



非線形制御系のパラメトリック絶対安定性に関する研究

和田, 光代

(Degree)

博士 (工学)

(Date of Degree)

1995-03-15

(Date of Publication)

2015-03-06

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

乙1913

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.11501/3105514>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2001913>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



神戸大学博士論文

非線形制御系のパラメトリック絶対安定性
に関する研究

1995年1月

和田光代

神戸大学博士論文

非線形制御系のパラメトリック絶対安定性
に関する研究

1995年1月

和田^{てる}光^よ代

序文

本論文は、パラメータを含む時不変線形部とセクタ条件を満たす任意の静的な非線形部からなる非線形制御系に対して、非線形要素、参照入力、そしてパラメータによる平衡状態の変化を考慮に入れたロバスト安定性についての研究成果をまとめたものである。

ロバスト安定性についての研究はこれまでも多くなされているが、そのほとんどにおいては、平衡状態の存在と一意性が前提とされている。ところが、非線形制御系の場合には、モデル構造や参照入力、パラメータなどの変化によって、平衡状態に変化が生じることが考えられる。それは、平衡状態、すなわち、動作点の移動や、平衡状態の個数の増加や減少、消滅である。そして、平衡状態の変化は、システムの動特性に影響を及ぼし得る。たとえば、平衡状態が移動すれば、システムの非線形性のために安定性が変化するかもしれない。また、システムが安定であるとは、そのシステムのただ1つの平衡状態が大域漸近安定であることを意味するのであるから、平衡状態が1つでなくなれば、システムは不安定となる。したがって、非線形制御系のロバスト安定性について議論する場合には、モデル構造やパラメータ、参照入力などの変化に伴う平衡状態の変化についての議論を同時に行なう必要がある。

そこで、本論文では、パラメータを含む線形部とセクタ条件を満たす任意の静的な非線形部のループからなる非線形制御系を対象とし、非線形部や参照入力とパラメータの変化に伴う平衡状態の変化を考慮に入れた安定性を考える。そして、このような安定性として、パラメトリック絶対安定性という概念を導入し、非線形制御系がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を与える。

本論文は7つの章と付録から成る。

まず、第1章では、本論文の目的と全体の構成について述べる。

第2章では、非線形制御系では、参照入力とパラメータによる平衡状態の変化が、システムの安定性に影響することを、線形部にパラメータを含む1入力1出力ルーリエ系を例に挙げて示す。そして、ルーリエ系に対して、パラメトリック絶対安定性の概念を導入する。

第3～5章では、ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を与える。そのうち、第3章では、1入力1出力ルーリエ系を対象として、線形部の伝達関数に対する条件であるパラメータを含むポポフ型の条件を導出する。そして、これを多入力多出力ルーリエ系へ拡張した結果を第4章で示す。また、線形部のパラメータ構造によっては、伝達関数を用いた条件よりも、状態空間における線形部の係数行列による線形行列不等式 (LMI) で表わした条件の方が判定が容易である場合もある。そこで、第5章では、多入力多出力ルーリエ系に対して、パラメトリック絶対安定条件を LMI によって与える。

第6章では、ルーリエ系を含むより一般的な非線形制御系に対して、パラメトリック絶対安定性の概念を拡張し、その十分条件を与える。

第3～6章のいずれの章においても、得られた条件が判定可能なものであることを、数値例で示す。

そして、第7章では、本論文の結論を述べる。

さらに、付録には、各章の結果の証明や、章中で必要となる新たな結果を示す。とくに、付録 A では、第3章で用いる多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条件について、新たに得られた結果をまとめ、第3章で与えるパラメトリック絶対安定条件の拡張可能性を示唆する。

目次

序文

第 1 章	緒論	1
第 2 章	ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性	5
2.1	緒言	5
2.2	平衡状態と安定性の変化	6
2.3	パラメトリック絶対安定性	8
2.4	結言	10
第 3 章	1 入力 1 出力ルーリエ系に対するパラメトリック絶対安定条件	11
3.1	緒言	11
3.2	平衡点の存在条件と存在領域	12
3.3	パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件	15
3.4	ポポフ軌跡を用いた数値例	18
3.5	結言	22
第 4 章	パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件の多入力多出力ルーリエ系への 拡張	23
4.1	緒言	23
4.2	多入力多出力ルーリエ系の平衡点解析	24
4.3	パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件	27
4.4	PIA によるポポフ型条件の判定例	29
4.5	結言	32

第 5 章	ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性のための線形行列不等式 (LMI) 条件	33
5.1	緒言	33
5.2	LMI による平衡点解析	34
5.3	パラメトリック絶対安定性のための LMI 条件	38
5.4	ポリトープ型線形部をもつルーリエ系	41
5.5	ブロック対角型非線形部をもつルーリエ系	45
5.6	結言	49
第 6 章	非線形制御系のパラメトリック絶対安定性	51
6.1	緒言	51
6.2	パラメトリック絶対安定性の定義	52
6.3	平衡点の存在条件と存在領域	55
6.4	パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件	60
6.5	コントローラがパラメータを含む場合	64
6.6	ポポフ軌跡を用いた数値例	67
6.7	結言	68
第 7 章	結論	71
付録 A	多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条件とその拡張	73
A.1	多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ条件	74
A.2	ポポフ条件の拡張	79
A.2.1	非線形関数全体がセクタ条件を満たす場合	80
A.2.2	対称部がセクタ条件を満たす場合	81
A.3	定理, 補題の証明	84
A.3.1	補題 A.1 の証明	84
A.3.2	定理 A.2, A.3 の証明のための補題	84
A.3.3	定理 A.2 の証明	84
A.3.4	定理 A.3 の証明	87

付録 B 第 4, 5, 6 章における平衡点解析のための補足	91
B.1 パラメータを含む代数方程式の解の存在条件	91
B.2 補題 4.1 の証明	93
B.3 6.3 節 (II) の場合の制御偏差	95
B.4 6.3 節 (6.23) 式の解の存在	96
参考文献	99
謝辞	

第1章

緒論

実システムを数式モデルで記述したとき、その数式モデルは完全に実際の対象を表わしていることはなく、近似的なものであるにすぎない。そのため、数式モデルに基づいて制御系を構成する際には、モデル化誤差に対応するなんらかの不確かさを加味した数式モデルをシステムの表現とし、記述しきれなかった現実の対象とのずれを許容することが考えられる。その不確かさの記述は、扱う対象、目的などにより、さまざまである。たとえば、数式モデルの構造自体の変動を考慮する表現や、数式モデルの構造は十分に対象を記述しているとしてモデルに含まれるパラメータの変動を考慮する表現などである。このようなシステムの表現は、モデル化誤差の記述に限らず、実システムそのものに変動する部分が存在する場合にも用いられる。

モデル構造やパラメータが変化し得るシステムでは、その変化がシステムの動特性へ及ぼす影響を考慮する必要がある。そのために、まず考慮すべきことは、注目している動作点、すなわち、システムの平衡状態の変化である。システムが非線形特性を有する場合には、平衡状態は、単に移動するだけでなく、その個数が2個、3個と増えたり、あるいは消滅したりする。システムが安定である、という場合には、システムのただ1つの平衡状態が大域漸近安定である、ということの意味するのであるから、平衡状態の個数の変化は、システムの安定性の変化なのである。そして、たとえ平衡状態がただ1つ存在していたとしても、平衡状態が移動すれば、非線形システムでは動特性も変化し得る。モデル構造やパラメータの変化そのものによって、システムの動特性は変化するが、このように、平衡状態の変化もシステムの安定性に影響を及ぼし得る。

パラメータを含むシステムに対して、パラメータ変動によるこのような平衡状態の変化を考慮に入れた安定性の概念は、パラメトリック安定性と呼ばれている [12, 28]。そして、これまでに、ロトカ・ボルテラ方程式で記述される生態系やサブシステムの結合からなる複合系などを対象に

研究がなされている [12].

本論文では、非線形制御系に対して、このような平衡状態の変化を考慮に入れた安定性を考える。非線形フィードバック系の最も基本的なものはルーリエ系である。それは、動的な線形時不変部と静的な非線形部のループから成る。そこで、本論文では、ルーリエ系をもとにした制御系として、不確かなパラメータを含む動的な線形時不変部と、セクタ条件を満たす静的な非線形部からなる非線形フィードバック制御系を対象とする。

ところで、従来からルーリエ系の安定解析においては、線形部は安定、あるいは原点極を1つ含み、非線形部はあるセクタ条件を満たす任意のものとして、システムの安定性を保証する絶対安定性という概念が考えられてきた [2]。本論文でも、パラメータを含む線形部は安定、あるいは原点極を1つ含み、非線形部は指定されたセクタ条件を満たす任意のものとする。そして、セクタ条件を満たす任意の非線形特性や、参照入力と線形部のパラメータの変化による平衡状態の変化を考慮に入れた安定性として、パラメトリック絶対安定性という概念を導入し、そのための十分条件を導出することを本論文の目的とする。

以下に本論文の構成を述べる。

第1章は緒論であり、本論文で取り上げた研究の目的と全体の構成を述べている。

第2章では、本論文の主題である非線形制御系に対するパラメトリック絶対安定性の概念の必要性和その定義を述べる [28, 32]。すなわち、非線形制御系では、参照入力とパラメータによる平衡状態の変化がシステムの安定性に影響を及ぼすことを、線形部にパラメータを含むルーリエ系を例に挙げて指摘する。そして、ルーリエ系に対してパラメトリック絶対安定性を定義する。

第3章では、1入力1出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を与える [32]。1入力1出力ルーリエ系では、平衡状態の存在性の議論は、パラメータを含むスカラー代数方程式の解の存在性の議論に置き換えられ、図的に解析することができる。また、1入力1出力系に対するポポフの安定条件も、ポポフ軌跡を用いて確かめることができる。そこで、第3章では、とくに、1入力1出力ルーリエ系を取りあげ、パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型の条件を導出する。そして、そのパラメータを含むポポフ型の条件を、ポポフ軌跡を用いて判定した例を示す。

第4章では、1入力1出力ルーリエ系に対する第3章の結果を多入力多出力ルーリエ系に拡張する [28, 29, 36, 38]。すなわち、付録Aで示す多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条

件に関する結果 [30, 31] を用いて、多入力多出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるためのポポフ型の十分条件を導く。得られた条件は、1入力1出力ルーリエ系に対する条件を含むものである。そして、そのパラメータを含むポポフ型の条件は、各周波数ごとに、パラメータを含む行列不等式の成立が要求されるものであり、それが多角形区間演算 (PIA)[21] を用いて判定可能であることを例で示す。

第5章では、多入力多出力ルーリエ系に対するパラメトリック絶対安定条件を線形行列不等式 (LMI) の形で与える [34, 37, 35]。第4章で示すポポフ型の条件はパラメータを含む線形部の伝達関数に対する条件であり、パラメータの現われ方によっては PIA による判定に適さない場合がある。一方、LMI を数値的に解く有効な数値計算法が開発され、さまざまな問題に適用されている [6, 20]。そこで、状態空間における LMI の形式でパラメトリック絶対安定条件を導出する。そして、ルーリエ系の線形部がポリトープ型の場合には、それらの LMI がパラメータを含まない有限個の LMI の成立で満たされることを示す。また、非線形部が互いに独立な複数のブロックに分けることのできる場合には、LMI 条件を緩めることが可能であることを示す。

