Viscosity solutions of nonlinear second order elliptic PDEs with constraints

石井, 克幸

(Degree)
博士（理学）

(Date of Degree)
1994-03-16

(Date of Publication)
2014-02-14

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
乙1806

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3097028

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001806

氏名・（本籍）　石井克幸（いしいかつゆき）　（広島県）

博士の専攻分野の名称　博　士（理　学）

学位記番号　博ろ第36号

学位授与の要件　学位規則第４条第２項該当

学位授与の日付　平成６年３月16日

学位論文題目　Viscosity solutions of nonlinear second order elliptic PDEs with constraints
（制約条件をもつ非線形２階楕円形偏微分方程式の粘性解）

審査委員　主査　教授　相澤貞一
教授　高野恭一　教授　中桐信一

論文内容の要旨

本論文では，次のような制限条件を持つ非線形２階退化楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題について考察した．

$$(1)\quad \begin{cases} \max\{F(x,\ u,\ Du,\ D^2u),\ u-Mu\}=0 & \text{in}\quad \Omega, \\ \max\{u-g,\ u-Mu\}=0 & \text{on}\quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \min\{\max\{F(x,\ u,\ Du,\ D^2u),\ u-Mu\},\ u-Nu\}=0 & \text{in}\quad \Omega, \\ \min\{\max\{u-g,\ u-Mu\},\ u-Nu\}=0 & \text{on}\quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで，$F(x,\ r,\ p,\ X)$ は２階退化楕円型偏微分作用素であり，M，Nは非局所作用素である．これらは確率微分方程式で記述される拡散過程に対する最適制御問題や微分ゲーム問題の Dynamic Programming approach において現れるが，ここでは解析的な立場で考察した．

上に挙げたような方程式は（たとえFが滑らかで一様楕円型であっても）一般には古典解は存在しないことが簡単な例によってわかる．よって方程式の解として弱解を考えることになるが，方程式にテスト関数をかけたものが部分積分できないので Schwarz の超関数の意味での弱解を考えることはできない．そこで本論文では粘性解（viscosity solution）を弱解として採用して議論した．

粘性解の概念は1983年にM. G. Crandall とP. L. Lions によって非線形１階偏微分方程式に対する弱解として導入された．次のような偏微分方程式

$$H(x,\ u,\ Du)=0 \qquad \text{in}\quad \Omega$$

に対する解の存在を考えるために次のような半線形楕円型偏微分方程式で近似する：

$$-\varepsilon\triangle u_\varepsilon+H(x,\ u_\varepsilon,\ Du_\varepsilon)=0 \quad \text{in}\quad \Omega.$$

$\varepsilon\rightarrow 0$ とするとき，この方程式の古典解 u_ε がある関数 u に Ω 内で広義一様収束すると仮定する．このとき関数 u は元の方程式をどのような意味で満たすのか？　ということから粘性解の概念が導かれた．同年，P. L. Lions によって非線形２階退化楕円型偏微分方程式に対してこの概念が拡張され

た．その後，R. Jensen，M. G. Crandall，H. Ishii，P. L. Lions 達の研究により粘性解の概念は微積分学における Taylor 展開と最大値原理を発展させた各点での弱解の概念であると理解できるようになり，非線形2階退化楕円型方程式に対する粘性解の存在と一意性についての一般論が急速に進展した．

それらの結果は方程式の0階の項に関して狭義単調増加である，という仮定のもとで得られていた．上の問題(1)，(2)に対してもこの仮定が成り立つように思われるが，非局所項Mu，Nuの影響によって，成り立たないことがわかる．また，これは対応する最適制御問題や微分ゲーム問題を考慮すると自然なことであるが，境界条件が explicit に与えられていない．この2点において状況が異なる．私はこれらの点に着目して研究した．

第1章では，Dirichlet 問題(1)について考察した．この問題はFが線形のとき，A. Bensoussnan，J. L. Lions によって仮似変分不等式（Quasi-variational inequality）の形で初めて考察された．それ以来，境界条件に関するある種の両立性条件のもとで，通常の Dirichlet 問題として研究が行われていた．1986年にB. Perthame が方程式の係数や Dirichlet data g についてかなり強い条件のもとで，(1)の粘性解の存在と一意性を議論している．私はB. Perthame のそれより弱い条件のもとで粘性解の比較定理と存在定理を得た．

証明の基本的な方針はM. G. Crandall，H. Ishii，P. L. Lions による議論に従うが，Mu という非局所項があるためそのまま適用できなかった．比較定理の証明では Mu を単独で扱うのではなく，u－Mu を1つの項として扱う．そうすると方程式は0階の項に関して狭義単調増加にはならないが，作用素Mの凹性と方程式の凸性を使うことで比較定理が証明できた．存在定理の証明も Mu という項が障害となって境界条件を満たす粘性劣解，及び粘性優解の存在を示すことが非常に難しい．そこで，Perron の方法で方程式に関する解を構成しておいて barrier 関数を用いた議論と比較定理によってその解が境界条件を満たすことを証明した．

第2章では，Dirichlet 問題(2)を考察した．これは問題(1)の両側から制限条件を課した場合への拡張とみなすこともできる．この場合についても境界条件に適当に両立性条件を仮定して，仮似変分不等式の立場から関数解析的な方法によって解の存在が証明されていた．しかし一意性は得られていなかった．似かよった方程式に関する結果から類推すると，解に$W^{2,p}(\Omega)$（$p>n$）の滑らかさがあれば，一意性が証明できると思われるが，非局所作用素を作用させた関数の滑らかさが元の関数のそれと同じとは言えないためにそれも得られていなかった．そこで粘性解の概念を用いることで解の比較定理と存在定理を証明することができた．

