SOME ERGODIC THEOREMS AND ITS APPLICATIONS TO LIMIT THEOREMS FOR ADDITIVE FUNCTIONALS OF COMPLEX BROWNIAN MOTION

Yamazaki, Youichi

(Degree)
博士 (理学)
(Date of Degree)
1993-03-17
(Date of Publication)
2015-03-16
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙1711
(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3070676
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001711

氏名・(本籍)	山崎洋一（やまざき よういち） (京都府)
博士の専攻分野の名称	博 士 (理学)
学位記番号	博ろ第31号
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学位授与の日付	平成5年3月17日
学位論文題目	SOME ERGODIC THEOREMS AND ITS APPLICATIONS TO LIMIT THEOREMS FOR ADDITIVE FUNCTIONALS OF COMPLEX BROWNIAN MOTION (いくつかのエルゴード定理とその複素ブラウン運動の加法的汎関数の極限定理への応用)
審査委員	主査 教授 西尾 眞喜子 教授 相澤 貞一　教授 樋口 保成 教授 細川 藤次

論文内容の要旨

第1章 序

z_t を原点から出発する複素ブラウン運動とする。この additive functional(a.f.)の極限定理については、滞在時間に関する Kallianpur-Robbins の結果（1953）や回転数に関する Spitzer の結果（1958）などがあるが、これらの古典的結果は Kasahara-Kotani（1979）によって確率過程の収束の立場から一般化され、これらの極限定理の成り立つ事情が根本的に解明された。

一方 Pitman と Yor は、いくつかの点のまわりの回転数を同時に考える方向に Spitzer の結果を拡張した（1984－1986)。しかしこのような拡張についても Kasahara-Kotani の方法は有効であり、それにより Pitman-Yor の結果を確率過程の収束として理解することができ、極限定理の構造も明確になる。

そこでこの論文では、Kasahara-Kotani の方法によりこれらの極限定理の背後にエルゴード型の定理があることを明らかにした上で、必要なエルゴード定理をできるだけ一般的な条件の下で証明し、またそれを z_t の a.f.の極限定理に応用して、回転数型・滞在時間型などさまざまな a.f.の極限定理を得た。特に Kasahara-Kotani、Messulam-Yor、Pitman-Yor 等の結果をすべて従来より広いクラスの関数（非有界関数）に拡張した。

第2章 複素ブラウン運動の「回転数型」additive functional のあるクラスに関係した極限定理について

Mをm次元コンパクトC^∞-リーマン多様体、Θ_tをM上のブラウン運動、X_tをΘ_tと独立な$\mathbf{R}^d$－値拡散過程で確率微分方程式$dX_t=\sigma(X_t)dB_t+b(X_t)dt$で定義されたもの（ただし$\sigma(x),b(x)$は有界かつ滑らか、$\sigma(x)$は一様非退化、$B_t$は$d$次元ブラウン運動)、$X_0=0$、$\Theta_0=\theta_0$（$\theta_0\in$M）とする。

このとき$\int_M f(\theta)d\theta$をみたす関数$f\in L^r(M)$に対し、次のような形のエルゴード定理：

$$E_{(0,\theta_0)}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t |X_s|^\alpha f(\Theta_{\lambda s})\,ds\right|\right]\longrightarrow 0 \qquad (\lambda\to\infty)$$

が成り立つことを証明した。ただし$1\le r\le\infty$、$\alpha>-d$かつ$\alpha>m/r-2$とする。

次にこのエルゴード定理を、原点から出発する複素ブラウン運動z_tに関する

$$A^\lambda_{ij}(t)=\frac{1}{\lambda N_{ij}(\lambda)}\int_0^{e^{2\lambda t}-1}\frac{f_{ij}(z_s)}{z_s-a_i}\,dz_s \qquad (i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n')$$

