用いて表すことにより低次元化した後、系全体の運動方程式を導出する。そして、同定においてもモード座標の感度を用いることにより、低次元のモデルで効率よく同定するものである。また、数値実験および実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を検証した。さらに、実用上問題となる同定計算の収束性について、数値実験をもとに検討した結果、次のことが明

らかになった。(1)第2章の同定法では、柔軟構造物上の測定点が少ない場合には、柔軟構造物を含んだ系全体の固有振動数が柔軟構造物単体の高次モードに近くなると収束性が悪くなる。しかし、系全体の固有振動数を柔軟構造物単体の低次モードの近くに設定できない場合も、柔軟構造物上の測定点数を多くする、あるいは測定位置を考慮することにより、収束性を向上させることができる。(2)第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法で収束性が悪くなったデータからも少ない反復計算回数で同定できる。

以上述べたように、本研究では、ばね・質量系モデル、弾性体で支持された剛体系モデル、剛体に柔軟構造物が付属した構造物が弾性支持されたモデルの多数のモデルパラメータを同定するための具体的方法を示した。そして、精度よい同定を行うために考慮すべき点を明らかにした。また、実用上問題となる反復計算の収束性を向上させる同定法を提案し、本研究で取り上げたモデルについてはこの同定法が非常に有効であることを確認した。

## 主 な 記 号

主な記号の説明を以下に示す。

$[C]$	: 減衰マトリックス
$[\hat{c}]$	: 座標変換後の減衰マトリックス
$[I]$	: 単位マトリックス
$[K]$	: 剛性マトリックス
$[\hat{k}]$	: 座標変換後の剛性マトリックス
$[M]$	: 質量マトリックス
$[\hat{m}]$	: 座標変換後の質量マトリックス
$[S], [S^*]$	: 感度マトリックス
$[T_E]$	: 重心を原点とし慣性主軸を座標軸とする直交座標系と重心を原点とし任意な軸を座標軸とする直交座標系との座標変換マトリックス
$[T_G]$	: 重心を原点とし固定座標系に平行な直交座標系と固定座標系との座標変換マトリックス
$[T_P]$	: 各測定点を原点とし固定座標系に平行な直交座標系と固定座標系との座標変換マトリックス
$[T_S]$	: 各ばね支持点を原点とし固定座標系に平行な座標系と固定座標系との座標変換マトリックス
$[W]$	: 重み係数マトリックス (対角マトリックス)
$[\Phi]$	: 固有モードマトリックス
$[\Omega]$	: 固有値マトリックス (対角マトリックス)
$\{F_c\}$	: 減衰力ベクトル
$\{F_k\}$	: 復元力ベクトル
$\{F_m\}$	: 慣性力ベクトル
$\{N_j\}$	: $j$ 次の固有モード
$\{P\}$	: 固有振動数および固有モードベクトルの方向の相違を評価する量を要素とするベクトル
$\{q\}$	: 変位ベクトル

$\{R\}$	: 固有振動数および固有モードの各成分を要素とするベクトル
$\{U_j\}$	: 規準化された $j$ 次の固有モード
$\{V_j\}$	: 並進変位成分からなる $j$ 次の固有モード
$\{v_{ij}\}$	: 固有モード $\{V_j\}$ の測定点 $i$ の $X, Y, Z$ 方向の並進変位成分
$\{W_j\}$	: 固有モード $\{N_j\}$ の並進変位成分
$\{\gamma\}$	: モデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ を並べたベクトル
$\{\Theta_j\}$	: 固有モード $\{N_j\}$ の回転角変位成分
$c_{ix}, c_{iy}, c_{iz}$	: 支持点 $i$ の弾性体の $X, Y, Z$ 方向の減衰係数
$d_k$	: 同定しようとする $k$ 番目のモデルパラメータの値
$E, E^*$	: 評価関数
$f_j$	: $j$ 次の固有振動数
$J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$	: 座標軸 $X^G, Y^G, Z^G$ に関する慣性モーメント
$J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$	: 座標軸 $X^G, Y^G, Z^G$ に関する慣性乗積
$J_{\xi}, J_{\eta}, J_{\zeta}$	: 座標軸 $\xi^G, \eta^G, \zeta^G$ に関する慣性モーメント
$K_x, K_y, K_z$	: 集約したばね要素の $X^S, Y^S, Z^S$ 方向の並進ばね定数
$k_x, k_y, k_z$	: 一つのばね要素の $X^S, Y^S, Z^S$ 方向の並進ばね定数
$K_{\phi}, K_{\theta}, K_{\psi}$	: 集約したばね要素の $X^S, Y^S, Z^S$ 軸回りの回転ばね定数
$k_i$	: $i$ 番目のばね要素のばね定数
$k_{ii}$	: 点 $i$ の質量と固定端を結ぶばね要素のばね定数
$k_{ij}$	: 点 $i$ の質量と点 $j$ の質量を結ぶばね要素のばね定数
$k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}$	: 支持点 $i$ の弾性体の $X, Y, Z$ 方向のばね定数
$L_x, L_y, L_z$	: 原点からばね支持点までの $X, Y, Z$ 方向の距離
$m$	: 系全体の質量
$m_i$	: 点 $i$ あるいは $i$ 番目の質量
$N_{ij}$	: $j$ 次固有モードの点 $i$ の振幅成分の値
$N_o$	: 目標とするモーダルパラメータの数
$N_p$	: 同定しようとするモデルパラメータの数
$R_i$	: $i$ 番目の目標値



- $r_j$  :  $j$  次固有モードに関する実験値の固有モードベクトルと力学モデルの固有モードベクトルの方向の相違を評価する量
- $S_{ik}$  :  $k$  番目のモデルパラメータの変更率に対する  $i$  番目の目標値の感度
- $\gamma_k$  : 同定しようとする  $k$  番目のモデルパラメータの変更率
- $\zeta_j$  :  $j$  次のモード減衰比
- $\lambda_j$  :  $j$  次の固有値
- $\omega_j$  :  $j$  次の固有角振動数
- $\Phi, \Theta, \Psi$  : オイラー角
- 座標系
- $O-XYZ$  : 任意な点を原点とする空間に固定した直交座標系 (固定座標系)
- $G-X^G Y^G Z^G$  : 重心を原点とし固定座標系に平行な直交座標系 (重心座標系)
- $G-\xi \eta \zeta$  : 重心を原点とし慣性主軸  $\xi, \eta, \zeta$  を座標軸とする直交座標系 (第5章における重心座標系)
- $S-X^S Y^S Z^S$  : ばね支持点を原点とし固定座標系に平行な直交座標系 (ばね支持点座標系)
- 座標
- ${}^O P^G(x_G, y_G, z_G)$  : 固定座標系  $O-XYZ$  における重心  $G$  の座標
- ${}^O P^i(x_i, y_i, z_i)$  : 固定座標系  $O-XYZ$  における点  $i$  の座標
- ${}^O P^S(x_S, y_S, z_S)$  : 固定座標系  $O-XYZ$  におけるばね支持点  $S$  の座標
- 数学記号
- $\text{Diag}[\cdot]$  : 対角マトリックス
- $[\cdot]^T$  : マトリックスの転置
- $\{\cdot\}^T$  : ベクトルの転置
- $\{\cdot^*\}$  : ベクトル  $\{\cdot\}$  の共役複素ベクトル
- $\text{Re}(\cdot)$  :  $(\cdot)$  の実数部
- $\text{Im}(\cdot)$  :  $(\cdot)$  の虚数部
- $\delta(\cdot)/\delta(\cdot\cdot)$  :  $(\cdot\cdot)$  による  $(\cdot)$  の偏微分

## 上付き添字

- $e$  : 目標値を表す  
 $G$  : 座標系  $G - X^G Y^G Z^G$  あるいは座標系  $G - \xi \eta \zeta$  における量を表す  
 $S$  : 座標系  $S - X^S Y^S Z^S$  における量を表す  
' : モデルパラメータの変更率に対する偏微分を表す

## 下付き添字

- 0 : 初期値を表す

## 第7章に限り使用する記号

- $[C_e]$  : 柔軟構造物のモード減衰マトリックス  
 $[C_G]$  : 支持弾性体を除いた系の減衰マトリックス  
 $[C_S]$  : 支持弾性体の減衰マトリックス  
 $[e]$  : 単位マトリックス  
 $[K_e]$  : 柔軟構造物のモード剛性マトリックス  
 $[K_G]$  : 支持弾性体を除いた系の剛性マトリックス  
 $[K_S]$  : 支持弾性体の剛性マトリックス  
 $[M_e]$  : 柔軟構造物のモード質量マトリックス  
 $[M_G]$  : 支持弾性体を除いた系の質量マトリックス  
 $[M_E]$  : 剛体的特性を表すマトリックス  
 $[Q_e]$  : 柔軟構造物と剛体との質量連成の影響を表すマトリックス  
 $[\Phi_i^r]$  :  $r$  番目の柔軟構造物の点  $i$  に関する固有モードマトリックス  
 $\{F\}$  : 外力ベクトル  
 $\{w\}$  : 並進変位ベクトル  
 $\{\theta\}$  : 回転角変位ベクトル  
 $\{\xi\}$  : モード座標ベクトル  
 $\{\xi_j^r\}$  : 固有モード  $\{N_j\}$  のモード座標成分  
 $\xi_{kr}$  :  $r$  番目の柔軟構造物単体の  $k$  次のモード減衰比  
 ${}^G P_i^r(x_i^r, y_i^r, z_i^r)$  : 座標系  $G - X^G Y^G Z^G$  における  $r$  番目の柔軟付属物上の点  $i$  の座標

## 第1章 緒 論

情報機器・産業用ロボット・宇宙構造物などのメカトロニクス関連の機器はもとより、一般の産業機械の分野においても高速化、軽量化に対する要求は厳しくなっている。しかし、高速化、軽量化はいずれも振動や騒音の増大につながり、機械・装置の信頼性、性能向上あるいは公害防止などの観点から、ますます動的な特性を考慮した設計が必要となっている。そこで、機械構造物の振動挙動を予測するための周波数応答解析法、時刻歴応答解析法などの動的応答解析法<sup>(1)</sup>、あるいは大規模な構造物の解析効率を向上させるための部分構造合成法<sup>(2)</sup>などの新しい数値解析法が開発され、設計に取り入れられている。ところで、通常的设计過程を考えると、設計者は経験や勘あるいは過去の設計データなどから試作的な設計を行い、その動的応答解析結果あるいは試作実験結果を設計条件と照合し、不具合があれば元の設計を繰り返し修正することにより、最終的な設計を決定している。しかし、製品開発においては、最短期間に最小費用で設計条件を満足することが要求されており、試行錯誤的に繰り返される設計変更あるいは試作実験の作業をできるだけ少なくするための手段が求められている。その手段として、数理計画法と総称される最適化手法<sup>(3)</sup>を用いた最適形状決定法<sup>(4)</sup>や構造を変更したときの動特性の変化を予測する構造変更シミュレーション手法<sup>(1)・(5)</sup>が極めて有効になっており、設計に応用されつつある。

以上のように、動的応答解析法、シミュレーション技術の開発が進み、設計における有効な道具となっている。ところで、動的応答解析あるいは構造変更シミュレーションを行う場合に重要なことは、解析モデルが実際の機械構造物をどれだけ的確に表現しているかであり、解析精度、シミュレーションの信頼性は解析のモデル化の程度に依存する。そこで、機械構造物の動特性を的確に表現する物理モデルの構築、すなわち系を同定する技術の確立が大きな課題となっている<sup>(1)・(2)</sup>。

系の同定には、理論的方法と実験的方法がある。前者では、有限要素法などの離散化手法を用いて質量マトリックス、剛性マトリックスを決める同定法が一般的であり、現在広く用いられている。しかし、理論的方法では、減衰マト

リックスを決定できないという重大な難点がある。また、ほとんどの構造物は複雑であり、理論的方法を直接適用することが困難な場合が多い。後者では、振動実験で得られた伝達関数の周波数スペクトルや時刻歴応答曲線に適合するように固有振動数、モード減衰比、固有モードなどのモーダルパラメータを同定する、いわゆる実験的モード解析法<sup>(6)</sup>・<sup>(7)</sup>と呼ばれる方法が主流である。この方法を用いれば、構造物の固有モードを視覚的にとらえることや固有振動数の値を知ることが容易にでき、振動特性診断やトラブルシューティングを行う際の有用な情報となる。しかし、モーダルパラメータは構造物の物理的特性、すなわち質量、減衰および剛性を直接表現する量ではないので、設計に生かす場合にモーダルパラメータの最適値が見つかったとしても、設計の寸法形状をどう決めたら良いかの物理的判断がしにくいという難点がある。

以上のように、理論的同定法と実験的同定法はそれぞれ欠点を有するので、両者を補う手段が必要となる。そのような手段として、振動実験から得られる情報をもとに、固有振動数、モード減衰比、固有モードなどのモーダルパラメータに留まらず、質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスといった特性マトリックスなどの物理的イメージの明確な物理モデルを同定する方法が考えられる。この物理モデルは有限要素法と結合できる上に、部分構造合成法や最適設計法などの高度な数値解析法に直接利用できる特長がある。

実験データから物理モデルを同定する方法は、実験データだけを用いて直接物理モデルを同定する方法と、理論的に算定された物理モデルを実験データをもとに修正する方法に分類される。

前者の方法として、これまでに、対角行列法<sup>(8)</sup>、疑逆行列法<sup>(6)</sup>などの実験で得られたモーダルパラメータから直接的に小自由度の集中質量系モデルを同定する方法が提案されている。また、大熊・長松<sup>(9)</sup>および岡田ら<sup>(10)</sup>は、実験で得られた伝達関数からモーダルパラメータを介することなく直接的に多自由度の特性マトリックスを決定する同定法を提案している。さらに、大熊・長松は伝達関数にノイズの含まれる場合の同定精度向上を目指して、統計解析の概念を導入した同定法<sup>(11)</sup>を提案し、粘性減衰マトリックスと履歴減衰マトリックスを組み合わせた減衰振動系の同定<sup>(12)</sup>を行っている。その適用例として、エンジンブロックの慣性モーメント、重心位置およびマウントの減衰特性の同

定<sup>(13)</sup>を試みている。また、慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を同定する研究として、Contiら<sup>(14)</sup>はモーダルパラメータを用いて直接算定した特性マトリックスから剛体の慣性モーメント、重心位置を算定する方法を提案している。大久保ら<sup>(15)</sup>は伝達関数の剛体変位特性から直接的に慣性モーメント、重心位置を同定する方法を提案している。

一方、後者の方法として、有限要素法などで求めた大自由度のモデルにおいて、実験データから得られる固有振動数、固有モード、応答変位などに合うように、設計変数に対する固有振動数などの感度を用いて少数の設計変数の値を繰り返し修正し、その値を同定するベイジアン手法<sup>(16)</sup>・<sup>(17)</sup>に代表される方法がある。関連する研究として、岩壺ら<sup>(18)</sup>はベイジアン手法を拡張し、同定する設計変数の不確定性を考慮した同定法を提案している。萩原ら<sup>(19)</sup>・<sup>(20)</sup>は感度解析の計算効率を改善し、結果として同定計算に要する時間を短縮する方法を提案している。また、Vandeurzenら<sup>(21)</sup>・<sup>(22)</sup>は固有モードが質量マトリックス、剛性マトリックスを挟んで広義の直交性を有することを利用し、直交性を制約条件とすることにより同定精度を向上させる方法を提案している。さらに、Wei<sup>(23)</sup>らは大自由度のモデルにおいて、モデリング誤差の大きい要素を推定することにより同定するパラメータの数を減らし、結果として計算効率、同定精度を向上させる方法を提案している。

ところで、感度解析を用いて物理モデルを修正する方法は、現在のところ、系を同定する目的よりも最適設計分野への応用が多く見られる。山川ら<sup>(24)</sup>は梁構造物の形状に対する応答変位の感度を用いて、応答変位を最小化するための最適形状決定法を提案している。中桐ら<sup>(25)</sup>・<sup>(26)</sup>は有限要素梁の固有値、固有モードあるいは特定の周波数のコンプライアンスを所望の値に変更するための断面二次モーメント、断面積の決定法を提案している。大久保ら<sup>(27)</sup>は二輪車用フレームの固有振動数を所望の値に変更するための質量算定法を提案している。大熊ら<sup>(28)</sup>、岩原ら<sup>(29)</sup>は板厚を変更し、平板の固有振動数を所望の値にするための板厚の最適化手法を提案し、実機のフライホイール、シリンダブロックに適用している。さらに、Zhangら<sup>(30)</sup>は大幅に固有振動数を変更する場合の質量修正量を、高次の感度を用いることにより精度よく算定する方法を提案している。

以上のように、振動実験データから物理モデルを同定する方法は、実験データから直接的に特性マトリックスを同定する方法と、なんらかの方法で物理モデルを算定し、そのモデルを実験データをもとに修正する方法がある。

ところで、前者の特性マトリックスを同定する方法においては、同定結果を利用する上で不利な点が見られる。例えば、特性マトリックスを構成する個々のパラメータが陽な形で表れないため、物理的イメージが浮かび難く、同定結果を防振設計あるいは構造再設計に直接生かすことが困難な場合がある。また、得られる特性マトリックスの自由度に回転自由度を組み込むことが難しく、汎用の有限要素法で得られる理論的マトリックスとの結合が困難な場合がある。

一方、後者の感度解析を用いて物理モデルを修正する方法においては、有限要素法などで求めた大自由度のモデルにおいて、全自由度に比べて非常に少ない数の設計変数の値を同定すること、あるいは最適設計の分野を眺めても、少数の設計変数の変更量を決定することに主眼がおかれている。また、多数のモデルパラメータを同定する場合でも、モデルの質量特性あるいは剛性特性を固定し、系を拘束した上で同定する方法、あるいはベイジアン手法で行われるように、同定するモデルパラメータの初期値に重みをおいて、初期値の周辺で解を安定に求める方法がとられている。系を同定する観点から考えると、多くのモデルパラメータの値をあらかじめ与えて、その拘束条件のもとで少数のパラメータを同定する場合には、既知とするパラメータの値によっては最良な系が同定されとは限らない。また、既知とするパラメータの数を減らすためにベイジアン手法を適用する場合にも、初期値が適切でない場合には最良な系が同定できない、あるいは解が収束しない場合が考えられる。したがって、感度解析を用いた同定法を物理モデルの構築に利用する上では、多数のモデルパラメータをどのように同定するか、反復計算の収束性が悪い場合にどのように対処するかなど、まだ問題点が残されている。しかし、特性マトリックスを構成する個々のパラメータが陽な形で同定できるので、同定結果を防振設計あるいは構造再設計に生かす上で有利であると考えられる。

そこで、感度解析を用いた同定法により、精度よい物理モデルを構築する上では、(1)既知とするモデルパラメータの数を減らして、系の変更自由度を大きくする。(2)同定結果がモデルパラメータの初期値に依存しにくい。などが

望まれる。また、同定法を実用化する上では、同定計算における反復計算の収束安定性、収束速度が大きな問題<sup>(26)・(31)</sup>となるので、モデルパラメータの初期値に依らず安定に収束する方法が望まれる。そのためには、(1)実験で得られるデータ量と同定しようとするモデルパラメータの数の関係、(2)同定の目標とする実験データの内容、(3)収束性を向上させるための方策、などの検討が必要となる。

ところで、振動対策は、機械の信頼性向上、性能向上を目的とし、機械そのものを対象として対策を施す場合だけでなく、機械から発生する励振力の基礎への伝達を防ぐ、あるいは基礎の振動を機械に伝達することを防ぐ、いわゆる振動絶縁を目的とした防振支持対策も重要な課題となっている。例えば、車両用エンジンの振動が車体に伝達することを防ぐ、あるいは精密機器、測定器などに伝達される地盤振動を除去する場合など、最適な防振支持設計を要求される例は多い。防振支持設計の考え方、対策を行うための解析モデルはかなり明確になっているが、実際の設計で重要となるのは、対象とする機械の慣性主軸、重心位置などの剛体的特性がいかに精度よく求まっているかである。剛体的特性が既知となれば、要求を満足する防振支持系の支持弾性体のばね定数、支持位置を決定することが可能となる。ところで、慣性主軸、重心位置などの剛体的特性は設計図面から算定できるが、構造が複雑となると算定の労力が大変であり、誤差も生じやすい。そこで、仮の防振支持あるいは試験状態における振動実験データから機械の慣性モーメント、重心位置を精度よく求める方法が望まれている。実験データから剛体的特性を同定する方法は、実験データから質量マトリックスを同定し、その質量マトリックスの要素から慣性主軸、重心位置などを二次的に推定する仏円ら<sup>(13)</sup>、Contiら<sup>(14)</sup>の方法が見られる程度であり、感度解析を用いた同定法の適用はこれまでのところなされていない。

そこで、本論文では、系に感度解析を用いて、振動実験あるいは設計仕様から決定した固有振動数、モード減衰比、固有モードの情報をもとに、特性マトリックスに留まらず、その構成要素である多数のモデルパラメータの値を直接同定する方法について検討する。特に、感度解析を用いた同定法を実用化する上で問題となる反復計算の収束性を向上させる方法を検討する。また、同定法の応用として、これまで検討がなされていなかった防振支持設計を想定したモ

デル，すなわち剛体が弾性体で支持されたモデルを取り上げる。そして，実験データから剛体の慣性主軸，重心位置などの剛体的特性および防振ゴムなどの減衰特性を同定する方法を検討する。さらに，剛体に柔軟な構造物が付属したモデルを取り上げ，柔軟構造物が振動する状態で測定したデータから，柔軟構造物を有する剛体の系全体の慣性モーメント，重心位置などの値を効率よく同定する方法を検討する。また，それぞれのモデルにおいて，多数のモデルパラメータを同定するために同定の目標とする実験データの内容について検討し，精度よい同定を行うために考慮すべき点を明らかにする。

第2章以下で取り扱う内容を述べると，次のようになる。

第2章では，本論文で取り上げる同定法に関する基礎的研究を行う。すなわち，振動系の基本と考えられるばねと集中質量だけからなる非減衰振動系を取り上げ，既知とした固有振動数，固有モードと同じ振動特性を有する質量，ばね定数の値を同定する方法について検討する。同定法の基本的な考え方は，目標とする固有振動数，固有モードに，力学モデルの固有値解析で得られるモーダルパラメータが近づくように，固有振動数，固有モードの感度を用いてモデルパラメータを繰り返し修正する方法である。その中で，多数のモデルパラメータを同定するために，目標とする固有振動数，固有モードの設定条件と同定対象とするモデルパラメータの選定条件について検討し，精度よい同定を行うために考慮すべき点を明らかにする。そして，三自由度系モデルを対象に数値実験を行い，目標とする固有振動数，固有モードの設定あるいは同定対象とするモデルパラメータの選定が同定結果に及ぼす影響について検討する。

第3章では，反復計算の収束性を向上させる同定法を提案する。

反復計算を必要とする同定法を実用化する上では，収束速度および収束安定性が大きな課題<sup>(26)・(31)</sup>となっている。第2章でも，同定計算過程において，多くの反復計算を要したり，収束の安定性が悪くなる場合があり，改善の余地が認められた。そこで，第2章で対象とした同定の評価に固有振動数，固有モードを用いる場合に問題を限定した上で，同定計算の収束性を向上させる方法について検討する。その中で，第2章の同定法を用いた場合に，収束性が悪くなる原因を考察する。そして，収束性を向上させるために，第2章とは異なる固有モードの評価法を用い，その評価法で得られた量を評価関数に用いる同定



法を提案する。さらに、提案する同定法が収束性の向上に与える効果を考察する。そして、数値実験を行い、提案する同定法の有効性を検討する。

第4章では、同定法を機械の防振支持設計に適用することを想定する。機械の防振支持設計においては、機械から発生する励振力の周波数に対して、防振支持された系の固有振動数が主要な励振周波数より低くなるか、励振周波数の谷間になるように支持弾性体のばね定数、支持位置を調整する。そのためには、支持する機械の質量、慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を正確に把握しておく必要がある<sup>(32)</sup>。慣性モーメントや重心位置は設計図面から算定できるが、構造が複雑となると算定の労力が大変であり、誤差も生じやすい。そこで、試験状態における実験データから慣性モーメント、重心位置が精度よく同定できれば、実機のより精度のよい防振支持設計が可能となる。そこで、本章では、支持する機械の慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を実験データから同定する方法を提示する。その中で、剛体の重心位置を同定するために、重心位置の座標を空間に固定した座標系からの偏差のパラメータを用いて表し、重心位置を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示する。また、実験では回転角変位を直接測定することが困難であるため、通常の変位センサを用いて得られる並進変位データを同定計算に用いるための方法を明らかにする。そして、数値実験を行い、同定法の妥当性を確認する。また、実測データによる同定において、目標とする固有振動数、固有モードと同定されたモデルパラメータの関係を考察し、精度よい同定を行うための目標値の設定条件について検討する。さらに、本章で扱うモデルに対しても、第3章で提案した同定法を適用し、その有効性を検討する。

第5章でも、同定法を機械の防振支持設計に適用することを想定する。実際の防振支持設計においては、防振支持系の各自由度を非連成あるいは特定な自由度だけを非連成とすることが望ましく、そのための支持弾性体の支持位置、支持方向を決定する情報としては、機械の重心位置はもちろん、第4章では同定できなかった慣性主軸方向が既知でなければならない<sup>(33)</sup>。そこで、本章では、第4章では同定できなかった剛体の慣性主軸方向および主慣性モーメントの値を実験データから同定する方法を提示する。その中で、剛体の慣性主軸方向を同定するために、空間に固定した座標系の各座標軸方向と慣性主軸方向と

の角度のずれを表すパラメータを用いて慣性主軸方向を表し，慣性主軸方向を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示する。そして，実測データによる同定を行い，同定法の妥当性を確認する。また，同定計算における慣性主軸方向，主慣性モーメントの初期値の設定において，収束性を向上させるために考慮すべき点について検討する。さらに，同定法を防振支持設計の特性改善に適用することを試み，その有効性を検討する。

第6章では，防振ゴムなどの減衰特性を同定するために，減衰振動系を取り上げ，その同定法を提示する。防振支持性能を向上させるためには，減衰性の確保も重要となる。そこで，減衰要素としての機能を有する防振ゴムが広く利用されている。しかし，実働状態の防振ゴムの減衰係数，ばね定数は，防振ゴム単体で得られた値とは異なるため，実働状態における減衰係数，ばね定数を測定する方法が求められている。そこで，本章では，防振ゴムで支持された剛体系モデルを取り上げ，実験データから防振ゴムの減衰係数，ばね定数を同定する方法を提示する。そして，数値実験および実測データによる同定を行い，同定法の妥当性を確認する。また，目標とする減衰固有振動数，モード減衰比，複素固有モードの組み合わせを変えた同定計算結果をもとに，減衰係数などのパラメータが同定可能となる目標値の設定条件について検討する。

第7章では，剛体に柔軟な構造物が付属した構造物を取り上げる。このような構造物は，太陽電池パドルなどが付属した人工衛星<sup>(34)</sup>，柔軟アーム構造の軽量化ロボット<sup>(35)</sup>，磁気ディスク装置の磁気ヘッド<sup>(36)</sup>などに見られる。そのような系の姿勢制御，位置制御においては，柔軟構造物の動特性だけでなく，柔軟構造物が付属した状態の系全体の慣性モーメント，重心位置などの剛体的特性も重要な値となる。そこで，第4章から第6章までの剛体が弾性支持されたモデルに対する同定法を拡張し，剛体に柔軟構造物が付属した構造物において，柔軟構造物を剛体とみなした系全体の慣性モーメント，重心位置などの値を柔軟構造物が振動する状況で計測したデータから効率よく同定する方法を提示する。そして，数値実験および実測データによる同定を行い，同定法の妥当性を確認する。また，本章で扱うモデルに対しても，第3章で提案した同定法を適用し，その有効性を検討する。

第8章は，本論文の結論である。

## 第2章 多自由度振動系の同定法

### 2.1 緒言

本章では、振動系の基本と考えられるばねと集中質量からなる非減衰振動系を取り上げ、既知とした固有振動数、固有モードと同じ振動特性を有する質量、ばね定数の値を同定する方法について検討する。同定法の基本的な考え方は、目標とする固有振動数、固有モードに、力学モデルの固有値解析で得られる固有振動数、固有モードが近づくように、固有振動数、固有モードの感度を用いて質量、ばね定数の値を繰り返し修正するものである。

ところで、感度解析を用いてモデルパラメータを同定する研究は、有限要素法などで求めた大自由度のモデルにおいて、全自由度に比べて、非常に少ない数の設計変数の値を同定すること、あるいは最適設計の分野を眺めても、少数の設計変数の変更量を決定することに主眼がおかれている。また、多数のモデルパラメータを同定する場合でも、ベイジアン手法<sup>(17)</sup>で行われるように、同定するモデルパラメータの初期値に重みをおいて、初期値の周辺で解を安定に求める方法がとられている。系を同定する観点から考えると、多くのモデルパラメータの値をあらかじめ与えて、その拘束条件のもとで少数のパラメータを同定する場合には、既知とするパラメータの値によっては最良な系が同定されるとは限らない。また、ベイジアン手法においても、モデルパラメータの初期値の信頼性が低い場合には、初期値に系が拘束され、最良な系が同定されるとは限らない。したがって、物理モデルの構築、すなわち系を同定するためには、系を拘束することなく、多数のパラメータを同時に同定しなくては精度よい系の同定ができないと考えられる。しかし、これまでの研究では、多数のパラメータを同時に同定するための検討が不十分であり、同定が可能となる場合の同定対象とするモデルパラメータの選定条件および目標とする固有振動数、固有モードの設定条件などを明確にしておく必要がある。

そこで、本章では、多数のモデルパラメータを同時に同定するために、目標とする固有振動数、固有モードの設定条件および同定対象とするモデルパラメータの選定条件について検討し、精度よい同定を行うために考慮すべき点を明らかにする。また、三自由度系、五自由度系のモデルに対して数値実験を行い、

目標とする固有振動数，固有モードの設定あるいは同定対象とするモデルパラメータの選定が同定結果に及ぼす影響について検討する。

## 2. 2 振動解析と逆問題

本章では，同定対象として，図2.1に示す多数のばねと質量からなる多自由度系を取り上げる。図2.1において質量は集中質量とし，ばねは質量と固定端を接続するばねと質量間を接続するばねを考える。各質量は紙面に垂直な方向のみの自由度を有するとし，ばねはすべてせん断ばねと考える。まず，図2.1のモデルの理論解析を行う。点*i*の質量を $m_i$ ，点*i*の質量と固定端を結ぶばねのばね定数を $k_{i1}$ ，点*i*の質量と点*j*の質量を結ぶばねのばね定数を $k_{ij}$ とすると，*n*自由度系の自由振動状態における運動方程式は次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここで，

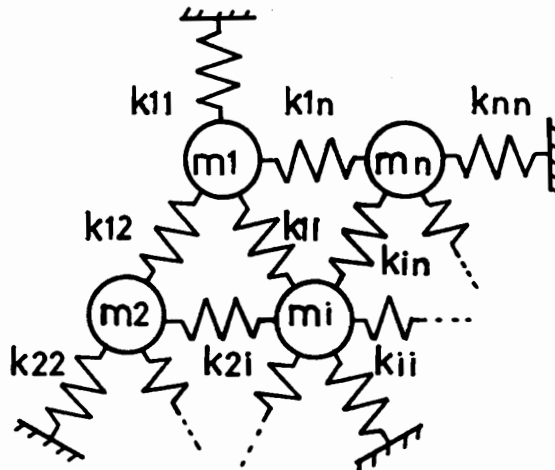


図2.1 ばね・集中質量系モデル

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & m_n \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} \cdots K_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ K_{n1} \cdots K_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.2)$$

ただし,

$$K_{ii} = k_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n k_{ij}$$

$$K_{ij} = -k_{ij}$$

$$(i=1, \dots, n, j=1, \dots, n)$$

\dots\dots\dots (2.3)

式(2.1)に対応する特性方程式は

$$-\lambda_j [M] \{N_j\} + [K] \{N_j\} = \{0\} \dots\dots\dots (2.4)$$

となり, 式(2.4)の固有値解析を行えば, n組の固有値 $\lambda_j$ , 固有モード $\{N_j\}$ の固有ペアが得られる。

通常の振動解析では, 系の振動特性を決定するモデルパラメータ $m_i, k_{ij}$ を与えて式(2.4)の特性方程式を導き,  $\lambda_j, \{N_j\}$ などのモーダルパラメータを求めることになる。しかし, 本研究では通常の振動解析とは逆に, 式(2.4)におけるいくつかの固有値 $\lambda_j$ , 固有モード $\{N_j\}$ を与えて,  $[M], [K]$ を構成する質量, ばね定数などのモデルパラメータの値を同定する方法について検討する。その方法として感度解析を用いる方法を採用し, 図2.2に示す計算手順で同定を行う。すなわち,

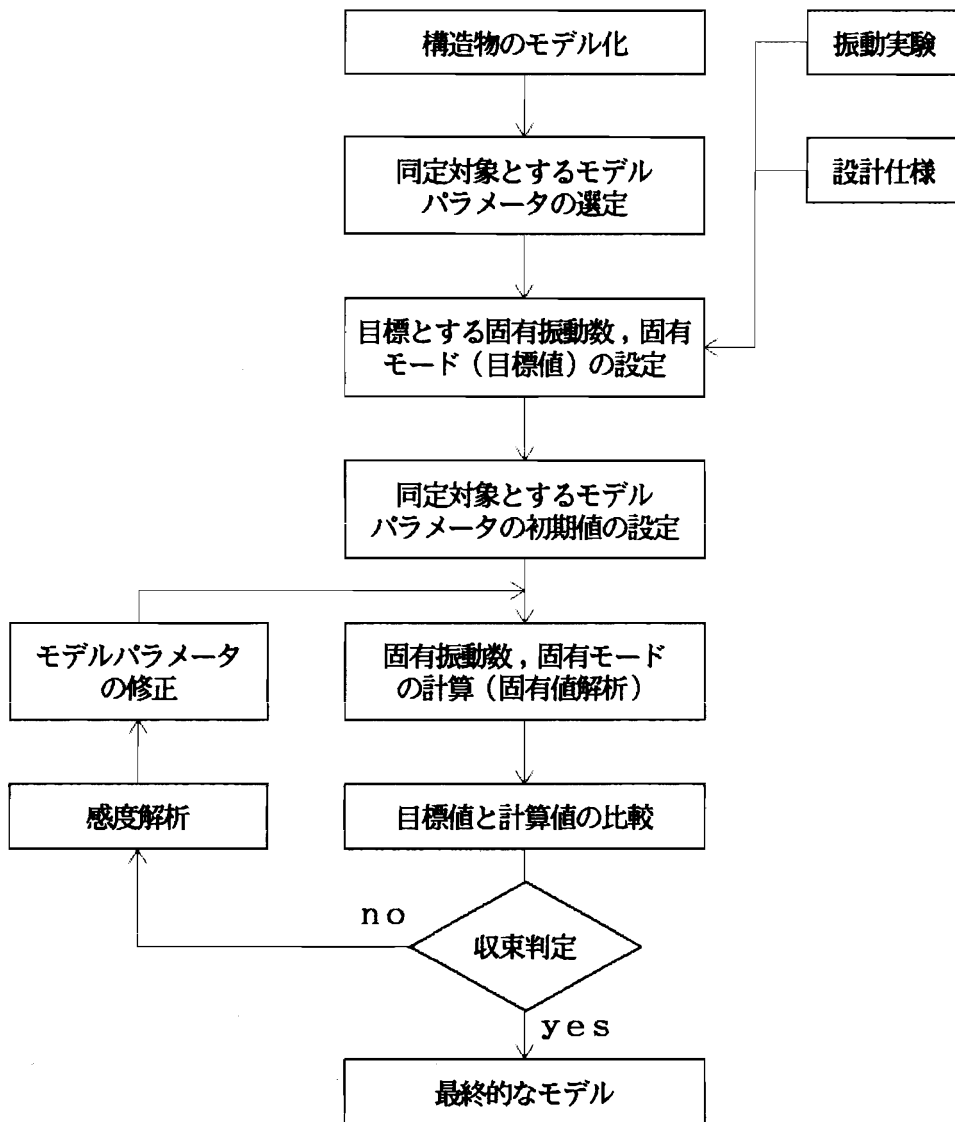


図2.2 同定計算手順

- (1) 振動系を表現する力学モデルを決め、同定対象とするモデルパラメータを選定する。
- (2) 同定の目標とする固有値，固有モードを設定する。
- (3) 選定したモデルパラメータの初期値を与え，通常の方法で固有値解析を行い，初期モデルの固有値，固有モードを求める。
- (4) 感度解析を行い，同定しようとするモデルパラメータに対する固有値，固有モードの一次感度を算出する。
- (5) 算出された感度を用いて，初期モデルを変更したときのモデルパラメータの変化を予測し，その予測値と目標値との差が最小となるようにモデルパラメータを修正する。
- (6) 修正されたモデルパラメータを用いて再度固有値解析を行い，目標値と比較し，残差が大きい場合には，同様な過程を残差が小さくなるまで繰り返す。となる。このような手順により，目標とする固有値，固有モードと同じ振動特性を有する力学モデルのパラメータを同定することができる。

## 2.3 同定法の定式化

本節では，モデルパラメータを修正する際に必要となるモデルパラメータに対する固有値，固有モードの一次感度を算出する方法，および感度を用いてモデルパラメータを修正し，同定するための具体的方法を説明する。

### 2.3.1 感度解析<sup>(37)</sup>

同定しようとする  $m_i, k_{ij}$  などのモデルパラメータの総数を  $m$  個とし，その  $k$  番目のパラメータを  $d_k$  と表し，初期値  $d_{k0}$  を次式のように変更率  $\gamma_k$  だけ変更した状態を考える。

$$d_k = d_{k0}(1 + \gamma_k) \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここで，固有値  $\lambda_j$ ，固有モード  $\{N_j\}$  は  $d_k$  の非線形関数，したがって， $\gamma_k$  の非線形関数となるので，固有値，固有モードを  $\gamma_k$  に関してテイラー展開し， $\gamma_k^2$  以上の項を省略すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_{j0} + \sum_{k=1}^m (\delta \lambda_j / \delta \gamma_k) \gamma_k \\ &= \lambda_{j0} + \sum_{k=1}^m \lambda_j' \gamma_k \quad \dots\dots\dots (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{N_j\} &= \{N_{j0}\} + \sum_{k=1}^m (\delta \{N_j\} / \delta \gamma_k) \gamma_k \\ &= \{N_{j0}\} + \sum_{k=1}^m \{N_j'\} \gamma_k \quad \dots\dots\dots (2.7) \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_{j0}$ 、 $\{N_{j0}\}$ はそれぞれ初期モデルの固有値、固有モードである。また、 $\delta \lambda_j / \delta \gamma_k$ 、 $\delta \{N_j\} / \delta \gamma_k$ は、それぞれk番目のモデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ に対するj次の固有値、固有モードの一次感度と呼ばれるもので、以下のようにして求めることができる。

特性方程式(2.4)を $\gamma_k$ について偏微分し、

$$\begin{aligned} -\lambda_j' [M] \{N_j\} - \lambda_j [M'] \{N_j\} - \lambda_j [M] \{N_j'\} \\ + [K'] \{N_j\} + [K] \{N_j'\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.8) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} [M'] = \delta [M] / \delta \gamma_k \quad [K'] = \delta [K] / \delta \gamma_k \\ \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

左から $\{N_j\}^T$ を乗じ、整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} (\{N_j\}^T (-\lambda_j [M] + [K])) \{N_j'\} \\ = \{N_j\}^T (\lambda_j' [M] + \lambda_j [M'] - [K']) \{N_j\} \quad \dots\dots\dots (2.10) \end{aligned}$$



式(2.10)において、[M]、[K]が対称マトリックスであることを考慮すれば、左辺の $\{N_j\}^T(-\lambda_j[M] + [K])$ は、特性方程式(2.4)を転置した式であるため零となる。そこで、式(2.10)の左辺を零と置き、整理すれば、次式のように変形でき固有値の一次感度 $\lambda_j'$ が求まる。

$$\lambda_j' = \frac{(\{N_j\}^T(-\lambda_j[M'] + [K'])\{N_j\})}{(\{N_j\}^T[M]\{N_j\})} \dots\dots\dots (2.11)$$

ここで、式(2.11)中の[M']、[K']は、それぞれ[M]、[K]の各成分を変更率 $\gamma_k$ で偏微分したものであるが、本章で扱うモデルの場合には、感度を求めようとするモデルパラメータ $d_k$ に関する成分だけを残し、他の成分は零としたマトリックスとして簡単に求められる。