第2~5章では、ルーリエ系に対してパラメトリック絶対安定性を考えているが、第6章では、それをより一般的な非線形制御系へ拡張する [33]。すなわち、パラメータを含む線形制御対象に静的な非線形要素を介して線形コントローラが配されているフィードバック制御系を対象とする。また、制御対象がサーボモータを要素として含んでいたり、PI コントローラが用いられるなど、フィードバックループ内に原点極が含まれる場合も多い。そこで、線形制御対象や線形コントローラに原点極が存在する場合も考える。そして、ルーリエ系を特殊な場合として含むこのような非線形制御系に対して、参照入力とパラメータの変化による平衡状態の変化を考慮に入れたパラメトリック絶対安定性の概念を拡張し、そのための十分条件を与える。ただし、第6章では、議論を簡単にするため、1入力1出力系を対象とし、第3章の拡張であるポポフ型の条件を導出しているが、多入力多出力系や LMI 条件の拡張も同様に可能である。

第7章では、本論文のまとめと結論を述べる。

さらに、章中で述べられない証明や、章中で必要とする新たな結果を、付録に記す。とくに、付録 A では、多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条件が適用できる非線形部のクラスについての新たな結果と、さらに広い非線形部のクラスに適用可能なポポフ型の安定条件を与える [30, 31]。この結果は、章中で扱うものよりも広いクラスの非線形部を含む非線形制御系に対して

も、パラメトリック絶対安定であるためのポポフ型の条件が導出可能となることを示唆する。

第2章

ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性

2.1 緒言

動的な線形時不変部と静的な非線形部から成るフィードバック系は、ルーリエ系と呼ばれる。その線形部が不確かなパラメータを含む場合の安定性については、これまでも考えられてきた [7, 19, 24, 25, 26]。そこでは、参照入力を零と仮定し、非線形部を零入力に対しては出力が零であるものとしている。したがって、線形部が公称系から変化しても平衡状態は常に原点であり、その前提のもとで議論されている。

一方、参照入力が零でないルーリエ系では、平衡状態は、もはや原点ではなく、線形部のパラメータと非線形部に依存したものとなる。しかも、パラメータの公称値に対して平衡状態がただ1つであったとしても、パラメータが変化すると、平衡状態は複数個存在するかもしれないし、あるいは、存在しないかもしれない。すなわち、システム全体の安定性が、線形部のパラメータの変化に直接影響されるだけでなく、パラメータの変化による平衡状態の変化にも影響され得る。したがって、参照入力とパラメータ変動による平衡状態の変化を考慮に入れた安定解析が必要である。

本章では、まず、ルーリエ系では、参照入力や線形部のパラメータが変わると、このような平衡状態の変化が生じ、そのためにシステムの安定性も変化し得ることを例示する。そして、線形部にパラメータを含み、非線形部があるセクタ条件を満たすルーリエ系に対して、参照入力とパラメータの変化による平衡状態の変化を考慮に入れた安定性として、パラメトリック絶対安定性という概念を定義する。

2.2 平衡状態と安定性の変化

ルーリエ系では、参照入力の変化やパラメータ変動によって平衡状態が変化し得る。この平衡状態の変化のために、システムの動特性が変化し、安定性も変化し得ることを例により示す。

つぎのルーリエ系を考えよう。

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(e), \quad e = r - y, \quad y = c(p)x \quad (2.1)$$

ここに、 r は参照入力で区間 $[0, 10]$ の値をとる定数であり、 A , b , c は、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3.5 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad c(p) = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

であるとする。ただし、 p は定数パラメータで、区間 $[-0.185, 2.05]$ の値をとり得るとする。また、 φ は次式で定義される連続な非線形関数である。

$$\varphi(e) = \begin{cases} 9e, & e \leq 1, \\ 12e - 3, & 1 < e \leq \frac{65}{64}, \\ 9e + \frac{3}{64}, & \frac{65}{64} < e \end{cases} \quad (2.3)$$

ここでは、簡単のため、 c にただ1つのパラメータが含まれる場合のみを考えている。

平衡状態は、

$$Ax + b\varphi[r - c(p)x] = 0 \quad (2.4)$$

の解 $x = x^e(r, p)$ として得られる。(2.2) 式を代入すると、 $x^e(r, p)$ は、

$$x^e(r, p) = \begin{bmatrix} 0.5\varphi[e^e(r, p)] & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.5)$$

と表わされる。ここに、 $e^e(r, p)$ は

$$e^e(r, p) = r - c(p)x^e(r, p) \quad (2.6)$$

であり、

$$r - e = 0.5p\varphi(e) \quad (2.7)$$

の解 $e = e^e(r, p)$ である。(2.5) 式から $x^e(r, p)$ は $e^e(r, p)$ によって一意に決まり、また、逆に(2.6) 式から $e^e(r, p)$ は $x^e(r, p)$ によって一意に決まる。

参照入力 r の値によって、3つの場合を考える。

(I) $r = 0$ の場合： パラメータ p の値によらず、原点 $x^e(0, p) = 0$ がただ1つの平衡状態である。この平衡状態に対応する制御偏差は、 $e^e(0, p) = 0$ である。 $e = e^e(0, p) = 0$ において、非線形関数 $\varphi(e)$ は、セクタ $[0, 588/65]$ に含まれる。このセクタの上界とポポフの安定条件 [2]

$$\operatorname{Re} \left[\frac{0.5p(1 + j\omega)}{(j\omega)^3 + 3.5(j\omega)^2 + 3.5(j\omega) + 1} + \frac{65}{588} \right] > 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}_+ \quad (2.8)$$

により、すべてのパラメータ $p \in [-0.185, 2.05]$ に対して、平衡状態 $x^e(0, p) = 0$ は大域漸近安定である。ただし、 $\bar{R}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ である。

(II) $r = 9.7$ の場合： $p = 2$ ならば、(2.3), (2.7) 式より $e^e(9.7, 2) = 0.97$ であり、この点において φ はセクタ $[0, 732/73]$ に含まれる。このとき、ポポフの安定条件により、平衡状態 $x^e(9.7, 2)$ は大域漸近安定である。

$p = 1.9$ ならば、 $e^e(9.7, 1.9) = 251/248$ となり、この点における φ の傾き $\kappa(p)$ は 12 である。平衡状態 $x^e(9.7, 1.9)$ の安定解析のために、 $x^e(9.7, p)$ のまわりでの線形化システム

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(p)\tilde{x} \quad (2.9)$$

を考える。ここに、 $\tilde{x} = x - x^e(9.7, p)$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(p) &= A - \kappa(p)bc(p) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1 + 0.5p\kappa(p)) & -3.5 & -3.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

である。 $\tilde{A}(1.9)$ は不安定行列であるから、 $x^e(9.7, 1.9)$ は不安定である。行列 $\tilde{A}(p)$ が不安定となったのは、 $p\kappa(p)$ の増加によるものである。しかし、 p は 2 から 1.9 へと減少しているため、パラメータ p の値の変化が直接 $p\kappa(p)$ を増加させたのではない。 p の値の変化によって $e^e(9.7, p)$ が $e^e(9.7, 2)$ から $e^e(9.7, 1.9)$ へ移動したために、その点における φ の傾き $\kappa(p)$ が増加したのが原因である。

この例は、非線形システムにおける安定解析では、パラメータ p の変化に伴う平衡状態 $x^e(9.7, p)$ の移動を考慮する必要性を示唆している。

(III) $r = 151/800$ の場合： $p \in (-0.18, 2.05]$ のときには、(2.7) 式はただ1つの解 $e^e(151/800, p)$ をもち、非線形関数 φ は、 $e^e(151/800, p)$ においてセクタ $[0, k(e^e(151/800, p))]$ に含まれる。た

だし,

$$k\left(e^e\left(\frac{151}{800}, p\right)\right) = \frac{4(1997 + 11025p)}{3(294 + 1625p)}$$

である. ポポフの安定条件により, 平衡状態 $x^e(151/800, p) = [0.5\varphi[e^e(151/800, p)] \ 0 \ 0]^T$ は大域漸近安定であることがいえる.

ところが, (2.7) 式は, $p = -0.18$ のときには2つの解, $p \in (-649/3600, -0.18)$ に対しては3つの解, また, $p = -649/3600$ のときには2つの解をそれぞれもつ. すなわち, $p \in [-649/3600, -0.18]$ に対して, (2.5) 式の平衡状態 $x^e(151/800, p)$ は, 一意ではなく, したがって, それらは大域漸近安定とはなりえない.

$p \in [-0.185, -649/3600)$ に対しては, (2.7) 式の解は, 再びただ1つとなり, それは大域漸近安定であることがいえる.

このように, 平衡状態の安定性は, パラメータの変化に伴う平衡状態の個数の変化によって左右され得る.

以上の例により, 参照入力やパラメータの変動を伴う非線形システムのロバスト安定解析には, 平衡状態の変化が無視できないことが分かる. このような例を動機として, 以下では, ルーリエ系に対するパラメトリック絶対安定性の概念を定義しよう.

2.3 パラメトリック絶対安定性

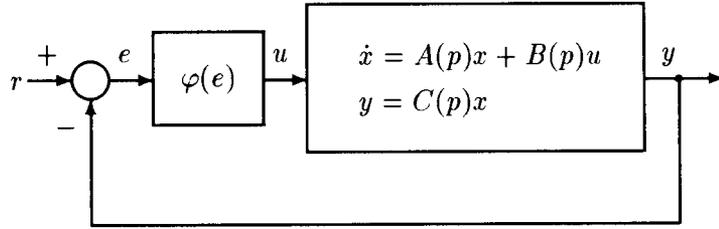
Fig. 2.1 で表わされるルーリエ系 S を考える. すなわち, 線形部は,

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)u, \quad y = C(p)x \quad (2.11)$$

で与えられ, 非線形部は,

$$u = \varphi(e), \quad e = r - y \quad (2.12)$$

で与えられるとする. ここに, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ は, それぞれ線形部の状態, 入力, 出力であり, $e \in \mathbb{R}^m$ は制御偏差である. $r \in \mathbb{R}^m$ は参照入力で, その値を単連結有界閉領域 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^m$ にとる定数ベクトルで, 公称値を 0 とする. p はパラメータで, その存在領域は単連結有界閉領域 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l$ とし, 公称値を p^* で表わす. また, $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ はパラメータ $p \in \mathcal{P}$ の連続関数を成分とする行列で, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, $A(p)$ は安定であるとする.

Fig. 2.1. Lur'e system S

非線形関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続で,

$$\begin{aligned} \{\varphi(e + \bar{e}) - \varphi(e)\}^T K^{-1}(e) \{\varphi(e + \bar{e}) - \varphi(e)\} &\leq \bar{e}^T \{\varphi(e + \bar{e}) - \varphi(e)\}, \quad \forall e \in E, \forall \bar{e} \in \mathbb{R}^m \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

を満たすとする. ここに, E は \mathbb{R}^m 内の原点近傍, $K(e)$ は $e \in E$ の連続関数を成分とする正定対称行列である. この仮定は, 点 $e \in E$ における多変数関数 φ のセクタ条件である. $\varphi(e)$ が 1 変数関数の場合には, (2.13) 式は, 原点近傍 E において φ が単調非減少でその傾きが有限であれば満たされるものである.

(2.11), (2.12) 式より, システム S は,

$$S: \dot{x} = A(p)x + B(p)\varphi[r - C(p)x], \quad r \in \mathcal{R}, p \in \mathcal{P} \quad (2.14)$$

と表わされる. 前節の例からも明らかなように, このシステムでは, パラメータ p のみならず, 参照入力 r によっても動特性が変化し得る. そこで, 以下では, r, p の両方をパラメータと考える.

パラメータ (r, p) が公称値 $(0, p^*) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ にあるとき, 公称系

$$S^*: \dot{x} = A(p^*)x + B(p^*)\varphi[-C(p^*)x] \quad (2.15)$$

の平衡状態は, 原点にある. したがって, 制御偏差 e の平衡点も原点である. そのため, 公称系 S^* では, 非線形関数に対するセクタ条件として, (2.13) 式で $e = 0$ とおいた条件

$$\varphi^T(\bar{e})K^{-1}(0)\varphi(\bar{e}) \leq \bar{e}^T\varphi(\bar{e}), \quad \forall \bar{e} \in \mathbb{R}^m \quad (2.16)$$

のみを考えて, システム S^* の絶対安定性が定義されている. すなわち, 平衡点である原点におけるセクタ条件 (2.16) を満たす任意の非線形関数 φ に対して, 原点 $x = 0$ が大域漸近安定であるとき, 公称系 S^* は絶対安定であるといわれる [2, 27].