という型のa.f.の研究に応用した。ここで$a_1,\cdots,a_n$は$\mathbf{C}\setminus\{0\}$上の異なる点である。$f_{ij}\equiv 1$の場合がa_iのまわりの回転数にあたる。ここではf_{ij}として非有界な関数まで含めるため、「点a_iでregularly varying」というクラスを定義したが、これは大雑把に言って、a_iの近傍での漸近挙動が$|x|^{p_i}c_i(\theta)$ ($p_i>-1/2$, $c_i(\theta)\in L^2(0,2\pi)$) という形になる関数である（このアイデアはWatanabe (1986) による)。そして各f_{ij}が$a_1,\cdots,a_n$および∞で「regularly varying」であるとき、上記の型のa.f.の確率過程としての有限次元分布が、$\lambda\to\infty$のとき、どのような確率過程に同時収束するかを明らかにした：

n個の点のまわりの回転数を同時に考えた場合、極限過程として得られるn個の複素ブラウン運動は、$n+2$個の独立な一次元ブラウン運動を組み合わせて作られる特殊な系をなす。一般の「回転数型」a.f.の同時極限は、この複素ブラウン運動の系による確率積分と、それと独立なGaussian random measureによる積分の和になる。

この結果はもちろんPitman-Yor (1984-1986)（およびその改良（1989））の拡張にもなっている。

また極限過程の構造についても、Watanabeの分析（1986）をもとに詳しく述べた。

第3章　複素ブラウン運動のadditive functionalに対するいくつかの極限定理に関連したエルゴード定理について

M、X_t、Θ_t等は第2章と同様とする。このとき、ほとんどすべての$x\in\mathbf{R}^d$に対して$\int_M g(x,\theta)d\theta=0$をみたす関数$g\in L^r(\mathbf{R}^d\times$M）がさらに$\|g(x,\cdot)\|_{r(M)}e^{-\beta x}\in L^p(\mathbf{R}^d)$をみたすならば、次のような形のエルゴード定理：

$$\lambda^{d/2r} E_{(0,\theta_0)}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t g(X_{\lambda s},\Theta_{\lambda s})\,ds\right|\right]\longrightarrow 0 \qquad (\lambda\to\infty)$$

が成り立つことを証明した。ただし、$1\leq r<\infty$、$r>\max(d/2, m/2)$、$\beta\geq 0$、$r\leq p\leq\infty$ かつ $p>d/(2-m/r)$ とする。

さらにこれを応用して、複素ブラウン運動のa.f.に関するいくつかの極限定理を得た。すなわち、z_t を原点から出発する複素ブラウン運動、$\xi(t)$を1次元ブラウン運動、$l(t,0)$をξの0における local time、$\mu(t)=\max_{0\leq s\leq t}\xi(s)$、$m(dz)$ をルベーグ測度とするとき、次の定理を証明した。

定理1　$f: \mathbf{C}\mapsto\mathbf{C}$が、$f\in L^1(\mathbf{C})\cap L^p(\mathbf{C})$（ただし$1<p\leq\infty$）をみたすとき

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{e^{2\lambda t}-1} f(z(s))\,ds\longrightarrow 2\,l(\mu^{-1}(t),\xi)\,\overline{f} \qquad (\lambda\to\infty)$$

が成り立つ。ここで$\overline{f}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}} f(z)\,m(dz)$ である。──

定理2　$f_1,\cdots,f_n\in L^2(\mathbf{C})\cap L^p(\mathbf{C})$（ただし$2<p\leq\infty$）に対し、

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{e^{2\lambda t}-1} f_i(z(s))\,dz(s)\right\}_{i=1,\cdots,n}\longrightarrow\left\{\int_0^{2l(\mu^{-1}(t),0)}\int_{\mathbf{C}} f_i(z)\,N(ds,dz)\right\}_{i=1,\cdots,n}$$

が成り立つ。ここでNはξと独立な$[0,\infty)\times\mathbf{C}$上の複素Gaussian random measureで、mean 0かつ variance measureが$dt\cdot m(dz)/2\pi$となるものである。──

定理1の結果はKasahara-Kotani (1979) による有名な結果を非有界な関数にまで自然に拡張したものになっており、Messulam-Yor (1982) の結果は定理2の系となる。