固有モードの一次感度 $\{N_j'\}$ については、式(2.8)を変形し、

$$\begin{aligned} &(-\lambda_j[M] + [K])\{N_j'\} \\ &= (\lambda_j'[M] + \lambda_j[M'] - [K'])\{N_j\} \dots\dots\dots (2.12) \end{aligned}$$

とすれば、右辺はすべて既知量であるので、式(2.12)の方程式を解くことにより $\{N_j'\}$ を求めることができる。ただし、式(2.12)の左辺の係数マトリックスは正則ではないので、固有値に重根が無い場合には、 $\{N_j'\}$ の成分の内一つは零(固有モードのその成分の感度は零、すなわちモデルパラメータの変更後もその成分の大きさが変化しない)と拘束することにより、マトリックスのランクを一つ下げ $\{N_j'\}$ を求める必要がある。

以上のようにして、式(2.11)、(2.12)より、モデルパラメータに対する固有値、固有モードの一次感度を算出することができる。

### 2.3.2 同定法

対象とする振動系に関して、目標とする固有値 $\lambda_j^e$ 、固有モード $\{N_j^e\}$ が与えられたとする。また、同定対象とするモデルパラメータの選定および初期値の設定を行い、固有値解析、感度解析により初期モデルの固有値 $\lambda_{j0}$ 、固有モ

ード $\{N_{j0}\}$ およびそれぞれの一次感度 $\lambda_j'$ ,  $\{N_j'\}$ が求まっているとする。そこで、式(2.6), (2.7)で得られるモデルパラメータ変更後の固有値, 固有モードの変化予測値 $\lambda_j$ ,  $\{N_j\}$ が目標値 $\lambda_j^e$ ,  $\{N_j^e\}$ に近づくようにモデルパラメータを修正する。ここで、目標とする各モード次数の固有値および固有モードの各成分を並べたベクトルを $\{R^e\}$ , 初期モデルの固有値, 固有モードの各成分を目標値に対応するように並べたベクトルを $\{R_0\}$ , モデルパラメータを変更したときの固有値, 固有モードの変化予測値を並べたベクトルを $\{R\}$ とする。さらに、各モデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ を並べたベクトルを $\{\gamma\}$ , モデルパラメータに対する固有値, 固有モードの一次感度を要素とする感度マトリックスを $[S]$ とする。ただし、 $[S]$ は大きさ $n \times m$ のマトリックスであり、 $n$ は目標値の数、 $m$ は同定しようとするモデルパラメータの数を表す。要素 $S_{ik}$ は $k$ 番目のモデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ に対する $i$ 番目の目標値の感度となる。

ここで、モデルパラメータを変更したときの固有値, 固有モードの変化予測値 $\{R\}$ は、式(2.6), (2.7)よりマトリックスを用いて

$$\{R\} = \{R_0\} + [S]\{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

のように表される。そこで、予測値 $\{R\}$ を目標値 $\{R^e\}$ と比較し、最小二乗法を適用して、両者の差が最小になるように $\{\gamma\}$ を決める。その場合の評価関数として、次式で定義する目標値と予測値の残差二乗和 $E$ を用いる。

$$E = (\{R^e\} - \{R\})^T [W] (\{R^e\} - \{R\}) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

ここで、 $[W]$ は各目標値の相対的重みを決める対角マトリックスであり、その対角成分 $W_{ii}$ は評価関数を無次元化するため

$$W_{ii} = w_i / (R_i^e)^2 \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

となる。ここで、 $w_i$ は $i$ 番目の目標値の相対的重要度を表す重み係数である。式(2.13)を式(2.14)に代入した上で、 $E$ を $\{\gamma\}$ の成分である変更率 $\gamma_k$ で偏微

分し、ベクトルの形で表現すれば次式が得られる。

$$\delta E / \delta \{\gamma\} = 2(-[S]^T[W]({R^e} - {R_0}) + [S]^T[W][S]\{\gamma\}) \dots\dots\dots (2.16)$$

ここで、 $\delta E / \delta \{\gamma\}$ は $\delta E / \delta \gamma_k$ を縦に並べたベクトルを表す。Eを最小にするためには、式(2.16)のすべての式が零になればよい。そこで、左辺を{0}と置くことにより、 $\gamma_k$ を未知数とする次式の方程式が導かれる。

$$([S]^T[W][S])\{\gamma\} = [S]^T[W]({R^e} - {R_0}) \dots\dots\dots (2.17)$$

このように修正前のモデルに対する固有値、固有モードおよびその感度を算出しておけば、式(2.17)の方程式を解くことにより、モデルパラメータの変更率を求めることができる。なお、修正後の各モデルパラメータの値は、式(2.17)で得られた変更率 $\gamma_k$ を式(2.5)に代入することにより算出できる。

ところで、式(2.13)の感度マトリックス[S]の成分は、式(2.6)、(2.7)のテラー展開において、二次以上の高次の項を省略した一次感度だけからなるマトリックスである。したがって、式(2.17)で得られる変更率 $\gamma_k$ の値が大きい場合には式(2.13)の予測値の誤差が大きくなる。そこで、 $\gamma_k$ の大きさを制限し、小さな修正を積み重ねた反復計算により、最良なモデルパラメータの値を求める必要がある。

#### 2. 4 同定法の基礎的検討

2. 3節でモデルパラメータを同定する方法を説明した。しかし、実際に多数のモデルパラメータを同時に同定するためには、同定が可能となる場合の目標とする固有値、固有モードの設定条件、あるいは同定対象とするモデルパラメータの数と目標とする固有値、固有モードの数との関係などを検討しておく必要がある。そこで、本節では、多数のモデルパラメータを同時に同定するための基礎的検討を行う。

図2.1 に示すような  $n$  個の質量，質量と固定端を接続する  $n$  個のばね，質量間を接続する  $n(n-1)/2$  個のばねからなる  $n$  自由度系モデルの同定を考える。図2.3のように複数個のばねが並列あるいは直列に結合されている場合には，これらを集約して一つのばねに置き換えるものとする。このようにすると， $n$  自由度系のモデルパラメータの数は，合計  $n+n+n(n-1)/2 = n(n+3)/2$  個となる。ところで， $n$  自由度系の特性方程式は式(2.4)のようであるが，ここで改めて次のように

$$\begin{aligned} \{U_j\} &= [M]^{1/2}\{N_j\} \\ [A] &= [M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.18)$$

とすれば，次式の標準形の固有値問題に変換できる。

$$[A]\{U_j\} = \lambda_j\{U_j\} \dots\dots\dots (2.19)$$

ここで， $[A]$ は  $n \times n$ の大きさの対称マトリックスとなる。この特性方程式は  $n$ 組の固有値  $\lambda_j$ ，固有モード  $\{U_j\}$ の固有ペアを有しており，それらをまとめて

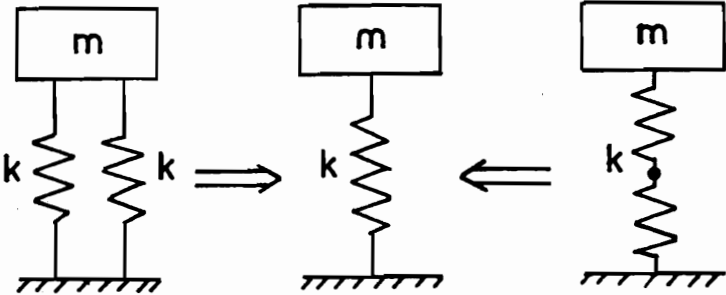


図2.3 ばねの集約例

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad [\Phi] = [\{U_1\}, \dots, \{U_n\}]$$

..... (2.20)

とすると、式(2.19)は

$$[A][\Phi] = [\Phi][\Omega] \quad \text{..... (2.21)}$$

のように表される。ここで、固有モードは互いに独立であるので $[\Phi]$ は逆行列が存在する。そこで、式(2.21)の右から $[\Phi]^{-1}$ を乗じると、

$$[A] = [\Phi][\Omega][\Phi]^{-1} \quad \text{..... (2.22)}$$

が得られる。式(2.22)において、固有値、固有モードが与えられると $[A]$ が一義的に定まることがわかる。ところで、 $[A]$ は対称マトリックスであるため、独立な成分の数は $n(n+1)/2$ 個である。したがって、系の振動特性を支配する因子の数は $n(n+1)/2$ 個であると考えられる。そこで、モデルパラメータの数が図2.1のように $n(n+3)/2$ 個の場合には、冗長すぎて固有値、固有モードから $n(n+3)/2$ 個のモデルパラメータを一義的に決定することはできない。したがって、少なくともモデルパラメータの数と支配因子の数の差 $n(n+3)/2 - n(n+1)/2 = n$ 個は、あらかじめ既知量として与えておかなければならないことになる。

次に、目標として与える固有値、固有モードなどのモーダルパラメータの数について検討する。 $n$ 自由度系では、 $n$ 個の固有値と $n$ 個の成分を持つ $n$ 組の固有モードの合計 $n+n \times n = n(n+1)$ 個の目標値が存在するように見える。しかし、固有モードは大きさを規準化する必要がある（例えば、成分の最大値を1となるように正規化する）、この拘束条件のために有効な固有モードの成分は各モードについて一つ減り、結局、 $n$ 自由度系では $n^2$ 個の目標となる値が存在する。ところが、系の支配因子の数は $n(n+1)/2$ 個であるから、 $n^2$

個の目標値を与えた場合には目標値の数が多すぎる。したがって、一般的にはすべての目標値を満足するモデルパラメータを求めることはできず、最良近似の意味においてしかモデルパラメータを同定できないことになる。 $n^2$ 個の目標値がマトリックス[A]の $n(n+1)/2$ 個の支配因子から膨張した形で生み出された値の場合には、すべての目標値を完全に満足する同定ができるが、誤差を含む場合には完全な同定は困難になると考えられる。

また、同定できるモデルパラメータの数は最大 $n(n+1)/2$ 個であるから、目標値の数も $n(n+1)/2$ 個あればよく、モデルパラメータの数が少なくなれば目標値の数も少なくてよいはずである。もちろん目標値の数は同定しようとするモデルパラメータの数より多く与えなくてはならない。目標値の数を少なくして $n^2$ 個以下にする場合、どれを目標値として採用し、どれを省略するかが問題となる。式(2.22)を眺めてみると、マトリックス[A]は $[\Omega]$ を $[\Phi]$ によって相似変換して求めている。すなわち、 $[\Omega]$ が[A]の特性を決めるものになっており、 $[\Omega]$ の成分である $\lambda_j$ を一つでもまびくとそれを相似変換した[A]が特異マトリックスになる。また、固有モードにおいてある質量に関する成分を全く目標値に採用しなかった場合には、 $[\Phi]$ の対応する行成分がすべて零となり、式(2.22)の $[\Phi][\Omega][\Phi]^{-1}$ の対角成分に零となるものが現れ、[A]が特異マトリックスになる。このように、[A]が特異マトリックスになると[A]の独立な成分の数が $n(n+1)/2$ 個以下になり、 $n(n+1)/2$ 個のモデルパラメータの値を一義的に決定できないことになる。そこで、 $n$ 自由度系の同定において $n(n+1)/2$ 個のパラメータを同定する場合には、 $n$ 個の固有値および各質量に関する固有モードの成分を少なくとも一つづつは含まなければならないと考えられる。次節以下に示す数値計算例においても、固有値あるいはある質量に関する固有モードの成分をすべて目標値から除いた場合には、同定計算過程において式(2.17)の係数マトリックス $[S]^T[W][S]$ が特異マトリックスになり、方程式が解けない場合やモデルパラメータの値が一義的に定まらず、収束しない場合を経験した。

なお、モデルパラメータの数が $n(n+1)/2$ 個より少ない場合、すなわち既知とするモデルパラメータの数が増えると、その分だけ[A]の支配因子を固定することになり、目標とする固有値、固有モードの成分の数を減らしてもモデ

ルパラメータの同定が可能となる傾向にある。

以上の考察および数値計算例の経験をまとめると次のようになる。

- (1) 同定しようとするモデルパラメータの数  $N_p$  は支配因子の数より少なくしなければならない。すなわち、 $N_p \leq n(n+1)/2$  とする。したがって、残りのモデルパラメータの数  $(n(n+3)/2 - N_p)$  個は既知の値として与える必要がある。
- (2) 目標値の数  $N_o$  は  $N_p$  より多く与える必要がある。同定しようとするモデルパラメータの数が  $n(n+1)/2$  個の場合には、目標値の中にすべてのモード次数の固有値および各質量に関する固有モードの成分を少なくとも一つづつは含まなければならない。しかし、既知のモデルパラメータの数が多く、同定しようとするモデルパラメータの数が少ない場合には、この条件を緩めることができる。与えた固有値、固有モードの組み合わせが適切かどうかは、式(2.17)の係数マトリックスの特異性で判断できる。
- (3)  $N_o > N_p$  の場合は最良近似の意味で同定可能、 $N_o = N_p$  の場合には目標値の正確な同定が可能となる。しかし、目標値が現実的な値から大きく離れている場合には、同定できなくなる場合や同定できても同定された値が物理的に意味のないものとなる可能性がある。

## 2.5 数値実験例

同定法および2.4節の考察の妥当性を確かめるために、簡単なばね・質量系に対して同定を試み、その結果について検討する。ここでは、既知のモデルパラメータを用いて固有値解析を行い、その結果得られた固有値、固有モードを実験値として代用する。

### 2.5.1 三自由度ばね・質量系の同定と固有値、固有モードの選択が同定結果に及ぼす影響

最初のモデルとして図2.4に示す三自由度系モデルを取り上げる。このモデルの場合、2.4節で述べたことからモデルパラメータの総数は  $n(n+3)/2 = 9$  個、目標となる固有値、固有モードの総数は  $n^2 = 9$  個となる。

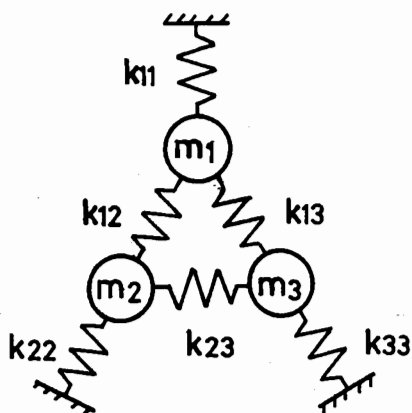
(a) 目標値が固有値解析結果の場合

既知のモデルパラメータを用いた固有値解析により得られた9個のモーダルパラメータを目標値として、同定しようとするモデルパラメータの組み合わせを変えた場合の同定結果について検討する。

同定するモデルパラメータの数を6個( $N_p=6$ )とし、その組み合わせを変える。目標値の算出に用いたモデルパラメータの諸元を表2.1に、固有値解析の結果得られたモーダルパラメータを表2.2に示す。そこで、表2.2の一次モードから三次モードまでの固有値および固有モードを目標として同定計算を行う。

表2.1 三自由度ばね・質量系モデルの諸元

Model parameter	$m_1$ kg	$m_2$ kg	$m_3$ kg	$k_{11}$ N/m	$k_{22}$ N/m	$k_{33}$ N/m	$k_{12}$ N/m	$k_{13}$ N/m	$k_{23}$ N/m
	3.0	2.0	4.0	30.0	40.0	20.0	10.0	30.0	20.0



Model parameters

$m_1$	$k_{11}$	$k_{12}$
$m_2$	$k_{22}$	$k_{13}$
$m_3$	$k_{33}$	$k_{23}$

図2.4 三自由度ばね・質量系モデル



表2.2 固有値解析結果  
(三自由度ばね・質量系モデルの場合)

Mode No.		1	2	3
Eigen value $\lambda_j$		8.76	29.48	37.59
Eigen vector	$N_{1j}$	0.809	1.0	-0.080
	$N_{2j}$	0.535	-0.130	1.0
	$N_{3j}$	1.0	-0.572	-0.219

$\lambda_j$  : j 次の固有値

$N_{ij}$  : j 次固有モードの点 i の成分の値

ただし，同定する6個のモデルパラメータの組み合わせは，図2.5中に示す5通りとした。なお，既知とした残りの3個のモデルパラメータの値は表2.1の値を用いた。そこで，同定する6個のモデルパラメータの初期値および目標値の重み係数をすべて1.0とし，同定計算を行った。

同定計算の反復計算回数と目標値との残差の関係を図2.5に示す。ただし，縦軸は目標値と各反復計算過程の固有値，固有モードとの残差の二乗和である。図2.5において，各ケースの収束の状況は異なるが，反復計算回数7回から10回の間ですべての場合に残差が $10^{-12}$ 以下となっていることがわかる。また，同定されたモデルパラメータの値はすべて表2.1の値と一致した。したがって，目標値が式(2.22)の[A]の支配因子から膨張した形で生み出された値の場合には，同定結果は同定するモデルパラメータの組合せには依存せず，すべての場合に正しいモデルパラメータの値が同定できると考えられる。

なお，目標値が固有値解析結果の場合には，2.4節で示した条件を満たすように目標値の数( $N_o < 9$ )，モデルパラメータの数( $N_p < 6$ )を設定してもすべて同様な結果となった。

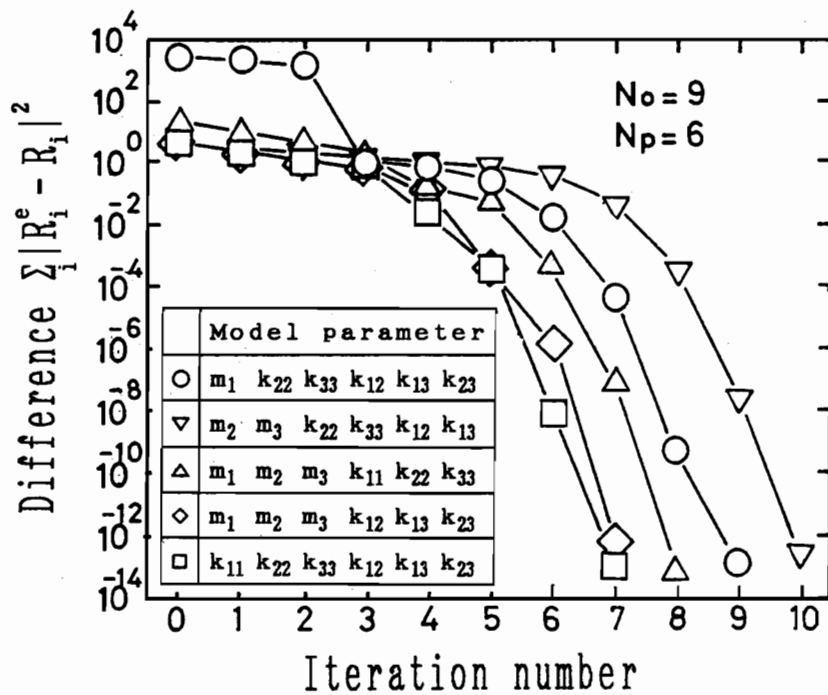


図2.5 反復計算回数と残差の関係  
(目標値が固有値解析結果の場合)

(b)目標値が誤差を含む場合

ここでは、目標とするモーダルパラメータが実験値である場合を想定し、目標値に誤差を含む場合の同定結果について検討する。

通常、振動実験で得られる測定値には誤差が含まれるため、表2.2に示すような有効数字3桁のデータを得ることは困難であると考えられる。そこで、通常の測定データより大きな誤差を有する目標値として、表2.2のモーダルパラメータを、固有値については有効数字1桁、固有モードについては小数点以下1桁のデータになるように丸めた表2.3に示す値を設定し、同定計算を行う。

a. 同定しようとするモデルパラメータの数 $N_p$ が6個のときに目標とするモーダルパラメータの数 $N_o$ を9個、8個、7個、6個と変化させた場合

同定しようとするモデルパラメータの数が6個の場合に、目標値の数を9個、8個、7個、6個と変えたときの同定結果について検討する。ただし、同定する6個のモデルパラメータとして、図2.4に示す6個のばね定数 $k_{11}$ 、 $k_{22}$ 、 $k_{33}$ 、 $k_{12}$ 、 $k_{13}$ 、 $k_{23}$ を選び、既知とした3個の質量は表2.1の値を用いた。

表2.3 目標とするモーダルパラメータ  
(誤差を含む場合)

Mode No.	1	Error%	2	Error%	3	Error%	
Eigen value $\lambda_j$	10.0	14.16	30.0	1.76	40.0	6.41	
Eigen vector	$N_{1j}$	0.80	-1.11	1.0	-	-0.10	-24.53
	$N_{2j}$	0.50	-6.54	-0.10	23.08	1.0	-
	$N_{3j}$	1.0	-	-0.60	-4.90	-0.20	8.68

$\lambda_j$  : j 次の固有値

$N_{ij}$  : j 次固有モードの点 i の成分の値

目標とするモーダルパラメータは、表2.3の値を用いて、図2.6中に示す9個、8個、7個、6個の場合とした。

反復計算回数と目標値との残差の関係を図2.6に示す。図2.6において、目標値が誤差を含むため  $N_o = N_p$  の場合だけが残差が零に近くなり、 $N_o > N_p$  の場合にはある程度の残差を含んだまま収束していることがわかる。また、目標値の数  $N_o = 9$  および6の場合について、同定されたモデルパラメータから得られたモーダルパラメータと目標としたモーダルパラメータの比較を表2.4に示す。表2.4において、 $N_o = 9$  の場合には固有値は一致しているが、固有モードの成分に違いが認められる。しかし、 $N_o = 6$  の場合には、目標としたモーダルパラ

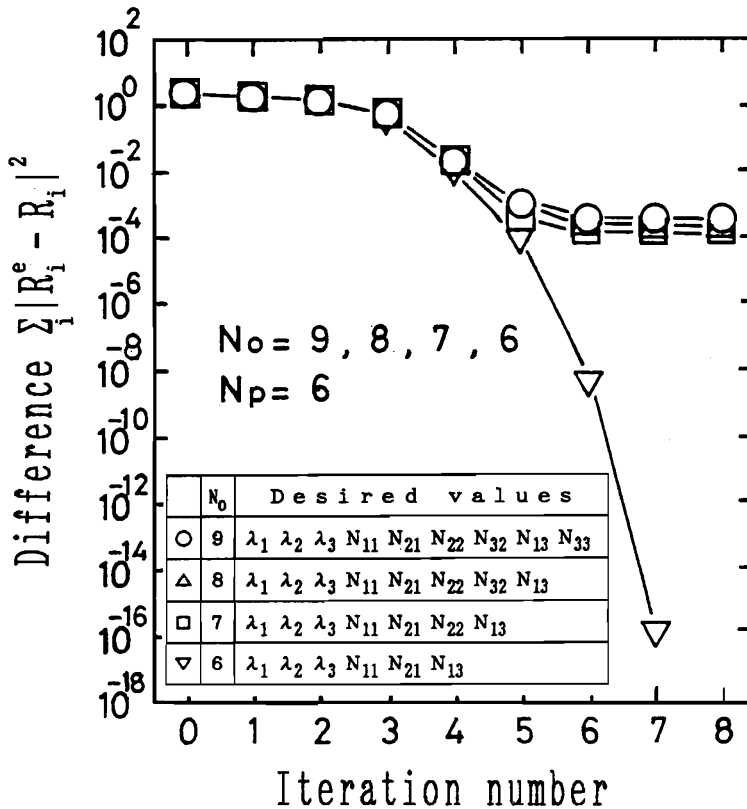


図2.6 目標値が誤差を含む場合の反復計算回数と残差の関係  
(同定しようとするモデルパラメータの数が6個の場合)

表2.4 同定されたモデルパラメータと目標値（表2.3）の比較  
 （同定しようとするモデルパラメータの数が6個の場合）

Modal parameter	Desired value	$N_0 = 9$		$N_0 = 6$	
		Identified value	Error %	Identified value	Error %
$\lambda_1$	10.0	10.0	0.0	10.0	0.0
$N_{11}$	0.80	0.811	1.38	0.80	0.0
$N_{21}$	0.50	0.503	0.60	0.50	0.0
$N_{31}$	1.0	1.0	—	1.0	—
$\lambda_2$	30.0	30.0	0.0	30.0	0.0
$N_{12}$	1.0	1.0	—	1.0	—
$N_{22}$	-0.10	-0.093	7.0	-0.071	29.0
$N_{32}$	-0.60	-0.585	2.5	-0.582	3.0
$\lambda_3$	40.0	40.0	0.0	40.0	0.0
$N_{13}$	-0.10	-0.10	9.0	-0.10	0.0
$N_{23}$	1.0	1.0	—	1.0	—
$N_{33}$	-0.20	-0.196	2.0	-0.190	5.0

$\lambda_j$  : j 次の固有値

$N_{ij}$  : j 次固有モードの点 i の成分の値

メータと同定されたモデルのモーダルパラメータの差は零となっている。ところが、 $N_0=6$ の場合には、 $N_0=9$ の場合に比べて目標としないモーダルパラメータの違いが大きい傾向にあることがわかる。また、 $N_0=9$ および6の場合の同定されたモデルパラメータと表2.1の固有値解析に用いた値の比較を表2.5に示す。表2.5において、 $N_0=9$ の場合のモデルパラメータの値が、 $N_0=6$ の場合に比べて、表2.1の真値に近い傾向にあることがわかる。

以上のことより、 $N_0=N_p$ ，すなわち目標値の数とモデルパラメータの数が等しい場合には、目標とするモーダルパラメータと同じ振動特性を有するモデルパラメータを完全に同定することができる。したがって、大自由度の振動系を小自由度の振動系に縮小する場合などのように、あるモーダルパラメータを重要視する場合には、目標とするモーダルパラメータの数とモデルパラメータ

表2.5 同定されたモデルパラメータと真値（表2.1）の比較  
（同定しようとするモデルパラメータの数が6個の場合）

Model parameter	Exact value	$N_0 = 9$		$N_0 = 6$	
		Identified value	Error %	Identified value	Error %
$k_{11}$ N/m	30.0	30.29	0.97	33.38	11.3
$k_{22}$ N/m	40.0	45.56	13.9	45.59	14.0
$k_{33}$ N/m	20.0	24.77	23.9	24.50	22.5
$k_{12}$ N/m	10.0	10.06	0.60	10.24	2.40
$k_{13}$ N/m	30.0	29.07	-3.10	28.86	-3.80
$k_{23}$ N/m	20.0	19.62	-1.90	19.45	-2.75

の数を等しくする。そうすれば、完全に目標とする振動特性を有する系を構築できる。しかし、実験で得られたモーダルパラメータの情報から設計変数である質量、ばね定数などの値を推定しようとする場合には、実験で得られた情報を目標値になるべく多く採用して同定したほうがよいと考えられる。

b. 同定しようとするモデルパラメータの数 $N_p$ が4個のときに目標とするモーダルパラメータの数 $N_o$ を6個、4個と変化させた場合

同定しようとするモデルパラメータの数 $N_p$ が6個の場合と同様に、表2.3の値を目標値として4個のモデルパラメータを同定する。同定する4個のパラメータとして、図2.4のばね定数 $k_{11}$ 、 $k_{12}$ 、 $k_{13}$ 、 $k_{23}$ を選んだ。その場合に、目標値の数 $N_o$ を6個、4個と変えたときの同定結果について検討する。目標とするモーダルパラメータは図2.7中に示す4個、6個の場合とした。

反復計算回数と目標値との残差の関係を図2.7に示す。図2.7において、 $N_o=6$ の場合には残差を含んだまま収束している。しかし、 $N_o=4$ の場合には、ケース1のように残差が小さくなる場合と、ケース2のように反復計算回数5回における固有値解析の結果、一次モードの固有値が負となり実固有値解析の範囲では同定計算の続行が不可能な場合が現われた。ケース1の同定されたモデルパラメータと表2.1の真のモデルパラメータの比較を表2.6に示す。表2.6において、同定されたモデルパラメータの値が真値と大きく異なる傾向にあることがわかる。特に $k_{12}$ の値は負となり現実的でない値に同定されている。したがって、目標とするモーダルパラメータが現実的な値から大きく離れている場合に、少数のモデルパラメータで同定しようとする、同定できない場合や同定できても同定された値が物理的に意味の無いものになる可能性があることがわかった。

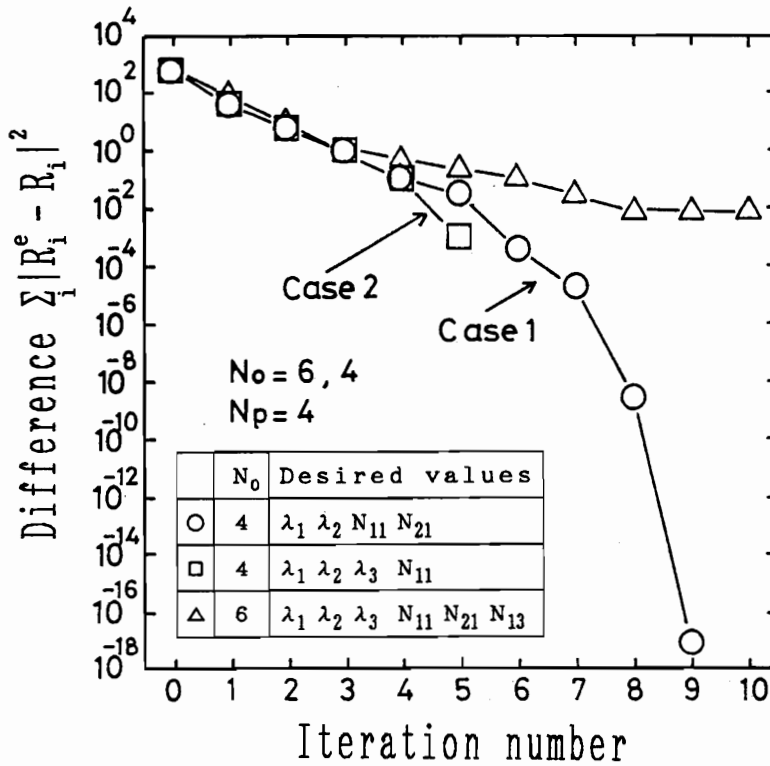


図2.7 目標値が誤差を含む場合の反復計算回数と残差の関係  
(同定しようとするモデルパラメータの数が4個の場合)

表2.6 同定されたモデルパラメータと真値(表2.1)の比較  
(同定しようとするモデルパラメータが4個の場合)

Model Parameter	$k_{11}$ N/m	$k_{12}$ N/m	$k_{13}$ N/m	$k_{23}$ N/m
Exact value	30.0	10.0	30.0	20.0
Identified value	42.5	-2.52	49.6	20.2



### 2.5.2 五自由度ばね・質量系の同定

次に、五自由度系の同定例を示す。モデルは、図2.8左に示す5個の集中質量と5個のばねからなるものである。同定計算の目標値として与えたモーダルパラメータを図2.8右に示す。同定するモデルパラメータとして、モデルの大きさを定めるために既知とした質量 $m$ を除いた残りの9個のパラメータを選んだ。目標値は一次モードから五次モードまでの固有値と一次モードの固有モード成分の計9個とした。したがって、 $N_o = N_p$ の場合の同定となる。すべてのモデルパラメータの初期値を1.0として計算を行ったところ、17回の反復計算回数で残差が $10^{-13}$ となり、同定されたモデルパラメータの値は目標値の算出に用いた値と一致した。

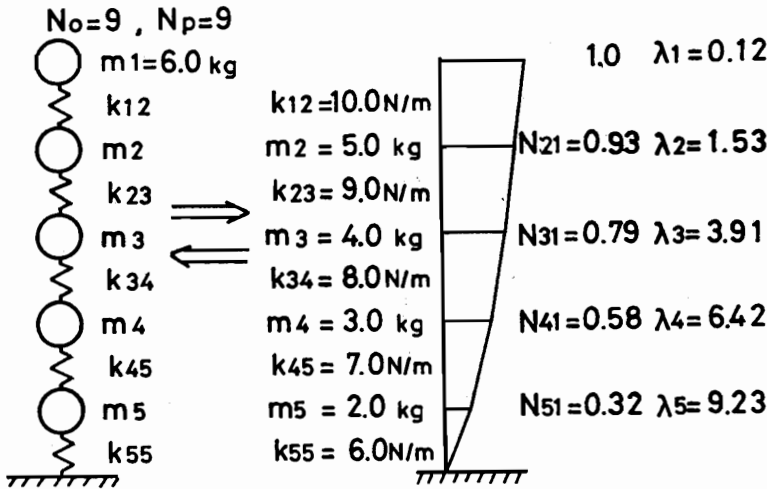


図2.8 五自由度ばね・質量系の同定

## 2.6 結 言

本章では、本論文で取り上げた同定法に関する基礎的研究を行った。すなわち、振動系の基本と考えられるばねと集中質量だけからなる非減衰振動系を取り上げ、既知とした固有振動数、固有モードと同じ振動特性を有する力学モデルの質量、ばね定数の値を同定する方法を明らかにした。また、多数のモデルパラメータを同時に同定するために、目標とする固有振動数、固有モードの設定条件と同定対象とするモデルパラメータの選定条件について検討した。その結果、精度よい同定を行うためには、次のことを考慮すべきことが明らかになった。

- (1) 同定しようとするモデルパラメータの数  $N_p$  は系の振動特性を支配する因子の数  $n(n+1)/2$  ( $n$  は系の自由度を表す) より少なくしなければならない。すなわち、 $N_p \leq n(n+1)/2$  とする。
- (2) 目標値の数  $N_o$  は  $N_p$  より多く与える必要がある。同定しようとするモデルパラメータの数が  $n(n+1)/2$  個の場合には、目標値の中にすべてのモード次数の固有値および各質量に関する固有モードの成分を少なくとも一つづつは含まなければならない。しかし、既知のモデルパラメータの数が多く、同定しようとするモデルパラメータの数が少ない場合には、この条件を緩めることができる。
- (3)  $N_o > N_p$  の場合は最良近似の意味で同定可能、 $N_o = N_p$  の場合には目標値の正確な同定が可能となる。しかし、目標値が現実的な値から大きく離れている場合には、同定できなくなる場合や同定できても同定された値が物理的に意味のないものとなる可能性がある。
- (4) 大自由度の振動系を小自由度の振動系に縮小する場合などのように、あるモーダルパラメータを重要視する場合には、目標とするモーダルパラメータの数とモデルパラメータの数を等しくすれば、完全に目標とする振動特性を有する系を構築できる。しかし、実験で得られたモーダルパラメータの情報から設計変数である質量、ばね定数などの値を推定する場合には、実験で得られた情報を目標値になるべく多く採用して同定したほうがよい。

## 第3章 収束性を向上させる同定法の提案

### 3.1 緒言

第2章においては、振動系の基本と考えられるばねと集中質量からなる振動系を取り上げ、既知とした固有値、固有モードの情報から、質量、ばね定数などのモデルパラメータの値を同定する考え方を示した。そして、数値実験を行い、多数のモデルパラメータが同時に同定できることを確認した。

ところで、第2章で検討したような反復計算を必要とする同定法を実用化する上では、収束速度および収束安定性が大きな課題<sup>(26)・(31)</sup>となっている。第2章でも、同定計算過程において多くの反復計算を要したり、収束安定性が悪くなる場合があり、改善の余地が認められた。なお、感度解析を用いた同定法に関して、感度の計算効率を改善することにより計算速度を向上させる萩原ら<sup>(19)・(20)</sup>の研究が見られるが、収束安定性の向上にはつながらない。また、第2章の同定法と最急降下法を組み合わせ、収束安定性を向上させる純数学的なMarquardt法<sup>(38)</sup>の適用が考えられるが、反復計算回数ごとに残差が減少するように第2章の同定法と最急降下法間の相対的な重みを適宜調整する必要がある、一回の計算量は増加する。また、相対的な重みの決定は経験的因子が強く、重みの調整が悪いと安定に収束するが多くの反復計算を要する可能性がある。また、収束安定性を向上させるために、モデルパラメータの初期値に重みにおいて初期値の周辺で安定に解を収束させるベイジアン手法<sup>(17)</sup>の適用がなされているが、初期値が適切でない場合には精度よい解が得られないことになる。また、ベイジアン手法において、初期値に重みをおかない場合には、本質的に第2章の同定法と同じになる。

そこで、本章では、第2章で対象とした同定の評価に固有振動数、固有モードを用いる場合に問題を限定した上で、同定計算の収束速度、収束安定性を向上させる方法について検討する。その中で、第2章の同定法を用いた場合に、収束性が悪くなる原因を考察する。そして、収束性を向上させるために、第2章とは異なる固有モードの評価法を用い、その評価法で得られた量を評価関数に用いる同定法を提案する。さらに、提案する同定法が収束性の向上に与える効果を考察する。また、数値実験を行い、提案する同定法の有効性を検討する。

### 3.2 固有モードの各成分を評価関数とした同定法とその問題点

まず、第2章で取り上げた固有モードの各成分を評価関数に用いる同定法を簡単に説明する。

同定の目標とする実験で得られた固有振動数  $f_{j^e}$  および固有モード  $\{N_{j^e}\}$  の各成分を並べた次式のベクトル  $\{R^e\}$  を設定する。

$$\{R^e\} = \{f_{1^e}, \dots, f_{j^e}, \dots, f_{n^e}, \{N_{1^e}\}^T, \dots, \{N_{j^e}\}^T, \dots, \{N_{n^e}\}^T\}^T \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

次に、同定するモデルパラメータの初期値を設定し、固有値解析、感度解析を行い、初期モデルの固有振動数、固有モードとモデルパラメータに対する固有振動数、固有モードの一次感度を算出する。算出した一次感度を用いてモデルパラメータ変更後の固有振動数、固有モードの変化を予測する。そして、予測値  $\{R\}$  と目標値  $\{R^e\}$  との相違を評価する次式の評価関数  $E$  が最小となるようにモデルパラメータを修正する。

$$E = (\{R^e\} - \{R\})^T [W] (\{R^e\} - \{R\}) \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

ここで、 $[W]$  は目標値の相対的重要度を定める対角マトリックスであり、その対角成分  $W_{11}$  は、評価関数を無次元化するため

$$W_{11} = w_1 / (R_{1^e})^2 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

となる。ここで、 $w_1$  は  $i$  番目の目標値の相対的重み係数である。

また、初期モデルの固有振動数、固有モードを要素とするベクトルを  $\{R_0\}$ 、固有振動数、固有モードの一次感度を要素とする感度マトリックスを  $[S]$ 、各モデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  を要素とするベクトルを  $\{\gamma\}$  とすると、モデルパラメータ変更後の予測値  $\{R\}$  は次式のように表される。

$$\{R\} = \{R_0\} + [S]\{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

式(3.2)の評価関数を最小にするモデルパラメータの変更率 $\{\gamma\}$ は、式(3.4)を式(3.2)に代入した上で、評価関数を最小にする条件 $\delta E/\delta \{\gamma\}=\{0\}$ を用いて導かれた次式を解くことにより算出できる。

$$([S]^T[W][S])\{\gamma\} = [S]^T[W](\{R^e\}-\{R_0\}) \quad \dots\dots (3.5)$$

また、修正後のモデルパラメータの値は、式(3.5)で算出された変更率 $\gamma_k$ を

$$d_k = d_{k0}(1 + \gamma_k) \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

に代入することで算出できる。ここで、 $d_{k0}$ は同定する $k$ 番目のモデルパラメータの初期値を、 $d_k$ は修正後の値を表す。

通常は、一回の修正作業で最適なモデルパラメータの値が得られる場合は少なく、最良な値が得られるまで修正過程を繰り返すことになる。

しかし、式(3.2)の評価関数 $E$ を用いた場合、モデルパラメータの初期値が真値に近いときにも、モデルパラメータの値の組合せによっては、収束性が悪くなったり、発散する場合を経験した。

そこで、固有モードの各成分を評価関数とすることが収束性を悪くする原因について考察する。式(3.2)の評価関数 $E$ では、各モード次数の固有モードを構成する個々の成分の大きさを評価量としている。したがって、式(3.4)のように感度を用いて固有モードの各成分の変化予測を行う際には、モデルパラメータの変更に伴う固有モードの各成分の変化は連続的でなければならない。そこで、力学モデルの固有値解析で得られる固有モード（以後、計算値と呼ぶ）を規準化する場合には、各モード次数ごとに目標値と対応する測定位置のどこかの成分の値が常に目標値と同じになるように、計算値を規準化することで連続関数としている。しかし、固有モードを規準化するときの基準点の選び方によって固有モードの各成分の変化の様子が異なる。特に、固有振動数の小さい順に目標値と計算値の固有モードを対応させていこうとしても、同じ変形形態の固有モードが対応しない、あるいは固有モードの形状は近いが、成分が最大となる測定位置が異なる場合には、基準点の選び方によって固有モードの各成