しかし、参照入力 $r \neq 0$ となった場合には、前節の例でも示したように、 r と p の値によって平衡状態が変化する。そして、平衡状態が存在したとしても、それは原点ではなくなる。そのため、この場合のシステム S の絶対安定性を考えるには、移動した平衡点におけるセクタ条件が非線形関数に対して必要である。そこで、本論文では、原点近傍 E の各点におけるセクタ条件 (2.13) を前提としている。

ここで、パラメータの変化に伴う平衡状態の変化を考慮に入れた絶対安定性を定義しよう。

定義 2.1 すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (2.13) 式を満たす任意の非線形関数 φ に対して、平衡状態 $x^e(r, p)$ がただ1つ存在し、それに対する制御偏差の平衡点 $e^e(r, p)$ が E にあるとする。このとき、 $x^e(r, p)$ が大域漸近安定であるならば、ルーリエ系 S はパラメトリック絶対安定であるという。

2.4 結言

線形部に不確かなパラメータを含むルーリエ系では、参照入力とパラメータの変化によって平衡状態が変化し、そのために、安定性も変化することを例を挙げて示した。これにより、参照入力とパラメータの変化のもとでの平衡状態の変化を考慮に入れた安定性の概念の必要性を指摘し、このようなロバスト安定性の概念として、パラメトリック絶対安定性を定義した。

第 3 章

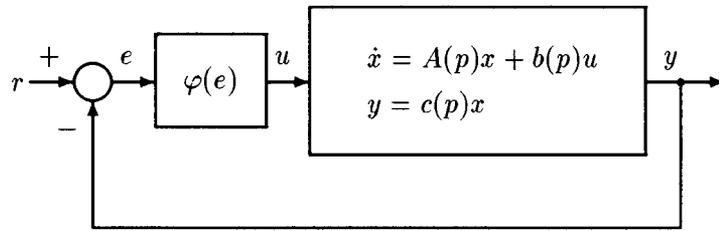
1 入力 1 出力ルーリエ系に対する パラメトリック絶対安定条件

3.1 緒言

本章では、線形部に不確かなパラメータを含み、非線形部があるセクタ条件を満たす 1 入力 1 出力ルーリエ系が、パラメトリック絶対安定であるための十分条件を導出する。そのために、まず、参照入力や線形部のパラメータの変化のもとでの、平衡状態の存在性について考察し、それが、制御偏差の平衡点の存在性に帰着することを示す。そして、安定解析に必要な制御偏差の平衡点の存在する領域を求める。さらに、平衡状態が大域漸近安定であるための条件をもとに、パラメトリック絶対安定条件を導出する。

ところで、ルーリエ系が絶対安定であるための十分条件として、線形部の伝達関数と非線形部のセクタの上界を用いた周波数領域での条件であるポポフ型の安定条件がよく知られている [2, 30]。これは、安定性のための十分条件でしかないが、セクタ条件を満たす範囲の非線形関数のあらゆる摂動を考えると、必要条件にかなり近いものと予想される。しかも、1 入力 1 出力ルーリエ系の場合には、このポポフ型の条件は、ポポフ軌跡によって図的に判定することができる [2]。さらに、ルーリエ系の線形部が不確かなパラメータを含む場合にも、ポポフ型の条件を図的に確かめる手法が提案されている [7, 19, 21]。

そこで、本章では、1 入力 1 出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための条件を、パラメータを含むポポフ型の条件によって与える。そして、文献 [7, 19, 21] の結果を用いて、パラメトリック絶対安定性を確かめた例を示す。

Fig. 3.1. Single-variable Lur'e system S

3.2 平衡点の存在条件と存在領域

Fig. 3.1 で表わされる 1 入力 1 出力ルurie系 S を考える. すなわち, 線形部は,

$$\dot{x} = A(p)x + b(p)u, \quad y = c(p)x \quad (3.1)$$

で与えられ, 非線形部は,

$$u = \varphi(e), \quad e = r - y \quad (3.2)$$

で与えられるとする. ここに, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ は, それぞれ線形部の状態, 入力, 出力であり, $e \in \mathbb{R}$ は制御偏差である. $r \in \mathbb{R}$ は参照入力で, その値を閉区間 $\mathcal{R} = [\underline{r}, \bar{r}]$ ($\underline{r} \leq 0 \leq \bar{r}$) にとる定数で, 公称値を 0 とする. p はパラメータで, その存在領域は有界閉領域 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l$ とし, 公称値を p^* で表わす. また, $A(p)$, $b(p)$, $c(p)$ はパラメータ $p \in \mathcal{P}$ の連続関数を成分とする行列で, 全ての $p \in \mathcal{P}$ に対して, $A(p)$ は安定であるとする.

非線形関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で, 原点の近傍 E において,

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{e}[\varphi(e + \bar{e}) - \varphi(e)] \leq k(e)\bar{e}^2, \quad \forall e \in E, \forall \bar{e} \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

を満たすとする. ここに, $k(e)$ は $e \in E$ によって決まる正数である. この仮定は, 点 $e \in E$ における φ のセクタ条件であり, $\varphi(e)$ が原点近傍 E において単調非減少関数で, その傾きが有限であれば, 適当な $k(e)$ について満たされる. $\varphi(e)$ は, E の外では, 減少関数であってもよい.

(3.1), (3.2) 式より, システム S は,

$$S: \dot{x} = A(p)x + b(p)\varphi[r - c(p)x], \quad r \in \mathcal{R}, p \in \mathcal{P} \quad (3.4)$$

と表わされる. 前章の例からも明らかなように, このシステムでは, パラメータ p のみならず, 参照入力 r によっても動特性が変化し得る. そこで, 以下では, r , p の両方をパラメータと考える.

ルーリエ系 S のパラメトリック絶対安定性を示すためには、まず、すべてのパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (3.3) 式のセクタ条件を満たすすべての非線形関数 φ に対して、平衡状態が存在するための条件を与える必要がある。平衡状態が存在して、それが大域漸近安定であるならば、その平衡状態はただ1つであるといえるから、ここでは、平衡状態の存在性についてのみ考察し、その一意性は次節の安定解析の結果によって保証する。

(3.4) 式で、 $\dot{x} = 0$ と置くことにより、システム S の平衡状態は

$$A(p)x + b(p)\varphi[r - c(p)x] = 0 \quad (3.5)$$

の解として得られる。(3.5) 式は、

$$x + A^{-1}(p)b(p)\varphi[r - c(p)x] = 0 \quad (3.6)$$

と等価であり、また、次式でも表わされる。

$$\begin{aligned} x + A^{-1}(p)b(p)\varphi(e) &= 0 \\ e &= r - c(p)x \end{aligned} \quad (3.7)$$

この第1式を第2式に代入すると代数方程式

$$e - r - c(p)A^{-1}(p)b(p)\varphi(e) = 0 \quad (3.8)$$

が得られる。したがって、(3.7) 式より、(3.8) 式の解 $e = e^e(r, p)$ の存在性と (3.5) 式の解 $x = x^e(r, p)$ の存在性が等価であることがわかる。これより、平衡状態 $x^e(r, p)$ の存在性に関する議論は、 $e^e(r, p)$ の存在性に関する議論で置き換えられる。しかも、安定解析では、非線形関数 φ のセクタの上限を求めるために $e^e(r, p)$ の存在領域が必要である。そこで、(3.8) 式の解 $e = e^e(r, p)$ が存在するための条件とその存在領域を与えよう。

補題 3.1 条件

$$-c(p)A^{-1}(p)b(p) + \frac{1}{k(0)} > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (3.9)$$

が成り立つならば、任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (3.3) 式のセクタ条件を満たすすべての非線形関数 φ に対して、(3.8) 式の解 $e^e(r, p)$ が区間

$$E^e(r, p) = \begin{cases} \left[\frac{r}{\sigma_0(p)}, r \right], & r\{c(p)A^{-1}(p)b(p)\} \leq 0 \text{ のとき} \\ \left[r, \frac{r}{\sigma_0(p)} \right], & r\{c(p)A^{-1}(p)b(p)\} > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.10)$$

に存在する。ここに、

$$\sigma_0(p) = 1 - c(p)A^{-1}(p)b(p)k(0) \quad (3.11)$$

である。

この補題の証明は以下のように示すことができる。関数 $\psi(\cdot, p)$ を

$$\psi(e, p) = e - c(p)A^{-1}(p)b(p)\varphi(e), \quad \forall e \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

で定義すると、(3.3)式の原点における条件

$$0 \leq \bar{e}\varphi(\bar{e}) \leq k(0)\bar{e}^2, \quad \forall \bar{e} \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

より、 $c(p)A^{-1}(p)b(p) \leq 0$ の場合は、セクタ条件

$$e^2 \leq e\psi(e, p) \leq \sigma_0(p)e^2, \quad \forall e \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

が、 $c(p)A^{-1}(p)b(p) > 0$ の場合は、

$$\sigma_0(p)e^2 \leq e\psi(e, p) \leq e^2, \quad \forall e \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

が成立する。Fig. 3.2は、この条件を $r \geq 0$ の場合について示したものである。この図において、(3.8)式の解は、 $v = \psi(e, p)$ のグラフと直線 $v = r$ との交点の e -座標となる。Fig. 3.2(a)の場合は、すべての連続関数 $\psi(\cdot, p)$ に対して、明らかに、そのような交点が存在する。Fig. 3.2(b)の場合は、 $\sigma_0(p) > 0$ のとき、すなわち、(3.9)式が成り立つとき、存在することが分かる。さらに、これらの図より、(3.9)式のもとでの(3.8)式の解の存在区間が(3.10)式で与えられることが分かるのである。

補題3.1の仮定のもとで、(3.3)式のセクタ条件を満たすすべての φ に対する $e^e(r, p)$ の存在区間 $E^e(r, p)$ が分かる。これより、(3.7)式の第1式を用いれば、平衡状態 $x^e(r, p)$ の存在領域も求めることが可能である。しかし、上で述べたように安定解析に必要なのは $e^e(r, p)$ の存在領域であって、 $x^e(r, p)$ の存在領域は必要としない。平衡状態 $x^e(r, p)$ については、その存在のみが必要であり、それは、上述の議論より、(3.9)式の条件によって保証されている。

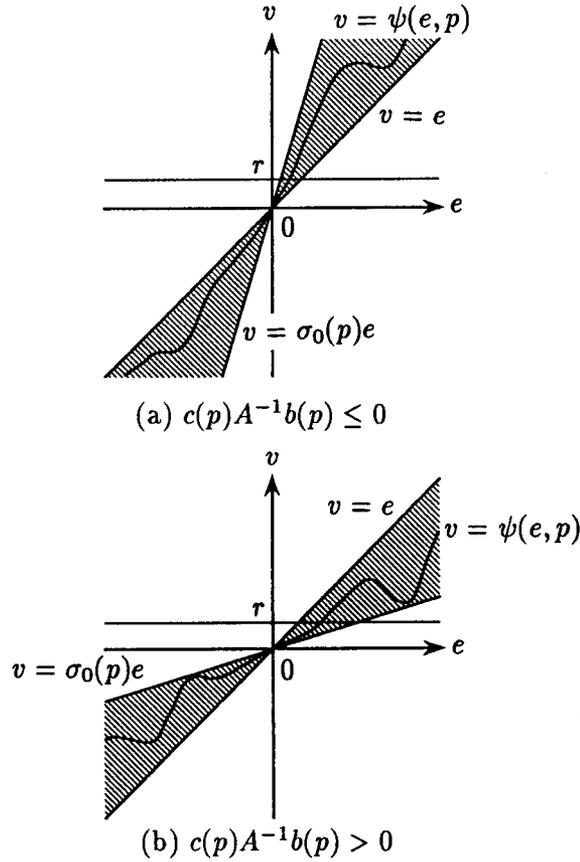


Fig. 3.2. Sector condition on $\psi(\cdot, p)$

3.3 パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件

ここでは、まず、平衡状態 $x^e(r, p)$ が存在するとき、それが大域漸近安定となるための条件を述べる。そして、補題 3.1 の条件を考慮し、システム S がパラメトリック絶対安定であるための条件を与える。

