On High Dimensional Ribbon Knots

Yasuda, Tomoyuki

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
1994-04-22
(Date of Publication)
2015-03-25
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙1834
(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3097056
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001834

氏名・（本籍）　安田智之（やすだともゆき）　（大阪府）

博士の専攻分野の名称　博士（理学）

学位記番号　博ろ第37号

学位授与の要件　学位規則第4条第2項該当

学位授与の日付　平成6年4月22日

学位論文題目　ON HIGH DIMENSIONAL RIBBON KNOTS
（高次元リボン結び目について）

審査委員　主査　教授　山﨑　正
教授　角田　譲　教授　佐々木　武
教授　細川藤次

論文内容の要旨

本論文では高次元リボン結び目に関する考察の結果について述べた。ここでn次元結び目とはn次元球面の，(n＋2)次元球面または(n＋2)次元ユークリッド空間への埋め込みの像のことをいう。そのうち1次元結び目のことを古典的結び目，nが2以上の時のn次元結び目のことを高次元結び目と呼ぶ。一方，任意のnに対して，n次元結び目にはn次元リボン結び目と呼ばれる結び目がある。これはn次元球面とn次元輪環面を用いて構成されうるという特徴をもつ。高次元結び目であってしかもリボン結び目であるようなn次元結び目が，高次元リボン結び目である。

第1章で高次元リボン結び目の不変量である「リボン種数」を評価する方法について述べた。1969年に柳川は「n次元リボン結び目は，(n＋1)次元球体または，n次元球面と1次元球面との直積のrコの連結和から十分小さな(n＋1)次元球体1コを除いた多様体，をザイフェルト多様体としてもつ」ことを示した。その場合のrの最小数のことをそのn次元リボン結び目のリボン種数という。この概念は1985年に柳川が導入した。

1．2節ではリボン種数の評価式を与えるためにまず「(±1)分布表現」と呼ばれる，高次元リボン結び目の新しい表現を導入した。この表現には高次元リボン結び目のアレキサンダー多項式を容易に求めることができるという有用性がある。ここでアレキサンダー多項式とは古典的結び目一般や高次元リボン結び目に関してよく適用される不変量である。次にこの(±1)分布表現を用いて高次元リボン結び目の新しい不変量である「巾指数」を定義した。その上で1．3節では「リボン種数はアレキサンダー多項式の次数以上で，かつ巾指数以下の数である」ことを示した。更に1．4節では以上のことの応用として次のことを述べた。1985年に柳川は「リボン種数が1の高次元リボン結び目には，同じアレキサンダー多項式をもちながら同値でないような結び目は存在しない」ということを示した。しかしこの結果は，リボン種数が2以上の時は成立しないことをこの節で示した。即ち「2以上のリボン種数を任意に与える時，両方の結び目がそのリボン種数をもち，しかも同じアレキサンダー多項式をもちながら同値でないような2つの高次元リボン結び目が存在することを示した。

第２章では高次元リボン結び目の「リボン型」について述べた。ｎ次元球面と，「バンド」と呼ばれるｎ次元輪環面とをいくつか用いてｎ次元リボン結び目は構成されうる。この構成法でつくられたｎ次元リボン結び目のダイヤグラムをｎ次元リボン結び目の「リボン表現」と呼ぶが，それらをある種の図形的な同値関係でわったときにできる１つ１つのクラスがリボン型である。この章ではｎ次元リボン結び目を１つ与えた時，そのリボン型は一意にきまるかどうか，という問題を扱った。この問題に関しては与えられたｎ次元リボン結び目が（ｎ＋１）次元球体をザイフェルト多様体としてもつとき（このときｎ次元リボン結び目は「平凡」であるという），「バンド数が１のリボン型は唯一である」ことが高次元リボン結び目の場合については1977年に丸本によって，古典的リボン結び目の場合については1985年にシャーレマンによって各々示された。一方，平凡でない古典的リボン結び目の中には「バンド数が１のリボン型を２つもつものが存在する」ことが1982年に中西－中川によって示された。この章では平凡でない高次元リボン結び目の中にも「バンド数が１のリボン型を２つもつものが存在する」ことを示した。