分の変化の様子が大きく異なり、収束性が悪くなる場合が見られた。

その場合の問題点を、図3.1の五自由度ばね・質量系を用いて説明する。例として、図3.1の質量5だけを変更したときの四次固有モードの各成分の変化の様子を図3.2に示す。ただし、図3.2(a), (b)は、それぞれ質量1, 質量3の振幅が目標値と等しくなるように計算値を規準化した場合である。図3.1のモデルでは、質量5を1.5倍にすると、振幅が最大となる位置が質量5から質量4に変わるため、基準点の選び方により各成分の変化の状況が大きく異なる。これに伴い、一次感度だけで予測できる各成分の範囲も異なってくる。したがって、図3.2(a)あるいは図3.2(b)の固有モードの変化状況をもとに、固有モードの一次感度を用いてモデルパラメータを修正する場合に、質量1, 3のどちらを基準点として採用すれば、より適正な質量5の修正が行えるかを判断することは困難である。なお、四次固有モードに関して、質量1, 3を基準点に選ぶ場合だけでなく、他の質量を基準点として選ぶことも可能であり、他のモード次数においても基準点を選ぶ場合に同様な問題が生じる。

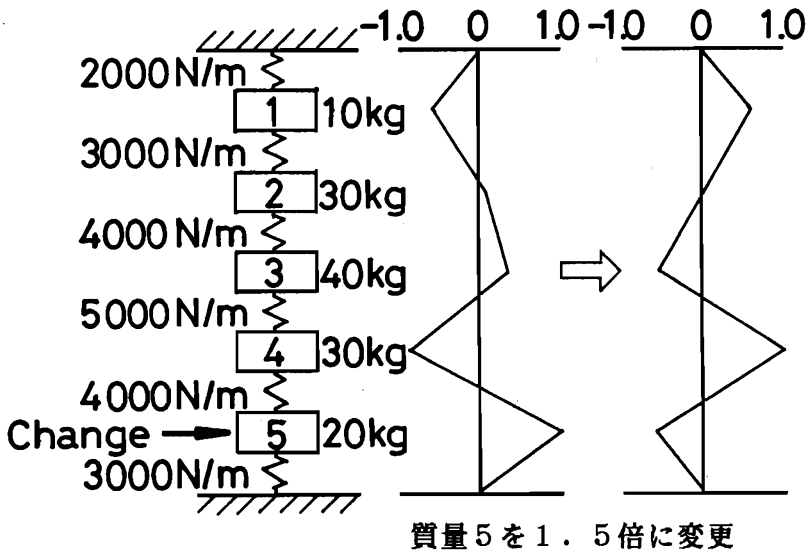
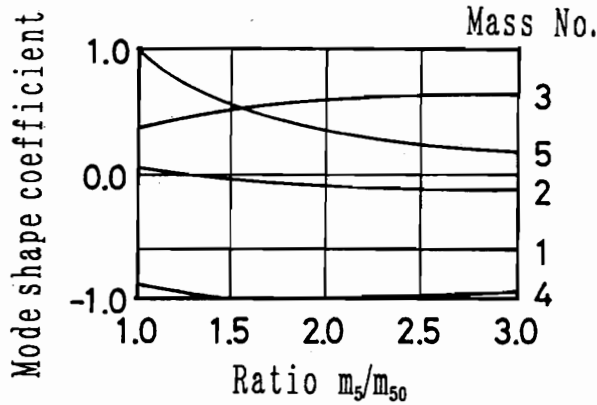
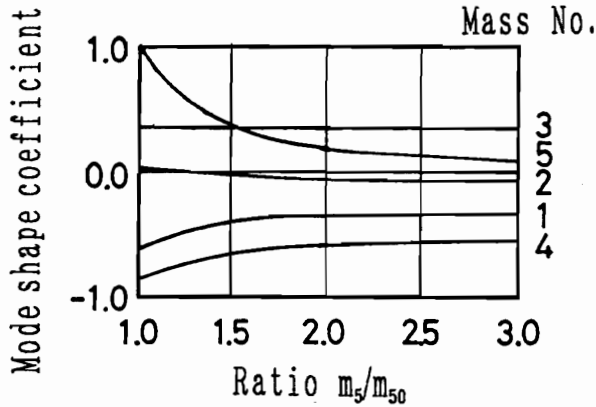


図3.1 五自由度ばね・質量系と四次固有モード



(a) 質量1を基準点



(b) 質量3を基準点

図3.2 質量5の変更に伴う四次固有モードの変化

したがって、固有モードの各成分を目標とする場合には、一次感度を用いてモデルパラメータの適正な修正を行うための基準点の選び方、すなわち規準化の方法に曖昧な点があり、基準点の選び方が悪いと収束性が悪くなる可能性がある。しかし、収束性を改善するための適正な規準化の方法を定める基準は見つけにくい。

### 3.3 固有モードベクトルの方向を評価関数とした同定法

第2章の同定法では、評価関数に固有モードの個々の成分の大きさを用いるために規準化の問題が生じる。そこで、各成分ごとに目標値と計算値の大きさを比較せずに目標値と計算値の固有モードの相違が評価できれば、これまでの問題が解消され、収束性が改善されると考えられる。以下では、規準化の方法にとらわれない固有モードの評価量を評価関数に用いた同定法を提案する。

#### 3.3.1 評価関数の定式化

固有モードは、成分の大きさが定まらずとも、各成分間の比が定まれば一義的に決定できる。そこで、成分比だけを用いた固有モードの評価法を考える。例えば、図3.3左に示す三自由度系の $j$ 次モードにおいて、実験値の固有モード $\{N_j^e\}$ 、計算値の固有モード $\{N_j\}$ とも、質量1の振幅を図3.3右に示す座標系の $X_1$ 方向に、質量2の振幅を $X_2$ 方向に、質量3の振幅を $X_3$ 方向に取った結果、両固有モードがそれぞれ図3.3右に示すようなベクトルとなったとする。ここで、ベクトルの方向はそれぞれの固有モードの成分比によって定まる。したがって、両固有モードの成分比の違いはベクトルの方向の違いとなり、両固有モードの相違は両ベクトルのなす角 $\theta_j$ で評価できることになる。角度が零となれば、両固有モードが一致することになる。

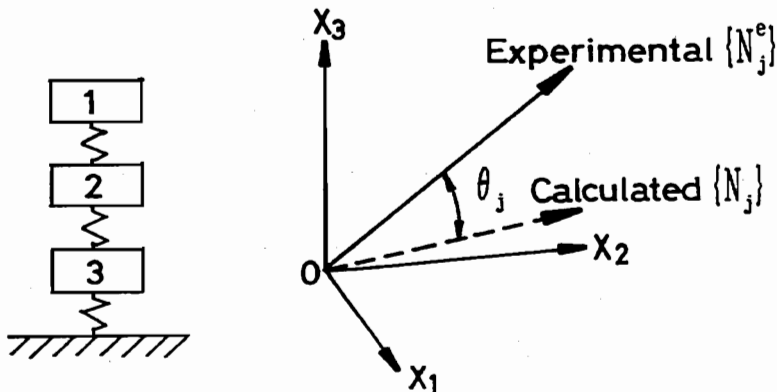


図3.3 三自由度系の $j$ 次固有モードのベクトル表示



そこで、両ベクトルのなす角 $\theta_j$ を評価するような固有モードの評価量として、任意に規準化された2つのベクトル $\{N_j^e\}$ ,  $\{N_j\}$ 間の角度 $\theta_j$ により一義的に定まる次式の $\cos^2\theta_j$ を用いる。なお、 $\cos^2\theta_j$ は有限要素法などの計算で得られた固有モードと実験で得られた固有モードの対応関係を調べる指標として提案されたMAC (Modal Assurance Criterion) <sup>(39)</sup>, すなわち2つの固有モード間の相関度を評価する値と同じものになる。

$$\cos^2\theta_j = r_j = \frac{(\{N_j^e\}^T\{N_j\})^2}{(\{N_j^e\}^T\{N_j^e\} \times \{N_j\}^T\{N_j\})} \dots\dots\dots (3.7)$$

評価関数 $E^*$ は、式(3.7)で定義した固有モードベクトルの方向の相違を評価する量を用いて、目標値 $\{P^e\}$ と計算値 $\{P\}$ の残差二乗和からなる次式とする。

$$E^* = (\{P^e\} - \{P\})^T [W] (\{P^e\} - \{P\}) \dots\dots\dots (3.8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{P^e\} &= \{f_1^e, \dots, f_j^e, \dots, f_n^e, 1, \dots, 1, \dots, 1\}^T \\ \{P\} &= \{f_1, \dots, f_j, \dots, f_n, r_1, \dots, r_j, \dots, r_n\}^T \end{aligned} \dots\dots\dots (3.9)$$

ただし、 $f_j$ は固有振動数であり、 $r_j$ は式(3.7)の固有モードベクトルの方向の相違を評価する量である。同定計算手順は第2章と同じ方法を用いることができる。すなわち、モデルパラメータに対する $\cos^2\theta_j$ の一次感度を用いて、 $\{N_j^e\}$ ,  $\{N_j\}$ から得られる $\cos^2\theta_j$ の値が1に近づくようにモデルパラメータの値を修正することになる。

### 3.3.2 収束性の向上に与える効果

固有モードベクトルの方向の相違を評価する量 $\cos^2\theta_j$ を評価関数に用いることが収束性の向上にどのように役立つかを考える。そのために、モデルパ

ラメータの変更に対して  $\cos^2 \theta_j$  の値がどのように変化するかを調べる。

$\cos^2 \theta_j$  をモデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  で偏微分すると

$$\delta \cos^2 \theta_j / \delta \gamma_k = 2 / A \times [B \times D / C - B^2 / (A \times C) \times E] \quad \dots \dots \dots (3.10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= \{N_j\}^T \{N_j\} & B &= \{N_j^e\}^T \{N_j\} \\ C &= \{N_j^e\}^T \{N_j^e\} & D &= \{N_j^e\}^T \{\delta \{N_j\} / \delta \gamma_k\} \\ E &= \{N_j\}^T \{\delta \{N_j\} / \delta \gamma_k\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3.11)$$

となる。なお、 $\delta \{N_j\} / \delta \gamma_k$  は第2章で説明したモデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  に対する固有モードの一次感度である。今、計算値の固有モードがモデルパラメータ変更後も長さが変化しないように規準化する場合を考える。その場合には、固有モードの長さの感度(式(3.10)のE)が零となるため

$$B^2 / (A \times C) \times E = 0 \quad \dots \dots \dots (3.12)$$

となる。また、Schwarzの不等式<sup>(40)</sup>から導かれる

$$\{N_j^e\}^T \{N_j\} \leq \{N_j\}^T \{N_j\} \times \{N_j^e\}^T \{N_j^e\} \quad \dots \dots \dots (3.13)$$

あるいは、

$$B \leq A \times C \quad \dots \dots \dots (3.13')$$

の両辺を変更率  $\gamma_k$  で偏微分した

$$2(B \times D) \leq 2(C \times E) \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

においても、Eを零とおくと

$$B \times D \leq 0 \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

の関係が導かれる。したがって、変更率 $\gamma_k$ が零から増加、すなわち、モデルパラメータの値が真値から大きくなる場合には、式(3.10)において式(3.12)、(3.15)の関係を考慮することにより

$$\delta \cos^2 \theta_j / \delta \gamma_k \leq 0 \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

の関係が導かれる。式(3.16)は、モデルパラメータに対する $\cos^2 \theta_j$ の感度が常に負となる、すなわち、 $\cos^2 \theta_j$ が単調に減少することを意味する。また、変更率 $\gamma_k$ が零から負の方向に増加、すなわちモデルパラメータが真値から小さくなる場合にも、式(3.10)、(3.14)において、 $\gamma_k$ が負であることを考慮すれば、 $\cos^2 \theta_j$ の値が単調に減少することがわかる。したがって、モデルパラメータの値が真値より小さいときの感度は常に正となる。

これらのことより、 $\cos^2 \theta_j$ はモデルパラメータの真値を頂点とする上に凸な関数となり、一次感度は必ずモデルパラメータの正しい修正方向を示すことがわかる。ここで、図3.1の五自由度系を例に取り、質量5を変更したときの $\cos^2 \theta_j$ の変化の状況を図3.4に示す。図3.4において、各モードとも上述のように上に凸な関数となっており、変化の状況はなめらかであり、質量の変更が2倍程度までは2次関数的に振舞っていることがわかる。したがって、一次感度を用いてモデルパラメータを修正する場合にも、必ず安定にモデルパラメータの真値を求めることが可能となる。

また、図3.4において、質量5の変更が $\cos^2 \theta_j$ に及ぼす影響がモード次数ごとに異なる、すなわち質量5の場合には、三次モード、四次モードへの影響が大きく、他のモード次数への影響が小さいことがわかる。しかし、他のモデルパラメータでは質量5とは各モード次数に与える影響が傾向が異なる。こ

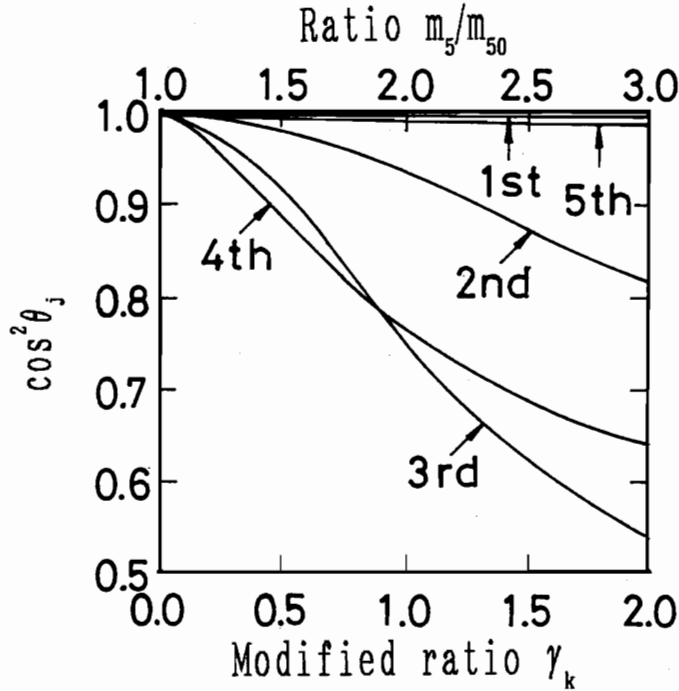


図3.4 質量5の変更に伴う  $\cos^2 \theta_j$  の変化

の傾向は、モデルパラメータが固有振動数の変化に与える影響がモード次数ごとに異なる傾向と似ている。このことより、 $\cos^2 \theta_j$  を目標とすれば、モデルパラメータ間の目標に対する相関を、第2章の固有モードの各成分を目標とする場合に比べて小さくすることができると考えられる。

以上、本章で同定の評価に用いる固有モードベクトルの方向の相違を評価する量为目标とすると、

- (1) 目標とする固有モードと計算値の固有モードとの相違を評価する場合の曖昧さがなくなるため、固有モードの評価が一義的に決定できる。
- (2) 評価量が0から1の範囲の数値となるため、各モード次数間の数値のばらつきが小さくなる。
- (3) モデルパラメータの変化に対して、モデルパラメータの真値を頂点とする上に凸な2次関数的に振舞う目標値を設定できるため、個々の目標値に対す

る収束安定性が向上する。

(4) モデルパラメータ間の目標値に対する相関が小さくなるため、式(3.5)の係数行列 $[S]^T[W][S]$ の対角化につながる。

の利点がある。これらの事項は、同定計算における収束の不安定性を抑制する効果<sup>(41)</sup>がある。したがって、本章で提案する同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が向上することが見込まれる。

### 3.4 数値実験による収束性の比較

提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が向上することを確認するために数値実験を行い、その結果について検討する。

数値実験例として、図3.5に示す五自由度ばね・質量系を取り上げ、同定を行う。ここでは、既知のモデルパラメータを用いて固有値解析を行い、その結果得られた固有値、固有モードを実験値として代用する。表3.1の左から2列目に、数値実験の目標値を得るために用いた諸元を示す。図3.5のモデルにおいては、5組の固有振動数と固有モードの固有ペアが得られる。そこで、それらの値を目標値として同定計算を行った。同定するモデルパラメータとして、表3.1の左から1列目に示す質量 $m_1$ から $m_5$ およびばね定数 $k_1$ から $k_6$ の内、

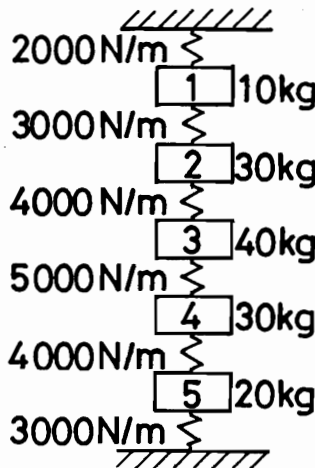


図3.5 五自由度ばね・質量系モデル

表3.1 同定するモデルパラメータの初期値  
(五自由度ばね・質量系モデルの場合)

Model parameter	Exact value	Initial value		
		Model A	Model B	Model C
$m_1$ kg	10.0	10.0		
$m_2$ kg	30.0	15.0	35.0	20.0
$m_3$ kg	40.0	80.0	45.0	30.0
$m_4$ kg	30.0	15.0	35.0	40.0
$m_5$ kg	20.0	40.0	20.0	50.0
$k_1$ N/m	$2.0 \times 10^3$	$4.0 \times 10^3$	$2.0 \times 10^3$	$6.0 \times 10^3$
$k_2$ N/m	$3.0 \times 10^3$	$1.5 \times 10^3$	$2.5 \times 10^3$	$5.0 \times 10^3$
$k_3$ N/m	$4.0 \times 10^3$	$8.0 \times 10^3$	$4.5 \times 10^3$	$4.0 \times 10^3$
$k_4$ N/m	$5.0 \times 10^3$	$2.5 \times 10^3$	$5.5 \times 10^3$	$3.0 \times 10^3$
$k_5$ N/m	$4.0 \times 10^3$	$8.0 \times 10^3$	$4.0 \times 10^3$	$2.0 \times 10^3$
$k_6$ N/m	$3.0 \times 10^3$	$1.5 \times 10^3$	$5.0 \times 10^3$	$1.0 \times 10^3$

モデルの大きさを定めるために既知とした質量 $m_1$ を除いた残りの計10個のパラメータを選んだ。ただし、既知とした質量 $m_1$ の値は目標値の算出に用いた表3.1の左から2列目に示す値とした。同定するモデルパラメータの初期値は表3.1の左から3列目から5列目に示す3通りとした。

同定計算の反復計算回数と目標値との残差の関係を図3.6に示す。ただし、縦軸は目標値と各反復計算過程の固有振動数、固有モードの各成分の値との残差の絶対値和である。図3.6において、実線が提案した同定法（以後、提案法と呼ぶ）を用いた場合で、破線が第2章の同定法（以後、従来法と呼ぶ）を用いた場合である。なお、両同定法の収束性の違いを評価するため、提案法の残差の数値は式(3.7)の固有モードベクトルの方向の相違を評価する量ではなく、従来法と同じ固有モードの各成分の残差の絶対値和を用いた。図3.6において、従来法では収束の状況がモデルパラメータの初期値の違いによって大きく異なることがわかる。初期モデルAの場合には非常に収束が速いが、初期モデルBの場合には反復回数2回から4回において残差が増大しており、不安定な収束状況となっている。しかし、提案法を用いた場合には、3つの初期モデルとも安定に収束しており、従来法に比べて少ない反復計算回数で残差が小さくなっている。また、提案法では3つのモデルに多少の収束性の違いはあるが、反復回数6回から7回で残差が $10^{-6}$ 以下になっており、モデルパラメータの初期値の影響を受けにくいことがわかる。すなわち、従来法ではモデルパラメータの初期値を適切に設定しないと収束性が悪くなる場合がある。しかし、提案した同定法はモデルパラメータの初期値の影響を受けにくく、収束安定性が高いと考えられる。

したがって、本章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が大幅に向上し、収束性が同定しようとするモデルパラメータの初期値の影響を受けにくいことが確認できた。

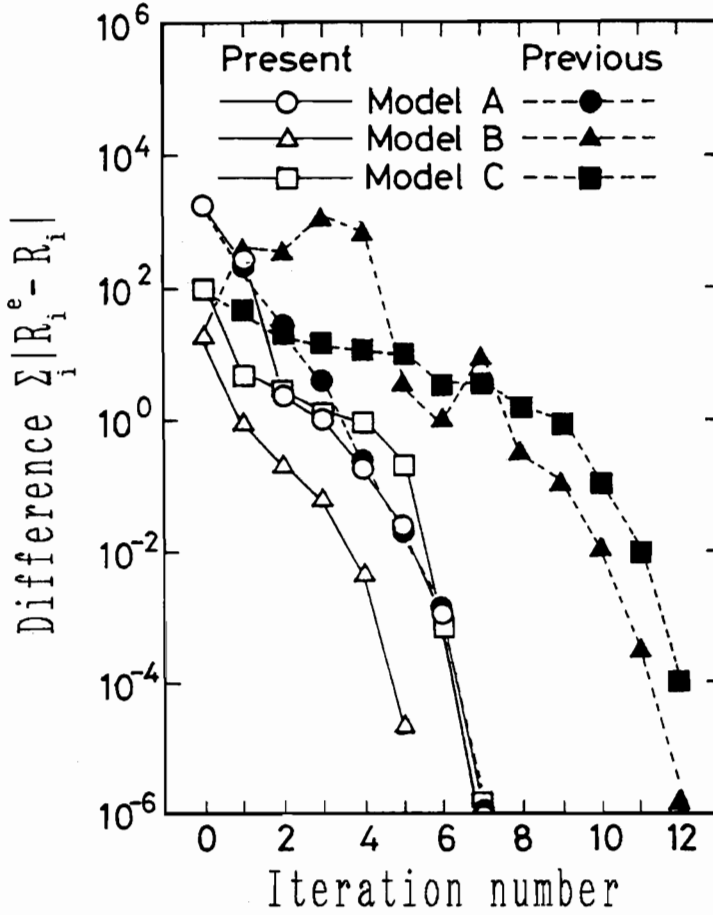


図3.6 反復計算回数と残差の関係  
(同定法の違いによる収束性の比較)



### 3.5 結 言

本章では、反復計算の収束性を向上させる同定法を提案した。同定法の数学的手法は第2章と同様であるが、振動工学の立場から収束性を向上させる方法について検討したものである。その中で、第2章の同定法では、同定の評価に固有モードの個々の成分を用いることが、収束性を悪くする要因の1つであることを示した。また、収束性を向上させるためには、目標とする固有モードベクトル $\{N_j^e\}$ と力学モデルの固有値解析で得られる固有モードベクトル $\{N_j\}$ の相違を、各モード次数ごとに両固有モードベクトルを同じ座標系で表したときのベクトルの方向の違いで評価することが有効であることを示した。そして、ベクトルの方向の違い、すなわち両ベクトルのなす角により一義的に定まる次式の $r_j$

$$r_j = \frac{(\{N_j^e\}^T \{N_j\})^2}{(\{N_j^e\}^T \{N_j^e\} \times \{N_j\}^T \{N_j\})}$$

を評価関数に用いる同定法を提案した。なお、本章で同定の評価に用いた固有モードベクトルの方向の相違を評価する量の特長は、

- (1) 目標とする固有モードと計算値の固有モードとの相違を評価する場合の曖昧さがなくなるため、固有モードの評価が一義的に決定できる。
- (2) 評価量が0から1の範囲の数値となるため、各モード次数間の数値のばらつきが小さくなる。
- (3) モデルパラメータの変化に対して、モデルパラメータの真値を頂点とする上に凸な2次関数的に振舞う目標値を設定できるため、個々の目標値に対する収束安定性が向上する。
- (4) モデルパラメータ間の目標値に対する相関が小さくなるため、モデルパラメータの変更率を算出するときの数値計算の安定性につながる。

であり、同定計算における収束の不安定性を抑制する効果がある。

また、提案した同定法の有効性を確認するために数値実験を行い、第2章の同定法に比べて収束速度、収束安定性が大幅に向上することを確認した。

## 第4章 ばね要素で支持された剛体の慣性モーメント，重心位置の同定

### 4.1 緒言

第2章，第3章においては，ばねと集中質量からなる振動系を取り上げ，既知とした固有値，固有モードの情報から，質量，ばね定数の値を同定する考え方を示した。しかし，実際の機械構造物はばねと集中質量だけで表現できることは少ない。そこで，本章では，同定法を実際の機械構造物に適用することを考える。適用例として，機械の防振支持設計を想定した剛体がばね要素で支持されたモデルを取り上げる。

機械の防振支持設計においては，通常，機械から発生する励振力の周波数に対して，防振支持された系の固有振動数が主要な励振周波数より低くなるか，あるいは励振力が多数の周波数を含む場合には，固有振動数が励振周波数の谷間になるように支持弾性体のばね定数，支持位置を調整する。そのためには，支持する機械の質量，慣性モーメント，重心位置などの剛体的特性を正確に把握しておく必要がある<sup>(32)</sup>。慣性モーメントや重心位置は設計図面から算定できるが，構造が複雑となると算定の労力が大変であり，誤差も生じやすい。そこで，仮の防振支持あるいは試験状態における実験データから，慣性モーメント，重心位置が同定できれば，実機のより精度のよい防振支持設計が可能となる。さらに，既設の状態でのばね定数などの値が同定できれば，設計目標との差異や既存設備の防振支持機能診断も可能となり，より最適化が図られる。

また，防振支持設計において，固有振動数を目標の値に分散配置するための方法は，試行錯誤的に行われており，低次モードに対しては振動絶縁や共振回避が達成できても，高次モードの共振まで避けるのは困難な場合が多い。そこで，系統的に望ましい固有振動数配置になるようなばね定数，支持位置を決定する手段が望まれている。

そこで，本章では，剛体がばね要素で支持されたモデルを取り上げ，剛体の慣性モーメント，重心位置などの剛体的特性を実験データから同定する方法について検討する。その中で，剛体の重心位置を同定するために，重心位置を空間に固定した座標系からの偏差のパラメータを用いて表し，重心位置を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示する。また，実験では回転角変

位を直接測定することが困難であるため、通常の変位センサを用いて得られる並進変位データを同定計算に用いるための方法を明らかにする。そして、数値実験を行い、同定法の妥当性を確認する。また、実測データによる同定において、目標とする固有振動数、固有モードと同定されたモデルパラメータの関係を考察し、精度よい同定を行うための目標値の設定条件について検討する。さらに、固有振動数を所望の値に分散配置するためのばね定数や支持位置を決める手段としての適用性についても検討する。また、本章で扱うモデルに対しても、第3章で提案した同定法を適用し、その有効性を検討する。

#### 4.2 運動方程式

本章では、同定対象として、図4.1に示すような剛体が多数のばねで支持されたモデルを取り上げる。通常、このようなモデルの振動解析では、剛体の質量、慣性モーメント、重心位置、支持ばねのばね定数、支持位置などの振動特性を決定するモデルパラメータが与えられる。そして、重心を原点とする座標系で運動方程式を求め、固有値解析を行うことにより、固有振動数、固有モードなどのモデルパラメータを求めることになる。しかし、本章では、重心位置が同定対象とする未知パラメータであるため、重心を原点とする座標系で運動方程式を考えることができない。そこで、図4.2に示すような任意の点を原点とする空間に固定した直交座標系 $O-X^c Y^c Z^c$ （以後、固定座標系と呼ぶ）を設定し、重心位置を固定座標系からの偏差のパラメータ $x_g, y_g, z_g$ を用いて表す。そして、重心位置を定めるパラメータを陽な形で表した固定座標系における運動方程式を導くことにする。また、ばね定数を同定する場合には、図4.1のような多数のばねのばね定数をそれぞれに同定することはできないので、図4.2に示す3個の並進ばね $K_x, K_y, K_z$ と3個の回転ばね $K_\phi, K_\theta, K_\psi$ に集約し、それらの値を同定した後、同定した6個のばね定数から図4.1のばね定数を定めることにする。図4.1と図4.2のばね定数の関係は後述する。

固定座標系における運動方程式は次の手順で導く。まず、図4.2に示すような同定計算の初期値として与えられる剛体の重心位置を原点とする直交座標系 $G-X^g Y^g Z^g$ （以後、重心座標系と呼ぶ）および多数のばねを集約したばねの支持点を原点とする直交座標系 $S-X^s Y^s Z^s$ （以後、ばね支持点座標系と呼ぶ）を設定する。

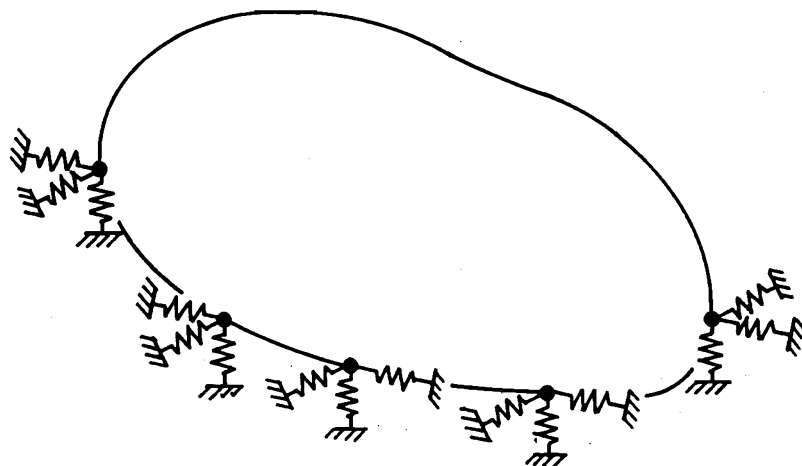


図4.1 剛体系モデル

O-XYZ: Fixed coordinate  
 G- $X^G Y^G Z^G$ : Center of gravity coordinate  
 S- $X^S Y^S Z^S$ : Spring coordinate

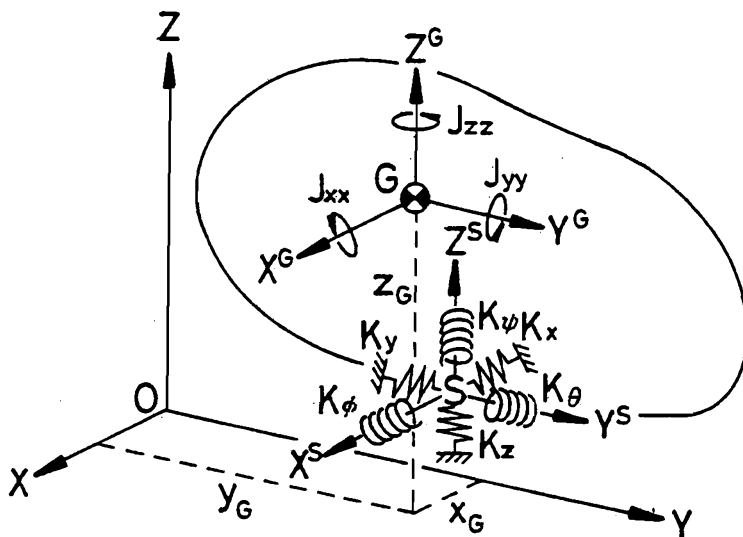


図4.2 同定計算モデル

ぶ)を設定する。ただし、 $X^G$ 軸、 $Y^G$ 軸、 $Z^G$ 軸および $X^S$ 軸、 $Y^S$ 軸、 $Z^S$ 軸は固定座標系の $X$ 軸、 $Y$ 軸、 $Z$ 軸と平行になるように、ばね支持点座標系の原点 $S$ は図4.1の多数のばねの弾性中心になるように選んだとする。次に、剛体の慣性力を重心座標系で求める。ばねによる復元力もばね支持点座標系で求める。その後、慣性力、復元力を両者に共通な固定座標系に座標変換し、固定座標系における運動方程式を導く。このようにすれば、固定座標系における運動方程式を簡単に導くことができる。

まず、重心座標系における慣性力を求める。剛体の質量を $m$ 、 $X^G$ 軸、 $Y^G$ 軸、 $Z^G$ 軸に関する慣性モーメントを $J_{xx}$ 、 $J_{yy}$ 、 $J_{zz}$ 、慣性乗積を $J_{xy}$ 、 $J_{yz}$ 、 $J_{zx}$ とする。さらに、重心の $X^G$ 、 $Y^G$ 、 $Z^G$ 方向の並進変位を $x^G$ 、 $y^G$ 、 $z^G$ 、各軸回りの回転角変位を $\phi^G$ 、 $\theta^G$ 、 $\psi^G$ とすれば、微小変位の範囲では重心座標系における変位ベクトル $\{q^G\}$ と慣性力ベクトル $\{F_m^G\}$ の関係は次式となる。

$$\{F_m^G\} = -[M]\{\dot{q}^G\} \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{F_m^G\} &= \{f_{mx}^G, f_{my}^G, f_{mz}^G, M_m\phi^G, M_m\theta^G, M_m\psi^G\}^T \\ \{q^G\} &= \{x^G, y^G, z^G, \phi^G, \theta^G, \psi^G\}^T \\ [M] &= \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} \\ [m] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (4.2) \end{aligned}$$

次に、重心座標系における変位と慣性力の関係を固定座標系における変位と慣性力の関係に変換することを考える。固定座標系における重心 $G$ の座標を ${}^0P^G(x_c, y_c, z_c)$ とすれば、重心座標系における変位ベクトル $\{q^G\}$ と固定座標

系における変位ベクトル{q}および重心座標系における慣性力ベクトル{F<sub>m</sub><sup>G</sup>}と固定座標系における慣性力ベクトル{F<sub>m</sub>}は、重心位置の座標を要素とする座標変換マトリックス[T<sub>G</sub>]を用いて、次式のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} \{q^G\} &= [T_G]\{q\} \\ \{F_m\} &= [T_G]^T\{F_m^G\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}^T \\ \{F_m\} &= \{f_{mx}, f_{my}, f_{mz}, M_{m\phi}, M_{m\theta}, M_{m\psi}\}^T \\ [T_G] &= \begin{bmatrix} [I] & [{}^0P^G] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad [{}^0P^G] = \begin{bmatrix} 0 & x_G & -y_G \\ -z_G & 0 & x_G \\ y_G & -x_G & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

式(4.1), 式(4.3)より、次式のように固定座標系における変位ベクトル{q}と慣性力ベクトル{F<sub>m</sub>}の関係が導かれる。

$$\{F_m\} = -[T_G]^T[M][T_G]\{\ddot{q}\} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

次に、ばね要素により生じる復元力を求める。図4.2に示すばね要素のX<sup>S</sup>, Y<sup>S</sup>, Z<sup>S</sup>方向の並進ばね定数をK<sub>x</sub>, K<sub>y</sub>, K<sub>z</sub>, 軸回りの回転ばね定数をK<sub>φ</sub>, K<sub>θ</sub>, K<sub>ψ</sub>とする。さらに、ばね支持点のX<sup>S</sup>, Y<sup>S</sup>, Z<sup>S</sup>方向の並進変位をx<sup>S</sup>, y<sup>S</sup>, z<sup>S</sup>, 軸回りの回転角変位をφ<sup>S</sup>, θ<sup>S</sup>, ψ<sup>S</sup>とすれば、ばね支持点座標系における変位ベクトル{q<sup>S</sup>}と復元力ベクトル{F<sub>k</sub><sup>S</sup>}の関係は次式となる。

$$\{F_k^S\} = -[K]\{q^S\} \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \{F_k^S\} &= \{f_{kx}^S, f_{ky}^S, f_{kz}^S, M_{k\phi}^S, M_{k\theta}^S, M_{k\psi}^S\}^T \\
 \{q^S\} &= \{x^S, y^S, z^S, \phi^S, \theta^S, \psi^S\}^T \\
 [K] &= \begin{bmatrix} K_x & & & & & \\ & K_y & & & & \\ & & K_z & & & \\ & & & K_\phi & & \\ & 0 & & & K_\theta & \\ & & & & & K_\psi \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

なお、固定座標系におけるばね支持点Sの座標を ${}^0P^S(x_S, y_S, z_S)$ とすると、ばね支持点座標系における変位ベクトル $\{q^S\}$ と固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ およびばね支持点座標系における復元力ベクトル $\{F_k^S\}$ と固定座標系における復元力ベクトル $\{F_k\}$ は、ばね支持点の座標を要素とする座標変換マトリックス $[T_S]$ を用いて、次式のように関係づけられる。

$$\begin{aligned}
 \{q^S\} &= [T_S]\{q\} \\
 \{F_k\} &= [T_S]^T\{F_k^S\}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \{F_k\} &= \{f_{kx}, f_{ky}, f_{kz}, M_{k\phi}, M_{k\theta}, M_{k\psi}\}^T \\
 [T_S] &= \begin{bmatrix} [I] & [{}^0P^S] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad [{}^0P^S] = \begin{bmatrix} 0 & x_S & -y_S \\ -z_S & 0 & x_S \\ y_S & -x_S & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

式(4.6), 式(4.8)より、次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と

復元力ベクトル $\{F_k\}$ の関係が導かれる。

$$\{F_k\} = -[T_s]^T[K][T_s]\{q\} \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

式(4.5), (4.10)より, 次式のように図4.2に示すモデルの固定座標系における自由振動状態の運動方程式が導かれる。

$$[\hat{m}]\{\ddot{q}\} + [\hat{k}]\{q\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

ここで,

$$\begin{aligned} [\hat{m}] &= [T_c]^T[M][T_c] \\ [\hat{k}] &= [T_s]^T[K][T_s] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

式(4.11)において, 本章で同定対象とした慣性モーメント, 慣性乗積は $[M]$ の要素として, 重心位置の座標は $[T_c]$ の要素として, 陽な形で表れていることがわかる。また, 式(4.11)に対応する特性方程式は

$$-\lambda_j[\hat{m}]\{N_j\} + [\hat{k}]\{N_j\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

となり,  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[T_c]$ ,  $[T_s]$ が既知であれば, 特性方程式(4.13)の固有値解析を行うことにより, 6組の固有値 $\lambda_j$ , 固有モード $\{N_j\}$ の固有ペアが得られることになる。

#### 4.3 変位センサで測定される並進変位データを用いた同定法

本章では, 実験などで得られる固有振動数, 固有モードの情報から,  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[T_c]$ ,  $[T_s]$ を構成するモデルパラメータの値を同定することを目的と



する。同定法は、第2章あるいは第3章で説明した方法を用いる。しかし、本章では、第2章、第3章の質量、ばね定数とは異なる重心位置の座標などのパラメータに対する固有値、固有モードの感度を必要とする。また、実験では回転角変位を直接測定することが困難であるため、通常の変位センサを用いて得られる並進変位データを同定計算に用いることが望ましく、そのための具体的な方法を検討する必要がある。以下では、本章で扱う重心位置などの剛体的特性を表すパラメータに対する固有値、固有モードの感度算出方法および並進変位データを同定計算の目標として用いるための具体的な進め方を説明する。

まず、慣性モーメント、重心位置の座標などのパラメータに対する固有値、固有モードの感度算出方法を説明する。

同定しようとするモデルパラメータのk番目のパラメータを $d_k$ と表し、初期値 $d_{k0}$ と修正後の $d_k$ の関係を変更率 $\gamma_k$ を用いて次式のように定義する。

$$d_k = d_{k0}(1 + \gamma_k) \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

定義したモデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ で特性方程式(4.13)を偏微分すると、次式が得られる。

$$-\lambda_j' \{\hat{m}\} \{N_j\} - \lambda_j \{\hat{m}'\} \{N_j\} - \lambda_j \{\hat{m}\} \{N_j'\} + \{\hat{k}'\} \{N_j\} + \{\hat{k}\} \{N_j'\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{\hat{m}'\} &= [T_e']^T [M] [T_e] + [T_e]^T [M'] [T_e] + [T_e]^T [M] [T_e'] \\ \{\hat{k}'\} &= [T_s']^T [K] [T_s] + [T_s]^T [K'] [T_s] + [T_s]^T [K] [T_s'] \\ &\dots\dots\dots (4.16) \end{aligned}$$

ただし、式(4.15)、(4.16)の $\lambda_j'$ 、 $\{N_j'\}$ 、 $[M']$ 、 $[K']$ 、 $[T_e']$ 、 $[T_s']$ は、

それぞれ  $\lambda_j$ ,  $\{N_j\}$ ,  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[T_c]$ ,  $[T_s]$  のモデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  に関する偏微分を表す。ここで、式(4.15)の左から  $\{N_j\}^T$  を乗じ、特性方程式(4.13)の転置の関係を用いれば、 $\{N_j\}$  を含む項が消去され、次式のように変更率  $\gamma_k$  に対する固有値の一次感度  $\lambda_j'$  が求まる。

$$\lambda_j' = \frac{\{N_j\}^T(-\lambda_j[\hat{m}'] + [\hat{k}'])\{N_j\}}{(\{N_j\}^T[\hat{m}]\{N_j\})} \dots\dots\dots (4.17)$$