システム S は、平衡状態からの偏差 $\tilde{x} = x - x^e(r, p)$ を用いると、つぎの偏差系 \tilde{S} で表わされる。

$$\tilde{S}: \dot{\tilde{x}} = A(p)\tilde{x} + b(p)\tilde{\varphi}[-c(p)\tilde{x}] \tag{3.16}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}[-c(p)\tilde{x}] &= \varphi[-c(p)\tilde{x} + e^e(r, p)] - \varphi[e^e(r, p)] \\ e^e(r, p) &= r - c(p)x^e(r, p) \end{aligned} \tag{3.17}$$

である。この \tilde{S} もルーリエ系であり、その平衡状態は $\tilde{x} = 0$ である。そして、 $\tilde{e} = e - e^e(r, p)$ と

おくと, $e^e(r, p) \in E$ であるならば, (3.3) 式より,

$$0 \leq \tilde{e}\tilde{\varphi}(\tilde{e}) \leq k[e^e(r, p)]\tilde{e}^2, \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R} \quad (3.18)$$

が成り立つ.

さて, ルーリエ系に対するポポフの安定条件 [2] より, (3.3) 式のもとで,

$$\operatorname{Re} \left[\{1 + j\nu(r, p)\omega\}g(j\omega, p) \right] + \frac{1}{k[e^e(r, p)]} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (3.19)$$

を満たす実数 $\nu(r, p)$ が存在するならば, \tilde{S} の平衡状態 $\tilde{x} = 0$ は大域漸近安定である. ここに, $g(s, p)$ は,

$$g(s, p) = c(p)[sI - A(p)]^{-1}b(p) \quad (3.20)$$

であり, ルーリエ系 S の線形部の伝達関数である. したがって, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, (3.19) 式が成り立てば, もとのルーリエ系 S の平衡状態 $x^e(r, p)$ の大域漸近安定性が示される.

しかし, (3.19) 式の条件中の $k[e^e(r, p)]$ は, 知ることでできない平衡点 $e^e(r, p)$ に依存しているので, そのまま確かめることは不可能である. そこで, 補題 3.1 で与えられる $e^e(r, p)$ の存在区間 $E^e(r, p)$ から決まる

$$k_e(r, p) = \max\{k(e) : e \in E^e(r, p)\} \quad (3.21)$$

を $k[e^e(r, p)]$ の代わりに用いることにする. すなわち,

$$\operatorname{Re} \left[\{1 + j\nu(r, p)\omega\}g(j\omega, p) \right] + \frac{1}{k_e(r, p)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (3.22)$$

を満たす実数 $\nu(r, p)$ の存在を安定条件とすることができる.

ここで,

$$k_{\mathcal{R}}(p) = \max\{k_e(r, p) : r \in \mathcal{R}\} \quad (3.23)$$

とおき, p を固定して考えれば, つぎのことが容易に分かる. すなわち, $\nu(r, p)$ がすべての $r \in \mathcal{R}$ について存在するためには, (3.22) 式で, $k_e(r, p)$ を $k_{\mathcal{R}}(p)$ で置き換えて, r に独立な実数 $\nu_0(p)$ が存在することが必要十分である. なお, Fig. 3.2 から分かるように, 補題 3.1 の仮定のもとで, すべての $r \in \mathcal{R}$ に対する平衡点 $e^e(r, p)$ の存在区間は,

$$E_{\mathcal{R}}^e(p) = \begin{cases} [L, \bar{r}], & c(p)A^{-1}(p)b(p) \leq 0 \text{ のとき} \\ \left[\frac{L}{\sigma_0(p)}, \frac{\bar{r}}{\sigma_0(p)} \right], & c(p)A^{-1}(p)b(p) > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.24)$$

で与えられる。したがって、(3.23)式の $k_{\mathcal{R}}(p)$ は、

$$k_{\mathcal{R}}(p) = \max\{k(e) : e \in E_{\mathcal{R}}^e(p)\} \quad (3.25)$$

を用いて計算することができる。

以上より、パラメトリック絶対安定性のための定理を得る。

定理 3.1 (3.9)式の条件のもとで、与えられた参照入力 r の範囲 \mathcal{R} とすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、

$$E_{\mathcal{R}}^e(p) \subset E \quad (3.26)$$

が成り立ち、

$$\operatorname{Re}[\{1 + j\nu_0\omega\}g(j\omega, p)] + \frac{1}{k_{\mathcal{R}}(p)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathcal{R}}_+ \quad (3.27)$$

を満たす実数 $\nu_0 = \nu_0(p)$ が存在するならば、ルーリエ系 \mathcal{S} はパラメトリック絶対安定である。

(3.11)式の $\sigma_0(p)$ の定義と(3.24)式より、 $\mathcal{R} \subset E_{\mathcal{R}}^e(p)$ が成り立っている。したがって、定理 3.1 の(3.26)式の条件が成り立つためには、 $\mathcal{R} \subset E$ が必要である。これは、パラメトリック絶対安定性の解析のためには、非線形部の特性を表わすセクタ条件が、少なくとも参照入力の範囲で与えられている必要があることを意味している。

(3.27)式の条件で $\omega = 0$ とおいて、 $k(0) \leq k_{\mathcal{R}}(p)$ を用いれば、補題 3.1 の(3.9)式の条件を得る。これより、定理 3.1 では(3.9)式の仮定が不要であるかのように見える。しかし、(3.27)式中の $k_{\mathcal{R}}(p)$ を求めるために必要な区間 $E_{\mathcal{R}}^e(p)$ は、(3.9)式の条件のもとで与えられるから、補題 3.1 の条件をまず仮定せねばならない。

ところで、一般には、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して線形部の定常ゲインが正、すなわち、 $g(0, p) > 0$ である場合が多い。この場合には、 $c(p)A^{-1}(p)b(p) < 0$ であるから、補題 3.1 の仮定は満たされ、平衡点 $e^e(r, p)$ は常に存在する。そして、(3.24)式より、その存在区間は $E_{\mathcal{R}}^e(p) = \mathcal{R}$ であり、(3.25)式の $k_{\mathcal{R}}(p)$ は p に依らない定数

$$k_{\mathcal{R}}(p) = k_{\mathcal{R}}^* = \max\{k(e) : e \in \mathcal{R}\} \quad (3.28)$$

となる。したがって、この場合の安定条件は、以下のようになる。

系 3.1 $\mathcal{R} \subset E$ であるとする. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, $g(0, p) > 0$ が成り立ち,

$$\operatorname{Re}[(1 + j\nu_0\omega)g(j\omega, p)] + \frac{1}{k_{\mathcal{R}}^*} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathcal{R}}_+ \quad (3.29)$$

を満たす実数 $\nu_0 = \nu_0(p)$ が存在するならば, ルーリエ系 S はパラメトリック絶対安定である.

3.4 ポポフ軌跡を用いた数値例

前節の結果を用いて, 与えられたルーリエ系のパラメトリック絶対安定性を確かめるには, すべてのパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して, (3.27) 式, または, (3.29) 式を満たす実数 $\nu_0(p)$ の存在を調べる必要がある. しかし, 無限個のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ ごとに, 実数 $\nu_0(p)$ の存在を示すのは, 一般に困難である. そこで, 代わりに, すべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在を示すことを考える. そうすれば, 条件は保守的なものとなるが, 文献 [7, 19, 21] などの結果を用いて, ポポフ軌跡によって確かめることができる. 以下に, 例を示そう.

例 3.1 Fig. 3.1 で表わされるルーリエ系において, 線形部の係数行列が,

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_1(0.2p_2 + p_3) & -p_1(0.5p_2 + p_4 + 0.2) & -0.5p_1 - p_2 \end{bmatrix},$$

$$b(p) = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c(p) = [p_1 p_2 \quad p_1 \quad 0] \quad (3.30)$$

で与えられているとする. 参照入力 r は区間 $\mathcal{R} = [-1, 1]$ 内の値をとり, その公称値は $r^* = 0$ とする. また, パラメータ $p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$ の存在領域 \mathcal{P} は,

$$\mathcal{P} = \{p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T : 0.83 \leq p_1 \leq 1.25, 2.4 \leq p_2 \leq 3.6, \\ 0.32 \leq p_3 \leq 0.48, 1.44 \leq p_4 \leq 2.16\} \quad (3.31)$$

であり, 公称値は, $p^* = [1 \ 3 \ 0.4 \ 1.8]^T$ とする. この領域において,

$$p_1(0.2p_2 + p_3) \leq 1.5$$

$$p_1(0.5p_2 + p_4 + 0.2) > 2.3$$

$$0.5p_1 + p_2 > 2.8$$

であるから、 $A(p)$ の特性多項式にフルビッツの安定判別法を適用することにより、線形部の安定性がいえる。線形部の伝達関数は、

$$g(s, p) = \frac{p_1(s + p_2)}{s^3 + (0.5p_1 + p_2)s^2 + p_1(0.5p_2 + p_4 + 0.2)s + p_1(0.2p_2 + p_3)} \quad (3.32)$$

である。非線形部の関数 φ は、閉区間 $E = [-1, 1]$ と

$$k(e) = \frac{588 - 576e}{65 - 64e}, \quad e \in E \quad (3.33)$$

について、(3.3) 式のセクタ条件を満たす連続なものとする。

このシステムでは、 $\mathcal{R} = E = [-1, 1]$ であり、 $p_3/p_2 \leq 0.2$ より、

$$g(0, p) = \frac{5}{1 + \frac{5p_3}{p_2}} \geq 2.5 > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (3.34)$$

であるから、系 3.1 を用いてパラメトリック絶対安定性を確かめることができる。ここでは、上で述べたように、パラメータ $p \in \mathcal{P}$ ごとに系 3.1 の (3.29) 式を満たす実数 $\nu_0 = \nu_0(p)$ の存在を調べる代わりに、(3.29) 式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在をポポフ軌跡を用いて確かめよう。そのために、文献 [21] の多角形区間演算 (PIA) を用いて、各 $\omega \in \mathbb{R}_+$ ごとに、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対するポポフ軌跡が存在する領域を覆う多角形を描いたものを Fig. 3.3 に示す。いま、

$$k_{\mathcal{R}}^* = \max\{k(e) : e \in \mathcal{R}\} = 12 \quad (3.35)$$

であるから、Fig. 3.3 において、多角形軌跡の左側に、 $-1/k_{\mathcal{R}}^* = -1/12 \approx -0.0833$ を通る直線を引くことができる。したがって、(3.29) 式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 が存在し、系 3.1 より、ここで考えているルーリエ系はパラメトリック絶対安定である。

例 3.1 では、(3.29) 式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在を確かめるために、文献 [21] の PIA を用いた。この PIA を用いれば、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対するポポフ軌跡を覆うのに十分な多角形の軌跡を描くことができる。そして、この計算法は、伝達関数 $g(s, p)$ がパラメータの各成分に関して完全分解可能な TSD に対応する表現が得られ、パラメータの各成分の変動区間が有界閉区間である場合に特に有効である。