また定理1における$\overline{f}$が0である場合のKasahara-Kotaniの結果は定理2と密接に関連するが、これについても、同様にして関数の制限条件を改良した。

第4章　コンパクト多様体上のブラウン運動、およびOrnstein-Uhlenbeck過程に関する、あるエルゴード定理について

第2章において証明したエルゴード定理を第3章において証明したエルゴード定理と類似の形（非変数分離型関数）にまで拡張した。すなわち、ほとんどすべての$x\in\mathbf{R}^d$に対して$\int_M F(x,\theta)\,d\theta=0$および$F(x,\cdot)\in L^r(M)$をみたす関数$F: \mathbf{R}^d\times\mathrm{M}\mapsto\mathbf{R}^1$が、さらに$\|F(x,\cdot)\|_{r(M)}\leq\mathrm{const.}\,|x|^{\alpha}$をみたすならば、次のような形のエルゴード定理：

$$E_{(0,\theta_0)}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t F(X_s, \Theta_{\lambda s})\,ds\right|\right]\longrightarrow 0 \qquad (\lambda\to\infty)$$

が成り立つ。ただし、$1\leq r\leq\infty$、、$r>d/2$、$\alpha>-d$ かつ $\alpha>m/r-2$ とする。

さらに、これらのエルゴード定理が、コンパクト多様体上のブラウン運動のみならず、ユークリッド空間上の Ornstein-Uhlenbeck 過程に対しても成立することを示した。(これらのエルゴード定理の証明は、F を Θ_t の生成作用素の固有関数（の有限一次結合）で近似することで行われるのであるが、Θ_t が Ornstein-Uhlenbeck 過程である場合、エルミット多項式 φ_n に対して $E_0 \sup_{0\leq t\leq T} |\varphi_n(\Theta_t)| \to\infty\ (T\to\infty)$ であるため、収束の議論が微妙になる。)

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の目的はブラウン運動の加法的汎関数に関連した種々のエルゴード定理を証明し、それらを応用して、複素ブラウン運動の加法的汎関数の極限定理を研究することである。

これらの極限定理としては、従来、回転数、あるいは、滞在時間を取扱ったものが多い。申請者はこれ迄に得られている種々の極限定理を、確率過程の収束の立場より研究し、これらの諸定理の背後にエルゴード型の定理が存在することを明らかにした。その上で、出来るだけ一般的な条件の下で必要なエルゴード定理を証明して、それらを応用、複素ブラウン運動の回転数、滞在時間に対する極限定理を、より一般な条件の下で証明することに成功した。

本論文は次の4章より成る。

第1章は序文で、本研究の目的と背景について述べている。すなわち、滞在時間や回転数に関する古典理論は、笠原、小谷両氏により確率過程の収束の立場から一般化されたが、この方法の有効性と関連するエルゴード理論についての考察が記述されている。第2章では複素ブラウン運動の回転数型加法的汎関数に関連したエルゴード定理の証明と、その応用を記述している。すなわち、コンパクトなリーマン多様体上のブラウン運動と、それと独立な有限次元拡散過程に対し、或る種の変数分離型関数について、エルゴード定理を証明し、有限個の与えられた点のまわりの回転数を同時に考える加法的汎関数に応用した。それにより、Pitman-Yor 等により得られた回転数に関する一連の定理を拡張することが出来た。さらに極限過程の構造の解明も行っている。第3章では滞在時間型加法的汎関数に関連したエルゴード定理を証明し、その応用として、複素ブラウン運動の滞在時間型極限定理をより弱い条件の下で証明している。第4章では、第2章および第3章において証明された種々のエルゴード定理を非変数分離型関数に拡張している。更に、これらのエルゴード定理が、コンパクト多様体上のブラウン運動のみならず、ユークリッド空間上の Ornstein-Uhlenbeck 過程に対しても成立することを示した。

以上のように、本研究は、エルゴード定理およびその応用として、複素ブラウン運動についての研究を行ったもので、エルゴード理論および複素ブラウン運動に関する重要な知見を得、価値ある集積

をしたものと認める。

よって、学位申請者山崎洋一は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。