ここで、 $[\hat{m}']$ ,  $[\hat{k}']$  は、式(4.16)に示すように  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[T_c]$ ,  $[T_s]$  の変更率  $\gamma_k$  に関する偏微分を求めれば計算できる。本章で扱うモデルの場合には、 $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[T_c]$ ,  $[T_s]$  は  $d_k$  に関する一次関数の成分だけで構成される。したがって、 $[M']$ ,  $[K']$ ,  $[T_c']$ ,  $[T_s']$  は感度を求めようとする  $d_k$  に関する成分だけを残し、他の成分は零としたマトリックスとして簡単に算出できる。

また、固有モードの一次感度  $\{N_j'\}$  は、式(4.15)を整理した

$$\begin{aligned} &(-\lambda_j[\hat{m}] + [\hat{k}])\{N_j'\} \\ &= (\lambda_j'[\hat{m}] + \lambda_j[\hat{m}'] - [\hat{k}'])\{N_j\} \dots\dots\dots (4.18) \end{aligned}$$

を解くことにより算出できる。ただし、式(4.18)の左辺の係数マトリックスは正則ではないので、第2章で述べたように、マトリックスのランクを下げて解く必要がある。

以上のように、重心位置の座標に対する固有値、固有モードの感度も、個々のマトリックスに分けて計算することにより、簡単に求めることができる。

次に、変位センサで測定される並進変位データを同定の目標として用いるための方法を説明する。

剛体系モデルに対して振動実験を行うと固有振動数と固有モードが得られる。ところで、固有モードは通常の振動実験で使用される変位センサを用いると、

剛体上の各測定点のX, Y, Z方向の並進変位成分を要素とするものになると考えられる。また、特性方程式(4.13)から得られる固有モード{N<sub>j</sub>}は回転角変位に関する成分を含む。したがって、特性方程式から得られる固有モードはそのままでは実験値と直接比較することができない。そこで、実験で得られる固有モードを同定の目標値として用いるために、特性方程式から得られる固有モードを実験値に対応する並進変位成分だけからなる固有モードに変換し、実験値と比較することを考える。

力学モデルの任意の点、例えば、測定点iに対応する点のX, Y, Z方向の並進変位成分を要素とするベクトル{v<sub>i,j</sub>}={X<sub>i,j</sub>, Y<sub>i,j</sub>, Z<sub>i,j</sub>}<sup>T</sup>は、次式のように固有モード{N<sub>j</sub>}の並進変位成分{W<sub>j</sub>}と回転角変位成分{Θ<sub>j</sub>}の重ね合わせとして考えることができる。

$$\{v_{i,j}\} = [I]\{W_j\} + [{}^0P^i]\{\Theta_j\} \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

ここで、[<sup>0</sup>P<sup>i</sup>]は固定座標系における測定点iの座標<sup>0</sup>P<sup>i</sup>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>, z<sub>i</sub>)を要素とする次の形式のマトリックスである。

$$[{}^0P^i] = \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

また、感度に関しても、感度解析で得られる{W<sub>j</sub>}、{Θ<sub>j</sub>}の感度を式(4.19)に代入することにより、実験値に対応する感度が算出できる。測定点がP個ある場合には、式(4.19)をまとめてマトリックス形式で表示した次式から、すべての測定点に対応する並進変位成分だけからなる固有モード{V<sub>j</sub>}およびその感度{V<sub>j</sub>'}を求めることができる。

$$\begin{aligned} \{V_j\} &= [T_P]\{N_j\} \\ \{V_j'\} &= [T_P]\{N_j'\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

ここで、 $\{V_j'\}$ 、 $\{N_j'\}$ は次式の固有モード $\{V_j\}$ 、 $\{N_j\}$ の各成分に対応する一次感度を要素とするベクトルを表す。

$$\begin{aligned} \{V_j\} &= \{\{v_{1j}\}^T, \dots, \{v_{pj}\}^T\}^T, \quad \{v_{1j}\} = \{X_{1j}, Y_{1j}, Z_{1j}\}^T \\ \{N_j\} &= \{\{W_j\}^T, \{\Theta_j\}^T\}^T \\ [T_p] &= \begin{bmatrix} [I] & [{}^0P^1] \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [{}^0P^1] \\ \vdots & \vdots \\ [I] & [{}^0P^p] \end{bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (4.22)$$

式(4.21)より、実験値に対応する固有モードおよびその感度を算出することができる。

モデルパラメータの同定は以下の手順で行う。

まず、第2章の同定法の計算手順を説明する。同定の目標とする実験で得られた固有振動数 $f_j^e$ 、固有モード $\{V_j^e\}$ を要素とする次式のベクトル $\{R^e\}$ を設定する。

$$\{R^e\} = \{f_1^e, \dots, f_j^e, \dots, f_6^e, \{V_1^e\}^T, \dots, \{V_j^e\}^T, \dots, \{V_6^e\}^T\}^T \dots\dots\dots (4.23)$$

ただし、 $\{V_j^e\}$ は剛体の各測定点のX、Y、Z方向の並進変位成分を要素とする固有モードである。ここで、測定点がP個あると、 $\{V_j^e\}$ は次のようなベクトルとなる。

$$\{V_j^e\} = \{X_{1j}^e, Y_{1j}^e, Z_{1j}^e, \dots, X_{pj}^e, Y_{pj}^e, Z_{pj}^e\}^T \quad (4.24)$$

そして、同定しようとするモデルパラメータの選定、初期値の設定を行い、固有値解析、感度解析により、初期モデルの固有振動数、固有モードを要素とするベクトル $\{R_0\}$ および一次感度を要素とする感度マトリックス $[S]$ を算出し

ておく。ここで、 $[S]$ は $S_{ik}$ を要素とする大きさ $n \times m$ のマトリックスとなる。ただし、 $n$ は目標とするモーダルパラメータの数、 $m$ は同定しようとするモデルパラメータの数を表す。要素 $S_{ik}$ は $k$ 番目のモデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ に対する $i$ 番目の目標値の感度となる。

算出した感度を用いて、初期モデルを変更したときの固有振動数、固有モードを予測し、その予測値 $\{R\}$ と目標値 $\{R^e\}$ を比較し、最小二乗法を適用して、差を最小にするようにモデルパラメータを修正する。

ここで、初期モデルのパラメータを変更したときの固有振動数、固有モードの変化予測値 $\{R\}$ は、一次のテーラー展開で近似すると

$$\{R\} = \{R_0\} + [S]\{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

のように表される。ただし、 $\{\gamma\}$ は各モデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ を要素とするベクトルである。そこで、目標値 $\{R^e\}$ と予測値 $\{R\}$ との差の二乗和 $E$

$$E = (\{R^e\} - \{R\})^T [W] (\{R^e\} - \{R\}) \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

が、最小になるような $\{\gamma\}$ を求めることになる。ここで、 $[W]$ は各目標の相対的重要度を定める対角マトリックスである。式(4.26)を最小にする $\{\gamma\}$ は、次式の方程式を解くことにより算出できる。

$$([S]^T [W] [S])\{\gamma\} = [S]^T [W] (\{R^e\} - \{R_0\}) \quad \dots\dots (4.27)$$

また、第3章の同定法では、目標とするベクトル $\{R^e\}$ の代わりに次式のベクトル $\{P^e\}$ を設定する。

$$\{P^e\} = \{f_1^e, \dots, f_j^e, \dots, f_6^e, 1, \dots, 1, \dots, 1\}^T \quad \dots\dots (4.28)$$

次に、第3章で説明したように、実験値の固有モード $\{V_j^e\}$ と初期モデルの固有モード $\{V_{j0}\}$ から、次式により固有モードベクトルの方向の相違を評価する

量  $r_{j0}$  (以後, 固有モードの評価量と呼ぶ) を算定する。

$$r_{j0} = \frac{(\{V_{j^e}\}^T \{V_{j0}\})^2}{(\{V_{j^e}\}^T \{V_{j^e}\} \times \{V_{j0}\}^T \{V_{j0}\})} \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

そして, 初期モデルの固有振動数  $f_{j0}$  および固有モードの評価量  $r_{j0}$  を要素とする次式のベクトル  $\{P_0\}$  を設定する。

$$\{P_0\} = \{f_{10}, \dots, f_{j0}, \dots, f_{60}, r_{10}, \dots, r_{j0}, \dots, r_{60}\}^T \quad (4.30)$$

次に, 次式で初期モデルのモデルパラメータを変更したときの固有振動数, 固有モードの評価量の変化を予測する。

$$\{P\} = \{P_0\} + [S^*] \{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

ただし,  $[S^*]$  は固有振動数の感度および固有モードの評価量の感度を要素とする感度マトリックスである。そこで, 目標値  $\{P^e\}$  と予測値  $\{P\}$  との差の二乗和  $E^*$

$$E^* = (\{P^e\} - \{P\})^T [W] (\{P^e\} - \{P\}) \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

が, 最小になるような  $\{\gamma\}$  を求めることになる。式(4.32)を最小にする  $\{\gamma\}$  は, 次式の方程式を解くことにより算出できる。

$$([S^*]^T [W] [S^*]) \{\gamma\} = [S^*]^T [W] (\{P^e\} - \{P_0\}) \quad \dots\dots (4.33)$$

修正後のモデルパラメータの値は, 式(4.27)あるいは式(4.33)で得られた変更率  $\gamma_k$  を式(4.14)に代入することにより算出できる。

以上で, 初期モデルのモデルパラメータを修正することができる。通常は, 一回の修正作業で最良なモデルパラメータの値が得られる場合は少なく, 最良

な値が得られるまで修正作業を繰り返すことになる。

図4.2の同定計算モデルの6個のばね定数の値が同定された場合に、図4.1の多数のばねのばね定数、ばね支持点を定める考え方を示す。図4.1のばねがm個あるとし、固定座標系における点*i*( $x_i, y_i, z_i$ )を支持するばねのX, Y, Z方向のばね定数をそれぞれ $k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}$ すると、図4.2の6個のばねのばね定数 $K_x, K_y, K_z, K_\phi, K_\theta, K_\psi$ との関係は次式となる<sup>(43)</sup>。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m k_{ix} &= K_x \\ \sum_{i=1}^m k_{iy} &= K_y \\ \sum_{i=1}^m k_{iz} &= K_z \\ \sum_{i=1}^m (z_i^2 k_{iy} + y_i^2 k_{iz}) &= K_\phi \\ \sum_{i=1}^m (x_i^2 k_{iz} + z_i^2 k_{ix}) &= K_\theta \\ \sum_{i=1}^m (y_i^2 k_{ix} + x_i^2 k_{iy}) &= K_\psi \end{aligned} \dots\dots\dots (4.34)$$

以上の方程式を解いてばね定数、ばね支持点の座標を求めることになるが、一義的に決定できるのは6個の未知数だけであるので、(未知数の数-6)個の制約条件を付けて解くことになる。

#### 4. 4 数値実験例

提示した同定法の妥当性を確認するために数値実験を行い、その結果について検討する。ここでは、既知のモデルパラメータを用いて固有値解析を行い、その結果得られた固有振動数、固有モードを実験値として代用する。

#### 4. 4. 1 剛体系モデルの同定

まず、本項では、第2章で説明した固有モードの各成分の感度をそのままの形で用いる同定法で同定を行う。これは、4. 3節で説明した実験で得られる各測定点の並進変位成分からなる固有モードを同定の目標とする考え方の妥当性を確認するためである。

数値実験モデルとして、ばね支持点座標系 $S-X^S Y^S Z^S$ の原点に対称で $X^S$ ,  $Y^S$ 方向にそれぞれ距離 $L_x$ ,  $L_y$ だけ離れた4箇所を同じ特性のばねで支持した図4.3に示す六自由度系モデルを取り上げる。なお、 $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ は、4箇所の同じ特性のばねを代表した一つのばねに関する $X^S$ ,  $Y^S$ ,  $Z^S$ 方向のばね定数を表す。固定座標系 $O-X Y Z$ をばね支持点座標系と一致させ、重心座標系 $G-X^G Y^G Z^G$ を固定座標系と平行に設定する。固有値解析に用いたモデルパラメータの諸元を表4.1に示すが、表中に記載していないばね支持点 $S$ の $Z$ 座標は零となる。表4.1の値を用いて固有値解析を行うと、6組の固有振動数と回転角変位成分を含む固有モードが得られる。そこで、固有値解析で得られた固有モードを式(4.21)に代入することにより並進変位成分だけからなる固有モ

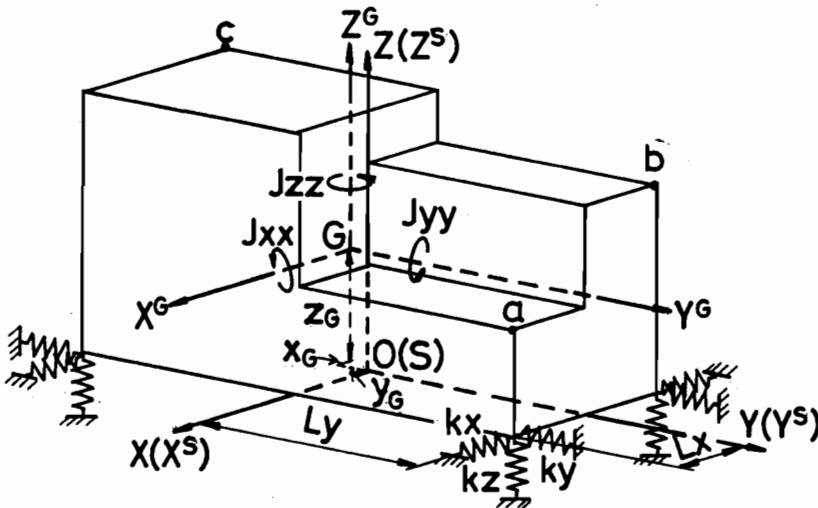


図4.3 数値実験モデル



表4.1 数値実験モデルの諸元

M o d e l p a r a m e t e r						
m	kg	453	$J_{yz}$ kg·m <sup>2</sup>	-4.42	$k_x$ N/m	$3.00 \times 10^4$
$J_{xx}$	kg·m <sup>2</sup>	44.7	$J_{zx}$ kg·m <sup>2</sup>	-0.460	$k_y$ N/m	$3.00 \times 10^4$
$J_{yy}$	kg·m <sup>2</sup>	14.7	$x_G$ m	-0.0125	$k_z$ N/m	$3.00 \times 10^4$
$J_{zz}$	kg·m <sup>2</sup>	41.9	$y_G$ m	-0.0625	$L_x$ m	0.300
$J_{xy}$	kg·m <sup>2</sup>	-1.77	$z_G$ m	0.219	$L_y$ m	0.750

ードに変換し、実験値として代用する。ただし、目標とする固有モードの成分は、剛体の運動を一義的に決定するために必要な図4.3の点aのZ方向、点bのX、Y、Z方向、点cのX、Z方向に対応する6成分とした。したがって、目標値の数は6個の固有振動数と6×6個の固有モード成分の計42個となる。この値を目標とし、図4.3のモデルパラメータである質量m、慣性モーメント $J_{xx}$ 、 $J_{yy}$ 、 $J_{zz}$ 、慣性乗積 $J_{xy}$ 、 $J_{yz}$ 、 $J_{zx}$ 、重心位置の座標成分 $x_G$ 、 $y_G$ 、 $z_G$ および集約した6個のばねのばね定数 $K_x$ 、 $K_y$ 、 $K_z$ 、 $K_\phi$ 、 $K_\theta$ 、 $K_\psi$ の計16個の内、次の3通りのモデルパラメータの同定を行った。

ケース1：モデルの大きさを定めるための質量mを除いた15個のモデルパラメータを同定する場合

ケース2：慣性モーメント、慣性乗積および重心位置の座標の計9個のモデルパラメータを同定する場合

ケース3：重心位置の座標だけを同定する場合

なお、既知としたモデルパラメータの値は表4.1の値を用いた。

同定するモデルパラメータの初期値を表4.1の値の80%として計算したときの反復計算回数と目標値との残差の関係を図4.4に示す。図4.4において、同定

するモデルパラメータの数が少ない程収束が速いことがわかる。また、同定されたモデルパラメータの値はすべて表4.1の値と等しくなった。したがって、実験で得られる各測定点の並進変位成分からなる固有モードを同定の目標とする考え方の妥当性が確認できた。

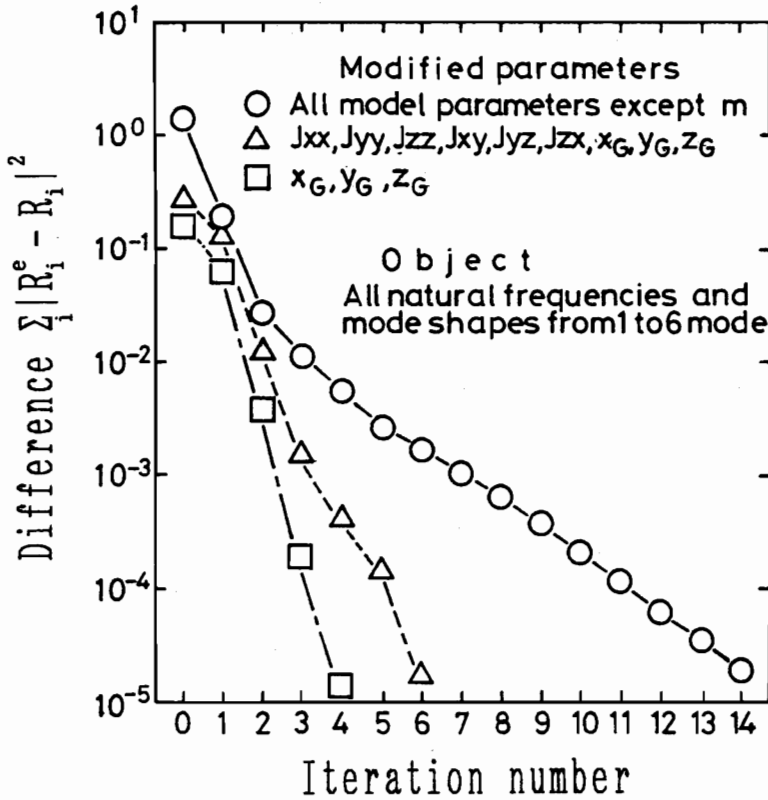


図4.4 反復計算回数と残差の関係  
(数値実験モデルの場合)

#### 4.4.2 収束性の検討

4.4.1項において、剛体系モデルのパラメータが同定できることは確認できた。しかし、図4.4からもわかるように、15個のモデルパラメータを同時に同定する場合には多くの反復計算回数を要する。第2章、第3章で扱ったばね・質量系のモデルは、モデルパラメータの初期値が真値とかなり異なっているも、目標とする固有モードと初期モデルの固有モードのモード次数の順序が入れ替わったりすることがなく、同定計算においては取扱いが比較的容易なモデルである。しかし、図4.3のモデルでは、慣性モーメント、重心位置の座標などがモデルパラメータに含まれるため、モデルパラメータの初期値の組み合わせによっては目標とする固有モードと初期モデルの固有モードのモード次数の順序が入れ替わりやすく、それだけ同定が困難となる。したがって、実用的にはモデルパラメータの初期値に依存しにくく、収束速度、収束安定性がよい同定法が望まれる。そこで、剛体系モデルに対しても、第3章で提案した同定法の適用を試みる。

数値実験に用いたモデルは、4.4.1項と同様に図4.3のモデルであり、同定計算の目標値も4.4.1項と同じ値を用いた。同定するモデルパラメータは、モデルの大きさを定めるために既知とした全体の質量 $m$ を除いた慣性モーメント $J_{xx}$ 、 $J_{yy}$ 、 $J_{zz}$ 、慣性乗積 $J_{xy}$ 、 $J_{yz}$ 、 $J_{zx}$ 、重心位置の座標 $x_G$ 、 $y_G$ 、 $z_G$ および集約した6個のばねのばね定数 $K_x$ 、 $K_y$ 、 $K_z$ 、 $K_\phi$ 、 $K_\theta$ 、 $K_\psi$ の計15個とした。ここでは、第2章の同定法を用いた場合と第3章の同定法を用いた場合の収束性を比較するため、両同定法を用いて同定した。なお、同定するモデルパラメータの初期値は、表4.2の左から3列目から5列目に示す3通りとした。

第2章および第3章の同定法を用いた場合の反復計算回数と目標値との残差の関係を図4.5に示す。実線が第3章の同定法（以後、提案法と呼ぶ）を用いた場合で、破線が第2章の同定法（以後、従来法と呼ぶ）を用いた場合である。なお、両同定法の収束性の違いを評価するため、提案法の残差の数値は固有モードベクトルの方向の相違を評価する量ではなく、従来法と同じ固有モードの各成分の残差の二乗和を用いた。図4.5において、従来法では収束の状況が初期モデルの違いによって大きく異なることがわかる。モデルAのように、初期

表4.2 同定するモデルパラメータの初期値  
(数値実験モデルの場合)

Model parameter	Exact value	Initial value		
		Model A	Model B	Model C
m kg	453	453		
$J_{xx}$ kg·m <sup>2</sup>	44.7	31.3	50.0	30.0
$J_{yy}$ kg·m <sup>2</sup>	14.7	10.3	10.0	10.0
$J_{zz}$ kg·m <sup>2</sup>	41.9	29.4	50.0	30.0
$J_{xy}$ kg·m <sup>2</sup>	-1.77	-1.24	-5.00	-3.00
$J_{yz}$ kg·m <sup>2</sup>	-4.42	-3.10	-5.00	-3.00
$J_{zx}$ kg·m <sup>2</sup>	-0.460	-0.322	-0.500	-0.300
$x_G$ m	-0.0125	-0.0088	-0.0100	
$y_G$ m	-0.0625	-0.0438	-0.0100	
$z_G$ m	0.219	0.153	0.100	
$K_x$ N/m	$1.20 \times 10^5$	$8.40 \times 10^4$	$1.00 \times 10^5$	
$K_y$ N/m	$1.20 \times 10^5$	$8.40 \times 10^4$	$1.00 \times 10^5$	
$K_z$ N/m	$1.20 \times 10^5$	$8.40 \times 10^4$	$1.00 \times 10^5$	
$K_\phi$ N·m/rad	$6.75 \times 10^4$	$4.73 \times 10^4$	$5.00 \times 10^4$	
$K_\theta$ N·m/rad	$1.08 \times 10^4$	$7.56 \times 10^4$	$1.00 \times 10^4$	
$K_\psi$ N·m/rad	$7.83 \times 10^4$	$5.48 \times 10^4$	$5.00 \times 10^4$	

値を真値の70%とした全体が同率で縮小，拡大されたような場合には，モード順序が入れ替わりにくく，従来法でも収束が速い。しかし，モデルB，Cのように初期値を任意に設定した場合には，収束性が悪くなることもあり，モデルCの場合には20回の反復計算を要しても収束には至らなかった。また，提案法を用いた場合には，3つのモデルにおいて，多少の収束性の違いはあるが安定に収束しており，初期モデルの影響を受けにくいことがわかる。また，従来法に比べても，少ない反復計算回数で残差が小さくなっている。

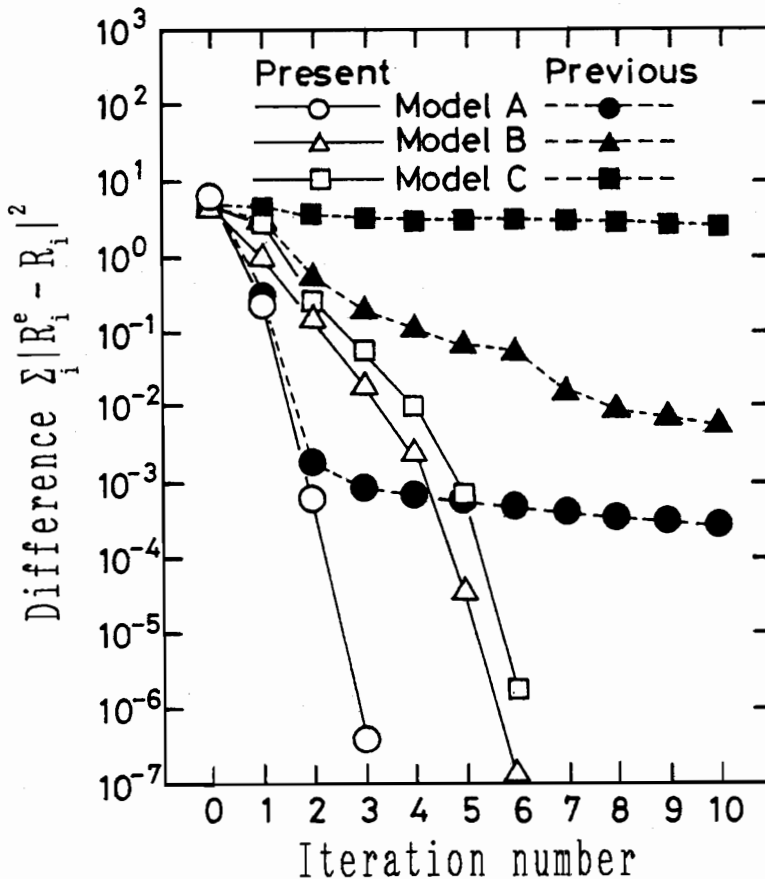


図4.5 反復計算回数と残差の関係  
(同定法の違いによる収束性の比較)

したがって、剛体系モデルにおいても、第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が大幅に向上し、収束性が同定しようとするモデルパラメータの初期値の影響を受けにくいことが確認できた。

以後、第3章で提案した同定法を用いる。

#### 4.4.3 防振支持設計への応用

機械の防振支持設計においては、固有振動数を機械から発生する加振力の振動数と一致しないように設計する必要がある。そこで、ここでは、4.4.1項のモデルを対象として、ばね定数、ばね支持位置を調整し、固有振動数を所望の値に分散配置することを試みた。

基本振動数が5.5Hz、6.5Hzの二つの励振振動数を有する機械の防振支持設計を想定する。通常、防振支持設計においては、垂直方向の固有振動数が励振振動数の50%以下になるように支持ばね定数などを選定する。そこで、図4.3のモデルにおいて、Z方向の並進振動が顕著なモードの固有振動数を5.5Hzの50%以下になるように初期設計した結果、表4.1の諸元が得られたと考える。表4.3の左から2列目に表4.1の諸元を用いた固有値解析で得られた固有振動数を示す。三次モードが垂直方向の並進振動が顕著なモードであり、四次モード、五次モードがそれぞれY軸回り、X軸回りのピッチングモードが顕著なモードの固有振動数であった。この場合、一次モードから三次モードまでの固有振動数は、5.5Hz、6.5Hzの励振振動数の50%以下であり問題とならないが、四次モードが5.5Hzと五次モードが6.5Hzと共振する可能性がある。そこで、四次モード、五次モードの固有振動数を移動し、共振回避させることを考える。しかし、一次モードから三次モードまでの固有振動数が大きくならないように、しかも六次モードの固有振動数が5.5Hzと6.5Hzの2倍高調波成分に近づかないようにしながら、四次モードの固有振動数を5.5Hzと6.5Hzの谷間に、五次モードの固有振動数を6.5Hzと11.0Hz（5.5Hzの2倍高調波成分）の谷間になるように配置する。そのような目標として、表4.3の左から3列目の6個の固有振動数を設定した。修正するモデルパラメータとして同定計算モデルの集約した6個のばねのばね定数 $K_x$ 、 $K_y$ 、 $K_z$ 、 $K_\phi$ 、 $K_\theta$ 、 $K_\psi$ を選び、調整する。ただし、残りの修正しないモデルパラメータの値は表4.1の値を用いた。

修正後のモデルパラメータから得られた固有振動数を表4.3の左から4列目に示す。表4.3の左から2列目の修正前のモデルと比較すると、一次モードから三次モードまでの固有振動数が移動せず、四次モードの固有振動数が5.5Hzと6.5Hzの谷間に、五次モードの固有振動数が6.5Hzと11.0Hz（5.5Hzの2倍高調波成分）の谷間に、六次モードの固有振動数が11.0Hzと13.0Hz（6.5Hzの2倍高調波成分）の谷間に配置されていることがわかる。また、修正前後のばね定数と原点から支持位置までの距離の比較を表4.4に示す。X方向のばね定数  $k_x$  および原点から支持位置までの距離  $L_x$ ,  $L_y$  が大きく変化していることがわかる。ただし、表4.4のばね定数、支持位置までの距離は、同定された6個のばね定数を式(4.34)に代入し、4箇所 のばねがすべて同じ特性で、原点に対して対称な位置を支持していると仮定して求めた一つのばねに関する値である。

表4.3 修正前後の固有振動数の比較 (Hz)

Mode number	Initial model	Desired model	Modified model
1st	1.99	1.99	1.99
2nd	2.46	2.46	2.46
3rd	2.59	2.59	2.59
4th	5.51	6.00	6.06
5th	6.56	8.75	8.81
6th	7.09	12.00	11.92

表4.4 修正前後のモデルパラメータの比較

Model Parameter	Initial value	Modified value
$k_x$ N/m	$3.00 \times 10^4$	$5.02 \times 10^4$
$k_y$ N/m	$3.00 \times 10^4$	$2.83 \times 10^4$
$k_z$ N/m	$3.00 \times 10^4$	$2.96 \times 10^4$
$L_x$ m	0.300	0.252
$L_y$ m	0.750	1.045

#### 4.5 実測データによる同定とデータの選択が同定結果に及ぼす影響

ここでは、対象として図4.6に示す鋼製の円盤と円筒より構成される剛体が、4個の同じ特性を有するコイルばねで支持された構造物を取り上げる。この供試体に対して振動実験を行い、固有振動数、固有モードを測定し、その情報をもとに供試体のモデルパラメータを同定する。座標系の取り方は、4.4節と同様である。なお、このモデルの質量分布および形状より算出した重心位置、慣性主軸 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$ を参考のために図4.6中に示す。

実験は次の手順で行う。固有振動数を求めるために図4.6に示す点aのX方向に加速度センサを取付け、自由振動させたときのパワースペクトルを求める。図4.7にパワースペクトルを示すが、6個のピークから固有振動数を知ることができる。固有モードについては、点dのX方向の応答を基準とし、点a、b、c、dのX、Y、Z方向に順次加速度センサを取り付け、点dのX方向の応答との振幅比および位相差を固有振動数ごとに求めることにより得た。その結果、固有モードは一次モード、四次モード、六次モードが $\xi$ 方向の並進と $\eta$ 軸、 $\zeta$ 軸回りの回転が連成したモード、二次モード、三次モード、五次モードが $\eta$ 方向、 $\zeta$ 方向の並進と $\xi$ 軸回りの回転が連成したモードとなっていた。なお、同



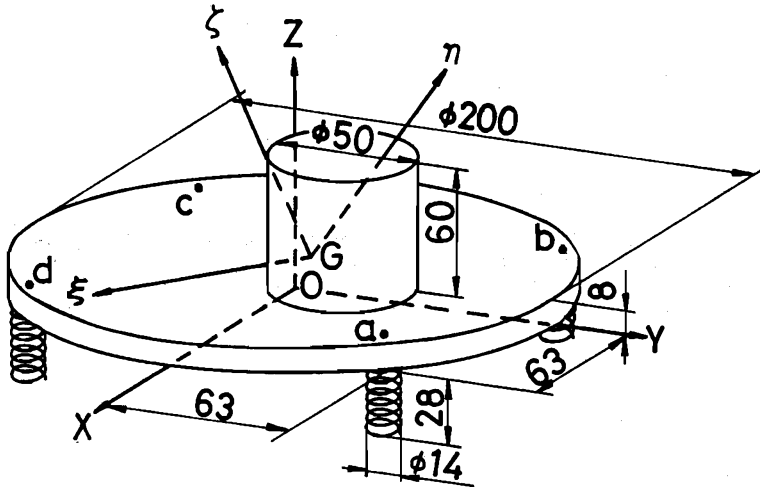


図4.6 実験モデル

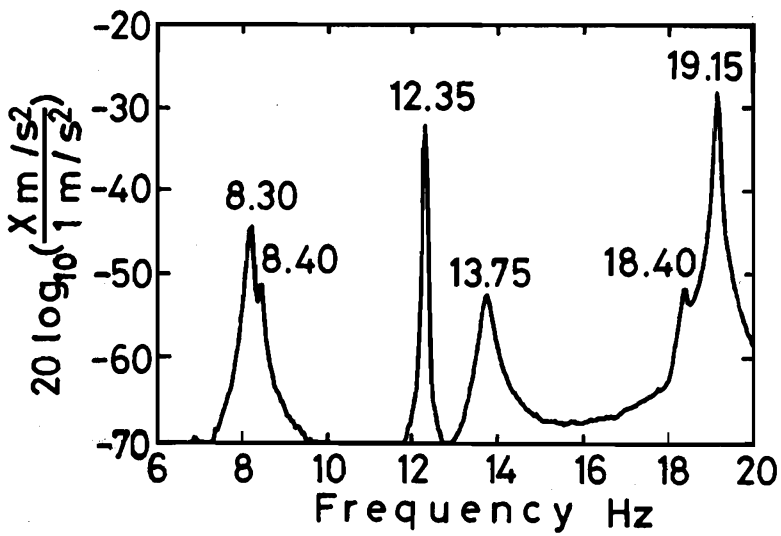


図4.7 パワースペクトル  
(点aのX方向の加速度)

定するモデルパラメータは、質量 $m$ を除いた慣性モーメント $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$ , 慣性乗積 $J_{xy}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{zx}$ , 重心位置の座標 $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$ および集約した6個のばねのばね定数 $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ,  $K_\phi$ ,  $K_\theta$ ,  $K_\psi$ の計15個とした。また、実験で得られる情報は、6個の固有振動数と点a～点dのX, Y, Z方向で測定された6組の固有モードである。しかし、剛体の運動を一義的に決定するためには、固有モードは独立な6個の成分があればよい。そこで、固有モードの成分は、点aのX, Y, Z方向, 点bのY, Z方向, 点cのZ方向の6成分とした。ここでは、目標値の設定の仕方が、同定結果にどのように影響を及ぼすかを検討するため、次の3通りの目標値をもとに同定を行った。なお、 $N_0$ は目標値の個数を表す。

ケース1：一次モードから六次モードまでのすべての固有振動数と固有モードの場合 ( $N_0=42$ )

ケース2：一次モードから六次モードまでの固有振動数と一次モードから四次モードまでの固有モードの場合 ( $N_0=30$ )

ケース3：一次モードから四次モードまでの固有振動数と固有モードの場合 ( $N_0=28$ )

同定するモデルパラメータの初期値をモデルの質量分布および形状から算出した値の90%として計算を行った。そのときの反復計算回数と目標値との残差の関係を図4.8に示す。図4.8において、すべての場合に4回程度の反復計算回数で収束状態に近くなっているが、実験データであるためある程度の残差が残ったままとなっていることがわかる。また、3通りの目標値に対して同定されたモデルパラメータと図4.6のモデルから図式的に算定した慣性モーメント、慣性乗積、重心位置の座標、ばね定数の比較を表4.5に示す。ただし、左から2列目の慣性モーメント、慣性乗積、重心位置の座標は質量分布および形状から図式的に算出し、ばね定数はコイルばね定数算出式<sup>(43)</sup>から算定した。また、左から3列目から5列目までの同定されたモデルパラメータのばね定数 $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ および原点からばね支持位置までの長さ $L_x$ ,  $L_y$ は、同定された $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ,  $K_\phi$ ,  $K_\theta$ ,  $K_\psi$ の値から求めた一つのコイルばねに関する値である。表4.5において、 $L_x$ ,  $L_y$ の値が真値と大きく異なるのは真値として原点からばねの中心までの値を考えたためであり、実際のばね支持位置までの距離は原

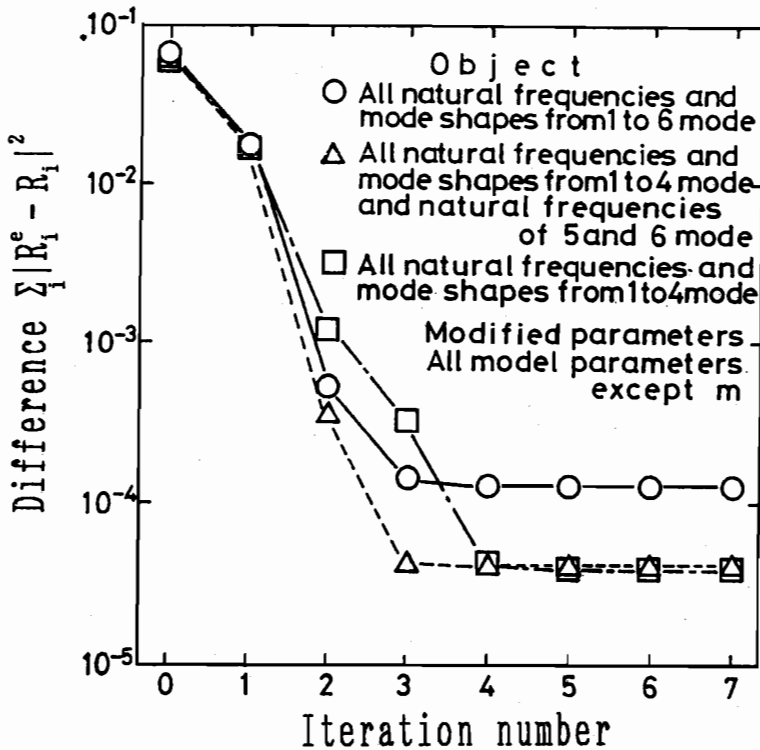


図4.8 反復計算回数と残差の関係  
(実験モデルの場合)

点からばねの外側の端までの距離，すなわち  $L_x = L_y = 0.07\text{m}$  ではないかと考えられる。ケース1，2は， $L_x$ ， $L_y$ を除けば誤差は小さく，供試体のモデルパラメータを精度よく同定できたと考えられる。しかし，一次モードから四次モードまでの情報だけを目標としたケース3の場合には，ケース1，2に比べて，慣性モーメントと慣性乗積に誤差の大きいものが認められる。この原因として，慣性モーメント，慣性乗積は五次モード，六次モードのピッチングモードに大きな影響を及ぼすため，逆に五次モード，六次モードの情報全く無い場合には，精度のよい同定が行えないためと考えられる。したがって，剛体系のモデルパラメータの同定を行う際には，少なくともすべてのモード次数の固有振動数は目標値として採用すべきであると考えられるが，同定するモデルパラメータの数が少ない場合にはこの条件をゆるめることができると考えられる。

表4.5 同定されたモデルパラメータと真値の比較  
(実験モデルの場合)

Model parameter	Case	1 ( $N_0 = 42$ )		2 ( $N_0 = 30$ )		3 ( $N_0 = 28$ )	
		Exact value	Identified value	Error %	Identified value	Error %	Identified value
$J_{xx}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$7.24 \times 10^{-3}$	$7.26 \times 10^{-3}$	0.28	$7.14 \times 10^{-3}$	-1.38	$7.48 \times 10^{-3}$	3.31
$J_{yy}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$6.92 \times 10^{-3}$	$6.95 \times 10^{-3}$	0.43	$6.93 \times 10^{-3}$	0.14	$7.36 \times 10^{-3}$	6.36
$J_{zz}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$1.21 \times 10^{-2}$	$1.23 \times 10^{-2}$	1.65	$1.23 \times 10^{-2}$	1.65	$1.22 \times 10^{-2}$	0.83
$J_{xy}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$3.86 \times 10^{-4}$	$3.78 \times 10^{-4}$	-2.07	$3.94 \times 10^{-4}$	2.07	$2.42 \times 10^{-4}$	-37.3
$J_{yz}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$6.37 \times 10^{-4}$	$6.50 \times 10^{-4}$	2.04	$6.26 \times 10^{-4}$	-1.73	$6.07 \times 10^{-4}$	-4.71
$J_{zx}$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	$4.25 \times 10^{-4}$	$4.37 \times 10^{-4}$	2.82	$4.27 \times 10^{-4}$	0.47	$4.09 \times 10^{-4}$	-3.76
$x_G$ $\text{m}$	$6.13 \times 10^{-3}$	$6.18 \times 10^{-3}$	0.82	$6.16 \times 10^{-3}$	0.49	$6.15 \times 10^{-3}$	0.33
$y_G$ $\text{m}$	$9.19 \times 10^{-3}$	$9.28 \times 10^{-3}$	0.98	$9.20 \times 10^{-3}$	0.11	$9.18 \times 10^{-3}$	-0.11
$z_G$ $\text{m}$	$1.52 \times 10^{-2}$	$1.52 \times 10^{-2}$	0.0	$1.51 \times 10^{-2}$	-0.66	$1.52 \times 10^{-2}$	0.0
$k_x$ $\text{N/m}$	$2.13 \times 10^3$	$2.16 \times 10^3$	1.74	$2.16 \times 10^3$	1.74	$2.16 \times 10^3$	1.74
$k_y$ $\text{N/m}$	$2.13 \times 10^3$	$2.16 \times 10^3$	1.41	$2.16 \times 10^3$	1.74	$2.16 \times 10^3$	1.74
$k_z$ $\text{N/m}$	$4.72 \times 10^3$	$4.77 \times 10^3$	1.06	$4.77 \times 10^3$	1.06	$4.77 \times 10^3$	1.06
$L_x$ $\text{m}$	$6.30 \times 10^{-2}$	$6.99 \times 10^{-2}$	11.0	$6.96 \times 10^{-2}$	10.5	$7.01 \times 10^{-2}$	11.3
$L_y$ $\text{m}$	$6.30 \times 10^{-2}$	$6.99 \times 10^{-2}$	11.0	$6.98 \times 10^{-2}$	10.8	$7.01 \times 10^{-2}$	11.3
$m$ $\text{kg}$		3.03					