この特殊な場合である、伝達関数 $g(s, p)$ の分子が、それぞれ区間多項式で表わされる場合には、文献 [7, 19] の結果が適用できる。これらの結果によると、(3.29) 式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$

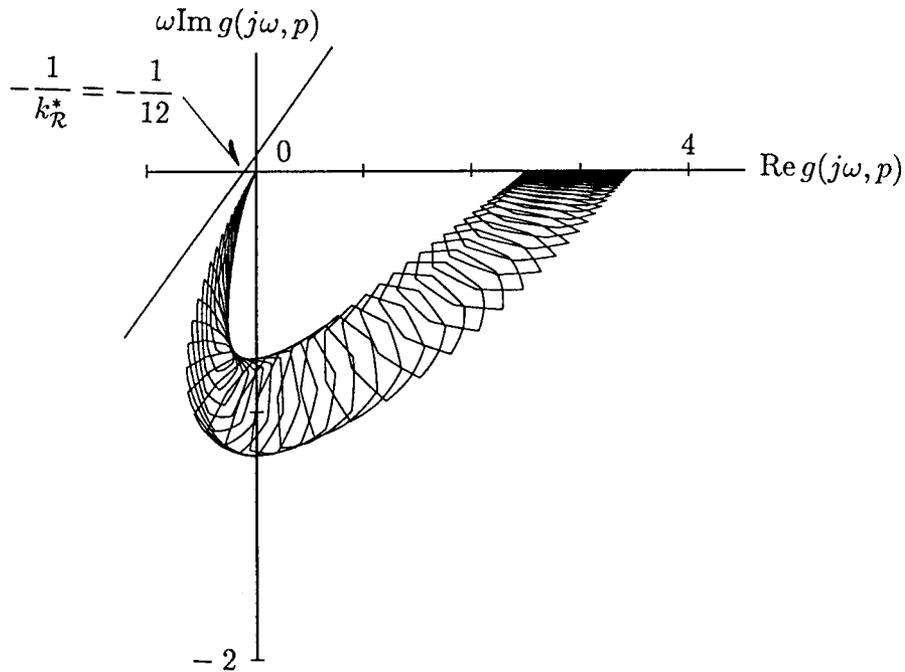


Fig. 3.3. Popov plot of Example 3.1

に共通の実数 ν_0 の存在性と, (3.29) 式を満たすある 16 組のパラメータ p に共通の実数 ν_0 の存在性とが必要かつ十分である. そこで, つぎに, そのような例を示そう.

例 3.2 Fig. 3.1 で表わされるルーリエ系において, 線形部の係数行列が,

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -p_1 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad b(p) = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad c(p) = [p_2 \ 0 \ 0] \quad (3.36)$$

で与えられているとする. 参照入力 r の変動区間は $\mathcal{R} = [-0.5, 0.5]$ であり, 公称値は $r^* = 0$ とする. また, パラメータ $p = [p_1 \ p_2]^T$ の存在領域 \mathcal{P} は,

$$\mathcal{P} = \{p = [p_1 \ p_2]^T : 3 \leq p_1 \leq 4, 1 \leq p_2 \leq 2\} \quad (3.37)$$

を満たし, 公称値は, $p^* = [3.5 \ 1.5]^T$ であるとする. このとき, 線形部の伝達関数は,

$$g(s, p) = \frac{0.5p_2}{s^3 + 3.5s^2 + p_1s + 1} \quad (3.38)$$

であるから, 線形部は安定である. 非線形部は, 例 3.1 と同じものとする.

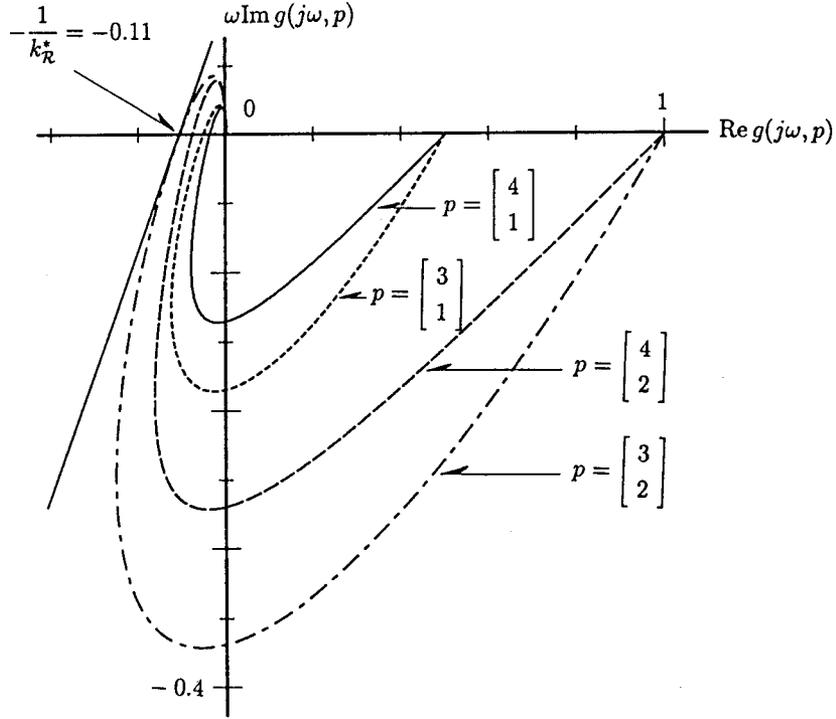


Fig. 3.4. Popov plot of Example 3.2

いま, $\mathcal{R} = [-0.5, 0.5] \subset E$ であり,

$$g(0, p) = 0.5p_2 \geq 0.5, \quad \forall p \in \mathcal{P} \tag{3.39}$$

であるから, この例においても, 系 3.1 を用いることができる. 例 3.1 と同様に, パラメータ $p \in \mathcal{P}$ ごとに (3.29) 式を満たす実数 $\nu_0(p)$ の存在を調べる代わりに, (3.29) 式を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の実数 ν_0 の存在を確かめる. 文献 [7, 19] の結果によると, このような ν_0 が存在するための必要十分条件は,

$$p = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

なる 4 組のパラメータ値に対して, (3.29) 式を満たす共通の実数 ν_0 が存在することである. このパラメータの組は, 一般には 16 組であるが, ここではパラメータ p の成分が 2 個であるので, (3.40) 式のように 4 組となった. (3.40) 式の 4 組のパラメータ値に対する線形部のポポフ軌跡を Fig. 3.4 に示す. いま,

$$k_{\mathcal{R}}^* = \max\{k(e) : e \in \mathcal{R}\} = \frac{100}{11} \tag{3.41}$$

であるから、実軸上の $-1/k_{\mathcal{R}}^* = -0.11$ を通り、この4つのポポフ軌跡を右にみる直線が引ける。したがって、(3.29) 式を満たす実数 ν_0 が存在し、このルーリエ系もパラメトリック絶対安定である。

3.5 結言

線形部にパラメータを含む1入力1出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を、パラメータを含むポポフ条件の形で導出した。その判定は、ポポフ軌跡を用いて実行可能である。

線形部に定値外乱が加わる場合にも、平衡状態は変化する。この場合についても、同様に議論ができ、本章の結果を容易に拡張することができる。

第 4 章

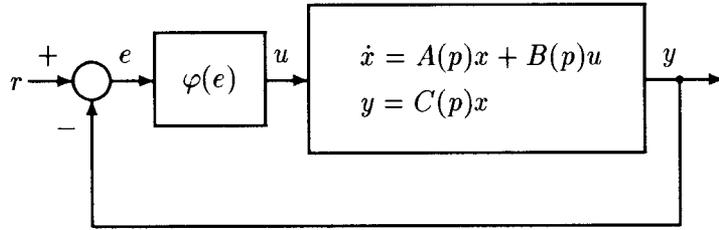
パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件の多入力多出力ルーリエ系への拡張

4.1 緒言

1 入力 1 出力ルーリエ系に対するパラメトリック絶対安定条件を、第 3 章では、ルーリエ系の線形部の伝達関数に対するポポフ型の条件で与えた。得られた条件は、多角形区間演算 (PIA) [21] や区間プラントを含むルーリエ系に対するポポフ規範 [7, 19] などを適用すれば、ポポフ軌跡を描くことによって判定可能であった。

本章では、このポポフ型のパラメトリック絶対安定条件を、多入力多出力ルーリエ系へ拡張する。そのために必要な、多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条件の適用可能な非線形関数のクラスについての議論は、付録 A で述べる。そして、得られたパラメータを含むポポフ型の条件は、各周波数ごとに、すべてのパラメータに対する行列不等式の成立を、PIA を用いて確かめることにより、判定可能であることを数値例で示す。

以下では、ルーリエ系 S がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を、ポポフ型の条件で与えよう。そのために、4.2 節では、任意のパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して、 S の平衡状態の存在性を保証する条件を導出し、安定解析に必要な制御偏差の平衡点の存在領域を求める。そして、4.3 節で、平衡状態が大域漸近安定であるために満たすべき条件をポポフ型安定条件により示す。

Fig. 4.1. Multivariable Lur'e system S

4.2 多入力多出力ルーリエ系の平衡点解析

線形部がパラメータ p を含む Fig. 4.1 で表わされる多入力多出力ルーリエ系 S を考える. すなわち, S は,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B(p)u, \quad y = C(p)x \\ u &= \varphi(e), \quad e = r - y \end{aligned} \quad (4.1)$$

で表わされる. ここに, $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$ は線形部の状態, 入力, 出力であり, $e \in \mathbb{R}^m$ は制御偏差である.

参照入力 r は単連結有界閉領域 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^m$ 内の値をとる定数ベクトルで, 公称値を 0 とする. パラメータ p の存在領域は単連結有界閉領域 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l$ である.

行列 $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ は, パラメータ $p \in \mathcal{P}$ の連続関数をその成分とし, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $A(p)$ は安定であるとする.

非線形関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続微分可能であり,

$$\{D\varphi(e)\}^T = D\varphi(e), \quad \forall e \in \mathbb{R}^m \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \{\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)\}^T K^{-1}(e) \{\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)\} &\leq \tilde{e}^T \{\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)\}, \\ \forall e \in E, \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad (4.4)$$

を満たすとする. ここに, $D\varphi(e)$ は $\varphi(e)$ のヤコビ行列, E は \mathbb{R}^m 内の原点近傍, $K(e)$ は $e \in E$ の連続関数を成分とする正定対称行列である. (4.2) 式の仮定は, 次節で安定解析を行なう際に必要となる. また, 付録 A で示すように, φ の微分可能性と (4.2) 式の仮定は, より緩い補題 A.1 の仮定で置き換えてもよい. そして, $\varphi(e)$ の各成分が 1 変数関数である場合には, (4.2) 式は常に成り立っている. (4.3) 式の仮定は, 多変数ベクトル値関数に対する点 e におけるセクタ条件で

ある。

ルーリエ系 S がパラメトリック絶対安定であるためのポポフ型条件を導くために、まず、すべてのパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して、平衡状態が存在するための条件を与える。平衡状態が存在して、それが大域漸近安定であるならば、その平衡状態はただ1つであるといえるから、本節では、平衡状態の存在性についてのみ考察する。

(4.1) 式より、システム S は、

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)\varphi[r - C(p)x] \quad (4.5)$$

と表わされる。(4.5) 式で、 $\dot{x} = 0$ と置くことにより、システム S の平衡状態は

$$A(p)x + B(p)\varphi[r - C(p)x] = 0 \quad (4.6)$$

の解として得られる。(4.6) 式は、

$$x + A^{-1}(p)B(p)\varphi[r - C(p)x] = 0 \quad (4.7)$$

と等価であり、また、次式でも表わされる。

$$\begin{aligned} x + A^{-1}(p)B(p)\varphi(e) &= 0 \\ e &= r - C(p)x \end{aligned} \quad (4.8)$$