そのことを示すために２．１節では１つの高次元リボン結び目に対する２つのリボン表現が与えられたときその２つが同じリボン型に属するかどうかを判定する方法を準備した。ｎ次元結び目一般の不変量である「結び目群」をバンド数が１のリボン表現について考えると，２つの生成元と１つの関係式をもつ群表示がえられる。このタイプの群表示の同値関係としてよく用いられるのが「ニールセン同値」であるが，２．２節では「２つのリボン表現が同じリボン型に属するなら，２つのリボン表現に対応する群表示同士はニールセン同値である」という事実を利用してこの節で構成された２つのリボン表現が異なるリボン型に属することを示した。この節で構成された２つのリボン表現は，「２橋結び目」と呼ばれる古典的結び目を，同一のものを２つ用意し，それらから互いに異なるところの線分を取り除いて，それぞれにスピニングという操作を施して構成された高次元リボン結び目である。

第３章では高次元リボン結び目のすべてのリボン表現をクラス分けし，それら１つ１つのクラス相互の間に入る集合の包含関係による順序関係について述べた。３．１節ではすべてのリボン表現をクラス分けする方法について述べた。その方法はリボン表現を，そのバンド数と，バンドのｎ次元球面への絡まり方の特徴でクラス分けするものである。３．２節では，バンド数が２のリボン表現を，その方法で４つのクラスに分け，それらの間に「集合の真の包含関係による全順序関係が入る」ことを示した。３．３節ではバンド数が一般の場合でもバンド数が２の３．２節の場合の拡張としてのリボン表現のクラス分けが行なえ，それらクラス相互の間には「集合の包含関係による半順序関係が入る」ことを示した。また1981年のゴードンの問題「任意のリボン同境は，１つの鞍点と１つの極小点だけをもつリボン同境の有限列に分解できるか」が高次元結び目の場合について否定的に解けるという結果が３．２節で示した結果の系として得られることも示した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

（ｎ＋２）次元ユークリッド空間または（ｎ＋２）次元球面内に埋蔵するｎ次元球面がｎ－結び目で、ｎ＝１の場合を古典的結び目と言い、ｎ≧２の場合を高次元結び目と言う。

古典的結び目に対してリボン結び目の概念を最初に導入したのはR. H. Foxで、この概念を高次元結び目に一般化したのは、柳川－矢島である。

この論文は、このリボンn－結び目についての研究である。

1969年、柳川はリボンn－結び目K^nの特性として、そのザイフェルト多様体が（n＋1）次元球体または、ある条件を満たす＃（$S^n \times S^1$$)_i - {}^0\triangle^{n+1}$になることを示した。

この（$S^n \times S^1$）の個数の最小数がリボン種数と呼ばれる不変量g（K^n）である。

論文提出者は第1章で、このg（K^n）の評価を与える問題に取り組んだ。

そのため（±1）－distribution presentation と呼ばれるリボンn－結び目K^nの新しい表現方法を導入した。

この表現方法からK^nのアレクサンダー多項式を計算する方法を開発すると共に、新しい不変量wid（K^n）を定義した。

そして、これらの不変量を使って、つぎの評価式

$$\deg \triangle_{K^n}(t) \leqq g(K^n) \leqq \mathrm{wid}(K^n)$$

が成立することを証明した。ここで、deg　$\triangle_{K^n}(t)$はKのアレクサンダー多項式の次数のことである。

第2章では、リボンn－結び目のリボン型について考察している。つまり、リボンn－結び目のリボン型は一意的に定まるかどうかという問題である。

この問題については、結び目が平凡な場合は一意的に定まることが知られているが、平凡でない場合については、n＝1の場合、中西－中川によって一意的には定まらないことが示されたが、n≧2の場合は未解決であった。

論文提出者は、n≧2の場合について、異なる2つのリボン型を持つ1－fusion のリボンn－結び目が無限に多くあることを証明することに成功し、n≧2の場合についても一意的には定まらないことを示した。

第3章では、リボン結び目がいくつかの平凡な結び目を band fusion することによって得られることに着目し、band fusion の個数と、もととなる平凡な結び目と band の絡まり方からリボン結び目の集合族を構成し、それらの集合族の間の関係について考察している。

一般には、それらの集合族の集合の間には、包含関係による半順序の関係があることを示し、特に band の個数が2個の場合については、それらの間の包含関係がすべて真部分集合の関係になっていることを証明した。

この結果により、Gordon の予想

「リボン同境は臨界点1個ずつのリボン同境の系列に分解できるか」

に対する否定的な解決を与えたことになる。

この論文の重要な要となる（±1）－distribution presentation は論文提出者によって初めて導入された概念であり、その独創性は高く評価される。

以上のように、本研究は高次元リボン結び目について研究したものであり、結び目理論について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。

よって、学位申請者　安田智之　は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。