#### 4.6 結 言

本章では、同定法を機械の防振支持設計に適用することを想定した。そして、剛体の慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を実験データから同定する方法を提示した。その中で、剛体の重心位置を同定するために、重心位置の座標を空間に固定した座標系からの偏差のパラメータを用いて表し、重心位置を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示した。また、実験では回転角変位を直接測定することが困難であるため、通常の変位センサを用いて得られる並進変位データを同定計算に用いるための方法を明らかにした。そして、数値実験を行い、同定法の妥当性を検証した。

また、実測データによる同定において、目標とする固有振動数、固有モードと同定されたモデルパラメータの関係を考察した。その結果、精度よい同定を行うためには、目標値として一次モードから六次モードまでのすべての固有振動数、固有モードを採用するか、少なくとも一次モードから六次モードまでの固有振動数は採用すべきである。採用しない場合には、同定されたモデルパラメータに誤差の大きなものが生じる可能性が高いことが明らかになった。

なお、本章で扱ったモデルにおいても、第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が大幅に向上し、収束性が同定しようとするモデルパラメータの初期値の影響を受けにくいことを確認した。

さらに、同定法を防振支持設計の固有振動数の適正配置問題に応用し、防振支持設計に有効に活用できる見通しを得た。

## 第5章 ばね要素で支持された剛体の慣性主軸の同定

### 5.1 緒言

第4章では、同定法を防振支持設計に適用することを想定し、剛体の重心位置およびある規定した軸に関する慣性モーメント、慣性乗積を実験データから同定する方法を提示した。重心位置およびある規定した軸に関する慣性モーメント、慣性乗積が既知となれば、弾性体のばね定数、支持位置などを変更したときの防振特性を評価するための動特性解析は可能となる。しかし、実際的な防振支持設計プロセスを考えた場合、弾性体の最適な支持位置、支持方向を決定するためには、重心位置およびある規定した軸に関する慣性モーメント、慣性乗積の情報だけでは、情報が不足する。例えば、内燃機関の防振支持設計においては、トルク変動による加振力が主力を占めるため、トルクロール軸回りの回転振動とトルクロール軸と直角方向の軸回りの回転振動および他の並進振動が連成しないように弾性体の支持方向、支持位置を決定する。その結果、トルクロール軸回りの復元モーメントだけを柔らかくし、他の自由度の復元力を高くできるため、内燃機関のおどりを防ぎ、しかも、振動伝達率を低くすることができる。また、通常防振支持設計において、すべての自由度の固有振動数に対して共振回避ができない場合にも、並進振動と回転振動の連成を避けるように弾性体の支持方向、支持位置を決定する。これは、回転振動と並進振動との間に連成があると、並進的な加振力にたいしても機械には回転振動が誘起され、その結果、回転中心から離れた位置で思わぬ大きな加速度が生じることを避けるためである。

以上のように、実際の防振支持設計においては、各自由度を非連成あるいは特定な自由度だけを非連成とすることが望ましく、そのための支持弾性体の支持位置、支持方向を決定する情報としては、機械の重心位置はもちろん第4章では同定できなかった慣性主軸方向が既知でなければならない<sup>(33)</sup>。ところで、通常、機械は形状や質量分布が複雑であるため、設計図面から重心位置はもちろん慣性主軸方向を算定することは、労力が大変であり、誤差も生じやすい。そこで、実験的に慣性主軸方向、重心位置を算定する方法として、例えば、大久保ら<sup>(15)</sup>の機械を自由状態にして、打撃試験で得た情報から慣性主軸方向、

重心位置を算定する方法があるが、重量機械の場合には自由状態に設置することが困難となる場合が多い。また、機械を弾性支持した系の伝達関数から質量マトリックスを同定し、その要素から慣性主軸などを二次的に推定する仏円ら<sup>(13)</sup>の方法、あるいはモーダルパラメータから直接質量マトリックスを算定し、慣性主軸などを二次的に推定するContiら<sup>(14)</sup>の方法もあるが、慣性主軸方向、重心位置を直接物理定数の形で同定することはできない。

そこで、本章では、第4章では同定できなかった剛体の慣性主軸方向および主慣性モーメントの値を実験データから同定する方法について検討する。その中で、剛体の慣性主軸方向を同定するために、空間に固定した座標系の各座標軸方向と慣性主軸方向との角度のずれを表すパラメータを用いて慣性主軸方向を表し、慣性主軸方向を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示する。そして、実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を確認する。また、同定計算における慣性主軸方向、主慣性モーメントの初期値の設定において、収束性を向上させるために考慮すべき点について検討する。また、同定法を防振支持設計の特性改善に適用することを試み、適正な防振支持系を設計した結果についても触れる。

## 5.2 運動方程式

本章では、同定対象として、図5.1に示すモデルを取り上げる。このモデルにおいては、第4章の慣性モーメント、重心位置などのパラメータに加えて、慣性主軸方向を同定対象のパラメータとする。そこで、慣性主軸方向を同定するために、図5.1に示すような任意の点を原点とする空間に固定した直交座標系 $O-XYZ$ （以後、固定座標系と呼ぶ）を設定し、固定座標系の各座標軸方向と慣性主軸方向との角度のずれを表すパラメータを用いて慣性主軸方向を表す。角度のずれを表すパラメータとしてオイラー角を用いる。また、重心位置についても、第4章と同様に、固定座標系からの偏差のパラメータを用いて表す。そして、慣性主軸の方向、重心位置を表すパラメータを陽な形で表した固定座標系における運動方程式を導く。運動方程式は次の手順で導く。まず、図5.1に示すような同定計算の初期値として与えられる剛体の重心位置を原点とし、同定計算の初期値として与えられる慣性主軸方向を座標軸する直交座標系

O-XYZ: Fixed coordinate  
 G- $\xi\eta\zeta$ : Principal axis of inertia  
 coordinate

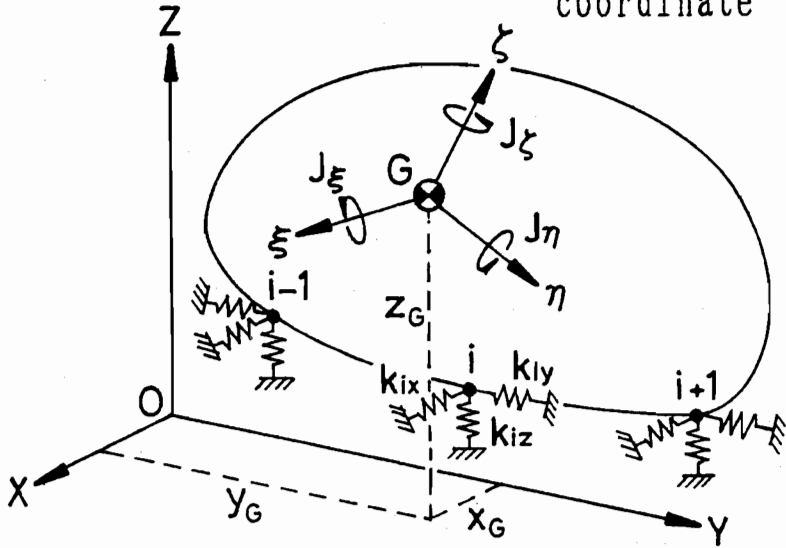


図5.1 剛体系モデル

G- $\xi\eta\zeta$  (以後、重心座標系と呼ぶ)を設定する。そして、剛体の慣性力を重心座標系で求める。また、ばねによる復元力に関しても、各ばね要素ごとに復元力を算出する。その後、慣性力、復元力を両者に共通な固定座標系に座標変換し、固定座標系における運動方程式を導く。このようにすれば、固定座標系における運動方程式を簡単に導くことができる。

まず、重心座標系における慣性力を求める。剛体の質量を  $m$ 、慣性主軸である  $\xi$  軸、 $\eta$  軸、 $\zeta$  軸回りの慣性モーメントを  $J_\xi$ 、 $J_\eta$ 、 $J_\zeta$ 、重心の  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$  方向の並進変位を  $\xi^G$ 、 $\eta^G$ 、 $\zeta^G$ 、各軸回りの回転角変位を  $\phi^G$ 、 $\theta^G$ 、 $\psi^G$  とすれば、重心座標系における変位ベクトル  $\{q^G\}$  と慣性力ベクトル  $\{F_m^G\}$  の関係は次式のように表される。



$$\{F_m^G\} = -[M]\{\dot{q}^G\} \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \{F_m^G\} &= \{f_{m\xi}^G, f_{m\eta}^G, f_{m\zeta}^G, M_{m\phi}^G, M_{m\theta}^G, M_{m\psi}^G\}^T \\ \{q^G\} &= \{\xi^G, \eta^G, \zeta^G, \phi^G, \theta^G, \psi^G\}^T \\ [M] &= \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} \\ [m] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

次に、重心座標系における変位と慣性力の関係を固定座標系における変位と慣性力の関係に変換することを考える。固定座標系における重心Gの座標を ${}^0P^G$  ( $x_G, y_G, z_G$ )とすれば、重心位置を原点とし固定座標系に平行な座標系と固定座標系は、第4章で説明したように重心位置の座標を要素とする座標変換マトリックス $[T_G]$ を用いて関係づけられる。また、慣性主軸を座標軸とする重心座標系と重心を原点とし固定座標系に平行な座標系は、座標系の原点が一致しているため、本章で新たに同定の対象とした慣性主軸方向を定める3個の独立な角、すなわちオイラー角 $\Phi, \Theta, \Psi$ <sup>(44)</sup>を要素とする座標変換マトリックス $[T_E]$ を用いて関係づけられる。以上のことから、重心座標系における変位ベクトル $\{q^G\}$ と固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ および重心座標系における慣性力ベクトル $\{F_m^G\}$ と固定座標系における慣性力ベクトル $\{F_m\}$ は、2つの座標変換マトリックスを用いて、次式のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} \{q^G\} &= [T_E][T_G]\{q\} \\ \{F_m\} &= [T_E]^T[T_G]^T\{F_m^G\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}^T \\ \{F_m\} &= \{f_{mx}, f_{my}, f_{mz}, M_{m\phi}, M_{m\theta}, M_{m\psi}\}^T \\ [T_E] &= \begin{bmatrix} [E] & [O] \\ [O] & [E] \end{bmatrix} \\ [E] &= \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 c_2 s_3 & c_1 s_3 + s_1 c_2 c_3 & s_1 s_2 \\ -s_1 c_3 - c_1 c_2 s_3 & -s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 & c_1 c_2 \\ s_2 s_3 & -s_2 c_3 & c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし,  $c_1 = \cos \Phi, c_2 = \cos \Theta, c_3 = \cos \Psi, s_1 = \sin \Phi, s_2 = \sin \Theta, s_3 = \sin \Psi$

$$\begin{aligned} [T_G] &= \begin{bmatrix} [I] & [{}^0P^G] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \quad [{}^0P^G] = \begin{bmatrix} 0 & x_G & -y_G \\ -z_G & 0 & x_G \\ y_G & -x_G & 0 \end{bmatrix} \\ & \dots \dots \dots (5.4) \end{aligned}$$

式(5.1), 式(5.3)より, 次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と慣性力ベクトル $\{F_m\}$ の関係が導かれる。

$$\{F_m\} = - [T_E]^T [T_G]^T [M] [T_G] [T_E] \{\ddot{q}\} \quad \dots \dots \dots (5.5)$$

次に, ばね要素により生じる復元力を求める。点*i*を支持するばね要素のX, Y, Z方向のばね定数を $k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}$ , 支持点*i*のX, Y, Z方向の変位を $x_i^s, y_i^s, z_i^s$ とすると, *m*個のばね支持点に関する変位ベクトル $\{q^s\}$ と復元力ベクトル $\{F_k^s\}$ の関係は次式となる。

$$\{F_k^s\} = -[K]\{q^s\} \quad \dots \dots \dots (5.6)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\{F_k^S\} &= \{f_{k1x}^S, f_{k1y}^S, f_{k1z}^S, \dots, f_{kix}^S, f_{kiy}^S, f_{kiz}^S, \\
&\quad \dots, f_{kmx}^S, f_{kmy}^S, f_{kmz}^S\}^T \\
\{q^S\} &= \{x_1^S, y_1^S, z_1^S, \dots, x_i^S, y_i^S, z_i^S, \\
&\quad \dots, x_m^S, y_m^S, z_m^S\}^T \\
[K] &= \text{Diag} [k_{1x}, k_{1y}, k_{1z}, \dots, k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}, \\
&\quad \dots, k_{mx}, k_{my}, k_{mz}] \\
&\dots\dots\dots (5.7)
\end{aligned}$$

また、固定座標系における支持点*i*の座標を ${}^0P^i(x_i, y_i, z_i)$ とすると、式(5.6)の各ばね要素の支持点における変位を要素とする変位ベクトル $\{q^S\}$ と復元力を要素とする復元力ベクトル $\{F_k^S\}$ の関係は、支持点の座標を要素とする座標変換マトリックス $[T_s]$ を用いて、次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と復元力ベクトル $\{F_k\}$ の関係に変換できる。

$$\{F_k\} = -[T_s]^T [K] [T_s] \{q\} \dots\dots\dots (5.8)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
[T_s] &= \begin{bmatrix} [I] & [{}^0P^1] \\ \cdot & \cdot \\ [I] & [{}^0P^i] \\ \cdot & \cdot \\ [I] & [{}^0P^m] \end{bmatrix} & [{}^0P^i] &= \begin{bmatrix} 0 & x_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -z_i & 0 \end{bmatrix} \\
&\dots\dots\dots (5.9)
\end{aligned}$$

式(5.5)、(5.8)より、次式のように図5.1に示すモデルの固定座標系における自由振動状態の運動方程式が導かれる。

$$[\hat{m}]\{\dot{q}\} + [\hat{k}]\{q\} = \{0\} \dots\dots\dots (5.10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{[m]} &= [T_G]^T [T_E]^T [M] [T_E] [T_G] \\ \hat{[k]} &= [T_S]^T [K] [T_S] \end{aligned} \dots\dots\dots (5.11)$$

式(5.10)に対応する特性方程式は次式となる。

$$-\lambda_j \hat{[m]} \{N_j\} + \hat{[k]} \{N_j\} = \{0\} \dots\dots\dots (5.12)$$

以上で、図5.1のモデルの固定座標系に関する運動方程式およびモーダルパラメータを得るための特性方程式が得られたことになる。

### 5.3 同定法

本章では、剛体系モデルの振動実験で得られる固有振動数，固有モードの情報から，オイラー角などの剛体的特性を定めるモデルパラメータを同定することを目的とする。同定法は第3章で提案した方法を基本とした第4章で説明した方法を用いる。同定計算の手順を簡単に説明する。

実験から得られる固有振動数  $f_{j^e}$  および剛体の各測定点の X, Y, Z 方向の並進変位成分からなる固有モード  $\{V_{j^e}\}$  を目標値として設定する。次に，同定対象とするモデルパラメータの選定，初期値の設定を行い，固有値解析により初期モデルの固有振動数  $f_{j_0}$ ，固有モード  $\{N_{j_0}\}$  を算出する。ただし，特性方程式(5.12)の固有モード  $\{N_j\}$  は回転角変位に関する成分を含むので，そのままでは測定値で得られた固有モード  $\{V_{j^e}\}$  と直接比較することができない。そこで，測定で得られた並進変位成分だけからなる固有モードを同定計算の目標とするために，特性方程式(5.12)から得られる  $\{N_j\}$  を第4章と同様に測定点に対応する並進変位成分に変換し，初期モデルの固有モード  $\{V_{j_0}\}$  を求める必要がある。そして，第3章で説明したように，目標値の固有モード  $\{V_{j^e}\}$  と初期モデルの固有モード  $\{V_{j_0}\}$  から，次式により固有モードベクトルの方向の相

違を評価する量  $r_{j0}$  (以後、固有モードの評価量と呼ぶ) を算定する。

$$r_{j0} = \frac{(\{V_{j^e}\}^T \{V_{j0}\})^2}{(\{V_{j^e}\}^T \{V_{j^e}\}) \times (\{V_{j0}\}^T \{V_{j0}\})} \dots\dots\dots (5.13)$$

そして、次式のように目標とするベクトル  $\{P^e\}$  および初期モデルの固有振動数、固有モードの評価量を要素とするベクトル  $\{P_0\}$  を設定する。

$$\begin{aligned} \{P^e\} &= \{f_{1^e}, \dots, f_{j^e}, \dots, f_{6^e}, 1, \dots, 1, \dots, 1\}^T \\ \{P_0\} &= \{f_{10}, \dots, f_{j0}, \dots, f_{60}, r_{10}, \dots, r_{j0}, \dots, r_{60}\}^T \end{aligned} \dots\dots\dots (5.14)$$

次に、感度解析を行い、固有振動数、固有モードの一次感度を算出する。そして、第3章で説明したように、固有モードの評価量の一次感度も算出しておく。なお、オイラー角などのモデルパラメータに対する固有振動数、固有モードの感度は、式(5.12)の特性方程式を各モデルパラメータの変更率で偏微分することにより求めることができる。ただし、本章で新たに同定の対象したオイラー角に関しては、式(5.4)のオイラー角の三角関数を要素とするマトリックス  $[T_E]$  の要素を、感度を求めようとするオイラー角の変更率で偏微分する必要があるが、三角関数の微分であるから簡単に算出することができる。算出した感度を用いれば、初期モデルのモデルパラメータを変更したときの固有振動数、固有モードの評価量の変化予測値  $\{P\}$  は次式で表される。

$$\{P\} = \{P_0\} + [S] \{\gamma\} \dots\dots\dots (5.15)$$

ただし、 $\{\gamma\}$  は各モデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  を要素とするベクトルであり、 $[S]$  は固有振動数、固有モードの評価量の一次感度を要素とする感度マトリックスである。要素  $S_{ik}$  は  $k$  番目の同定するモデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  に対する  $i$  番目の目標値の感度となる。

予測値  $\{P\}$  を目標値  $\{P^e\}$  と比較し、最小二乗法を適用して、差を最小とす

る{ $\gamma$ }を次式より算出する。

$$([S]^T[W][S])\{\gamma\} = [S]^T[W](\{P^e\}-\{P_0\}) \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

ここで、[W]は各目標の相対的重要度を定める対角マトリックスである。修正後のk番目のモデルパラメータの値は、式(5.16)で得られた変更率 $\gamma_k$ を次式に代入することにより求めることができる。

$$d_k = d_{k0} (1 + \gamma_k) \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

ただし、 $d_{k0}$ はk番目のモデルパラメータの初期値を $d_k$ は修正後の値を表す。

以上で、初期モデルのモデルパラメータを修正することができる。通常は、一回の修正作業で最良なモデルパラメータの値が得られる場合は少なく、最良な値が得られるまで修正作業を繰り返すことになる。

#### 5.4 実測データによる同定

本節では、本章で新たに同定の対象としたオイラー角などのモデルパラメータが実験データから同定できることを確認するために、簡単な構造物およびコンプレッサを弾性支持したモデルに対して、同定を試みる。

##### 5.4.1 簡単な構造物の同定

最初の同定例として、図5.2に示す鋼製の剛体が4個の弾性体で支持されたモデルを取り上げる。このモデルは形状が簡単であり、質量分布も均一であるため、慣性主軸、重心位置をあらかじめ算定できる。そこで、実験データから同定された結果と、質量分布および形状寸法から図式的に算定した値を比較することにより、同定結果の検討を行う。

なお、慣性主軸方向および主慣性モーメントが実験データから同定できることを確認するため、図5.2に示すように実際の慣性主軸とわざとずらした座標系O-XYZを設定し、その座標系において同定の目標とする実験データを測定した。実験は次の手順で行う。点A、点BをX、Y、Z方向に打撃したときの

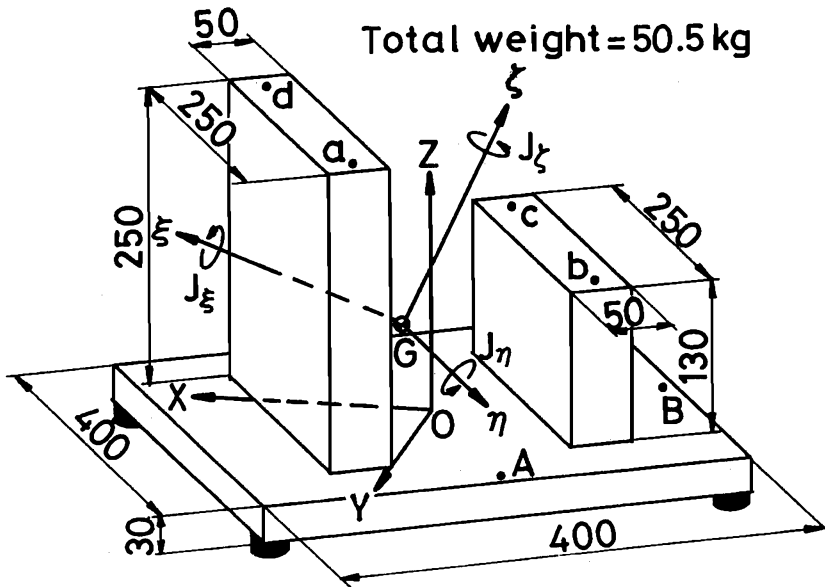


図5.2 実験モデル

点 a の X, Y, Z 方向の応答を FFT アナライザに導き、伝達関数を求める。得られた伝達関数から一次モードから六次モードまでの固有振動数を得る。固有モードについては、点 a, b, c, d の X, Y, Z 方向に順次加速度センサを取り付け、各固有振動数ごとに基準となる点の応答に対する振幅比、位相差を読みとることにより求めた。

同定計算の目標値は、第 4 章での考察結果、すなわち目標値にいずれかのモード次数に関する成分がまったく含まれない場合には精度よい同定が困難であり、固有モードに関しては剛体の運動を一義的に定めるためには最低 6 個の独立な成分が必要であること、に基づいて設定した。すなわち、一次モードから六次モードまでの固有振動数および点 a の X, Y, Z 方向、点 b の Y, Z 方向、点 d の Z 方向に対応する 6 成分を要素とする一次モードから六次モードまでの固有モードの計  $6 + 6 \times 6 = 42$  個のデータを目標値として設定した。そこで、モデルの大きさを定めるために既知とした質量  $m$  を除いた残りの主慣性モーメント  $J_\xi, J_\eta, J_\zeta$ 、オイラー角  $\Phi, \Theta, \Psi$ 、重心位置の座標  $x_G, y_G, z_G$ ,

支持弾性体のばね定数  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  の計12個のモデルパラメータを同定する。ただし、図5.2のモデルにおいては、4個の弾性体に形状、材質とも同じものを用いたので、一つの弾性体に関するばね定数  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  を同定対象のパラメータとした。なお、弾性体の支持点の座標は、各弾性体の取付位置の中心座標値を用いた。このように、目標値、同定するモデルパラメータを設定、選定し、表5.1の左から2列目の値を初期値として同定を行った。

同定されたモデルパラメータと質量分布と形状から算定したモデルパラメータの比較を表5.1の左から3列目、4列目に示す。表5.1の3列目、4列目を比較すると、重心位置の座標だけでなく、本章で新たに同定の対象とした主慣性モーメントおよび慣性主軸方向を定めるオイラー角も精度よく同定されていることがわかる。

なお、慣性主軸  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  方向およびそれに対応する主慣性モーメントの値は相対的なものであり、主慣性モーメント  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$ , オイラー角  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$  の初期値の設定によっては、表5.1の真値と同定された値が対応しない、例えば、 $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  の値の順序が入れ替わり、オイラー角が90度異なることがある。このような場合にも、慣性主軸を回転させ、 $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  の値を入れ換えることにより真値との対応がとれる。しかし、このような場合には収束性が悪くなる可能性がある。例えば、実構造物を検討し、あらかじめ慣性主軸方向、すなわちオイラー角の初期値が精度よく設定できても、初期値として設定した主慣性モーメント  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  の相対的な大きさの順序が実構造物の  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  の大きさの順序と異なっている場合には、オイラー角が大きく変化し、収束性が悪くなったり、収束しなかったことを経験した。この原因として、慣性主軸  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  方向は相対的なものであるため、初期値として設定した  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  の値の大きなものから順に、実構造物の  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  の大きいものに対応しようとして、オイラー角が大きく変化したと考えられる。したがって、オイラー角の変更量を小さくし、収束性を向上させるためには、あらかじめ実構造物を検討し、対応する慣性主軸方向と主慣性モーメントの相対的な大きさの順序を求め、初期値に反映させる必要があると考えられる。



表5.1 同定されたモデルパラメータと真値の比較  
(実験モデルの場合)

Model parameter	Initial value	Identified value	Exact value
$J_{\xi}$ kg·m <sup>2</sup>	0.300	0.635	0.641
$J_{\eta}$ kg·m <sup>2</sup>	0.400	0.851	0.844
$J_{\zeta}$ kg·m <sup>2</sup>	0.500	0.958	0.978
$\Phi$ deg	5.00	27.2	30.0
$\Theta$ deg	-5.00	-28.0	-27.5
$\Psi$ deg	-5.00	-0.76	0.0
$x_G$ m	$1.00 \times 10^{-2}$	$2.24 \times 10^{-2}$	$2.12 \times 10^{-2}$
$y_G$ m	$1.00 \times 10^{-2}$	$0.99 \times 10^{-2}$	$1.22 \times 10^{-2}$
$z_G$ m	$1.00 \times 10^{-2}$	$7.40 \times 10^{-2}$	$7.52 \times 10^{-2}$
$k_x$ N/m	$5.00 \times 10^4$	$8.92 \times 10^4$	—
$k_y$ N/m	$5.00 \times 10^4$	$8.92 \times 10^4$	—
$k_z$ N/m	$5.00 \times 10^5$	$5.76 \times 10^5$	—
m kg	50.5		

#### 5.4.2 実構造物の同定

次に、図5.3に示す4個の弾性体で支持された複雑な形状の構造物であるコンプレッサに対して、同定を試みる。

このような複雑な構造物の場合、同定されたモデルパラメータの値が妥当であるかどうかの判断が困難である。そこで、弾性体だけが異なる2種類のモデルA、モデルBに対して同定を行い、その結果得られた両モデルのパラメータの値を比較することにより妥当性の検討を行う。

図5.3に示すように固定座標系O-XYZを設定し、その座標系において同定の目標とする実験データを測定した。まず、点A、点BをX、Y、Z方向に打撃したときの点aのX、Y、Z方向の応答をFFTアナライザに導き、伝達関

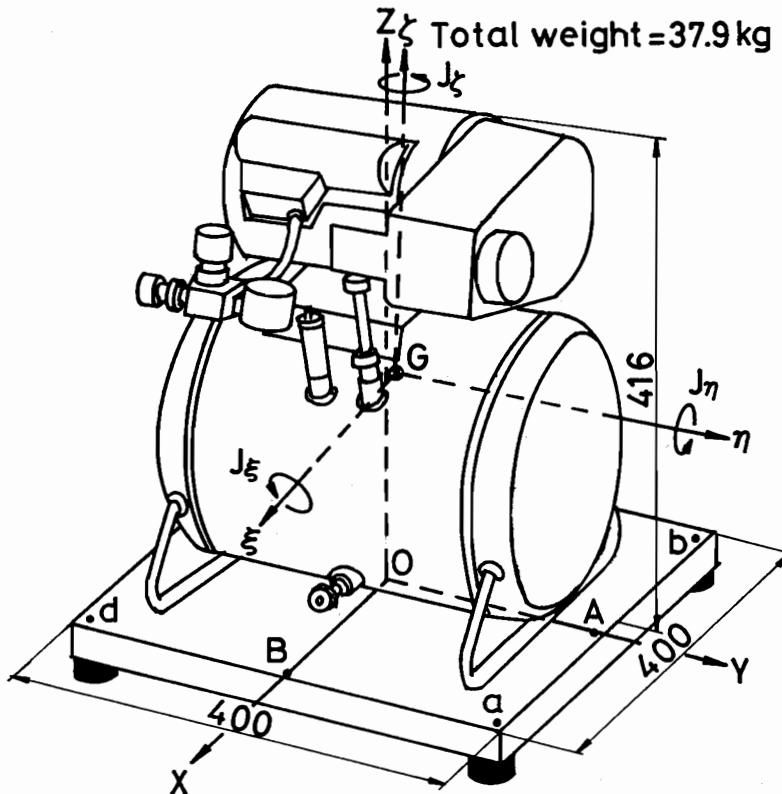


図5.3 コンプレッサモデル

数を求める。測定の一例として、図5.3の点AをY方向に打撃したときの点aのY方向の伝達関数を図5.4に示す。図5.4において、実線がモデルA、破線がモデルBの伝達関数である。図5.4の伝達関数および他の測定点の伝達関数から一次モードから六次モードまでの固有振動数を得る。固有モードについては、点a, b, c, dのX, Y, Z方向に順次加速度センサを取り付け、各固有振動数ごとに基準となる点の応答に対する振幅比、位相差を読みとることにより求めた。

同定計算の目標値としては、一次モードから六次モードまでの固有振動数および点aのX, Y, Z方向, 点bのY, Z方向, 点dのZ方向に対応する6成分を要素とする一次モードから六次モードまでの固有モードの計  $6 + 6 \times 6 = 42$  個のデータを設定した。

同定の結果得られたモデルA, モデルBのモデルパラメータの比較を表5.2に示す。表5.2において、モデルA, モデルBのモデルパラメータの違いは、

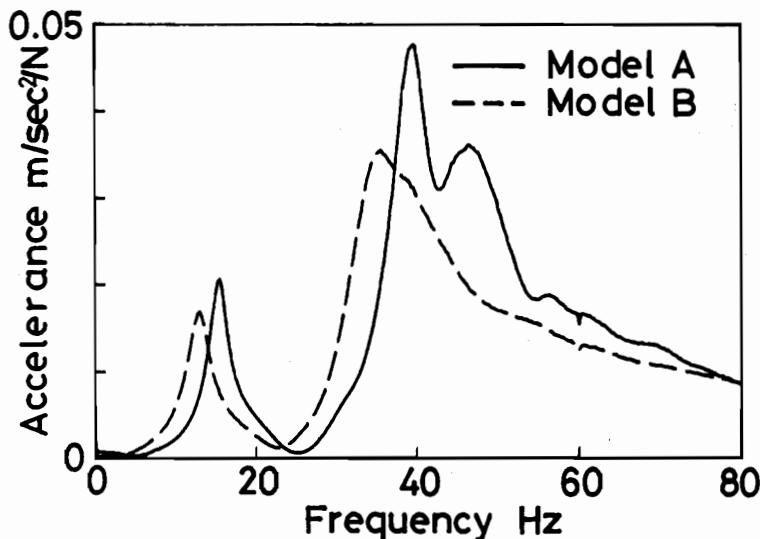


図5.4 コンプレッサモデルの伝達関数  
(打撃：点AのY方向, 応答：点aのY方向)

表5.2 同定されたモデルパラメータ  
(コンプレッサモデルの場合)

M o d e l parameter	Identified value	
	Model A	Model B
$J_{\xi}$ kg·m <sup>2</sup>	2.12	1.97
$J_{\eta}$ kg·m <sup>2</sup>	1.53	1.49
$J_{\zeta}$ kg·m <sup>2</sup>	0.596	0.623
$\Phi$ deg	80.9	77.9
$\Theta$ deg	2.17	2.38
$\Psi$ deg	-73.5	-70.6
$x_G$ m	$-2.42 \times 10^{-3}$	$-2.66 \times 10^{-3}$
$y_G$ m	$5.95 \times 10^{-3}$	$5.25 \times 10^{-3}$
$z_G$ m	$1.99 \times 10^{-1}$	$2.01 \times 10^{-1}$
$k_x$ N/m	$1.22 \times 10^5$	$8.66 \times 10^4$
$k_y$ N/m	$1.22 \times 10^5$	$8.67 \times 10^4$
$k_z$ N/m	$7.07 \times 10^5$	$5.29 \times 10^5$
m kg	37.9	

ばね定数が大きく異なるだけで、他の主慣性モーメント、オイラー角などはほぼ近い値となっている。また、実測された固有振動数と同定されたモデルパラメータを用いて固有値解析で得られた固有振動数の比較を表5.3に示す。表5.3において、モデルA、モデルBとも各モード次数の固有振動数の誤差が小さいことがわかる。したがって、このモデルのパラメータは精度よく同定できたと考えられる。

表5.3 測定された固有振動数と同定されたモデル  
の固有振動数の比較  
(コンプレッサモデルの場合)

Mode number	Model A		Model B	
	Measured value (Hz)	Identified value (Hz)	Measured value (Hz)	Identified value (Hz)
1st	15.50	15.64	13.25	13.28
2nd	15.75	15.74	13.50	13.36
3rd	37.50	37.57	31.00	30.99
4th	39.25	39.30	35.00	34.90
5th	43.50	43.54	37.75	37.66
6th	46.00	45.95	40.00	39.99

### 5.4.3 防振支持設計への適用

防振支持設計においては、機械の慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を同定するとともに、適正な防振支持特性が得られるように、固有振動数を適正配置することも重要になる。そこで、図5.3のコンプレッサのモデルAに対して、防振支持特性の改善を試みる。

コンプレッサが発生する基本励振振動数を20Hzとする。この場合、モデルAの固有振動数（表5.4の左から2列目）を眺めてわかるように、四次モードの固有振動数が、20Hzの2倍高調波成分である40Hzに非常に近い。したがって、四次モードが共振する可能性が高く、設計改善の必要がある。しかし、すべての弾性体を軟らかくして、全体の固有振動数を下げて共振回避を行うと、今度は、三次モードが20Hzに、五次モードが40Hzに近づく恐れがある。そこで、五次モード、六次モードの固有振動数は下げずに、三次モード、四次モードの固有振動数だけを少し下げて、20Hzの2倍高調波成分である40Hzの励振振動数を固有振動数の谷間に配置することを考える。

表5.4 修正前後の固有振動数の比較

Mode number	Initial value (Hz)	Desired value (Hz)	Modified value (Hz)	Measured value (Hz)
1st	15.64	—	14.52	14.50
2nd	15.74	—	15.72	15.75
3rd	37.57	34.00	33.99	34.00
4th	39.30	35.00	35.34	35.25
5th	43.54	45.00	44.44	44.50
6th	45.95	46.00	46.50	46.25

以上の視察をもとに、特性改善の目標として表5.4の左から3列目の4つの固有振動数を設定した。修正するモデルパラメータとしては、変更が容易なばね定数、ばね支持位置を修正することを考える。目標値として設定したのは4個の固有振動数だけである。そこで、図5.3の4個の弾性体のばね定数、ばね支持位置に対する固有振動数の感度を眺めて、効果的と思われる点b、点dの弾性体の支持点のX座標成分 $x_b$ 、 $x_d$ 、Y座標成分 $y_b$ 、 $y_d$ の計4個を修正するモデルパラメータとして選定した。なお、修正しない残りのモデルパラメータの値は表5.2の値を用いた。修正計算の結果得られたモデルパラメータと修正前のモデルパラメータの比較を表5.5に示す。表5.5において、点bのY座標成分の値が大きく変化していることがわかる。また、修正された支持位置の値を用いて固有値解析で得られた固有振動数を表5.4の左から4列目に、実際に弾性体の支持位置を変更したモデルに対する実験で得られた固有振動数を表5.4の左から5列目に示す。表5.4の3列目、4列目、5列目を比較すると、弾性体支持位置修正後の固有振動数は目標とする固有振動数に近く、実験データもよく一致していることから、修正されたモデルパラメータの妥当性が立証できる。また、支持位置修正前後の実験で得られた伝達関数の比較を図5.5に示

表5.5 修正前後のモデルパラメータの比較

Model Parameter	Initial value	Modified value
$x_b$ ■	-0.185	-0.163
$y_b$ ■	0.185	0.077
$x_d$ ■	0.185	0.198
$y_d$ ■	-0.185	-0.176

す。実線が修正前で、破線が修正後の伝達関数である。図5.5において、一次モード、四次モード、六次モードの固有振動数は矢印のように変化しており、問題とした40Hzにおける応答が小さくなっていることがわかる。

したがって、本同定法は、機械の防振支持設計において、共振回避を目的としたモデルの設計改善を効率的に行う方法として有効であると考えられる。

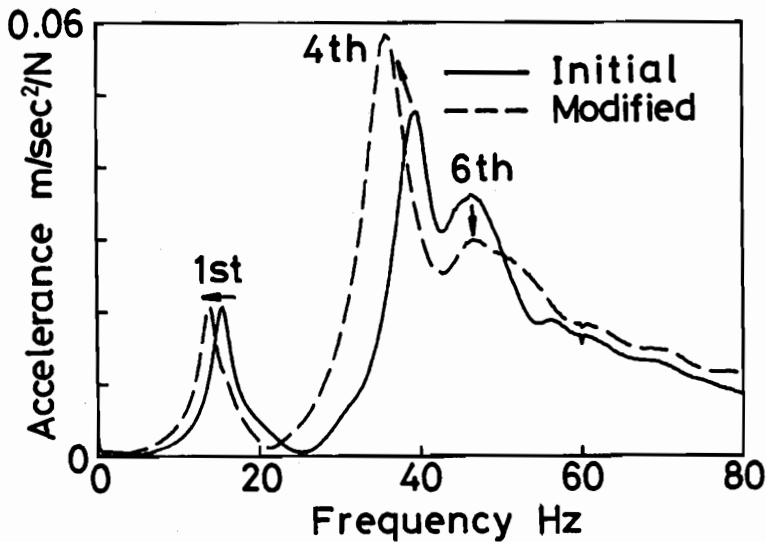


図5.5 ばね支持位置修正前後の伝達関数の比較  
(打撃：点AのY方向，応答：点aのY方向)



## 5.5 結 言

第5章では、第4章では同定できなかった剛体の慣性主軸方向および主慣性モーメントの値を実験データから同定する方法を提示した。その中で、剛体の慣性主軸方向を同定するために、空間に固定した座標系の各座標軸方向と慣性主軸方向との角度のずれを表すパラメータを用いて慣性主軸方向を表し、慣性主軸方向を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示した。なお、角度のずれを表すパラメータとしてオイラー角を用いた。そして、実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を検証した。また、本章で対象とした慣性主軸方向、主慣性モーメントの値を同定する場合の初期値の設定について検討した結果、次のことが明らかになった。

- (1) オイラー角の初期値が精度よく設定できても、初期値として設定した主慣性モーメント  $J_{\xi}$ 、 $J_{\eta}$ 、 $J_{\zeta}$  の相対的な大きさの順序が実構造物の  $J_{\xi}$ 、 $J_{\eta}$ 、 $J_{\zeta}$  の大きさの順序と異なっている場合には、収束性が悪くなる場合がある。
- (2) 収束性を向上させるためには、あらかじめ実構造物を検討し、対応する慣性主軸方向と主慣性モーメントの相対的な大きさの順序を求め、初期値に反映させる必要がある。

また、同定法を防振支持設計の特性改善に適用し、設計の効率化に有効であることを確認した。

## 第6章 剛体を支持する弾性体の減衰特性の同定

### 6.1 緒言

第4章、第5章においては、弾性体で支持された剛体の慣性モーメント、重心位置、支持弾性体のばね定数などを同定する方法を提示した。そして、機械の防振支持系の適正診断と、共振回避を主目的とした設計改善法を示した。

ところで、防振支持性能を向上させるためには、減衰性の確保も重要となる。防振支持設計において、防振ゴムは使用方法が比較的簡単であり、減衰要素としての機能を有することから広く利用されている。しかし、防振ゴムを用いて防振支持を行った結果、所望の特性が得られない場合がある。その原因として、防振ゴムに用いられる素材に材料定数のばらつきがあること、実働状態の荷重や取付状態などによって特性が選定時と異なることが挙げられる。したがって、実働状態で所望の特性が得られない場合には、機械の慣性モーメント、重心位置を知るとともに、支持系に用いている防振ゴムの減衰係数およびばね定数の値を正確に把握する必要がある。そのことにより適正な防振支持設計および特性改善が可能となる。