これより、(4.8) 式の第1式を第2式に代入して得られる e についての代数方程式

$$e - r + G_0(p)\varphi(e) = 0 \quad (4.9)$$

の解 $e = e^e(r, p)$ が存在すれば、(4.6) 式の解 $x = x^e(r, p)$ が存在する。ただし、

$$G_0(p) = -C(p)A^{-1}(p)B(p) \quad (4.10)$$

である。すなわち、平衡状態 $x^e(r, p)$ の存在性に関する議論は、 $e^e(r, p)$ の存在性に関する議論で置き換えられる。また、安定解析では、非線形関数 φ のセクタの上界を求めるために $e^e(r, p)$ の存在領域が必要である。したがって、(4.9) 式の代数方程式の解 $e = e^e(r, p)$ が存在するための条件とその存在領域を与えよう。その際には、非線形関数に対する (4.2)~(4.4) 式の条件のうち、(4.3) 式で $e = 0$ とおいた原点におけるセクタ条件

$$\varphi^T(\bar{e})K^{-1}(0)\varphi(\bar{e}) \leq \bar{e}^T\varphi(\bar{e}), \quad \forall \bar{e} \in \mathcal{R}^m \quad (4.11)$$

を用いる。

補題 4.1 任意のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\frac{1}{2}\{G_0(p) + G_0^T(p)\} + K^{-1}(0) > 0 \quad (4.12)$$

が成り立つならば, 任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, (4.9) 式の解 $e^e(r, p)$ が領域

$$E^e(r, p) = \left\{ e \in \mathbb{R}^m : \|e\| \leq \frac{\|r\|}{\mu_0(p)} \right\} \quad (4.13)$$

に存在する. ここに,

$$\mu_0(p) = \begin{cases} \frac{\gamma_0(p)}{\|G_0(p)\|}, & \gamma_0(p) > 0 \text{ のとき} \\ \sqrt{\frac{\lambda_{\min}[K(0)]}{\lambda_{\max}[K(0)]}} \frac{\delta_0(p)\rho_0(p)}{\|G_0(p) + \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1}(0)\|}, & \gamma_0(p) \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\gamma_0(p) = \lambda_{\min} \left[\frac{1}{2}\{G_0(p) + G_0^T(p)\} \right] \quad (4.15)$$

$$\rho_0(p) = \lambda_{\min} \left[\frac{1}{2}\{G_0(p) + G_0^T(p)\} + \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1}(0) \right] \quad (4.16)$$

であり, $\lambda_{\min}[\cdot]$, $\lambda_{\max}[\cdot]$ は, それぞれ最小固有値, 最大固有値を表わす. さらに, $\delta_0(p)$ は,

$$\frac{1}{2}\{G_0(p) + G_0^T(p)\} + K^{-1}(0) - \delta_0(p)K^{-1}(0) > 0 \quad (4.17)$$

を満たす正の実数である. なお, ベクトルノルムはユークリッドノルムであり, 行列ノルムはそれから導かれたノルムである.

補題 4.1 の証明は付録 B.2 で与える. $\gamma_0(p) > 0$ の場合には, (4.12) 式は常に成り立ち, (4.9) 式の解 $e^e(r, p)$ の存在条件と存在領域は, 行列 $K(0)$ には依存していない. $e^e(r, p)$ の存在を保証するために (4.12) 式の条件が必要となるのは, $\gamma_0(p) \leq 0$ の場合である.

ルーリエ系 S が 1 入力 1 出力である場合には, (4.12) 式の平衡状態の存在条件は, 第 3 章の条件と一致する. このとき, 1 入力 1 出力ルーリエ系の安定解析に必要なすべての $r \in \mathcal{R}$ に対する $e^e(r, p)$ の存在範囲 $E_{\mathcal{R}}^e(p)$ を (4.13) 式から求めると, $\gamma_0(p) = G_0(p)$ であるから,

$$E_{\mathcal{R}}^e(p) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} E^e(r, p) = \begin{cases} \{e \in \mathbb{R} : |e| \leq \bar{r}\}, & G_0(p) > 0 \text{ のとき} \\ \left\{ e \in \mathbb{R} : |e| \leq \frac{\bar{r}}{\delta_0(p)} \right\}, & G_0(p) \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.18)$$

となる. ここに, $\bar{r} = \max\{|r| : r \in \mathcal{R}\}$ である. $G_0(p) > 0$ の場合, この $E_{\mathcal{R}}^c(p)$ は第3章のものと一致している. 一方, $G_0(p) \leq 0$ の場合には, (4.18) 式中の $\delta_0(p)$ を, (4.17) 式を満たす $\delta_0(p)$ の上限で置き換えたものが第3章の結果である.

以上の議論より, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, (4.12) 式が成り立てば, ルーリエ系 S の平衡状態が存在し, $e^e(r, p)$ の存在領域が分かる. これより, (4.8) 式の第1式を用いれば, 平衡状態 $x^e(r, p)$ の存在領域も求めることが可能である. しかし, 次節で述べる安定解析に必要なのは $e^e(r, p)$ の存在領域であって, $x^e(r, p)$ の存在領域は必要としない. 平衡状態 $x^e(r, p)$ については, その存在のみが必要であり, それは, 上述の議論より, (4.12) 式の条件によって保証されている.

4.3 パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件

前節で与えた補題4.1の仮定のもとで, システム S の平衡状態 $x^e(r, p)$ が存在するとき, $x^e(r, p)$ が大域漸近安定であるためのポポフ条件を述べる. そして, S がパラメトリック絶対安定であるためのポポフ型の条件を導出しよう.

任意に固定されたパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, 補題4.1の仮定が成り立ち, システム S の平衡状態 $x^e(r, p)$ が存在するとする. このとき, S は, 状態 x の $x^e(r, p)$ からの偏差 $\tilde{x} = x - x^e(r, p)$ を用いて, 偏差系

$$\tilde{S}: \dot{\tilde{x}} = A(p)\tilde{x} + B(p)\tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \quad (4.19)$$

で表わされる. ここに,

$$\tilde{\varphi}[\tilde{e}] = \varphi[e^e(r, p) + \tilde{e}] - \varphi[e^e(r, p)] \quad (4.20)$$

である. この非線形関数 $\tilde{\varphi}$ は, (4.2) 式の仮定より,

$$[D\tilde{\varphi}(\tilde{e})]^T = D\tilde{\varphi}(\tilde{e}), \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \quad (4.21)$$

を満たし, さらに, $e^e(r, p) \in E$ とすると, (4.3) 式より,

$$0 \leq \tilde{\varphi}^T(\tilde{e})K^{-1}[e^e(r, p)]\tilde{\varphi}(\tilde{e}) \leq \tilde{e}^T\tilde{\varphi}(\tilde{e}), \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \quad (4.22)$$

が成り立っている. (4.22) 式は, 平衡点 $e^e(r, p)$ における φ に対するセクタ条件と等価である.

この \tilde{S} もルーリエ系であるから、付録 A の定理 A.1 の多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条件を用いることができる。すなわち、(4.21), (4.22) 式の仮定の下で、

$$\frac{1}{2}[(1 + j\nu\omega)G(j\omega, p) + (1 - j\nu\omega)G^T(-j\omega, p)] + K^{-1}[e^e(r, p)] > 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}_+ \quad (4.23)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(r, p)$ が存在するならば、 \tilde{S} の零解は大域漸近安定である。ここに、 $G(s, p)$ は

$$G(s, p) = C(p)[sI - A(p)]^{-1}B(p) \quad (4.24)$$

で、ルーリエ系 S の線形部の伝達関数行列であり、また、 \bar{R}_+ は $\bar{R}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ を表わす。

(4.23) 式の成立が確かめられれば、ルーリエ系 S の平衡状態 $x^e(r, p)$ の大域漸近安定性が示される。しかしながら、非線形関数 φ が陽に与えられていないため、(4.23) 式に含まれる $e^e(r, p)$ を求めることは、実際には不可能である。そこで、補題 4.1 で与えられた $e^e(r, p)$ の存在領域 $E^e(r, p)$ が $E^e(r, p) \subset E$ であるとき、

$$K_e(r, p) \geq K(e), \quad \forall e \in E^e(r, p) \quad (4.25)$$

を満たす $K_e(r, p)$ を (4.23) 式中の $K[e^e(r, p)]$ の代わりに用いることにする。

補題 4.1 と以上の議論により、パラメトリック絶対安定定理を得る。

定理 4.1 任意のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\frac{1}{2}\{G(0, p) + G^T(0, p)\} + K^{-1}(0) > 0 \quad (4.12)$$

が成り立ち、任意の参照入力 $r \in \mathcal{R}$ に対して、

$$E^e(r, p) \subset E \quad (4.26)$$

が満たされるとする。このとき、任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して、

$$\frac{1}{2}[(1 + j\nu\omega)G(j\omega, p) + (1 - j\nu\omega)G^T(-j\omega, p)] + K_e^{-1}(r, p) > 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}_+ \quad (4.27)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(r, p)$ が存在するならば、ルーリエ系 S はパラメトリック絶対安定である。

定理 4.1 では, $G(0, p) = G_0(p)$ であることを用いて, 補題 4.1 中の $G_0(p)$ を $G(0, p)$ で書き直したものを平衡点の存在条件とした. したがって, (4.26) 式の $E^e(r, p)$ は, 補題 4.1 で定義されたものである.

(4.25) 式より, $e^e(r, p)$ の存在領域 $E^e(r, p)$ が小さいほど, (4.27) 式の条件は緩いものとなる. そして, $E^e(r, p)$ が小さくなるためには, 補題 4.1 中の $\gamma_0(p)$, $\rho_0(p)$ が大きければよいのである.

1 入力 1 出力ルーリエ系の場合には, (4.25) 式の $K_e(r, p)$ を $E^e(r, p)$ における $K(e)$ の最大値に選ぶことができる. そして, このとき, p を \mathcal{P} に固定して考えると, (4.27) 式を満たす $\nu = \nu(r, p)$ がすべての $r \in \mathcal{R}$ について存在することと, $K_e(r, p)$ を $K_{\mathcal{R}}(p) = \max\{K(e) : e \in E_{\mathcal{R}}^e(p)\}$ で置き換えた (4.27) 式を満たす $\nu = \nu(p)$ が存在することとが等価になる. ここに, $E_{\mathcal{R}}^e(p)$ は前節の (4.18) 式で求めた領域である. このようにして導かれる 1 入力 1 出力ルーリエ系に対するパラメトリック絶対安定条件は, $G(0, p) > 0$ のときには第 3 章の結果と一致し, $G(0, p) \leq 0$ のときには, 前節で平衡点の存在範囲について述べたことから分かるように, $\delta_0(p)$ をその上限で置き換えれば第 3 章の結果と一致する. したがって, 本章の結果は, 1 入力 1 出力ルーリエ系に対する第 3 章の結果の多入力多出力系への拡張である.

4.4 PIA によるポポフ型条件の判定例

前節で与えたパラメトリック絶対安定定理を適用した数値例を示そう.

例 4.1 ルーリエ系 S において, 線形部の係数行列が,

$$A(p) = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -p_3 \\ 0 & p_2(p_2 - 2) & -p_2(1 + p_3) \end{bmatrix},$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(p) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/p_2 \\ 4 & 2 & p_4 - 2/p_2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

であるとする. パラメータ $p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]^T$ の領域は,

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}^4 : p_1 \in [0.5, 1], p_2 \in [2.5, 3], p_3 \in [1, 1.5], p_4 \in [2, 5]\} \quad (4.29)$$

であり, 参照入力 r の領域は,

$$\mathcal{R} = \{r \in \mathbb{R}^2 : \|r\| \leq 1\} \quad (4.30)$$

とする. 非線形関数 φ に対する (4.3) 式のセクタ条件における正定対称行列 $K(e)$ は, 領域 $E = \{e \in \mathbb{R}^2 : \|e\| \leq 6\}$ に対して,

$$K(e) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.9 + 0.94\|e\| & -0.4 - 0.41\|e\| \\ -0.4 - 0.41\|e\| & 0.2 + 0.2\|e\| \end{bmatrix}, & \|e\| \leq 4 \text{ のとき} \\ \begin{bmatrix} 4.66 & -2.04 \\ -2.04 & 1 \end{bmatrix}, & 4 < \|e\| \leq 6 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.31)$$

であるとする.