証明の方針は第1章と同じである．しかしながら，制限条件を与える非局所作用素MとNの性質が少し異なることと方程式の凸性がないために，多少の修正が必要である．そこで非局所項そのものの定義とH. Ishii, S. Koike の論文におけるアイデアを使って比較定理を証明した．解の存在は Perron の方法で方程式に関する解を構成し，それが境界条件を満たすことを barrier 関数と比較定理を使って証明した．ところが境界条件が第1章で扱ったものよりも複雑なため，より注意深く考察しなければならなかった．

第3章では，問題(1)に戻って方程式が境界$\partial\Omega$上で退化している場合を考える．第1章，第2章においては方程式が境界上で退化していないために，解は境界条件を古典的な意味で満たしていた．今度は境界上で方程式が退化しているため，そういう訳にはいかない．そこで境界条件を弱めて，viscosity の意味で考える．これは1989年にH. Ishii によって導入されたが，それは最適制御問題における Dynamic Programming Principle から自然に導かれるものである．制限条件がない場合に

ついては，Fが1階の場合はH. Ishii によって，2階の場合はM. A. Katsoulakis によって粘性解の比較定理，存在定理，連続性及び，表現定理が得られている．

比較定理の証明の方針は，第1章，第2章のそれと同じであるが，境界条件を viscosity の意味で考えているので粘性劣解，粘性優解の境界での大小関係をはっきりさせることはできない．よって各々にある種の半連続性を仮定せざるを得なかった．また，解の存在についてはFを Hamilton−Jacobi−Bellman 作用素に限って考察した．境界の近傍における解の挙動がわかれば，比較定理によって連続性が得られる．しかしながら，Muという項の非局所性によって方程式を直接用いて解析することができない．そこで逐次近似を用いることで連続関数の空間の中で解の存在を議論した．もちろんそれは一意解である．近似解の一意存在は上に挙げた結果を使って証明できる．また，解の表現定理も得られた．更に oblique 型の境界条件を課した場合も粘性解の比較定理と存在定理が得られた．

以上によって，(1)，(2)のような制限条件を持つ非線形2階退化楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題に対する粘性解の一意性や存在が解明された．

論文審査の結果の要旨

完全非線形退化2階楕円型偏微分方程式に関する解析的研究は、粘性解理論の深化に伴い、近年急速に進展している。この粘性解の概念は、1983年に M. G. Crandall − P. L. Lions によって非線形1階偏微分方程式に対する弱解として導入されたが、また同年P. L. Lions によって完全非線形退化2階楕円型方程式に対して拡張された。その後、R. Jensen，M. G. Crandall，H. Ishii，P. L. Lions などの研究によって、粘性解理論は、確率微分ゲームに現れる Hamilton−Jacobi−Bell-man − Isaacs 方程式などを含む完全非線形退化2階楕円形偏微分方程式の解析的研究に有力な手法として、今日では確立されている。

本学位論文では、この粘性解の方法を用いて、その状態が確率微分方程式で記述されるような最適衝撃制御問題、衝撃微分ゲーム問題と関連した、制約条件をもつ完全非線形退化2階楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題を研究して、解の存在、解の一意性、解の表現などについて、次のような新しい興味ある結果を与えている。

第1章では、片側から制約条件のある場合の問題を考察している。この問題は、方程式が線形の場合に仮似変分不等式の形で初めて研究されて以来、通常の Dirichlet 問題として研究が行われてきたが、1986年にB. Perthame が方程式の係数と Dirichlet データにかなり強い制限条件を仮定して粘性解の存在と一意性を証明している。本章では、B. Perthame のそれよりも弱い制限条件のもとで、非局所項を巧みに処理して、比較定理を証明することに成功した。粘性解の存在に関しては、まず Perron の方法で方程式に対する解を構成し、次に barrier 関数の議論と比較定理によってその解が境界条件を満たすことを証明している。

第2章では、両側から制約条件をもつ場合の問題を考察している。この問題は、従来、境界条件に両立性条件を仮定して仮似変分不等式の立場から関数解析的に解の存在が証明されていたが、解の一意性については未解決であった。本章では、粘性解の立場から、2つの非局所項の定義とH. Ishii，S. Koike の論文におけるアイデアを援用して、解の一意性定理を得ている。この一意性についての結果は、初めての結果であり、高く評価できる。解の存在については、第1章と同様に、Perron の方法で方程式に対する解を構成し、その解が境界条件を満たすことを barrier 関数と比較定理を用

いて証明している。

第3章では、第1章で扱った片側制約条件の問題に戻って、方程式が境界上で退化する場合を考察している。第1章、第2章では、方程式が境界上で退化していないために、解は境界条件を古典的に満たしていたが、本章では、解は境界条件をH. Ishii によって導入された粘性解の意味で満たしている。制約条件がない場合、この問題は、1階方程式に対してはH. Ishii によって、また2階方程式に対してはM. A. Katsoulakis によって、粘性解の比較定理、存在定理、連続性並びに表現定理が得られている。本章では、制約条件をもつ場合を考察して、比較定理を証明するとともに、解の存在については、Hamilton−Jacobi−Bellman 作用素の場合に、逐次近似を用いることによって連続関数の空間の中で粘性解の存在を証明することに成功している。また解の表現定理を得ている。この章で得られた諸結果は、新しい興味ある結果である。

以上のように、本学位論文は、完全非線形退化2階楕円型偏微分方程式に対して制約条件をもつDirichlet 問題を研究して、現在その研究が急速に進展している粘性解の方法によって、解の存在、一意性、連続性などについて新しい重要な結果を与えたものであり、価値ある集積であると認める。

よって、学位申請者　石井克幸　は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。