なお、防振ゴムの動的ばね定数は、防振ゴム単体の加振実験より求めた荷重-たわみ曲線などから算定する方法<sup>(45)</sup>が一般的に行われているが、防振ゴム単体の特性では実働状態の特性を評価、予測できない場合が多い。しかし、実働状態での特性を測定する方法は比較的少なく、防振ゴムで支持された構造物の加振実験で得られた伝達関数から特性マトリックスを同定し、その特性マトリックスから二次的に防振ゴムの動的ばね定数を算定する大熊ら<sup>(12)</sup>や仏円ら<sup>(13)</sup>の研究が見られる程度である。

そこで、本章では、防振ゴムなどの減衰特性を同定するために、減衰振動系を取り上げ、その同定法について検討する。そして、防振ゴムで支持された剛体系モデルに対して、実験データから剛体的特性とともに防振ゴムの減衰係数、ばね定数を同定することを試みる。なお、同定された減衰係数などのパラメータの値を評価する方法として、同定されたモデルパラメータを用いて伝達関数を再構成し、実測した伝達関数と比較することにより同定法の妥当性を検討する。また、目標とする減衰固有振動数、モード減衰比、複素固有モードの組み

合わせを変えた同定計算結果をもとに、減衰係数などのパラメータが同定可能となる目標値の設定条件について検討する。

### 6.1 運動方程式

本章では、同定対象として、剛体が減衰要素とばね要素でモデル化できる防振ゴムなどの弾性体で支持されているモデルを取り上げる。ここでは、説明を簡単にするため、図6.1に示すY、Z方向とX軸回りの自由度を有する三自由度系モデルを取り上げる。なお、図6.1に示すモデルでは減衰係数、ばね定数とともに、剛体の慣性モーメント、重心位置も未知なパラメータとして扱う。そこで、重心位置については、第4章と同様に、図6.1に示すような任意の点を原点とする空間に固定した直交座標系O-XYZ（以後、固定座標系と呼ぶ）を設定し、固定座標系の原点からの偏差のパラメータを用いて表す。そして、固定座標系における運動方程式を導く。運動方程式は次の手順で導く。まず、剛体の慣性力を同定の初期値として与えられる重心位置を原点とし、固定座標

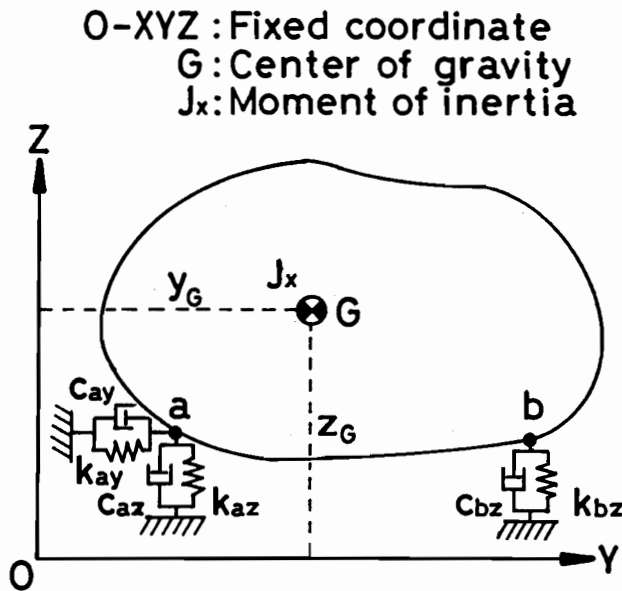


図6.1 剛体系モデル

系に平行な直交座標系で求める。また、弾性体による減衰力、復元力に関しても、各弾性体ごとに減衰力、復元力を算出する。その後、慣性力、減衰力、復元力を共通な固定座標系に座標変換し、固定座標系における運動方程式を導く。

まず、剛体の慣性力を求める。剛体の質量を  $m$ 、同定計算の初期値として与えられる固定座標系における重心  $G$  の座標を  $(y_G, z_G)$ 、重心を通り  $X$  軸に平行な軸回りの慣性モーメントを  $J_x$  とする。また、重心の  $Y, Z$  方向の並進変位を  $y^G, z^G$ 、 $X$  軸に平行な軸回りの回転角変位を  $\theta^G$  とすると、重心位置を原点とする座標系における変位ベクトル  $\{q^G\}$  と慣性力ベクトル  $\{F_m^G\}$  の関係は次式となる。

$$\{F_m^G\} = -[M]\{\ddot{q}^G\} \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{F_m^G\} &= \{f_{my}^G, f_{mz}^G, M_m\theta^G\}^T \\ \{q^G\} &= \{y^G, z^G, \theta^G\}^T \\ [M] &= \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

式(6.1)の変位ベクトル  $\{q^G\}$  と慣性力ベクトル  $\{F_m^G\}$  の関係は、重心位置の座標を要素とする座標変換マトリックス  $[T_G]$  を用いて、第4章と同様に、次式のように固定座標系における変位ベクトル  $\{q\}$  と慣性力ベクトル  $\{F_m\}$  の関係に変換できる。

$$\{F_m\} = -[T_G]^T[M][T_G]\{\ddot{q}\} \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\{F_m\} &= \{f_{my}, f_{mz}, M_{m\theta}\}^T \\
\{q\} &= \{y, z, \theta\}^T \\
[T_G] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_G \\ 0 & 1 & y_G \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.4}$$

次に、減衰要素、ばね要素により生じる減衰力、復元力を求める。通常、防振ゴムなどの弾性体は材料内部に減衰を有するため、ヒステリシス減衰特性を示し、複素ばねを用いてモデル化される場合が多い。しかし、ヒステリシス減衰は減衰が小さいときには近似的に粘性減衰として扱っても実用上は差し支えない<sup>(46)</sup>ため、本章では防振ゴムなどの弾性体を粘性減衰要素とばね要素を並列結合したモデルを用いてモデル化する。また、実際の防振支持では多数の弾性体で剛体を支持する場合もあるが、ここでは図6.1に示すように、3個の減衰要素とばね要素に集約したモデルとして考える。支持点a( $y_a, z_a$ )の弾性体のY方向、Z方向の減衰係数を $c_{ay}, c_{az}$ 、ばね定数を $k_{ay}, k_{az}$ 、支持点b( $y_b, z_b$ )のZ方向の減衰係数を $c_{bz}$ 、ばね定数を $k_{bz}$ とする。さらに、支持点aのY方向、Z方向の変位を $y_a^s, z_a^s$ 、支持点bのZ方向の変位を $z_b^s$ とすると、減衰要素のために生じる減衰力ベクトル $\{F_c^s\}$ は次式となる。

$$\{F_c^s\} = -[C]\{\dot{q}^s\} \tag{6.5}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\{F_c^s\} &= \{f_{cay}^s, f_{caz}^s, f_{cbz}^s\}^T \\
\{q^s\} &= \{y_a^s, z_a^s, z_b^s\}^T \\
[C] &= \begin{bmatrix} c_{ay} & 0 & 0 \\ 0 & c_{az} & 0 \\ 0 & 0 & c_{bz} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.6}$$

ばね要素によって生じる復元力ベクトル $\{F_k^S\}$ は次式となる。

$$\{F_k^S\} = -[K]\{q^S\} \dots\dots\dots (6.7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{F_k^S\} &= \{f_{kay}^S, f_{kaz}^S, f_{kbz}^S\}^T \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_{ay} & 0 & 0 \\ 0 & k_{az} & 0 \\ 0 & 0 & k_{bz} \end{bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (6.8)$$

また、式(6.5)の各弾性体支持点における変位と減衰力の関係は、各支持点の変位を要素とする変位ベクトル $\{q^S\}$ と固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ を関係づける座標変換マトリックス $[T_s]$ を用いて、次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と減衰力ベクトル $\{F_c\}$ の関係に変換できる。

$$\{F_c\} = -[T_s]^T[C][T_s]\{\dot{q}\} \dots\dots\dots (6.9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{F_c\} &= \{f_{cy}, f_{cz}, M_{c\theta}\}^T \\ [T_s] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_a \\ 0 & 1 & y_a \\ 0 & 1 & y_b \end{bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (6.10)$$

式(6.7)の復元力についても同様に、次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と復元力ベクトル $\{F_k\}$ の関係に変換できる。

$$\{F_k\} = - [T_s]^T [K] [T_s] \{q\} \quad \dots\dots\dots (6.11)$$

ここで、

$$\{F_k\} = \{f_{ky}, f_{kz}, M_{k\theta}\}^T \quad \dots\dots\dots (6.12)$$

式(6.3), (6.9), (6.11)より、次式のように図6.1に示すモデルの固定座標系における自由振動状態の運動方程式が導かれる。

$$[\hat{m}]\{\dot{q}'\} + [\hat{c}]\{\dot{q}\} + [\hat{k}]\{q\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (6.13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [\hat{m}] &= [T_g]^T [M] [T_g] \\ [\hat{c}] &= [T_s]^T [C] [T_s] \\ [\hat{k}] &= [T_s]^T [K] [T_s] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6.14)$$

式(6.13)に対応する特性方程式は次式となる。

$$\lambda_j^2 [\hat{m}] \{N_j\} + \lambda_j [\hat{c}] \{N_j\} + [\hat{k}] \{N_j\} = \{0\} \quad (6.15)$$

通常の振動解析では、式(6.15)の特性方程式の複素固有値解析を行うことにより、共役な対を有する3組の複素固有値 $\lambda_j$ 、複素固有モード $\{N_j\}$ の固有ベアを求めることになる。ところで、固有値は複素数であるので、 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ のように実部と虚部に分けると、実部は減衰率、虚部は減衰固有角振動数と呼ばれ、減衰固有振動数 $f_j$ 、非減衰固有角振動数 $\omega_j$ 、モード減衰比 $\zeta_j$ と次の関係がある。

$$f_j = \beta_j / 2\pi \quad \dots\dots\dots (6.16)$$

$$\omega_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \quad \dots\dots\dots (6.17)$$

$$\xi_j = -\alpha_j / \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \quad \dots\dots\dots (6.18)$$

### 6.3 同定法および減衰振動系の感度解析

本章では振動実験で得られる減衰固有振動数，モード減衰比，固有モードの情報から，弾性体の減衰係数などのモデルパラメータを同定することを目的とする。同定計算の手順は前章までと同様であるが，前章まででは扱わなかった減衰固有振動数，モード減衰比，複素固有モードのモデルパラメータに対する感度を必要とする。そこで，モデルパラメータに対する減衰固有振動数，モード減衰比，複素固有モードの感度算出方法について説明する<sup>(37)</sup>。

同定しようとする支持弾性体の減衰係数，ばね定数などのm個のモデルパラメータのk番目のモデルパラメータを $d_k$ と表し，初期値 $d_{k0}$ と修正後の $d_k$ の関係を変更率 $\gamma_k$ を用いて次式のように定義する。

$$d_k = d_{k0}(1 + \gamma_k) \quad \dots\dots\dots (6.19)$$

ここで，複素固有値 $\lambda_j$ ，モード減衰比 $\xi_j$ ，複素固有モード $\{N_j\}$ は， $\gamma_k$ の関数であるので， $\gamma_k$ に関してテーラ展開し， $\gamma_k^2$ 以上の項を省略すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_{j0} + \sum_{k=1}^m (\delta \lambda_j / \delta \gamma_k) \gamma_k \\ &= \lambda_{j0} + \sum_{k=1}^m \lambda_j' \gamma_k \quad \dots\dots\dots (6.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_j &= \xi_{j0} + \sum_{k=1}^m (\delta \xi_j / \delta \gamma_k) \gamma_k \\ &= \xi_{j0} + \sum_{k=1}^m \xi_j' \gamma_k \quad \dots\dots\dots (6.21) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \{N_j\} &= \{N_{j0}\} + \sum_{k=1}^m (\delta \{N_j\} / \delta \gamma_k) \gamma_k \\ &= \{N_{j0}\} + \sum_{k=1}^m \{N_j'\} \gamma_k \quad \dots\dots\dots (6.22) \end{aligned}$$

式(6.20), (6.21), (6.22)における $\lambda_j'$ ,  $\xi_j'$ ,  $\{N_j'\}$ は, それぞれ複素固有値, モード減衰比, 複素固有モードの一次感度と呼ばれるもので, 次のようにして求めることができる。

特性方程式(6.15)を $\gamma_k$ について偏微分し, 左から $\{N_j\}^T$ を乗じる。その式を整理し, 特性方程式(6.15)を転置した関係を用いると,  $\{N_j'\}$ を含む項が消去される。さらにその式を整理することにより, 次式のように複素固有値の一次感度 $\lambda_j'$ が求まる。

$$\begin{aligned} \lambda_j' &= -\{N_j\}^T (\lambda_j^2 [\hat{m}'] + \lambda_j [\hat{c}'] + [\hat{k}']) \{N_j\} \\ &\quad / (\{N_j\}^T (2 \lambda_j [\hat{m}] + [\hat{c}]) \{N_j\}) \quad \dots\dots\dots (6.23) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \hat{m}' &= [T_e']^T [M] [T_e] + [T_e']^T [M'] [T_e] + [T_e']^T [M] [T_e'] \\ \hat{c}' &= [T_s']^T [C] [T_s] + [T_s']^T [C'] [T_s] + [T_s']^T [C] [T_s'] \\ \hat{k}' &= [T_s']^T [K] [T_s] + [T_s']^T [K'] [T_s] + [T_s']^T [K] [T_s'] \\ &\quad \dots\dots\dots (6.24) \end{aligned}$$

ただし,  $[M']$ ,  $[C']$ ,  $[K']$ ,  $[T_e']$ ,  $[T_s']$ の各マトリックスは, それぞれ $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $[T_e]$ ,  $[T_s]$ の $\gamma_k$ に関する偏微分を表す。なお, 本章で取り扱う各マトリックスは, モデルパラメータ $d_k$ に関する一次関数の成分だけで構成される。したがって, 各マトリックスの偏微分は各マトリックスの成分の内, 修正しようとするモデルパラメータを含む成分だけを残し, 他の成

分は零としたマトリックスとして簡単に算出できる。ところで、 $\lambda_j'$ は複素数であるので、 $\lambda_j' = \alpha_j' + i\beta_j'$ のように実部と虚部に分けると、 $\alpha_j'$ 、 $\beta_j'$ はそれぞれ次式で求められる。

$$\begin{aligned} \alpha_j' &= \text{Re}(\lambda_j') \\ \beta_j' &= \text{Im}(\lambda_j') \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6.25)$$

これらに関連する減衰固有振動数感度  $f_j'$ 、非減衰固有角振動数感度  $\omega_j'$ 、モード減衰比感度  $\zeta_j'$  は、式(6.16)、(6.17)、(6.18)を  $\gamma_k$  で偏微分し、

$$f_j' = \beta_j' / 2\pi \quad \dots\dots\dots (6.26)$$

$$\omega_j' = (\alpha_j \alpha_j' + \beta_j \beta_j') / \omega_j \quad \dots\dots\dots (6.27)$$

$$\zeta_j' = -\alpha_j / \omega_j + \alpha_j (\alpha_j \alpha_j' + \beta_j \beta_j') / \omega_j^3 \quad \dots\dots (6.28)$$

式(6.25)で得られた  $\alpha_j'$ 、 $\beta_j'$  を代入することにより算出できる。

複素固有モードの一次感度  $\{N_j'\}$  については、特性方程式(6.15)を  $\gamma_k$  で偏微分し、整理した次式を解くことにより求まる。

$$[B_j]\{N_j'\} = \{P_j\} \quad \dots\dots\dots (6.29)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [B_j] &= \lambda_j^2[\hat{m}] + \lambda_j[\hat{c}] + [\hat{k}] \\ \{P_j\} &= -(2\lambda_j\lambda_j'[\hat{m}] + \lambda_j'[\hat{c}] + \lambda_j^2[\hat{m}'] \\ &\quad + \lambda_j[\hat{c}'] + [\hat{k}'])\{N_j\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6.30)$$

ただし，式(6.29)の係数マトリックス $[B_j]$ ，ベクトル $\{P_j\}$ は複素数であるため，複素係数方程式を解くか，実部と虚部とに分けて実係数方程式に変形し，解くことになる。なお，左辺 $[B_j]$ は正則ではないので， $\{N_j\}$ の成分の内一つは零（固有モードのその成分の実部，虚部の感度は零）と拘束することにより，マトリックスのランクを一つ下げ， $\{N_j\}$ を求める必要がある。

同定法は第3章で説明した方法を用いて，次のように行う。

(1) 実験で得られる減衰固有振動数 $f_{j^e}$ ，モード減衰比 $\zeta_{j^e}$ および剛体の各測定点のY，Z方向の並進変位成分からなる固有モード $\{V_{j^e}\}$ を目標値として設定する。

(2) 同定しようとするモデルパラメータの選定，初期値の設定を行い，固有値解析により初期モデルの減衰固有振動数 $f_{j_0}$ ，モード減衰比 $\zeta_{j_0}$ ，固有モード $\{V_{j_0}\}$ を算出する。ただし，特性方程式(6.15)の固有モード $\{N_j\}$ は，回転角変位に関する成分を含むので，そのままでは実験で得られた固有モード $\{V_{j^e}\}$ と直接比較することができない。そこで，実験で得られる並進変位成分だけからなる固有モードを同定計算の目標とするために，特性方程式(6.15)から得られる $\{N_{j_0}\}$ を第4章と同様に測定点に対応する並進変位成分に変換し，初期モデルの固有モード $\{V_{j_0}\}$ を求める必要がある。

(3) 固有値解析の結果得られた初期モデルの固有モード $\{V_{j_0}\}$ と目標とする固有モード $\{V_{j^e}\}$ から，第3章で説明したように，固有モードベクトルの方向の相違を評価する量（以後，固有モードの評価量と呼ぶ）を算出する。ただし，本章の場合，固有モードの成分が複素数である。そこで，第3章で説明した固有モードの評価量を複素固有モードに拡張し，複素ベクトルのスカラー積の概念<sup>(47)</sup>を導入した次式から固有モードの評価量 $r_{j_0}$ を算出する。

$$\begin{aligned}
 r_{j_0} &= |\{V_{j^e}\}^T\{V_{j_0}^*\}|^2 \\
 & / (\{V_{j^e}\}^T\{V_{j^e}^*\} \times \{V_{j_0}\}^T\{V_{j_0}^*\}) \\
 & = (\{V_{j^e}\}^T\{V_{j_0}^*\} \times (\{V_{j^e}^*\}^T\{V_{j_0}\})) \\
 & / (\{V_{j^e}\}^T\{V_{j^e}^*\} \times \{V_{j_0}\}^T\{V_{j_0}^*\}) \quad \dots\dots\dots (6.31)
 \end{aligned}$$

ただし， $\{V_{j^e}^*\}$ ， $\{V_{j_0}^*\}$ はそれぞれ $\{V_{j^e}\}$ ， $\{V_{j_0}\}$ の共役複素ベクトルを表

す。そして、次式のように目標とするベクトル{P<sup>e</sup>}および初期モデルの減衰固有振動数，モード減衰比，固有モードの評価量を要素とするベクトル{P<sub>0</sub>}を設定する。

$$\begin{aligned} \{P^e\} &= \{f_1^e, f_2^e, f_3^e, \zeta_1^e, \zeta_2^e, \zeta_3^e, 1, 1, 1\}^T \\ \{P_0\} &= \{f_{10}, f_{20}, f_{30}, \zeta_{10}, \zeta_{20}, \zeta_{30}, r_{10}, r_{20}, r_{30}\}^T \\ &\dots\dots\dots (6.32) \end{aligned}$$

(4) 感度解析により，初期モデルの減衰固有振動数，モード減衰比，固有モードの一次感度を算出するとともに，次式から固有モードの評価量の一次感度も算出しておく。

$$\begin{aligned} \delta r_j / \delta \gamma_k = r_j' &= 1 / (A \times B) \\ &\times ((C \times F + D \times E) - (C \times D) / B \times (G + H)) \quad \dots (6.33) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} A &= \{V_j^e\}^T \{V_j^{e*}\} & B &= \{V_{j0}\}^T \{V_{j0}^*\} \\ C &= \{V_j^e\}^T \{V_{j0}^*\} & D &= \{V_j^{e*}\}^T \{V_{j0}\} \\ E &= \{V_j^e\}^T \{V_j'^*\} & F &= \{V_j^{e*}\}^T \{V_j'\} \\ G &= \{V_{j0}\}^T \{V_j'^*\} & H &= \{V_{j0}^*\}^T \{V_j'\} \\ &\dots\dots\dots (6.34) \end{aligned}$$

ただし，{V<sub>j</sub>'}は固有モード{V<sub>j0</sub>}の一次感度を表す。

(6) 算出した感度を用いて，モデルパラメータを変更したときの減衰固有振動数，モード減衰比，固有モードの評価量の変化予測値{P}を次式で予測する。

$$\{P\} = \{P_0\} + [S]\{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (6.35)$$

ここで，{γ}は各モデルパラメータの変更率γ<sub>k</sub>を要素とするベクトルであり，

[S]は式(6.26), (6.28), (6.33)から得られた減衰固有振動数, モード減衰比, 固有モードの評価量の一次感度を要素とする感度マトリックスとなる。要素  $S_{ik}$  は  $k$  番目の同定しようとするモデルパラメータの変更率  $\gamma_k$  に対する  $i$  番目の目標値の感度となる。

(7) 目標値{ $P^e$ }と予測値{ $P$ }とを比較し, 最小二乗法を適用して, 差を最小とする{ $\gamma$ }を次式より算出する。

$$([S]^T[W][S])\{\gamma\} = [S]^T[W](\{P^e\}-\{P_0\}) \quad \dots\dots (6.36)$$

ここで, [W]は各目標の相対的重要度を定める対角行列である。修正後の  $k$  番目のモデルパラメータの値は, 式(6.36)で得られた変更率  $\gamma_k$  を式(6.19)に代入することにより得ることができる。

以上で, 初期モデルのモデルパラメータを修正することができる。通常は, 一回の修正作業で最良なモデルパラメータの値が得られる場合は少なく, 最良な値が得られるまで修正作業を繰り返すことになる。

#### 6.4 数値実験例

提示した同定法の妥当性を確認するために, 減衰要素とばね要素で支持された剛体系モデルに対して数値実験を行い, その結果について検討する。ここでは, 既知のモデルパラメータを用いて固有値解析を行い, その結果得られた減衰固有振動数, モード減衰比, 複素固有モードを実験値として代用する。

数値実験モデルとして, 図6.2に示す平面モデルを取り上げる。固有値解析に用いたモデルパラメータの諸元を表6.1に, 固有値解析の結果得られた減衰固有振動数, モード減衰比および固有モードを図6.3に示す。ただし, 図6.3(b), (c), (d)は, 一次モードから三次モードまでの固有モードを, 図6.3(a) (図6.2と同じ)に示す太線のワイヤ・フレーム形状で置き換えて示したものである。目標値として, 一次モードから三次モードまでの減衰固有振動数(3個), モード減衰比(3個), 固有モード(18個)の計24個を設定した。ただし, 固有モードとしての目標は, 図6.2の点aのZ方向, 点bのZ方向, 点dのY方向に対応する3成分を要素とする一次モードから三次モードまでの実部, 虚

表6.1 数値実験モデルの諸元

Model parameter				
$m$	kg	100	$k_{ay}$	N/m $5.00 \times 10^5$
$J_x$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	150	$k_{az}$	N/m $6.00 \times 10^5$
$y_G$	m	1.90	$k_{bz}$	N/m $7.00 \times 10^5$
$z_G$	m	1.80	$y_a$	m 0.500
$c_{ay}$	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$	$2.00 \times 10^3$	$z_a$	m 1.00
$c_{az}$	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$	$3.00 \times 10^3$	$y_b$	m 4.00
$c_{bz}$	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$	$4.00 \times 10^3$		

O-XYZ: Fixed coordinate  
 G: Center of gravity  
 $J_x$ : Moment of inertia

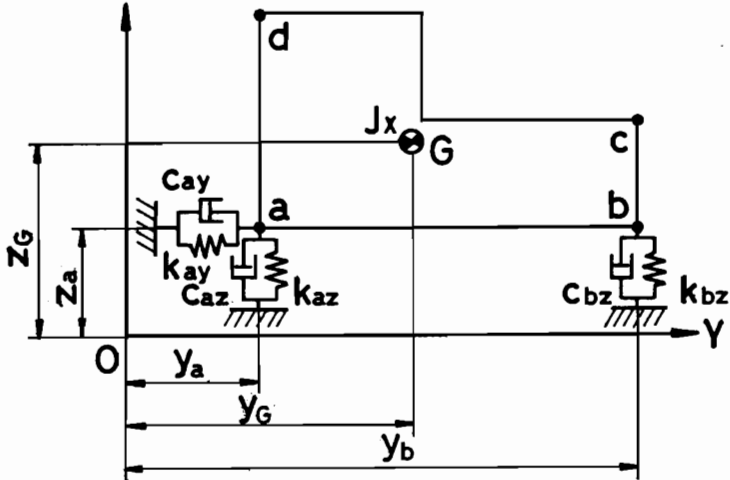


図6.2 数値実験モデル

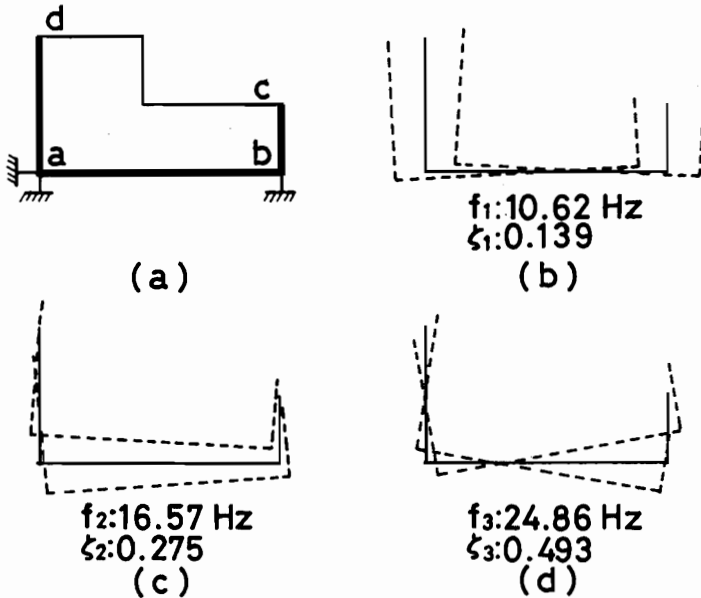


図6.3 モーダルパラメータ  
(固有値解析結果)

部であり、その個数は計18個となる。

また、同定するモデルパラメータは、質量 $m$ 、慣性モーメント $J_x$ 、重心位置の座標 $y_G$ 、 $z_G$ 、減衰係数 $C_{ay}$ 、 $C_{az}$ 、 $C_{bz}$ 、ばね定数 $k_{ay}$ 、 $k_{az}$ 、 $k_{bz}$ の内、次の2通りの場合とした。なお、 $N_p$ は同定しようとするモデルパラメータの個数を表す。

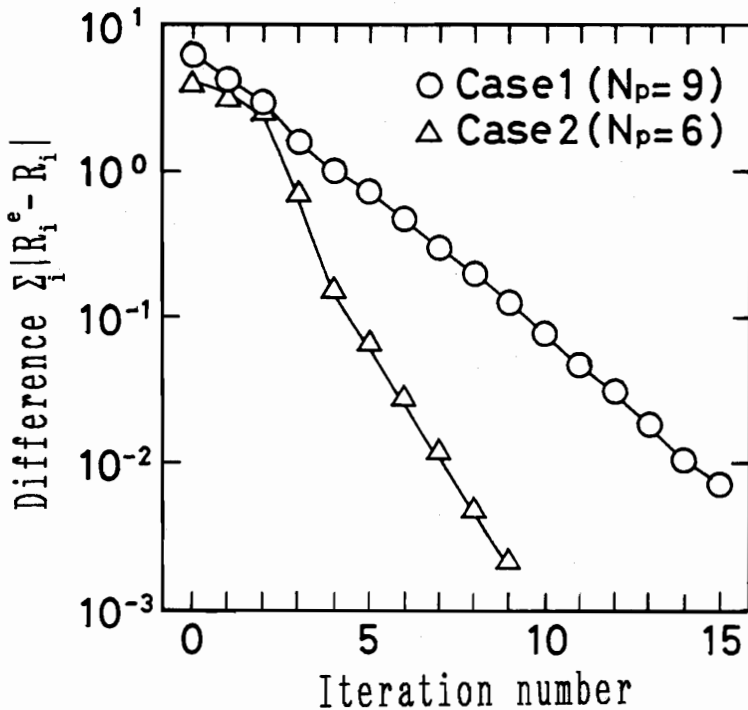
ケース1：質量 $m$ および弾性体の支持点の座標 $y_{sa}$ 、 $z_{sa}$ 、 $y_{sb}$ だけが既知で、残りのモデルパラメータが未知、すなわち同定しようとするモデルパラメータの数が9個の場合( $N_p=9$ )

ケース2：弾性体の減衰係数、ばね定数だけが未知、すなわち同定しようとするモデルパラメータの数が6個の場合( $N_p=6$ )

ただし、初期値の設定は、図6.4の下に示すとおりとした。

同定計算の反復計算回数と目標との残差の関係を図6.4に示す。図6.4において、同定するモデルパラメータの数が多きほど収束が遅くなっているが、両ケ

スとも安定に収束していることがわかる。また、同定された値は表6.1の値と一致した。したがって、減衰固有振動数，モード減衰比，固有モードの情報から，前章までで扱った慣性モーメント，重心位置，ばね定数だけでなく，本章で新たに同定対象とした減衰係数の値も精度よく同定できることが確認できた。



Initial value

$$\text{Case1: } J_x=100, y_G=z_G=1.0, c_{ay}=c_{az}=c_{bz}=1.0 \times 10^3, \\ k_{ay}=k_{az}=k_{bz}=1.0 \times 10^5$$

$$\text{Case2: } c_{ay}=c_{az}=c_{bz}=1.0 \times 10^3, k_{ay}=k_{az}=k_{bz}=1.0 \times 10^5$$

図6.4 反復計算回数と残差の関係  
(数値実験モデルの場合)



ところで、ケース1の場合においても、同定するモデルパラメータの数は9個である。そこで、目標とするモーダルパラメータの数を24個より減らしても同定が可能と考えられる。しかし、目標値の数を減らす場合に、どれを省略するかが問題となる。そこで、目標とする減衰固有振動数、モード減衰比、固有モードの組み合わせを変えた場合の同定計算を試み、同定の可能性について検討する。ここでは、次に示す5通りの目標値をもとに同定計算を行った。なお、 $N_0$ は目標値の個数を表す。

ケース1：一次モードから三次モードまでの減衰固有振動数、モード減衰比、一次モード、二次モードの固有モードの場合( $N_0=18$ )

ケース2：一次モードから三次モードまでの減衰固有振動数、モード減衰比、一次モードの固有モードの場合( $N_0=12$ )

ケース3：一次モードから三次モードまでの減衰固有振動数、モード減衰比、固有モードの実部のみの場合( $N_0=15$ )

ケース4：一次モードから三次モードまでの減衰固有振動数、一次モード、二次モードのモード減衰比、一次モードの固有モードの場合( $N_0=11$ )

ケース5：一次モードから二次モードまでの減衰固有振動数、モード減衰比、一次モードの固有モードの場合( $N_0=10$ )

その結果、ケース1からケース3までの固有モードに関する情報だけを省略した場合には、同定が可能であった。しかし、ケース4のモード減衰比の情報を省略した場合には、モデルパラメータの初期値の違いにより、同定が可能となる場合、同定計算の収束が不安定となり発散する場合、モデルパラメータの変更率を算出するための方程式(6.36)の係数行列が特異となり、計算ができない場合が現れた。また、ケース5の場合も、ケース4と同様に、方程式(6.36)の係数行列が特異となり、計算ができない場合が現れた。したがって、目標値の数を減らして同定を行う場合には、目標値の中にすくなくとも一次モードから三次モードまでの減衰固有振動数、モード減衰比を含まなければならないと考えられる。

### 6.5 実測データによる同定

次に、図6.5に示す防振ゴムで支持された簡単な剛体系モデルの実験データから減衰係数などのパラメータを同定する。なお、ここでは6.4節の数値実験と同様に、平面内の運動だけを考慮した問題とした。そこで、モデルのX方向とY、Z方向が連成しないようにYZ平面上に重心位置を設定し、防振ゴムもX方向については同じ特性のものを用いた。さらに、実験においてもX方向が加振されないように注意した。まず、打撃試験により得た伝達関数から、減衰固有振動数、モード減衰比、固有モードを求める。次に、その情報をもとにモデルパラメータの同定を行う。ここでは、同定された値を評価する方法として、同定されたモデルパラメータを用いて伝達関数を再構成し、実測した伝達関数と比較することにより妥当性を検討する。

実験方法は、次のように行う。図6.5に示す点a、点b、点c、点dに加速度センサを取り付け、点bのZ方向をインパクトハンマで打撃したときの伝達

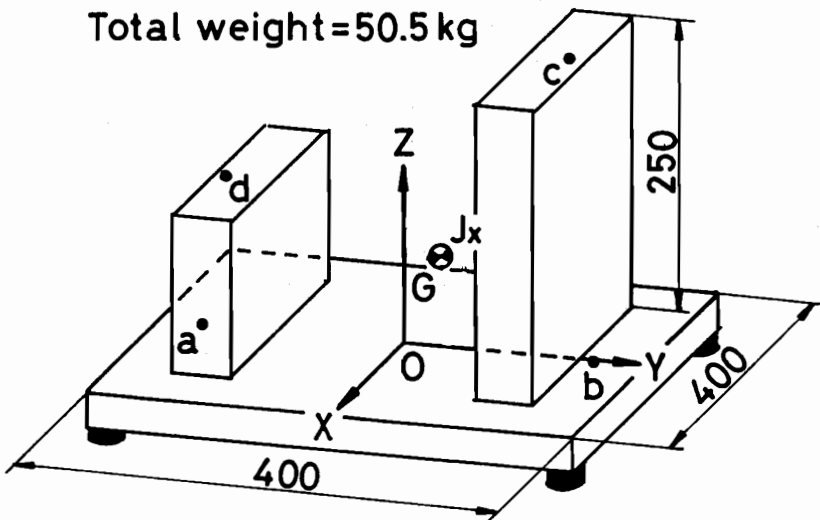


図6.5 実験モデル

関数をFFTアナライザで求め、そのデータをコンピュータに転送し、減衰固有振動数、モード減衰比および固有モードを算出した。例として、点bのY方向の応答の伝達関数およびカーブフィット結果を図6.6に示す。実線が測定された伝達関数で、破線がカーブフィット結果である。図6.6を眺めれば、良好なカーブフィットがなされたと考えられる。また、得られた減衰固有振動数、モード減衰比、固有モードを図6.7に示す。ここで、図6.7の(b), (c), (d)は、一次モードから三次モードまでの固有モードを図6.7(a)(図6.5と同じ)に示す太線のワイヤ・フレーム形状で置き換えて示したものである。この実験データを用いて同定計算を行う。同定するモデルパラメータは、モデルの大きさを定めるために既知とした質量 $m$ を除いた残りの慣性モーメント $J_x$ 、重心位置の座標 $y_G$ ,  $z_G$ 、減衰係数 $c_{ay}$ ,  $c_{az}$ ,  $c_{bz}$ 、ばね定数 $k_{ay}$ ,  $k_{az}$ ,  $k_{bz}$ の計9個とする。なお、減衰係数、ばね定数は、図6.5のモデルの弾性体を図6.2のように3個の減衰要素とばね要素にモデル化ときの3個の減衰要素とばね要

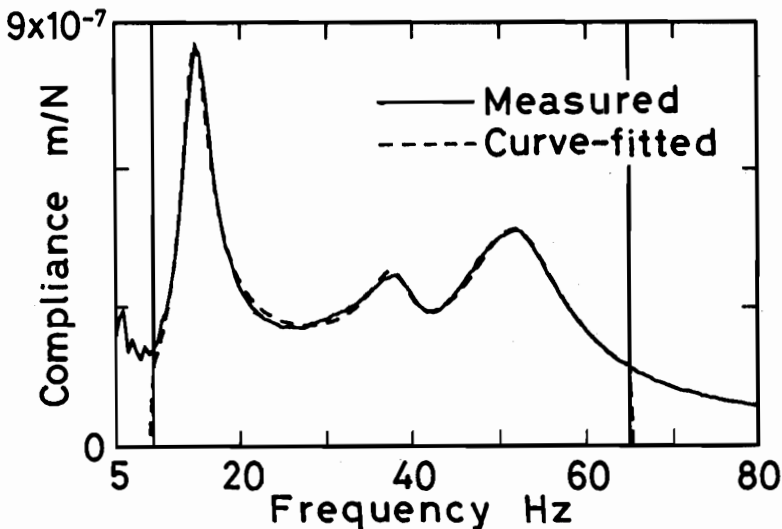


図6.6 測定された伝達関数とカーブフィット結果  
(打撃：点bのZ方向，応答：点bのY方向)

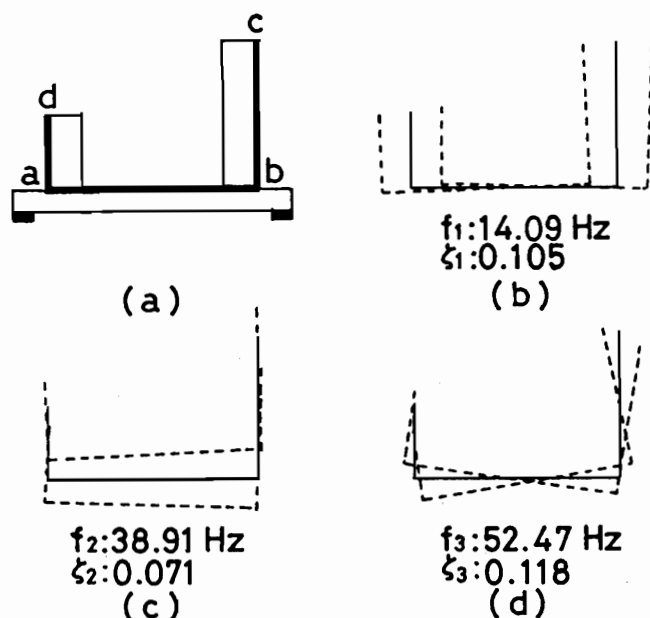


図6.7 モーダルパラメータ  
(実験データ)

素の減衰係数，ばね定数である。

同定されたモデルパラメータを表6.2に示す。 $J_x$ ,  $y_G$ ,  $z_G$ については，質量分布と形状から図式的に算出した値を併記するが，同定されたモデルパラメータがこれらの値にかなり近いことがわかる。また，同定されたモデルパラメータを用いて再構成した伝達関数と実測された伝達関数の比較を図6.8，図6.9に示す。実線が実験結果で，破線が再構成結果である。両者を比較すると，コンプライアンスの大きさだけでなく，位相も良い一致を示していることがわかる。したがって， $J_x$ ,  $y_G$ ,  $z_G$ の値だけでなく，他のモデルパラメータも精度よく同定されていると考えられる。また，他の測定位置における再構成結果も良好な精度であった。

表6.2 同定されたモデルパラメータ  
(実験モデルの場合)

Model parameter	Initial value	Identified value	Exact value
$J_x$ kg·m <sup>2</sup>	1.00	1.01	1.04
$y_G$ m	$1.00 \times 10^{-2}$	$3.19 \times 10^{-2}$	$3.09 \times 10^{-2}$
$z_G$ m	$1.00 \times 10^{-1}$	$7.75 \times 10^{-2}$	$7.52 \times 10^{-2}$
$c_{ay}$ N·s/m	$1.00 \times 10^3$	$1.05 \times 10^3$	—
$c_{az}$ N·s/m	$1.00 \times 10^3$	$8.43 \times 10^2$	—
$c_{bz}$ N·s/m	$1.00 \times 10^3$	$9.61 \times 10^2$	—
$k_{ay}$ N/m	$1.00 \times 10^5$	$4.23 \times 10^5$	—
$k_{az}$ N/m	$1.00 \times 10^6$	$1.37 \times 10^6$	—
$k_{bz}$ N/m	$1.00 \times 10^6$	$1.72 \times 10^6$	—
$m$ kg	50.5		