行列 $A(p)$ の特性多項式 $d(s)$ は,

$$d(s) = (s + p_1)(s + p_2)(s + p_2p_3 + 2) \quad (4.32)$$

であり, p_1, p_2, p_3 はすべて正であるから, $A(p)$ は安定である. 線形部の伝達関数行列は,

$$G(s, p) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s + p_1} & \frac{5s + p_1 + 4p_2}{(s + p_1)(s + p_2)} \\ \frac{4}{s + p_1} & \frac{10s^2 + \{2(p_1 + 4p_2 + 5p_2p_3 + 10) + p_2p_4(p_2 - 2)\}s + 2(p_1 + 4p_2)(p_2p_3 + 2) + p_1p_2p_4(p_2 - 2)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_2p_3 + 2)} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

である.

まず, 平衡状態の存在を確かめよう. いま,

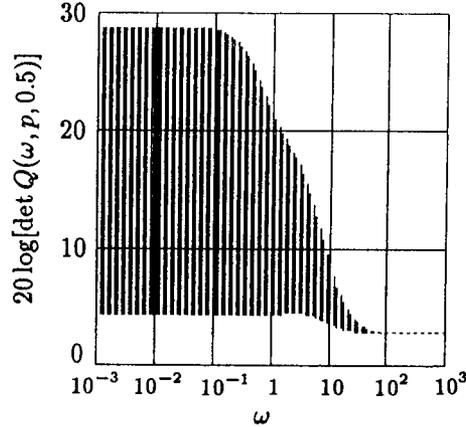
$$G(0, p) = \begin{bmatrix} \frac{2}{p_1} & \frac{p_1 + 4p_2}{p_1p_2} \\ \frac{4}{p_1} & \frac{2(p_1 + 4p_2)(p_2p_3 + 2) + p_1p_2p_4(p_2 - 2)}{p_1p_2(p_2p_3 + 2)} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

である. これと, (4.29) 式の p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) の区間を用いて, (4.15) 式の $\gamma_0(p)$ の下界を求めると,

$$\gamma_0(p) \geq 4.12, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (4.35)$$

を得る. これより, $\{G(0, p) + G^T(0, p)\}/2 > 0$ であり, また, $K^{-1}(0) > 0$ であるから, (4.12) 式が成り立ち, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対してルーリエ系 S の平衡状態は存在する. さらに, (4.29) 式を用いて $\|G(0, p)\|$ の上界を求めると $\|G(0, p)\| \leq 20.2$ であるから, (4.13) 式と (4.30) 式より $e^e(r, p)$ の存在領域は, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して,

$$E^e(r, p) \subset \{e \in \mathbb{R}^2 : \|e\| \leq 4.91\} \quad (4.36)$$

Fig. 4.2. Value set of $20 \log[\det Q(\omega, p, 0.5)]$

である. $\bar{E}_{\mathcal{R}} = \{e \in \mathbb{R}^2 : \|e\| \leq 4.91\}$ と置くと, $\bar{E}_{\mathcal{R}} \subset E$ であるから, (4.26) 式は満たされる.

つぎに, すべてのパラメータに対して存在の保証された平衡状態の安定性を調べよう. ところで, 定理 4.1 の条件に従って, 無限個のパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ ごとに $\nu(r, p)$ の存在を示すのは, 実際には困難である. そこで, 保守的ではあるが, (4.27) 式中の $K_e(r, p)$ を

$$\bar{K}_{\mathcal{R}} \geq K(e), \quad \forall e \in \bar{E}_{\mathcal{R}} \quad (4.37)$$

を満たす (r, p) に依らない行列 $\bar{K}_{\mathcal{R}}$ で置き換え, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に共通の実数 ν の存在を示そう. すなわち,

$$Q(\omega, p, \nu) = \frac{1}{2}[(1 + j\nu\omega)G(j\omega, p) + (1 - j\nu\omega)G^T(-j\omega, p)] + \bar{K}_{\mathcal{R}}^{-1} > 0, \quad \forall \omega \in \bar{\mathbb{R}}_+, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (4.38)$$

を満たす実数 ν の存在によって, 安定性を保証する.

(4.31) 式より,

$$\bar{K}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 8.91 & -4.1 \\ -4.1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

は, (4.37) 式を満たしている. この $\bar{K}_{\mathcal{R}}$ に対して, (4.38) 式を満たす ν の存在を確かめればよい. 1 入力 1 出力ルールの系の場合には, 3.4 節の例で示したように, このような ν の存在は, ポポフ軌跡を用いて確かめることができた. しかし, ここでは, 多入力多出力ルールの系を対象としており, (4.38) 式は行列不等式であるため, 図的に ν の存在性を示すことはできない. そこで, ν に適当な実数を代入して, $Q(\omega, p, \nu)$ が正定であることを確かめる. いま, (4.35) 式より, $\omega = 0$ に対して (4.38) 式は満たされている. このことと, $Q(\omega, p, \nu)$ が ω に関して連続であることより,

すべてのパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して行列式 $\det Q(\omega, p, \nu)$ が非負の ω に対して 0 にならないければ, (4.38) 式の成立がいえる. そこで, 文献 [21] の PIA を用いて, 非負の ω について, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対する $\det Q(\omega, p, \nu)$ を覆う範囲を描いたものを Fig. 4.2 に示す. ただし, ここでは, $\nu = 0.5$ とした. Fig. 4.2 より, $\det Q(\omega, p, 0.5)$ は, 非負の ω に対して 0 にならないので, (4.38) 式は満たされている. したがって, 本節で考えたルーリエ系 S は, パラメトリック絶対安定である.

4.5 結言

多入力多出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるためのポポフ型の十分条件を与え, その判定を行なった数値例を示した. 得られたポポフ型の条件は, パラメータを含む行列不等式を全周波数で満たす実数の存在を要求するものである. 1入力1出力系でなければ, このような実数の存在を容易に確かめ得る手法は, まだ存在しない. そこで, 本章では, 試行錯誤的に選んだ実数に対して, PIA で行列不等式の成立を確かめることにより, 多入力多出力系に対するパラメータを含むポポフ型の条件の判定が可能であることを示した.

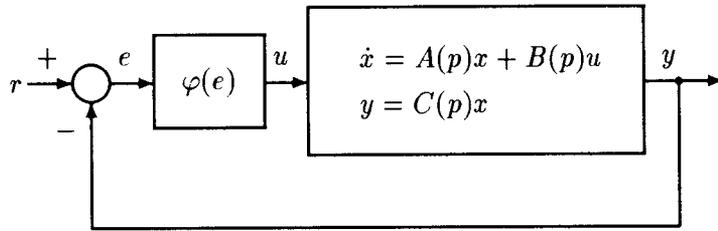
第5章

ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性のための線形行列不等式 (LMI) 条件

5.1 緒言

第3, 4章では, ポポフ型のパラメトリック絶対安定条件を与えた. これらの条件を数値的に確かめることは, 例で示したように, 文献 [7, 19, 21] などの手法を用いれば可能である. 文献 [7, 19] の手法は, ルーリエ系の線形部が区間プラントである場合に対するものである. また, 文献 [21] の多角形区間演算 (PIA) が特に有効なのは, 確かめるべき条件式が, パラメータの各成分に関して完全分解可能な Tree Structured Decomposition (TSD)[1, 23] に対応する表現が得られる場合である. ところで, パラメータを含む伝達関数による条件式は, 必ずしもこのような構造を有するとは限らない. そのため, これまでに得られているパラメトリック絶対安定条件では, 数値的に確かめるのに適さない場合がある.

一方, 線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) を数値的に解く有効な計算アルゴリズムが, 最近, 開発され, さまざまな問題に適用されている [6, 11, 20]. そこで, 本章では, パラメトリック絶対安定性のための条件を, パラメータを含む LMI の形式で導出する. それらは, 平衡点の存在と領域を与える LMI と, 安定性を保証する LMI から成る. そして, ルーリエ系の線形部がポリトープ型の場合には, それらの LMI 条件が, パラメータを含まない有限個の LMI の成立で満たされることを示す. パラメータを含まない LMI 条件は, 文献 [11] の数値計算ツールを用いれば, 容易に判定可能であり, 実用的なものであるといえる. さらに, 非線形部が互いに独立な複数個のブロックに分けることができる場合には, LMI 条件を緩めることができることを示す.

Fig. 5.1. Multivariable Lur'e system S

5.2 LMI による平衡点解析

線形部がパラメータ p を含む Fig. 5.1 で表わされる多入力多出力ルーリエ系 S を考える. すなわち, S は,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B(p)u, & y &= C(p)x \\ u &= \varphi(e), & e &= r - y \end{aligned} \quad (5.1)$$

で表わされる. ここに, $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$ は線形部の状態, 入力, 出力であり, $e \in \mathbb{R}^m$ は制御偏差である.

参照入力 r は, 単連結有界閉領域 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^m$ 内の値をとる定数ベクトルで, 公称値を 0 とする. パラメータ p の存在領域は単連結有界閉領域 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l$ である.

$A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ は, パラメータ $p \in \mathcal{P}$ の連続関数をその成分とする行列で, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $A(p)$ は安定であるとする.

非線形関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続微分可能であり,

$$\{\mathcal{D}\varphi(e)\}^T = \mathcal{D}\varphi(e), \quad \forall e \in \mathbb{R}^m \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \{\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)\}^T K^{-1}(e) \{\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)\} &\leq \tilde{e}^T \{\varphi(e + \tilde{e}) - \varphi(e)\}, \\ \forall e \in E, \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad (5.4)$$

を満たすとする. ここに, $\mathcal{D}\varphi(e)$ は $\varphi(e)$ のヤコビ行列, E は \mathbb{R}^m 内のある原点近傍, $K(e)$ は $e \in E$ の連続関数を成分とする正定対称行列である. (5.2) 式の仮定は, 後に, ルーリエ・ポストニコフ型のリアプノフ関数を用いて安定解析を行なう際に必要となる. また, 付録 A で示すように, φ の微分可能性と (5.2) 式の仮定は, より緩い補題 A.1 の仮定で置き換えてもよい. (5.3) 式の仮定は, 多変数ベクトル値関数に対する点 e におけるセクタ条件である.

(5.1) 式より, システム S は,

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)\varphi[r - C(p)x] \quad (5.5)$$

と表わされる. 参照入力 r が 0 のとき, パラメータ p の値にかかわらず, S の平衡状態は原点 $x = 0$ である. 第 2 章で示したように, S の動特性は, パラメータ p だけでなく, 参照入力 r にも依存するので, ここでも, r, p を共にパラメータとみなそう.

以下では, ルーリエ系 S がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を LMI で与える. そこで, まず, 任意のパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, S の平衡状態の存在を保証する LMI を与える. そして, それを用いて安定解析に必要な制御偏差の平衡点の存在領域を求める.