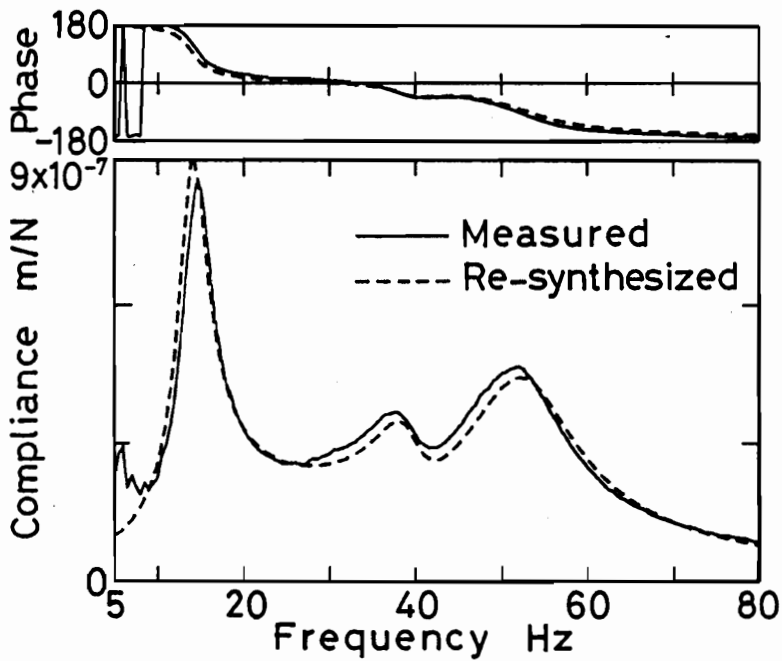


図6.8 測定された伝達関数と再構成した伝達関数の比較  
(打撃：点bのZ方向，応答：点bのY方向)

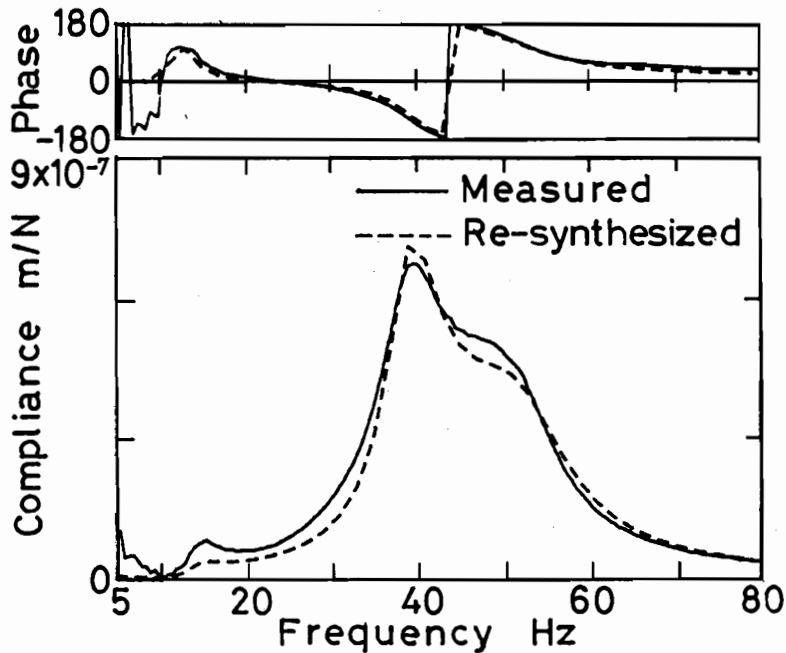


図6.9 測定された伝達関数と再構成した伝達関数の比較  
(打撃：点bのZ方向，応答：点aのZ方向)

## 6.6 結 言

本章では、防振ゴムなどの減衰特性を同定するために、減衰振動系を取り上げ、その同定法を提示した。そして、防振ゴムで支持された剛体系モデルに対して、実験データから防振ゴムの減衰係数、ばね定数が同定できることを確認した。なお、同定された減衰係数などのパラメータの値を評価する方法として、同定されたモデルパラメータを用いて伝達関数を再構成し、実測した伝達関数と比較することにより同定法の妥当性を検討した。

また、同定の目標とする減衰固有振動数、モード減衰比、複素固有モードの組み合わせを変えた同定計算結果をもとに、減衰係数などのパラメータが同定可能となる目標値の設定条件について検討した。その結果、少なくともすべてのモード次数の減衰固有振動数、モード減衰比を目標値の中に含まなければならないことが明らかになった。

## 第7章 柔軟構造物を有する剛体の慣性モーメント，重心位置の同定

### 7.1 緒言

人工衛星，軽量化ロボット，電子関連機器の分野において柔軟構造物を有する構造物，例えば，太陽電池パドルなどが付属した人工衛星<sup>(34)</sup>，柔軟アーム構造の軽量化ロボット<sup>(35)</sup>，磁気ディスク装置の磁気ヘッド<sup>(36)</sup>などの姿勢制御，位置制御において振動制御問題がクローズアップされている。それらの問題において，現時点では太陽電池パドルなどの柔軟構造物にアクチュエータを取付け個々に制御するのではなく，柔軟構造物が付属した全体系の運動を制御することにより振動を抑制する方式が採られている。そのような系の制御において，柔軟構造物を含んだ全体系のモデリングの問題が重要となり，数学モデルの記述方法に関しては多くの研究<sup>(48) - (50)</sup>がなされている。しかし，実際の制御において重要となるのは，数学モデルの確かさとともに，数学モデルの具体的設計変数の値がいかに精度よく求まっているかである。したがって，柔軟構造物を取り付いている全体系の運動を制御して振動を抑制する観点から，柔軟構造物の振動特性はもちろんのこと，柔軟構造物が付属した状態の系全体の慣性モーメント，重心位置などの剛体的特性を表す設計変数も重要な値となる。しかし，構造が複雑となると簡単には算出できないのが現状である。

第4章から第6章までは，機械の防振支持設計を対象として，弾性体で支持された剛体の慣性モーメント，重心位置，支持弾性体の減衰係数，ばね定数などのパラメータの値を実験データから同定する方法を提示した。しかし，これまでの方法では，支持されている構造物が剛体の場合にしか適用できない。

そこで，本章では，第4章から第6章までの剛体が弾性支持されたモデルに対する同定法を拡張し，剛体に柔軟構造物が付属した構造物において，柔軟構造物を剛体とみなした系全体の慣性モーメント，重心位置などの値を柔軟構造物が振動する状況で計測したデータから効率よく同定する方法を提示する。そして，数値実験および実測データによる同定を行い，同定法の妥当性を確認する。また，本章で扱うモデルに対しても，第3章で提案した同定法を適用し，その有効性を検討する。



## 7.2 運動方程式

本章では、同定対象として、図7.1に示すような剛体に数個の柔軟構造物を取り付けた構造物を弾性支持したモデルを取り上げる。人工衛星のような支持弾性体を持たない構造物も架設の弾性支持を行えば、同様なモデルで扱える。このような構造物をモデリングする場合、剛体は六自由度を考え、各柔軟構造物は有限要素法などにより求めたモード座標を用いて低次元のモデルとし、系全体の運動方程式を導く。このような方法を用いれば、系全体の自由度が低くなり、同定計算効率の点からも望ましい。そこで、本章でもこの方法で図7.1の運動方程式を導く。

まず、支持弾性体を除いた系の運動方程式を考える。剛体および数個の柔軟構造物を含めた系全体の質量を  $m$ 、柔軟構造物を剛体と考えた系全体の重心  $G$  を原点とする直交座標系を  $G-X^G Y^G Z^G$  (以後、重心座標系と呼ぶ)、 $X^G$  軸、 $Y^G$  軸、 $Z^G$  軸に関する慣性モーメント、慣性乗積を要素とする  $3 \times 3$  のマトリ

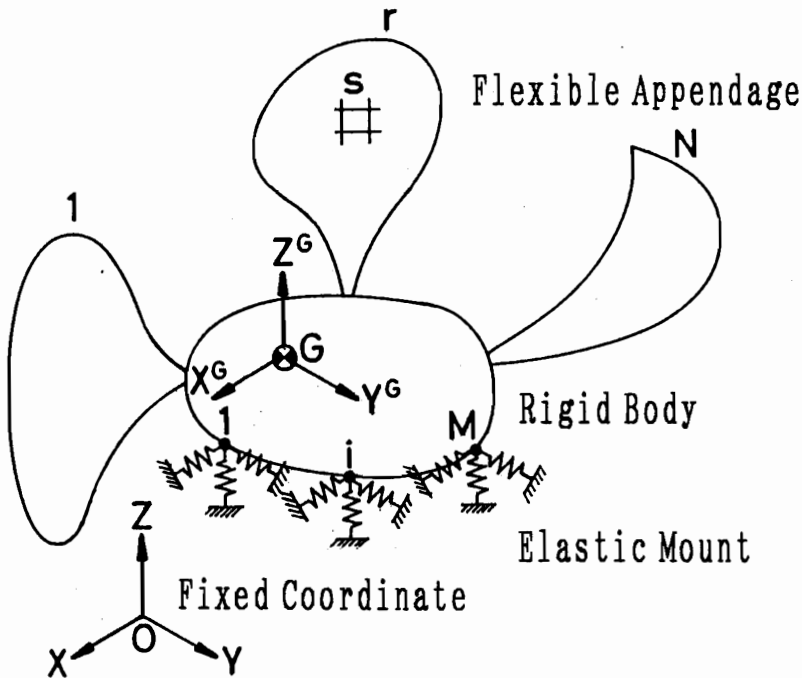


図7.1 力学モデル

ックスを $[J]$ ，重心の変位を要素とする $3 \times 1$ の変位ベクトルを $\{w^G\}$ ，回転角変位ベクトルを $\{\theta^G\}$ とする。また， $N$ 個の柔軟構造物については，各柔軟構造物ごとに，例えば片持梁とした有限要素法計算あるいは振動実験により質量分布，振動特性が得られているとする。 $r$ 番目の柔軟構造物を $N_r$ 個の節点に離散化したときの $s$ 番目の節点の質量を $m_s^r$ ，重心座標系における節点 $s$ の座標を ${}^G P_s^r(x_s^r, y_s^r, z_s^r)$ とする。また， $r$ 番目の柔軟構造物の $k$ 次モードの固有角振動数を $\omega_k^r$ ，モード減衰比を $\zeta_k^r$ ，節点 $s$ の一次から $n$ 次までの固有モードを並べた $3 \times n$ の固有モードマトリックスを $[\Phi_s^r]$ ，モード座標を $\{\xi^r\}$ とすると，支持弾性体を除いた系の運動方程式は次式となる。

$$[M_G]\{\dot{q}^G\} + [C_G]\{\dot{q}^G\} + [K_G]\{q^G\} = \{F^G\} \quad \dots\dots (7.1)$$

ここで， $\{q^G\}$ は重心の変位と柔軟構造物のモード座標を要素とする次のベクトルである。

$$\begin{aligned} \{q^G\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{q_G\} \\ \{\xi\} \end{array} \right\} & \{q_G\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{w^G\} \\ \{\theta^G\} \end{array} \right\} \\ \{\xi\} &= \{ \{\xi^1\}^T, \dots, \{\xi^r\}^T, \dots, \{\xi^N\}^T \}^T, & \{\xi^r\} &= \{\xi_{1^r}, \dots, \xi_{n^r}\}^T \\ & & & \dots\dots\dots (7.2) \end{aligned}$$

また， $\{F^G\}$ は外力項で，柔軟構造物に外力が加わらない場合には次のように表される。

$$\{F^G\} = \left\{ \begin{array}{l} \{F_G\} \\ \{0\} \end{array} \right\} \quad \{F_G\} = \left\{ \begin{array}{l} \{f^G\} \\ \{T^G\} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.3)$$

なお，式(7.1)の質量マトリックス $[M_G]$ ，減衰マトリックス $[C_G]$ ，剛性マトリックス $[K_G]$ の要素は次に示すとおりである。

$$\begin{aligned}
 [M_G] = \begin{bmatrix} [M_g] & [Q_e] \\ [Q_e]^T & [M_e] \end{bmatrix} \quad [C_G] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [C_e] \end{bmatrix} \quad [K_G] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_e] \end{bmatrix} \\
 \dots\dots\dots (7.4)
 \end{aligned}$$

ただし、 $[M_e]$ 、 $[C_e]$ 、 $[K_e]$ は柔軟構造物に関するモード質量マトリックス、モード減衰マトリックス、モード剛性マトリックスであり、各成分は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 [M_e] &= \text{diag} [[M^1], \dots, [M^r], \dots, [M^N]] \\
 [M^r] &= \sum_{s=1}^{N_r} m_{s^r} [\Phi_{s^r}]^T [\Phi_{s^r}] \\
 [C_e] &= \text{diag} [[C^1], \dots, [C^r], \dots, [C^N]] \\
 [C^r] &= 2 [\xi^r] [M^r], \quad [\xi^r] = \text{diag} [\xi_{1^r}, \dots, \xi_{k^r}, \dots, \xi_{n^r}] \\
 [K_e] &= \text{diag} [[K^1], \dots, [K^r], \dots, [K^N]] \\
 [K^r] &= [M^r] [\omega^r], \quad [\omega^r] = \text{diag} [\omega_{1^r}{}^2, \dots, \omega_{k^r}{}^2, \dots, \omega_{n^r}{}^2] \\
 \dots\dots\dots (7.5)
 \end{aligned}$$

また、 $[M_g]$ は剛体的特性を要素とするマトリックス、 $[Q_e]$ は柔軟構造物と剛体との質量連成の影響を表す係数マトリックスであり、次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 [M_g] = \begin{bmatrix} m \times [I] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} \quad [Q_e] = \begin{bmatrix} [P^1] \cdots [P^r] \cdots [P^N] \\ [H^1] \cdots [H^r] \cdots [H^N] \end{bmatrix} \\
 \dots\dots\dots (7.6)
 \end{aligned}$$

ここで、

$[I]$ :  $3 \times 3$ の単位マトリックス

$$\begin{aligned}
 [P^r] &= \sum_{s=1}^{Nr} m_s^r [\Phi_s^r] \\
 [H^r] &= \sum_{s=1}^{Nr} m_s^r [{}^G P_{s^r}] [\Phi_s^r] \\
 &\dots\dots\dots (7.7)
 \end{aligned}$$

ただし、 $[{}^G P_{s^r}]$ は次の形式のマトリックスである。

$$[{}^G P_{s^r}] = \begin{bmatrix} 0 & -z_{s^r} & y_{s^r} \\ z_{s^r} & 0 & -x_{s^r} \\ -y_{s^r} & x_{s^r} & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7.8)$$

式(7.1)が重心座標系における運動方程式であるが、一般に実際の構造物は複雑な構造をしているので、重心位置をあらかじめ知ることは困難であり、任意に設定することができる座標系における運動方程式を考えなければならない。そこで、図7.1に示す空間に固定した直交座標系O-XYZ（以後、固定座標系と呼ぶ）を考え、重心座標系との偏差のパラメータとして、固定座標系における重心Gの座標 ${}^O P^G(x_G, y_G, z_G)$ を表す3個のパラメータを定義する。この偏差のパラメータを用いれば、重心座標系における方程式は、第4章と同様な考え方で次式のように固定座標系の方程式に変換することができる。

$$[T_G]^T [M_G] [T_G] \{\dot{q}\} + [C_G] \{\dot{q}\} + [K_G] \{q\} = \{F\} \quad (7.9)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \{q\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{q_0\} \\ \{\xi\} \end{array} \right\} & \{q_0\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{w^0\} \\ \{\theta^0\} \end{array} \right\} \\
 \{\xi\} &= \{ \{\xi^1\}^T, \dots, \{\xi^r\}^T, \dots, \{\xi^N\}^T \}^T, & \{\xi^r\} &= \{ \xi_{1^r}, \dots, \xi_{n^r} \}^T \\
 \{F\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{F_0\} \\ \{O\} \end{array} \right\} & \{F_0\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{f^0\} \\ \{T^0\} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$[T_g] = \begin{bmatrix} [T_g] & [0] \\ [0] & [e] \end{bmatrix} \quad [T_g] = \begin{bmatrix} [I] & [-{}^0P^G] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7.10)$$

ただし、 $[-{}^0P^G]$ は式(7.8)の $[{}^G P_s^r]$ と同じ形式のマトリックスであるが、各成分に $-1$ を掛けたものとなる。また、 $[e]$ は $\{\xi\}$ の自由度と同じ大きさの単位マトリックスである。

次に、支持系の減衰要素，ばね要素を含めた全体系の運動方程式を求める。図7.1に示すM個の弾性体において，i番目の支持点における弾性体のX，Y，Z方向の減衰係数，ばね定数を要素とする $3 \times 3$ の対角マトリックスをそれぞれ $[C_i^S]$ ， $[K_i^S]$ とし，支持点における各座標軸方向の変位を要素とする $3 \times 1$ のベクトルを $\{q_i^S\}$ とすると，支持系におけるM個の弾性体の変位を要素とする変位ベクトル $\{q^S\}$ と減衰力ベクトル $\{F_c^S\}$ の関係は次式となる。

$$\{F_c^S\} = -[C_s]\{\dot{q}^S\} \quad \dots\dots\dots (7.11)$$

ここで，

$$\begin{aligned} [C_s] &= \text{diag} [[C_1^S], \dots, [C_M^S]], \quad [C_i^S] = \text{diag} [c_{ix}, c_{iy}, c_{iz}] \\ \{F_c^S\} &= \{\{f_{c1}^S\}^T, \dots, \{f_{cM}^S\}^T\}^T \\ \{q^S\} &= \{\{q_1^S\}^T, \dots, \{q_M^S\}^T\}^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.12)$$

変位ベクトル $\{q^S\}$ と復元力ベクトル $\{F_k^S\}$ の関係は次式となる。

$$\{F_k^S\} = -[K_s]\{q^S\} \quad \dots\dots\dots (7.13)$$

ここで，

$$\begin{aligned}
[K_S] &= \text{diag} [[K_1^S], \dots, [K_M^S]], [K_i^S] = \text{diag} [k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}] \\
\{F_k^S\} &= \{\{f_{k1}^S\}^T, \dots, \{f_{kM}^S\}^T\}^T \\
&\dots\dots\dots (7.14)
\end{aligned}$$

なお、 $\{f_{ci}^S\}$ 、 $\{f_{ki}^S\}$ は支持点*i*の弾性体に関する各座標軸方向の減衰力、復元力を要素とする $3 \times 1$ のベクトルである。

ところで、式(7.11)の各支持点における変位と減衰力の関係は、各支持点の変位を要素とするベクトル $\{q^S\}$ と固定座標系の変位ベクトル $\{q\}$ を関係づける座標変換マトリックス $[T_S]$ を用いて、次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と減衰力ベクトル $\{F_c\}$ の関係に変換できる。

$$\{F_c\} = -[T_S]^T [C_S] [T_S] \{\dot{q}\} \dots\dots\dots (7.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\{F_c\} &= \begin{Bmatrix} \{F^c\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \{F^c\} = \begin{Bmatrix} \{f_c\} \\ \{T_c\} \end{Bmatrix} \\
[T_S] &= \begin{Bmatrix} [I] & [-{}^0P^1] & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [I] & [-{}^0P^1] & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [I] & [-{}^0P^M] & [0] \end{Bmatrix} \\
&\dots\dots\dots (7.16)
\end{aligned}$$

座標変換マトリックス $[T_S]$ 中のマトリックス $[-{}^0P^1]$ は、支持点*i*の固定座標系における座標 ${}^0P^1(x_1, y_1, z_1)$ の成分を要素とする式(7.8)の $[{}^0P_S^T]$ と同じ形式のマトリックスである。また、同様に、式(7.13)の各支持点における変位と復元力の関係は、次式のように固定座標系における変位ベクトル $\{q\}$ と復元力ベクトル $\{F_k\}$ の関係に変換できる。

$$\{F_k\} = -[T_s]^T [K_s] [T_s] \{q\} \quad \dots\dots\dots (7.17)$$

ここで、

$$\{F_k\} = \begin{Bmatrix} \{F^k\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \{F^k\} = \begin{Bmatrix} \{f_k\} \\ \{T_k\} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7.18)$$

式(7.15), (7.17)の減衰力, 復元力は剛体が振動することにより, 減衰要素, ばね要素から剛体に働く反力となるため, 式(7.15), (7.17)を式(7.9)の右辺に代入し, 整理することにより, 次式のように固定座標系における全体系の自由振動状態の運動方程式を導くことができる。

$$[\hat{m}]\{\ddot{q}\} + [\hat{c}]\{\dot{q}\} + [\hat{k}]\{q\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (7.19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [\hat{m}] &= [T_G]^T [M_G] [T_G] \\ [\hat{c}] &= [C_G] + [T_s]^T [C_s] [T_s] \\ [\hat{k}] &= [K_G] + [T_s]^T [K_s] [T_s] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.20)$$

通常の振動解析では, 式(7.19)に対応する次式の特性方程式

$$\lambda_j^2 [\hat{m}] \{N_j\} + \lambda_j [\hat{c}] \{N_j\} + [\hat{k}] \{N_j\} = \{0\} \quad \dots (7.21)$$

の複素固有値解析により, 共役な対を有するn組の減衰固有振動数  $f_j$ , モード減衰比  $\zeta_j$ , 複素固有モード  $\{N_j\}$  などのモーダルパラメータを求めることができる。

### 7.3 柔軟構造物の振動を考慮した同定法

本節では、柔軟構造物が付属した剛体系モデルの振動実験で得られた減衰固有振動数、モード減衰比、固有モードの情報をもとに、柔軟構造物を剛体とみなした系全体の慣性モーメント、重心位置の座標などのモデルパラメータの値を同定する方法を説明する。特に、通常の実験で使用される変位センサで測定された並進変位データを同定の目標値として用いるための方法を説明する。

対象とするモデルに対して振動実験を行うと減衰固有振動数、モード減衰比そして固有モードが得られる。その固有モードは通常の実験で使用される変位センサを用いると、モデル上の各測定点のX、Y、Z方向の並進変位成分を要素とするものになると考えられる。一方、特性方程式(7.21)から得られる固有モード $\{N_j\}$ は回転角変位成分、モード座標成分を含む。したがって、特性方程式から得られる固有モードはそのままでは実験値と直接比較することができない。そこで、実験で得られる固有モードを同定の目標値として用いるために、特性方程式から得られる固有モードを実験値に対応する並進変位成分だけからなる固有モードに変換し、実験値と比較することを考える。

力学モデルの任意の点、例えば、 $r$ 番目の柔軟構造物の測定点 $k$ に対応する点のX、Y、Z方向の並進変位成分を要素とするベクトル $\{v_{kj}\} = \{X_{kj}, Y_{kj}, Z_{kj}\}^T$ は、次式のように固有モード $\{N_j\}$ の並進変位成分 $\{W_j\}$ 、回転角変位成分 $\{\Theta_j\}$ 、モード座標成分 $\{\xi_j^r\}$ の重ね合せとして考えることができる。

$$\{v_{kj}\} = [I]\{W_j\} + [{}^0P^k]\{\Theta_j\} + [\Phi_k^r]\{\xi_j^r\} \quad \dots (7.22)$$

ここで、 $[{}^0P^k]$ は測定点 $k$ の固定座標系における座標 ${}^0P^k(x_k, y_k, z_k)$ を要素とする式(7.8)の $[{}^0P_s^r]$ と同じ形式のマトリックスである。また、 $[\Phi_k^r]$ は柔軟構造物単体の振動解析で得られた一次から $n$ 次までの点 $k$ に関する固有モード成分を並べたマトリックスである。なお、感度に関しても、感度解析で得られる $\{W_j\}$ 、 $\{\Theta_j\}$ 、 $\{\xi_j^r\}$ の感度を式(7.22)に代入することにより、実験値に対応する感度が算出できる。測定点が $P$ 個ある場合には、式(7.22)をまとめてマトリックス形式で表示した次式から、 $P$ 個の測定点に対応する並進変位成分だけからなる固有モード $\{V_j\}$ およびその感度 $\{V_j^s\}$ を求めることができる。



$$\begin{aligned} \{V_j\} &= [T_P]\{N_j\} \\ \{V_j'\} &= [T_P]\{N_j'\} \\ &\dots\dots\dots (7.23) \end{aligned}$$

ここで、 $\{V_j'\}$ 、 $\{N_j'\}$ は、次式の固有モード $\{V_j\}$ 、 $\{N_j\}$ の各成分に対応する一次感度を要素とするベクトルである。

$$\begin{aligned} \{V_j\} &= \{\{V_{1j}\}^T, \dots, \{V_{pj}\}^T\}^T ; \quad \{V_{kj}\} = \{X_{kj}, Y_{kj}, Z_{kj}\}^T \\ \{N_j\} &= \{\{W_j\}^T, \{\Theta_j\}^T, \{\xi_j^1\}^T, \dots, \{\xi_j^N\}^T\}^T \\ [T_P] &= \begin{bmatrix} [I] & [{}^0P^1] & [\Phi_1^1] & \dots & [\Phi_1^N] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [I] & [{}^0P^k] & [\Phi_k^1] & \dots & [\Phi_k^N] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [I] & [{}^0P^p] & [\Phi_p^1] & \dots & [\Phi_p^N] \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (7.24) \end{aligned}$$

ただし、 $r$ 番目の柔軟構造物上の測定点においては、 $r$ に関する $[\Phi_k^r]$ だけを考慮し、他はすべて零とする。

モーダルパラメータの同定は以下の手順で行う。

まず、第2章の方法では、同定の目標とする実験で得られた固有振動数 $f_j^e$ 、モード減衰比 $\xi_j^e$ 、固有モード $\{V_j^e\}$ を要素とする次式のベクトル $\{R^e\}$ を設定する。

$$\begin{aligned} \{R^e\} &= \{f_1^e, \dots, f_n^e, \xi_1^e, \dots, \xi_n^e, \{V_1^e\}^T, \dots, \{V_n^e\}^T\}^T \\ &\dots\dots\dots (7.25) \end{aligned}$$

ただし、固有モード $\{V_j^e\}$ の成分は複素数であるため、実部と虚部に分けて取り扱う。そして、同定しようとするモデルパラメータの選定、初期値の設定を行い、固有値解析、感度解析により、初期モデルの固有振動数、モード減衰比、固有モードを要素とするベクトル $\{R_0\}$ および一次感度を要素とする感度マトリックス $[S]$ を算出しておく。ここで、 $[S]$ は $k$ 番目の同定しようとするモデ

ルパラメータの変更率 $\gamma_k$ に対する $i$ 番目の目標値の感度 $S_{ik}$ を要素とするマトリックスとなる。

算出した感度を用いれば、初期モデルのモデルパラメータを変更したときの固有振動数、モード減衰比、固有モードの変化予測値 $\{R\}$ は次式で表される。

$$\{R\} = \{R_0\} + [S]\{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (7.26)$$

ただし、 $\{\gamma\}$ は各モデルパラメータの変更率 $\gamma_k$ を要素とするベクトルである。そこで、予測値 $\{R\}$ を目標値 $\{R^e\}$ と比較し、最小二乗法を適用して、差を最小とする $\{\gamma\}$ を次式より算出する。

$$([S]^T[W][S])\{\gamma\} = [S]^T[W](\{R^e\}-\{R_0\}) \quad \dots\dots\dots (7.27)$$

ここで、 $[W]$ は各目標値の相対的重要度を定める対角マトリックスである。

また、第3章の同定法では、目標とするベクトル $\{R^e\}$ の代わりに次式のベクトル $\{P^e\}$ を設定する。

$$\{P^e\} = \{f_{1^e}, \dots, f_{n^e}, \zeta_{1^e}, \dots, \zeta_{n^e}, 1, \dots, 1\}^T \quad \dots\dots (7.28)$$

次に、第6章で説明したように、実験値の固有モード $\{V_{j^e}\}$ と初期モデルの固有モード $\{V_{j0}\}$ から、次式により固有モードベクトルの方向の相違を評価する量 $r_{j0}$ （以後、固有モードの評価量と呼ぶ）を算定する。

$$\begin{aligned} r_{j0} &= |\{V_{j^e}\}^T\{V_{j0}^*\}|^2 \\ &\quad /(\{V_{j^e}\}^T\{V_{j^e}^*\} \times \{V_{j0}\}^T\{V_{j0}^*\}) \\ &= (\{V_{j^e}\}^T\{V_{j0}^*\} \times (\{V_{j^e}^*\}^T\{V_{j0}\})) \\ &\quad /(\{V_{j^e}\}^T\{V_{j^e}^*\} \times \{V_{j0}\}^T\{V_{j0}^*\}) \quad \dots\dots\dots (7.29) \end{aligned}$$

ただし、 $\{V_{j^e}^*\}$ 、 $\{V_{j0}^*\}$ はそれぞれ $\{V_{j^e}\}$ 、 $\{V_{j0}\}$ の共役複素ベクトルを表す。次に、初期モデルの固有振動数 $f_{j0}$ 、モード減衰比 $\zeta_{j0}$ および固有モード

の評価量  $r_{j0}$  を要素とするベクトル  $\{P_0\}$  を設定する。

$$\{P_0\} = \{f_{10}, \dots, f_{n0}, \xi_{10}, \dots, \xi_{n0}, r_{10}, \dots, r_{n0}\}^T \quad \dots\dots\dots (7.30)$$

そして、次式で初期モデルのモデルパラメータを変更したときの固有振動数、モード減衰比、固有モードの評価量の変化を予測する。

$$\{P\} = \{P_0\} + [S^*]\{\gamma\} \quad \dots\dots\dots (7.31)$$

ただし、 $[S^*]$  は固有振動数、モード減衰比および固有モードの評価量の一次感度を要素とするマトリックスである。そこで、予測値  $\{P\}$  を目標値  $\{P^e\}$  と比較し、最小二乗法を適用して、差を最小とする  $\{\gamma\}$  を次式より算出する。

$$([S^*]^T[W][S^*])\{\gamma\} = [S^*]^T[W](\{P^e\} - \{P_0\}) \quad \dots\dots (7.32)$$

修正後のモデルパラメータの値は、式(7.27)あるいは式(7.32)で得られた変率  $\gamma_k$  を次式に代入することにより得ることができる。

$$d_k = d_{k0}(1 + \gamma_k) \quad \dots\dots\dots (7.33)$$

ただし、 $d_{k0}$  は  $k$  番目のモデルパラメータの初期値を  $d_k$  は修正後の値を表す。

このような手順で、初期モデルのモデルパラメータを修正することができる。通常は一回の修正作業で最良なモデルパラメータの値が得られる場合は少なく、最良な値が得られるまで修正作業を繰り返すことになる。

以上のように、本章で提示した同定法は、柔軟構造物の弾性変形を考慮し、弾性変形を柔軟構造物単体の振動解析で得られたモード座標を用いて表すことにより低次元化した後、系全体の運動方程式を導出する。そして、同定においてもモード座標の感度を用いることにより、低次元のモデルで効率よく同定するものである。

## 7.4 数値実験例

提示した柔軟構造物を有する剛体系モデルの同定法の妥当性を確認するために数値実験を行い、その結果について検討する。ここでは、既知のモデルパラメータを用いて固有値解析を行い、その結果得られた固有振動数、モード減衰比、固有モードを実験値として代用する。

### 7.4.1 柔軟構造物を有する剛体系モデルの同定

まず、本項では、第2章で説明した固有モードの各成分の感度をそのままの形で用いる同定法で同定を行う。これは、7.3節で説明した実験で得られる各測定点の並進変位成分からなる固有モードを同定の目標とする考え方の妥当性を確認するためである。

数値実験例として、図7.2に示す中心にある剛体に2個の柔軟構造物がY軸に平行に取付いた平面モデルを取り上げる。このモデルでは剛体がY、Z方向とX軸回りの自由度を有し、柔軟構造物はZ方向の弾性変形だけを行うものとした。また、支持弾性体に関しては、図7.1の多数の支持弾性体を図7.2に示すように3個の減衰要素とばね要素に集約したモデルを考えた。柔軟構造物A、

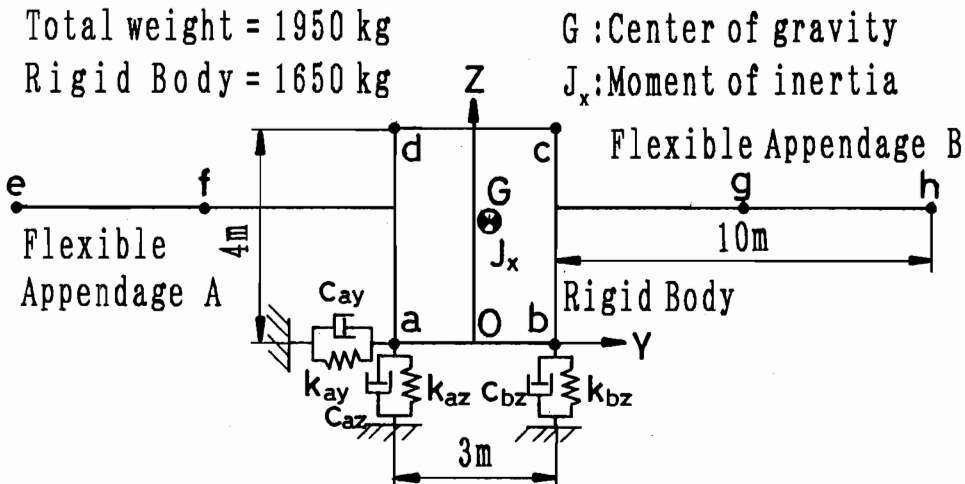


図7.2 数値実験モデル

Bは同じ特性を持つとした上で、式(7.5)，(7.7)の柔軟構造物に関する数値はあらかじめ有限要素法計算で求めた。なお、各柔軟構造物は二次モードまでを考慮したため、系全体の自由度は七自由度となる。

そこで、数値実験は表7.1に示す減衰係数、ばね定数だけが異なる三種類のモデルについて同定を試みる。ただし、表7.1には、既知とした全体の質量 $m$ および柔軟構造物のパラメータを除いた同定しようとする系全体の慣性モーメント $J_x$ 、重心位置の座標 $y_G$ 、 $z_G$ 、支持弾性体の減衰係数 $C_{ax}$ 、 $C_{az}$ 、 $C_{bz}$ 、ばね定数 $k_{ax}$ 、 $k_{az}$ 、 $K_{bz}$ の計9個のパラメータだけを示す。また、表7.1の値および既知のモデルパラメータから固有値解析で得られた各モデルの固有振動数および柔軟構造物単体の固有振動数を表7.2に示す。全体系の固有振動数と柔軟構造物単体の固有振動数を比較すると、モデルAが全体の固有振動数が

表7.1 同定しようとするモデルの真の諸元

Model parameter	Model A	Model B	Model C
$C_{ay}$ N·s/m	$7.00 \times 10^1$	$3.50 \times 10^2$	$1.05 \times 10^3$
$C_{az}$ N·s/m	$1.00 \times 10^2$	$5.00 \times 10^2$	$1.50 \times 10^3$
$C_{bz}$ N·s/m	$1.10 \times 10^2$	$5.50 \times 10^2$	$1.65 \times 10^3$
$k_{ay}$ N/m	$1.40 \times 10^5$	$7.00 \times 10^5$	$2.10 \times 10^6$
$k_{az}$ N/m	$2.00 \times 10^5$	$1.00 \times 10^6$	$3.00 \times 10^6$
$k_{bz}$ N/m	$2.20 \times 10^5$	$1.10 \times 10^6$	$3.30 \times 10^6$
$J_x$ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$2.15 \times 10^4$		
$y_G$ m	0.230		
$z_G$ m	2.31		

表7.2 数値実験における各モデルの固有振動数

Mode number	Model A Hz	Model B Hz	Model C Hz	Appendage Hz
1st	0.76	1.27	1.41	1.48
2nd	1.40	1.47	1.47	9.24
3rd	1.43	2.31	3.72	
4th	2.51	5.40	8.53	
5th	3.42	6.10	8.71	
6th	9.40	9.47	10.27	
7th	9.75	9.97	11.78	

柔軟構造物の一次モードに近い場合，モデルCが二次モードに近い場合，そしてモデルBがその中間の場合となっていることがわかる。そこで，一次モードから七次モードまでの固有振動数，モード減衰比，固有モードの情報をもとに，モデルA，B，Cについて，表7.1の9個のモデルパラメータを同定する。なお，目標とする固有モードは系が七自由度であることを考慮し，図7.2の点bのY方向，点cのZ方向，点dのZ方向および点e～hのZ方向に対応する7成分を要素とした。

表7.1の各モデルのモデルパラメータの70%を初期値として同定計算を行ったときの反復計算回数と目標値との残差の関係を図7.3に示す。なお，縦軸は目標値と各反復計算過程の固有振動数，モード減衰比，固有モードとの残差の絶対値和である。図7.3には併せて，モデルBにおいて減衰係数，ばね定数が既知の場合を想定し， $J_x, y_c, z_c$ だけを同定する場合を載せた。各モデルと

も同定された値は表7.1の値と等しくなった。しかし、収束性に関しては、モデルCの場合が特に反復計算の回数を要する結果となった。この傾向は、他の二、三の数値実験の場合にも現れた。しかし、モデルCの場合にも、各モード次数の目標とする固有モードの成分の数、すなわち測定点の数を増やすあるいは測定位置を変えるなどの措置を行うことにより収束性の改善を図ることができた。したがって、剛体と柔軟構造物の高次モードの連成が強くなるほど固有モードの形状が複雑となるため、モード形状を正確に識別するためには、測定点を増やすあるいは適切な測定位置での測定を行わなければならないと考えられる。

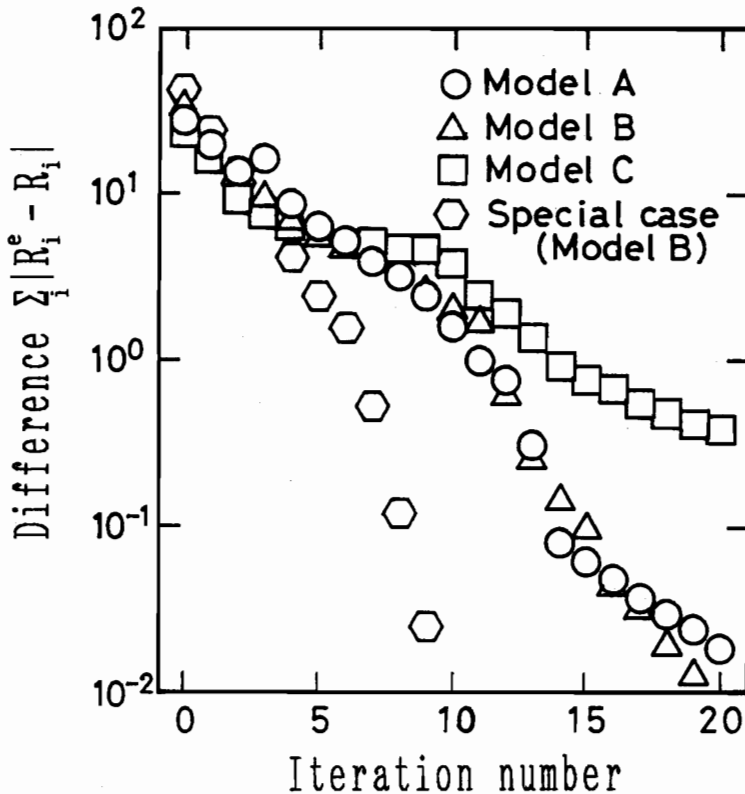


図7.3 反復計算回数と残差の関係  
(数値実験モデルの場合)

以上のことより、第2章の同定法を用いる上では、系全体の固有振動数なるべく柔軟構造物単体の一次モードに近くなるように支持弾性体のばね定数を設定すれば、柔軟構造物の高次モードと連成することが少なくなる。その結果、測定点を増やしたり、測定位置を考慮することなく同定計算の効率を上げることができるのと同時に、自由度の低いモデルを用いて同定することが可能となる。なお、系全体の固有振動数が柔軟構造物単体の一次モードに近くなるようにばね定数を設定できない場合も、柔軟構造物の高次モードまでを考慮したモデルを用い、測定点数を多くすることにより同定が可能となると考えられる。

#### 7.4.2 収束性の検討

7.4.1項において、本章で取り上げたモデルのモデルパラメータが同定できることは確認できた。しかし、固有モードの測定位置、測定点数あるいは支持弾性体のばね定数を適切に設定しない場合には、収束速度が極端に悪くなる場合があった。これらのことは、同定法を実用化の上では、大きな問題となる。すなわち、固有モードの測定位置、測定点数あるいは支持弾性体のばね定数を適切に設定するためには、数回の実験を繰り返す必要があり、実験に要する時間が多大となる可能性がある。したがって、以上のような点を考慮しなくとも、安定に収束する方法が望まれる。

そこで、本章で扱うモデルに関しても、第3章で提案した同定法の適用を試み、収束性に関する検討を行う。

対象とするモデル、目標値および同定するモデルパラメータの初期値など、すべての条件を7.4.1項と同様にし、第3章で提案した同定法を用いて同定を行った。その場合の反復計算回数と目標値との残差の関係を図7.4に示す。図7.4には併せて、7.4.1項の第2章の同定法を用いた場合の反復計算回数と残差の関係を示す。○、△、□が第3章の同定法（以後、提案法と呼ぶ）を用いた場合で、●、▲、■が7.4.1項で行った第2章の同定法（以後、従来法と呼ぶ）を用いた結果である。なお、両同定法の収束性の違いを評価するため、提案法の残差の数値は式(7.29)の固有モードベクトルの方向の相違を評価する量ではなく、従来法と同じ固有モードの各成分の残差の絶対値和を用いた。図7.4において、提案法の場合には、3つのモデルにおいて、多少の収束性の



違いはあるが安定に収束し，7.4.1項で問題となったモデルCの場合にも収束状況は極めて速い。また，モデルA，Bに関して，従来法より少ない反復計算回数で残差が小さくなっていることがわかる。

したがって，本章で扱うモデルにおいても，第3章で提案した同定法を用いれば，第2章の同定法に比べて収束性が大幅に向上することが確認できた。なお，この原因として，第3章でも述べたが，モデルCの場合にはモード形状が複雑なため，それだけモデルパラメータの変更にとまなう固有モードの各成分分の変化の状況が複雑となり，一次感度だけで予測できる範囲が狭くなり，収

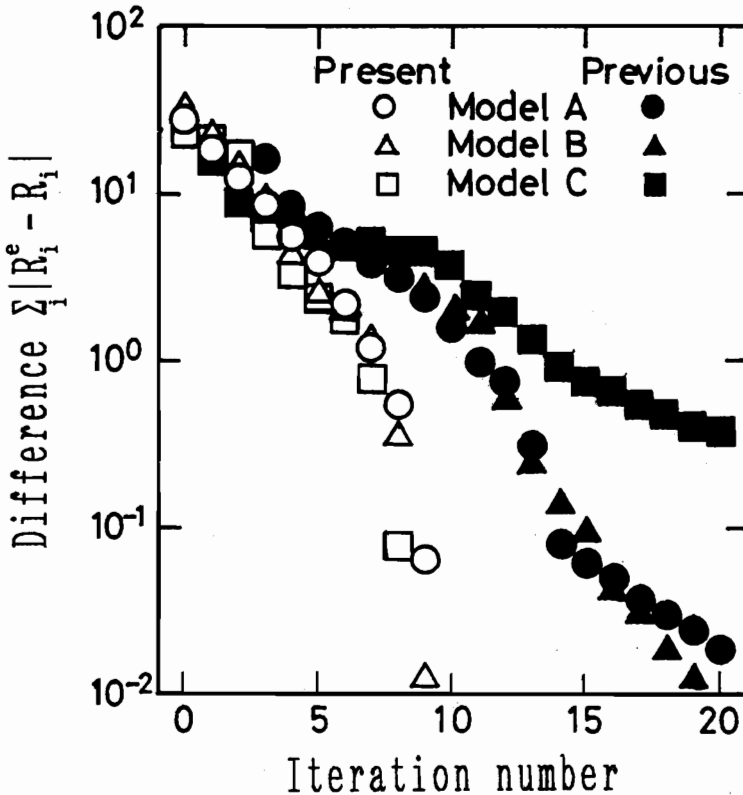


図7.4 反復計算回数と残差の関係  
(同定法の違いによる収束性の比較)

束性が悪くなったと考えられる。しかし、第3章で提案した方法では、評価関数の要素である固有モードベクトルの方向の相違を評価した量の変化の状況は、固有モードの各成分の変化に比べてなめらかなため、収束性が向上したと考えられる。

以後、第3章で提案した同定法を用いる。

### 7.5 実測データによる同定

7.4節の考察をもとにして、実測データによる同定計算を試みる。例として図7.5のモデルを取り上げる。このモデルは、中心となる鋼製の剛体に2個のアルミ製の柔軟構造物が付属したモデルである。なお、ここでは、7.4節の数値実験と同様に平面内の運動だけを考慮した問題とした。そこで、モデルのX方向とY、Z方向が連成しないように重心位置をYZ平面上に設定し、支持弾性体に関してもすべて同じ特性のものを用いた。さらに、実験においてもX方向に加振されないように注意した。また、柔軟構造物の特性もあらかじめ有限要素法計算で求めた。このモデルに対して打撃試験を行い、減衰固有振動

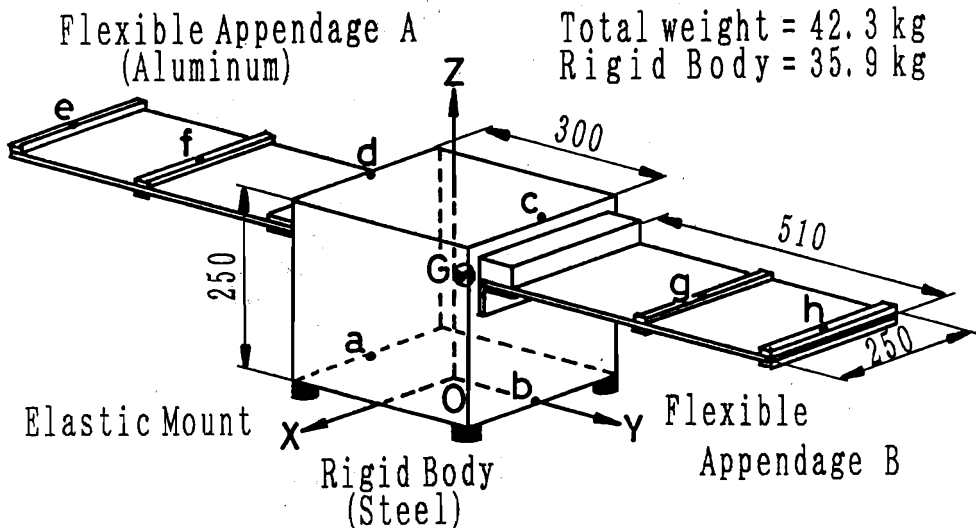


図7.5 実験モデル

数，モード減衰比，固有モードを求める。次に，その情報をもとにモデルパラメータの同定を行う。ここでは，同定された値の妥当性を検討するために，同定されたモデルパラメータを用いて伝達関数を再構成し，実測された伝達関数と比較するとともに，あらかじめ質量分布と図面形状から算出した慣性モーメント，重心位置とも比較する。

まず，各柔軟構造物に対して有限要素法計算を行い，式(7.5)，(7.7)の柔軟構造物に関する数値を求めた。有限要素法計算で得られた固有振動数と柔軟構造物の取付点を拘束した振動実験から得られた固有振動数の比較を表7.3示す。次に，全体系の振動実験を行い目標とするモーダルパラメータを求める。モーダルパラメータは，図7.5に示す点a～点hのY，Z方向に加速度センサを取付け，点cのZ方向をインパクトハンマで打撃したときの伝達関数から求めた。得られたモーダルパラメータを図7.6に示す。図7.6の(b)～(h)は，一次モードから七次モードまでの固有モードを図7.6(a) (図7.5の平面モデル) に示す太線のワイヤフレーム形状で置き換え示したものである。中心にある剛体が三自由度であること，および図7.6の全体系の固有振動数と表7.3の柔軟構造物単

表7.3 柔軟構造物の有限要素法計算と  
測定で得られた固有振動数の比較

Mode number		Calculated Hz	Measured Hz
A	1st	16.42	16.43
	2nd	91.34	91.15
	3rd	353.69	-
B	1st	13.95	14.07
	2nd	86.21	85.90
	3rd	341.13	-

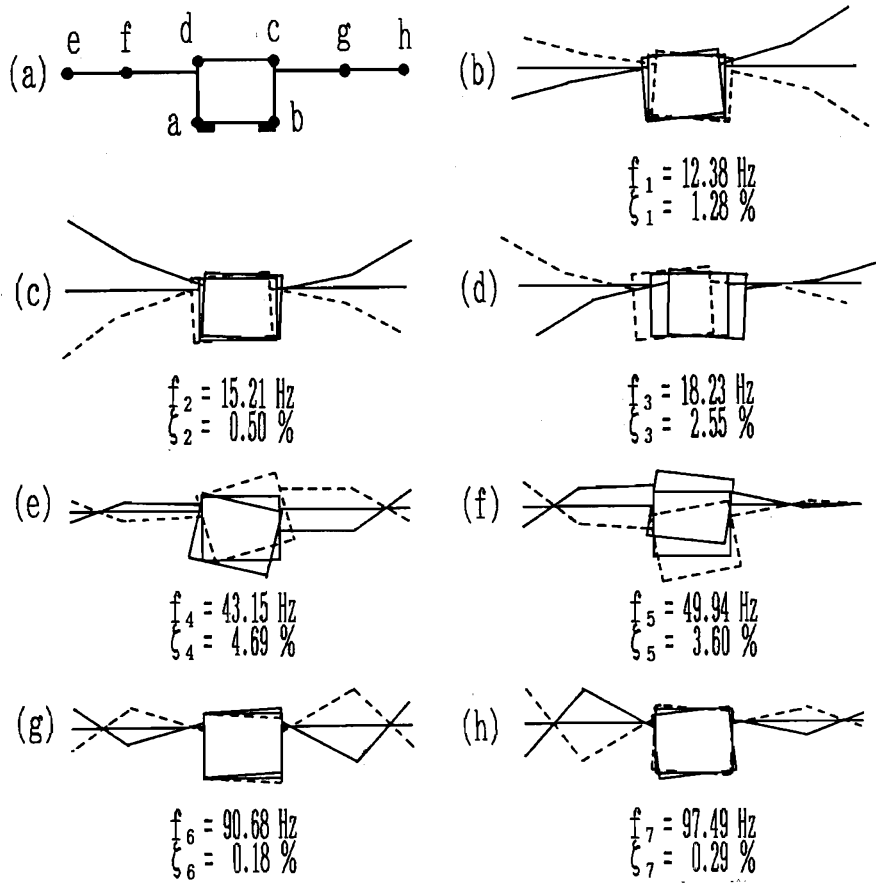


図7.6 モーダルパラメータ  
(実験データ)

体の固有振動数を比較すれば、剛体と柔軟構造物の連成は七次モード以上の高次のモードにおいてはほとんどないと思われる。したがって、慣性モーメント、重心位置を同定するための同定モデルとしては、7.4節と同じ七自由度モデル、すなわち柔軟構造物A、Bそれぞれ二自由度を考慮したモデルを用いて同定計算を行えばよいと考えられる。

そこで、図7.6のモーダルパラメータを目標として同定計算を行う。ただし、系全体の質量 $m$ とモード減衰比を除いた柔軟構造物に関するパラメータは既知とした。したがって、同定対象とするモデルパラメータは、系全体の慣性モーメント $J_x$ 、重心位置の座標 $y_G$ 、 $z_G$ および支持弾性体の減衰係数 $c_{ax}$ 、 $c_{az}$ 、 $c_{bz}$ 、ばね定数 $k_{ax}$ 、 $k_{az}$ 、 $k_{bz}$ 、そして有限要素法では算出しにくい柔軟構造物のモード減衰比 $\zeta_1^A$ 、 $\zeta_2^A$ 、 $\zeta_1^B$ 、 $\zeta_2^B$ の計13個となる。なお、減衰係数、ばね定数は図7.5のモデルの4個の支持弾性体を7.4節で扱った図7.2のモデルのように3個の減衰要素とばね要素にモデル化したときのそれぞれの減衰係数、ばね定数である。また、目標とするモーダルパラメータは一次モードから七次モードまでの減衰固有振動数、モード減衰比および固有モードである。固有モードについては、7.4節と同様に点bのY方向、点cのZ方向、点dのZ方向、点e～点hのZ方向に対応する7成分を要素とした。なお、実験データであるため、精度を考慮して実部だけとした。したがって、目標値として減衰固有振動数7個、モード減衰比7個、固有モード成分49個（7成分×7モード）の計63個の情報で、13個のモデルパラメータを同定することになる。このように、目標値、同定するモデルパラメータを設定、選定し、表7.4の左から2列目の値を初期値として同定計算を行った。

同定されたモデルパラメータを表7.4の左から3列目に示す。また、図7.5のモデルの質量分布と形状により算出した $J_x$ 、 $y_G$ 、 $z_G$ の値を表7.4の左から4列目に示す。同定されたモデルパラメータがこれらの値にかなり近いことがわかる。また、同定されたモデルパラメータを用いて再構成した伝達関数と実測された伝達関数の比較を図7.7、図7.8、図7.9に示す。実線が実験結果で、破線が再構成結果である。両者を比較すると三つの測定点ともアクセラランスの大きさ、位相情報ともかなり近くなっており、 $J_x$ 、 $y_G$ 、 $z_G$ の値だけでなく、他のモデルパラメータの値も精度よく同定されていると考えられる。

表7.4 同定されたモデルパラメータ  
(実験モデルの場合)

Model parameter	Initial value	Identified value	Exact value
$J_x$ kg·m <sup>2</sup>	2.00	2.58	2.53
$y_G$ m	0.10	0.025	0.027
$z_G$ m	0.10	0.156	0.150
$c_{ay}$ N·s/m	10.0	47.8	—
$c_{az}$ N·s/m	10.0	37.7	—
$c_{bz}$ N·s/m	10.0	37.0	—
$k_{ay}$ N/m	$1.0 \times 10^6$	$6.51 \times 10^5$	—
$k_{az}$ N/m	$1.0 \times 10^6$	$1.71 \times 10^6$	—
$k_{bz}$ N/m	$1.0 \times 10^6$	$1.72 \times 10^6$	—
$\zeta_1^A$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.26 \times 10^{-3}$	—
$\zeta_2^A$	$1.0 \times 10^{-4}$	$3.38 \times 10^{-4}$	—
$\zeta_1^B$	$1.0 \times 10^{-4}$	$2.06 \times 10^{-3}$	—
$\zeta_2^B$	$1.0 \times 10^{-4}$	$5.58 \times 10^{-4}$	—

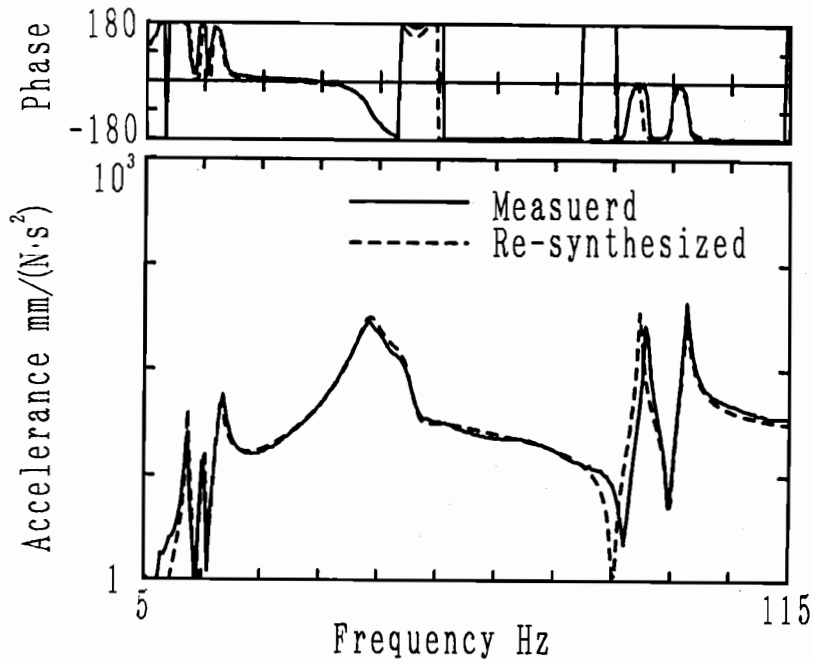


図7.7 測定された伝達関数と再構成した伝達関数の比較  
 (打撃：点cのZ方向，応答：点bのY方向)

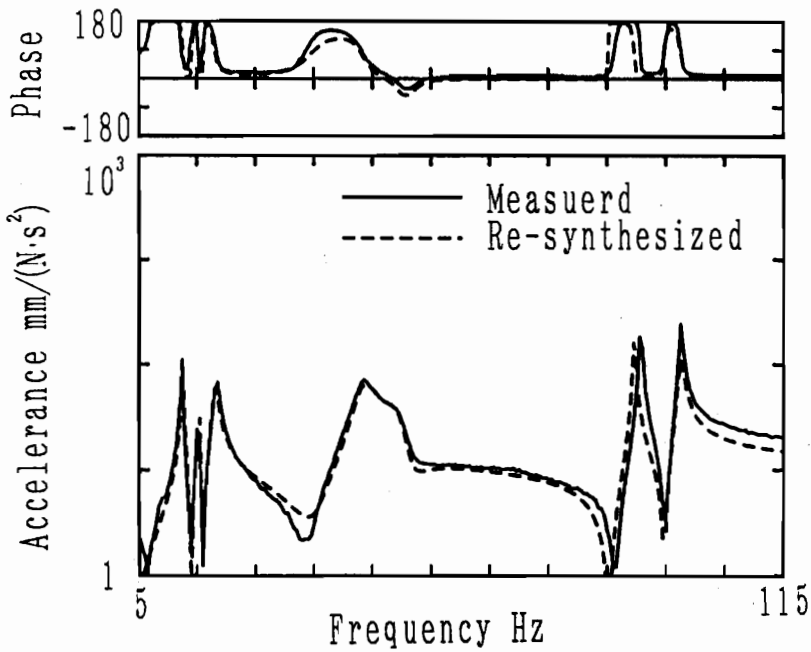


図7.8 測定された伝達関数と再構成した伝達関数の比較  
 (打撃：点cのZ方向，応答：点cのY方向)

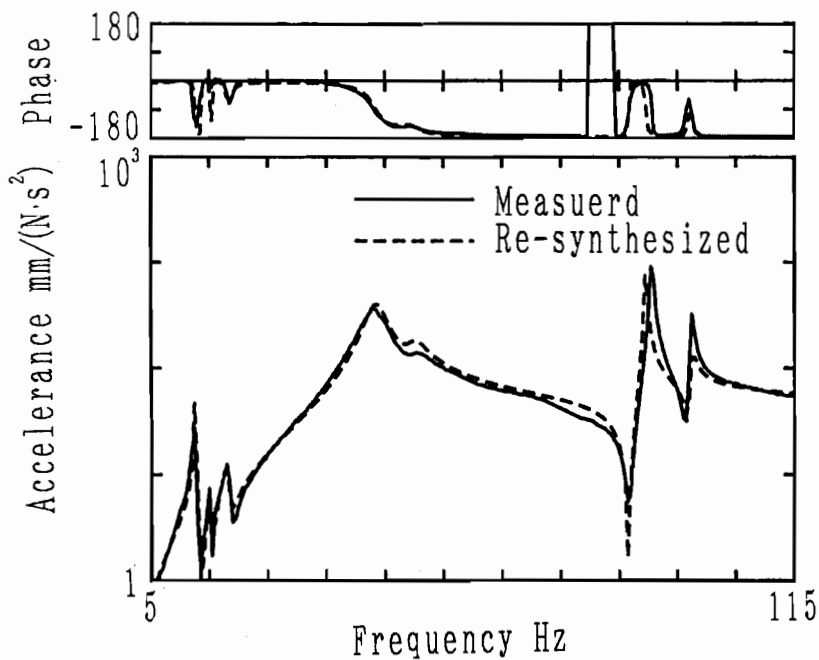


図7.9 測定された伝達関数と再構成した伝達関数の比較  
 (打撃：点cのZ方向，応答：点cのZ方向)



## 7.6 結 言

本章では、第4章から第6章までの剛体が弾性支持されたモデルに対する同定法を拡張し、剛体に柔軟構造物が付属した構造物において、柔軟構造物を剛体とみなした系全体の慣性モーメント、重心位置などの値を柔軟構造物が振動する状況で計測したデータから効率よく同定する方法を提示した。すなわち、柔軟構造物の弾性変形を考慮し、弾性変形を柔軟構造物単体の振動解析で得られたモード座標を用いて表すことにより低次元化した後、系全体の運動方程式を導出する。そして、同定においてもモード座標の感度を用いることにより、低次元のモデルで効率よく同定するものである。また、数値実験および実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を検証した。さらに、実用上問題となる同定計算の収束性について、数値実験をもとに検討した結果、次のことが明らかになった。

- (1) 第2章の同定法では、柔軟構造物上の測定点が少ない場合には、柔軟構造物を含んだ系全体の固有振動数が柔軟構造物単体の高次モードに近くなると収束性が悪くなる。しかし、系全体の固有振動数を柔軟構造物単体の低次モードの近くに設定できない場合も、柔軟構造物上の測定点数を多くする、あるいは測定位置を考慮することにより、収束性を向上させることができる。
- (2) 第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法で収束性が悪くなったデータからも少ない反復計算回数で同定できる。したがって、第3章で提案した同定法は、本章で扱ったモデルに対しても非常に有効である。

## 第8章 結 論

本論文では、機械構造物の動特性を的確に表現する物理モデルの構築、いわゆる系を同定することを目的として、系に感度解析を用いて、実験データから物理モデルの多数のモデルパラメータを同定する方法について検討したものである。特に、感度解析を用いた同定法を実用化する上で問題となる反復計算の収束性について検討し、振動工学の立場から考えた収束性を向上させる同定法を提案した。また、同定法の応用として、これまで検討がなされていなかった防振支持設計を想定したモデル、すなわち剛体が弾性体で支持されたモデルを取り上げ、実験データから剛体の慣性主軸、重心位置などの剛体的特性および防振ゴムなどの減衰特性を同定する方法を提示した。さらに、剛体に柔軟な構造物が付属したモデルを取り上げ、柔軟構造物が振動する状態で測定したデータから、柔軟構造物を有する剛体の系全体の慣性モーメント、重心位置などの値を効率よく同定する方法を提示した。さらに、多数のモデルパラメータを同時に同定するために、同定の目標とするモーダルパラメータの設定条件および同定対象とするモデルパラメータの選定条件について検討し、精度よい同定を行うために考慮すべき点を明らかにした。

以下、各章の内容をまとめる。

第1章は緒論であり、本研究の意義と目的を述べた。

第2章では、本論文で取り上げた同定法に関する基礎的研究を行った。すなわち、振動系の基本と考えられるばねと集中質量だけからなる非減衰振動系を取り上げ、既知とした固有振動数、固有モードと同じ振動特性を有する質量、ばね定数の値を同定するための方法を明らかにした。また、多数のモデルパラメータを同時に同定するために、目標とする固有振動数、固有モードの設定条件と同定対象とするモデルパラメータの選定条件について検討した。その結果、精度よい同定を行うためには、次のことを考慮すべきことが明らかになった。

(1) 同定しようとするモデルパラメータの数  $N_p$  は系の振動特性を支配する因子の数  $n(n+1)/2$  ( $n$  は系の自由度を表す) より少なくしなければならない。すなわち、 $N_p \leq n(n+1)/2$  とする。

(2) 目標値の数  $N_o$  は  $N_p$  より多く与える必要がある。同定しようとするモデル

パラメータの数が  $n(n+1)/2$  個の場合には、目標値の中にすべてのモード次数の固有値および各質量に関する固有モードの成分を少なくとも一つづつは含まなければならない。しかし、既知のモデルパラメータの数が多く、同定しようとするモデルパラメータの数が少ない場合には、この条件を緩めることができる。

(3)  $N_o > N_p$  の場合は最良近似の意味で同定可能、 $N_o = N_p$  の場合には目標値の正確な同定が可能となる。しかし、目標値が現実的な値から大きく離れている場合には、同定できない場合や同定できても同定された値が物理的に意味のないものになる可能性がある。

(4) 大自由度の振動系を小自由度の振動系に縮小する場合などのように、あるモーダルパラメータを重要視する場合には、目標とするモーダルパラメータの数とモデルパラメータの数を等しくする。そうすれば、完全に目標とする振動特性を有する系を構築できる。しかし、実験で得られたモーダルパラメータの情報から設計変数である質量、ばね定数などの値を推定しようとする場合には、実験で得られた情報を目標値になるべく多く採用して同定したほうがよい。

第3章では、反復計算の収束性を向上させる同定法を提案した。同定法の数学的手法は第2章と同様であるが、振動工学の立場から収束性を向上させる方法について検討したものである。その中で、第2章の同定法では、同定の評価に固有モードの個々の成分を用いることが、収束性を悪くする要因の1つであることを示した。また、収束性を向上させるためには、目標とする固有モードベクトルと力学モデルの固有値解析で得られる固有モードベクトルの相違を、各モード次数ごとに両固有モードベクトルを同じ座標系で表したときのベクトルの方向の違いで評価することが有効であることを示した。そして、ベクトルの方向の違い、すなわち両ベクトルのなす角により一義的に定まる量を評価関数に用いて同定する方法を提案した。なお、本章で同定の評価に用いた固有モードベクトルの方向の相違を評価する量の特長は、

- (1) 目標とする固有モードと力学モデルの固有モードとの相違を評価する場合の曖昧さがなくなるため、固有モードの評価が一義的に決定できる。
- (2) 評価量が0から1の範囲の数値となるため、モード次数間の数値のばらつきが小さくなる。

(3) モデルパラメータの変化に対して、モデルパラメータの真値を頂点とする上に凸な2次関数的に振舞う目標値を設定できるため、個々の目標値に対する収束安定性が向上する。

(4) モデルパラメータ間の目標値に対する相関が小さくなるため、モデルパラメータの変更率を算出するときの数値計算の安定性につながる。

であり、同定計算における収束の不安定性を抑制する効果がある。

また、数値実験を行い、提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束速度、収束安定性が大幅に向上することを確認した。

第4章では、同定法を機械の防振支持設計に適用することを想定した。そして、剛体の慣性モーメント、重心位置などの剛体的特性を実験データから同定する方法を提示した。その中で、剛体の重心位置を同定するために、重心位置の座標を空間に固定した座標系からの偏差のパラメータを用いて表し、重心位置を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示した。また、実験では回転角変位を直接測定することが困難であるため、通常の変位センサを用いて得られる並進変位データを同定計算に用いるための方法を明らかにした。そして、数値実験を行い、同定法の妥当性を検証した。また、実測データによる同定において、目標とする固有振動数、固有モードと同定されたモデルパラメータの関係を考察した。その結果、精度よい同定を行うためには、目標値として一次モードから六次モードまでのすべての固有振動数、固有モードを採用するか、少なくとも一次モードから六次モードまでの固有振動数は採用すべきである。採用しない場合には、同定されたモデルパラメータに誤差の大きなものが生じる可能性が高いことが明らかになった。

また、本章で扱ったモデルにおいても、第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法に比べて収束性が大幅に向上し、収束性が同定しようとするモデルパラメータの初期値の影響を受けにくいことを確認した。

第5章では、第4章では同定できなかった剛体の慣性主軸方向および主慣性モーメントの値を実験データから同定する方法を提示した。その中で、剛体の慣性主軸方向を同定するために、空間に固定した座標系の各座標軸方向と慣性主軸方向との角度のずれを表すパラメータを用いて慣性主軸方向を表し、慣性主軸方向を定めるパラメータを陽な形で表した運動方程式を提示した。なお、

角度のずれを表すパラメータとしてオイラー角を用いた。そして、実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を検証した。また、本章で対象とした慣性主軸方向、主慣性モーメントの値を同定する場合の初期値の設定について検討した結果、次のことが明らかになった。

- (1) オイラー角の初期値が精度よく設定できても、初期値として設定した主慣性モーメント  $J_{\xi}$ 、 $J_{\eta}$ 、 $J_{\zeta}$  の相対的な大きさの順序が実構造物の  $J_{\xi}$ 、 $J_{\eta}$ 、 $J_{\zeta}$  の大きさの順序と異なっている場合には、収束性が悪くなる場合がある。
- (2) 収束性を向上させるためには、あらかじめ実構造物を検討し、対応する慣性主軸方向と主慣性モーメントの相対的な大きさの順序を求め、初期値に反映させる必要がある。

また、同定法を防振支持設計の特性改善に適用し、設計の効率化に有効であることを確認した。

第6章では、防振ゴムなどの減衰特性を同定するために、減衰振動系を取り上げ、その同定法を提示した。そして、防振ゴムで支持された剛体系モデルに対して、実験データから防振ゴムの減衰係数、ばね定数が同定できることを確認した。なお、同定された減衰係数などのパラメータの値を評価する方法として、同定されたモデルパラメータを用いて伝達関数を再構成し、実測した伝達関数と比較することにより同定法の妥当性を検討した。また、同定の目標とする減衰固有振動数、モード減衰比、複素固有モードの組み合わせを変えた同定計算結果をもとに、減衰係数などのパラメータが同定可能となる目標値の設定条件について検討した。その結果、少なくともすべてのモード次数の減衰固有振動数、モード減衰比を目標値の中に含まなければならないことが明らかになった。

第7章では、第4章から第6章までの剛体が弾性支持されたモデルに対する同定法を拡張し、剛体に柔軟構造物が付属した構造物において、柔軟構造物を剛体とみなした系全体の慣性モーメント、重心位置などの値を柔軟構造物が振動する状況で計測したデータから効率よく同定する方法を提示した。すなわち、柔軟構造物の弾性変形を考慮し、弾性変形を柔軟構造物単体の振動解析で得られたモード座標を用いて表すことにより低次元化した後、系全体の運動方程式を導出する。そして、同定においてもモード座標の感度を用いることにより、

低次元のモデルで効率よく同定するものである。また、数値実験および実測データによる同定を行い、同定法の妥当性を検証した。さらに、実用上問題となる同定計算の収束性について、数値実験をもとに検討した結果、次のことが明らかになった。

(1) 第2章の同定法では、柔軟構造物上の測定点が少ない場合には、柔軟構造物を含んだ系全体の固有振動数が柔軟構造物単体の高次モードに近くなると収束性が悪くなる。しかし、系全体の固有振動数を柔軟構造物単体の低次モードの近くに設定できない場合も、柔軟構造物上の測定点数を多くする、あるいは測定位置を考慮することにより、収束性を向上させることができる。

(2) 第3章で提案した同定法を用いれば、第2章の同定法で収束性が悪くなったデータからも少ない反復計算回数で同定できる。したがって、第3章で提案した同定法は、本章で扱ったモデルに対しても非常に有効である。

以上述べてきたように、本論文では、ばね・質量系モデル、弾性体で支持された剛体系モデル、剛体に柔軟構造物が付属した構造物が弾性支持されたモデルの多数のモデルパラメータを同定するための具体的方法を示した。そして、精度よい同定を行うために考慮すべき点を明らかにした。また、実用上問題となる反復計算の収束性を向上させる同定法を提案し、本論文で取り上げたモデルについてはこの同定法が非常に有効であることを確認した。

## 発 表 論 文

本論文は下記の発表論文をまとめたものである。

- (1) 藤川 猛, 新田 勝, 沖田耕三, 鞍谷文保, ”感度解析を用いた振動システムの同定(第1報, 解析方法の説明と基礎的検討)”, 日本機械学会論文集(C編), 52巻476号, (1986), 1224.
- (2) 鞍谷文保, 藤川 猛, 沖田耕三, ”感度解析を用いた振動システムの同定(第2報, ばねで支持された剛体系への適用)”, 日本機械学会論文集(C編), 53巻487号, (1987), 542.
- (3) 鞍谷文保, 藤川 猛, 沖田耕三, ”感度解析を用いた振動システムの同定(第3報, ばねで支持された剛体系への適用 その2)”, 日本機械学会論文集(C編), 54巻506号, (1988), 2422.
- (4) 鞍谷文保, 藤川 猛, 沖田耕三, ”感度解析を用いた振動システムの同定(第4報, 減衰特性を有する弾性体で支持された剛体系への適用)”, 日本機械学会論文集(C編), 55巻512号, (1989), 840.
- (5) 鞍谷文保, 岩壺卓三, 沖田耕三, ”感度解析を用いた柔軟付属物を有する剛体のパラメータ同定”, 日本機械学会論文集(C編), 56巻528号, (1990), 2092.
- (6) 鞍谷文保, 岩壺卓三, 沖田耕三, ”感度解析を用いた振動系のパラメータ同定(収束性の改善に関する検討)”, 日本機械学会論文集(C編), 57巻533号, (1991), 掲載予定.

## 参 考 文 献

- (1)田中基八郎,三枝省三,振動モデルとシミュレーション,(1984),応用技術出版.
- (2)長松昭男,"モード解析",(1985),培風館.
- (3)R.H.キヤラガー, O.C.ツイエンキーヴァッツ(川井忠彦,戸川隼人訳),最適構造設計,(1977),培風館.
- (4)日本機械学会編,振動工学におけるコンピュータアナリシス,(1987),コロナ社.
- (5)日本機械学会編,モード解析の基礎と応用,(1986),丸善.
- (6)大久保信行,機械のモーダルアナリシス,(1982),中央大学出版部.
- (7)加川幸雄,石川正臣,モーダル解析入門,(1987),オーム社.
- (8)J.Tlusty and T.Moriwaki,"Computational Identification of Dynamic Structural Models",CIRP Ann.,Vol.25,No.2,(1976),497.
- (9)大熊政明,長松昭男,"特性行列の実験的決定による系の同定(第1報,方法の提案と基礎的検討)",日本機械学会論文集(C編),51巻464号,(1985),719.
- (10)岡田養二,W.D.Pilkey,永井文秀,"実験データによる部分構造パラメータの同定",日本機械学会論文集(C編),51巻471号,(1985),3051.
- (11)大熊政明,長松昭男,"特性行列の実験的決定による系の同定(第2報,誤差を含むデータに対する同定法の提案)",日本機械学会論文集(C編),52巻478号,(1986),1742.
- (12)大熊政明,長松昭男,"特性行列の実験的決定による系の同定(第4報,計算時間を改善した方法の提案)",日本機械学会論文集(C編),53巻493号,(1987),1913.
- (13)T.Butsuen, M.Ookuma and A.Nagamatus,"Application of Direct System Identification Method for Engine Rigid Body Mount System",SAM Tech. Paper,850551(1986).
- (14)P.Conti and J.Bretl,"Mount Stiffnesses and Inertia Properties from Modal Test Data",Trans. ASME,J. Vib. and Acous.,Vol.111,No.2,(1989),134.
- (15)大久保信行,古川貴康,"実験的手法による剛体モードの決定(モーダルアナリシスの基礎と応用に関する研究)",精密工学会誌,52巻5号,(1986),1258.



- (16) J.D.Collins, G.C.Hart, T.K.Hasselmann and B.Kennedy, "Statistical Identification of Structures", AIAA J., Vol.12, No.2, (1974), 185.
- (17) K.D.Blakely and W.B.Walton, "Selection of Measurement and Parameter Uncertainties for Finite Element Model Revision", Proc. 2nd. Int. Modal Analysis Conf., 12308, (1984), 82.
- (18) 岩壺卓三, 中川紀寿, 川井良次, 辻内伸好, 森岡雄二, "構造物のパラメータ同定におけるベイジアン手法の拡張", 日本機械学会論文集(C編), 52巻484号, (1986), 3154.
- (19) 萩原一郎, 永瀨和夫, "感度解析を用いた構造物の同定法の検討", 日本機械学会論文集(C編), 54巻505号, (1988), 2092.
- (20) 萩原一郎, 荒井 昭, 永瀨和夫, "感度解析を用いた構造物の同定法の検討(第2報, 周波数応答特性の同定)", 日本機械学会論文集(C編), 54巻505号, (1988), 2101.
- (21) U.Vandeurzen, J.Leuriden and Y.Doucet, "Structure Monitoring Using a Diagnosis Technique Based on Combined Use of FEA and Test", Proc. 5th Int. Modal Analysis Conf., (1987), 1338.
- (22) H.Zeichska, O.Storrer, J.Leuriden and U.Vandeurzen, "Calculation of Modal Parameter Sensitivities Based on a Finite Element Proportionality Assumption", Proc. 6th Int. Modal Analysis Conf., (1988), 1082.
- (23) J.C.Wei, Q.Zhang, R.J.Allemang and M.L.Wei, "Correction of Finite Model via Selected Physical Parameters", Proc. 7th Int. Modal Analysis Conf., (1989), 1231.
- (24) 山川 宏, 一文字正幸, 大橋 淳, 浜田 薫, "構造物の動的応答における最適設計(第2報, 最適設計方法II-モーダルアナリシス法と傾斜を用いた最適化手法を併用した最適設計方法-)", 日本機械学会論文集(C編), 48巻435号, (1982), 1750.
- (25) 中桐 滋, 鈴木敬子, "振動固有値・固有ベクトルの有限要素による不確定シフト・シンセシス", 日本機械学会論文集(C編), 54巻499号, (1988), 523.

- (26)中桐 滋,高畑秀行,"コンプライアンス伝達関数変更の有限要素法によるシミュレーション",日本機械学会論文集(C編),54巻507号,(1988),2530.
- (27)大久保信行,中島睦夫,"センシティブィティを用いた機械構造物の動特性改善に関する研究",精密工学会誌,52巻7号,(1986),1258.
- (28)大熊政明,南平真樹,朴 陽柱,長松昭男,"動特性を考慮した構造物の最適化方法(第1報,疑似最小二乗法と部分構造合成法の導入)",日本機械学会論文集(C編),55巻504号,(1989),1753.
- (29)岩原光男,長松昭男,"動特性を考慮した構造物の最適化方法(第2報,疑似最小二乗法と部分構造合成法の導入)"日本機械学会講演論文集(C編),56巻523号,(1990),612.
- (30)Q.Zhang, W.Wang, R.J.Allemang and D.L.Brown,"Prediction of Mass Modification for Desired Natural Frequencies",Proc. 6th Int. Modal Analysis Conf.,(1988),1026.
- (31)大熊政明,長松昭男,"特性行列の実験的決定による系の同定(第7報,実用方法の提案)",日本機械学会論文集(C編),54巻507号,1988,2557.
- (32)谷口 修編,振動工学ハンドブック,(1976),811,養賢堂.
- (33)防振ゴム研究会編,防振ゴム,(1975),90,日本鉄道車両工業会.
- (34)木田 隆,山口 功,岡本 修,狼 嘉彰,市川信一郎,田中俊輔,日本航空宇宙学会誌,35巻407号,(1987),569.
- (35)坂和愛幸,松野文俊,"フレキシブル・アームのモデリングと制御",計測と制御,25巻1号,(1986),64.
- (36)倉部 誠,"磁気ディスク装置の開発におけるモーダル解析の適用",応用機械工学,27巻5号,(1986),66.
- (37)井上喜雄,藤川 猛,今西悦二郎,阿部 亨,"減衰振動系における感度解析と設計変更後の動特性の予測",日本機械学会論文集(C編),50巻452号,(1984),4.
- (38)中川 徹,小柳義夫,最小二乗法による実験データ解析,(1987),99,東京大学出版会.
- (39)R.J.Allemang,"Investigation of Some Multiple Input/Output Frequency Response Function Experimental Modal Analysis Techniques",Ph.D dissertation,Univ. of Cincinnati,(1980).

- (40) R. ツルミユール(瀬川富士, 高市成方訳), マトリックスの理論と応用, (1978), 24, フレイン図書出版.
- (41) 文献(38)に同じ, 124.
- (42) 文献(32)に同じ, 821.
- (43) ばね技術研究会編, ばねの設計(第2版), (1978), 53, 丸善.
- (44) 中川憲治, 工科のための一般力学, (1987), 117, 森北出版.
- (45) 文献(33)に同じ, 55.
- (46) 文献(1)に同じ, 159.
- (47) 文献(40)に同じ, 39.
- (48) 狼 嘉彰, 藤井裕矩, "柔軟衛星のモデリング", 日本航空宇宙学会誌, 32巻364号, (1984), 263.
- (49) P.C. Hughes, "Modal Identities for Elastic Bodies with Application to Vehicle Dynamics and Control", Trans. ASME, J. Applied Mechanics, Vol.47, No.1, (1980), 177.
- (50) 上羽正純, 中川一夫, "多点接続する柔軟付属物をもつ衛星ダイナミックス", 日本航空宇宙学会誌, 35巻404号, (1987), 417.

## 謝 辞

本研究の遂行ならびに本論文をまとめるにあたり、懇切なる御指導と御鞭撻を賜りました神戸大学工学部岩壺卓三教授に深い敬意と感謝の意を表します。

また、本論文をまとめるにあたり、有益な御討議と御助言を賜りました神戸大学工学部森脇俊道教授ならびに肥爪彰夫教授に深く謝意を表します。

さらに、本研究を始めるきっかけを与えていただき、適切なる御指導と御助言を賜りました芦屋大学藤川猛教授に心から感謝申し上げます。

なお、本研究を行う機会を与えていただき、深い御理解と御助言を賜りました兵庫県立工業技術センター角戸正夫所長、同センター機械金属工業指導所沖田耕三所長ならびに兵庫県立工業技術センターの関係各位に深く感謝いたします。特に、沖田所長には終始変わらぬ御指導と御激励を賜りました。沖田所長の支援がなくてはとうていこの研究は実現しなかったことと思われま

す。また、本研究の遂行にあたり、深い御支援と御協力を賜りました(株)神戸製鋼所機械研究所阿部亨所長に心から感謝申し上げます。

最後に、振動工学の研究に進むきっかけを与えていただいた福井大学工学部平松力教授（現大同工業大学）に心から御礼申し上げます。