パラメータ (r, p) に対する, ルーリエ系 S の平衡状態は, (5.5) 式で $\dot{x} = 0$ と置いた代数方程式

$$A(p)x + B(p)\varphi[r - C(p)x] = 0 \quad (5.6)$$

の解である. これと等価な x と e についての代数方程式

$$\begin{aligned} A(p)x + B(p)\varphi(e) &= 0 \\ e &= r - C(p)x \end{aligned} \quad (5.7)$$

の解の存在によって, S の平衡状態の存在を保証しよう. その際には, 非線形関数 φ に対する条件 (5.2)~(5.4) のうち, (5.3) 式のセクタ条件で $e = 0$ とおいた原点における条件

$$\varphi^T(\bar{e})K^{-1}(0)\varphi(\bar{e}) \leq \bar{e}^T\varphi(\bar{e}), \quad \forall \bar{e} \in \mathcal{R}^m \quad (5.8)$$

を用いる.

補題 5.1 任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (5.8) 式を満たすすべての非線形関数 φ に対して, (5.7) 式の解

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^e(r, p) \\ e^e(r, p) \end{bmatrix}$$

が存在するための十分条件は, 任意のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して, LMI

$$\begin{bmatrix} M^T(p)X + X^T M(p) & X^T L(p) + J \\ L^T(p)X + J^T & 2K^{-1}(0) \end{bmatrix} > 0 \quad (5.9)$$

を満たす $(n+m)$ 次正方行列 $X = X(p)$ が存在することである。そして、この条件のもとでの $e^e(r, p)$ の存在領域は、

$$E^e(r, p) = \left\{ e \in \mathbb{R}^m : \|e\| \leq \frac{2\|X_2^T(p)r\|}{\lambda_{\min}[R(p)]} \right\} \quad (5.10)$$

である。ここに、

$$M(p) = \begin{bmatrix} A(p) & O_{n \times m} \\ C(p) & I_m \end{bmatrix}, \quad L(p) = \begin{bmatrix} B(p) \\ O_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} O_{n \times m} \\ -I_m \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

であり、 $X_2(p)$ は $X(p)$ の下側 m 行からなる部分行列、 $R(p)$ は $X = X(p)$ と置いた (5.9) 式左辺、 $O_{n \times m}$ は $(n \times m)$ 零行列、 I_m は m 次単位行列を表わす。また、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム、 $\sigma_{\max}[\cdot]$ は最大特異値、 $\lambda_{\min}[\cdot]$ は最小固有値を表わし、 > 0 は左辺が正定対称行列であることを意味する。

この補題における (5.9) 式の LMI を満たす行列 $X = X(p)$ は、単に正方行列であればよく、対称性や正定性などの仮定は必要としない。

(補題 5.1 の証明) まず、 $p \in \mathcal{P}$ を任意に固定し、 $z = [x^T \ e^T]^T$ と置いて、関数

$$\begin{aligned} f(z, r) &= \begin{bmatrix} A(p)x + B(p)\varphi(e) \\ e - r + C(p)x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M(p) & L(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varphi(e) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

を定義すると、(5.7) 式の代数方程式は、

$$f(z, r) = 0 \quad (5.13)$$

で表わされる。この $f(z, r)$ に対して、補題 B.1 (付録 B.1 参照) の仮定が満たされることを示そう。いま、

$$f(0, 0) = 0 \quad (5.14)$$

であるから、 $z^* = 0$ 、 $r^* = 0$ とすれば、(B.2) 式は満たされる。また、(5.8) 式の原点におけるセクタ条件を用いると、任意の $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ 、 $r \in \mathcal{R}$ に対して、つぎの不等式が成り立つ。

$$2\sigma_{\max}[X(p)] \cdot \|z\| \cdot \|f(z, r) - f(0, r)\|$$

$$\begin{aligned}
&\geq 2z^T X^T(p)\{f(z,r) - f(0,r)\} \\
&\geq 2z^T X^T(p)\{f(z,r) - f(0,r)\} + 2\{\varphi^T(e)K^{-1}(0)\varphi(e) - e^T\varphi(e)\} \\
&= \begin{bmatrix} z^T & \varphi^T(e) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2X^T(p)M(p) & 2X^T(p)L(p) + 2J \\ O_{m \times (n+m)} & 2K^{-1}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ \varphi(e) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z^T & \varphi^T(e) \end{bmatrix} R(p) \begin{bmatrix} z \\ \varphi(e) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

これと, (5.9) 式の LMI 条件より, $R(p) > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
&2\sigma_{\max}[X(p)] \cdot \|z\| \cdot \|f(z,r) - f(0,r)\| \\
&\geq \lambda_{\min}[R(p)] \left\| \begin{bmatrix} z \\ \varphi(e) \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&\geq \lambda_{\min}[R(p)] \|z\|^2
\end{aligned} \tag{5.16}$$

を得る. したがって,

$$\|f(z,r) - f(0,r)\| \geq \frac{\lambda_{\min}[R(p)]}{2\sigma_{\max}[X(p)]} \|z\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n+m} \tag{5.17}$$

が成り立ち, 付録 B.1 の補題 B.1 より, (5.13) 式の解

$$z^e(r) = \begin{bmatrix} x^e(r,p) \\ e^e(r,p) \end{bmatrix}$$

が存在する.

つぎに, 任意の $(r,p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対する $e^e(r,p)$ の存在領域 $E^e(r,p)$ を求める. (5.15) 式の右辺第 1 式において, $z = z^e(r)$ と置けば, $f(z^e(r), r) = 0$ と (5.12) 式より,

$$\begin{aligned}
2\{z^e(r)\}^T X_2^T(p)r &\geq \begin{bmatrix} \{z^e(r)\}^T & \varphi^T[e^e(r,p)] \end{bmatrix} R(p) \begin{bmatrix} z^e(r) \\ \varphi[e^e(r,p)] \end{bmatrix} \\
&\geq \lambda_{\min}[R(p)] \|z^e(r)\|^2
\end{aligned} \tag{5.18}$$

を得る. したがって,

$$\begin{aligned}
2\|X_2^T(p)r\| &\geq \lambda_{\min}[R(p)] \|z^e(r)\| \\
&\geq \lambda_{\min}[R(p)] \|e^e(r,p)\|
\end{aligned} \tag{5.19}$$

であり, $e^e(r,p)$ の存在領域は, (5.10) 式で表わされる. \square

5.3 パラメトリック絶対安定性のための LMI 条件

まず, 任意のパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, 平衡状態 $x^e(r, p)$ が存在するとき, それが
大域漸近安定であるための十分条件を LMI で与える. そして, 補題 5.1 の条件と合わせて, ルー
リエ系 S がパラメトリック絶対安定であるための LMI 条件を示そう.

パラメータ (r, p) を $\mathcal{R} \times \mathcal{P}$ で任意に固定するとき, システム S は, 平衡状態 $x^e(r, p)$ からの
偏差 $\tilde{x} = x - x^e(r, p)$ によって, 偏差系

$$\tilde{S}: \dot{\tilde{x}} = A(p)\tilde{x} + B(p)\tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \quad (5.20)$$

で表わされる. ここに,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{e}) = \varphi[e^e(r, p) + \tilde{e}] - \varphi[e^e(r, p)] \quad (5.21)$$

である. この非線形関数 $\tilde{\varphi}$ は, (5.2) 式より,

$$\{D\tilde{\varphi}(\tilde{e})\}^T = D\tilde{\varphi}(\tilde{e}), \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \quad (5.22)$$

を満たし, さらに, $e^e(r, p) \in E$ とすると, (5.3) 式より, 平衡点 $e^e(r, p)$ における φ に対するセ
クタ条件と等価な

$$\tilde{\varphi}(\tilde{e})^T K^{-1}[e^e(r, p)]\tilde{\varphi}(\tilde{e}) \leq \tilde{e}^T \tilde{\varphi}(\tilde{e}), \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \quad (5.23)$$

を満たす. この \tilde{S} の平衡状態である原点の安定解析によって, S の平衡状態 $x^e(r, p)$ の安定解析を
行う.

偏差系 \tilde{S} もルーリエ系であるから, ルーリエ-ポストニコフ型リアプノフ関数

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T H(r, p)\tilde{x} + \nu(r, p) \int_0^1 [-C(p)\tilde{x}]^T \tilde{\varphi}[-\theta C(p)\tilde{x}] d\theta \quad (5.24)$$

を用いる. ここに, $H(r, p)$ は正定対称行列である. また, $\nu(r, p)$ は非負の実数, または,

$$H(r, p) + \frac{1}{2}\nu(r, p)C^T(p)K[e^e(r, p)]C(p) > 0 \quad (5.25)$$

が成り立つ範囲の負の実数であるとする. $H(r, p)$, $\nu(r, p)$ のいずれも, パラメータ (r, p) に依存
するものとする. (5.25) 式が成り立てば, $\nu(r, p) < 0$ であっても, $V(\tilde{x})$ の正定性は保証される.
それは, つぎのようにして示される. すなわち, (5.23) 式が成り立てば, 付録 B.2 の (注意) で
の議論と同様に,

$$0 \leq \tilde{e}^T \tilde{\varphi}(\tilde{e}) \leq \tilde{e}^T K[e^e(r, p)]\tilde{e}, \quad \forall \tilde{e} \in \mathbb{R}^m \quad (5.26)$$

が成り立つ. この (5.26) 式と $\nu(r, p) < 0$ であることより, (5.25) 式左辺の行列で定義される \tilde{x} に関する 2 次形式は (5.24) 式の $V(\tilde{x})$ の下界である. したがって, (5.25) 式が成り立てば, $V(\tilde{x})$ は正定となるのである.

さて, $V(\tilde{x})$ の \tilde{S} の状態に沿った全導関数を (5.22) 式を用いて求めると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T \{A^T(p)H(r, p) + H(r, p)A(p)\} \tilde{x} \\ &\quad + 2\tilde{x}^T \{H(r, p)B(p) - \frac{\nu(r, p)}{2} A^T(p)C^T(p)\} \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \\ &\quad - \nu(r, p) \tilde{\varphi}^T[-C(p)\tilde{x}] C(p)B(p) \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \end{aligned} \quad (5.27)$$

となる (補題 A.1 参照). さらに, (5.23) 式を用いると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) &\leq \tilde{x}^T \{A^T(p)H(r, p) + H(r, p)A(p)\} \tilde{x} \\ &\quad + 2\tilde{x}^T \{H(r, p)B(p) - \frac{\nu(r, p)}{2} A^T(p)C^T(p)\} \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \\ &\quad - \frac{\nu(r, p)}{2} \tilde{\varphi}^T[-C(p)\tilde{x}] \{B^T(p)C^T(p) + C(p)B(p)\} \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \\ &\quad + \{-C(p)\tilde{x} - K^{-1}[e^e(r, p)]\tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}]\}^T \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x}^T & \tilde{\varphi}^T[-C(p)\tilde{x}] \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} A^T(p)H(r, p) + H(r, p)A(p) \\ B^T(p)H(r, p) - \frac{\nu(r, p)}{2} C(p)A(p) - \frac{1}{2}C(p) \\ H(r, p)B(p) - \frac{\nu(r, p)}{2} A^T(p)C^T(p) - \frac{1}{2}C^T(p) \\ -K^{-1}[e^e(r, p)] - \frac{\nu(r, p)}{2} \{B^T(p)C^T(p) + C(p)B(p)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

を得る. (5.25) 式が成立し, この最後の 2 次形式が負定となる $H(r, p)$ と $\nu(r, p)$ の存在が, 偏差系 \tilde{S} の原点が大域漸近安定であるための十分条件となる.

ルーリエ系 S がパラメトリック絶対安定であるためには, すべてのパラメータ $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, このような $H(r, p)$, $\nu(r, p)$ の存在を確かめればよい. しかし, 非線形関数 φ は陽に与えられていないため, $e^e(r, p)$ は計算できず, $K[e^e(r, p)]$ を含む (5.25), (5.28) 式をそのまま安定条件に用いることはできない. そこで, 補題 5.1 で与えられた $e^e(r, p)$ の存在領域 $E^e(r, p)$ について, $E^e(r, p) \subset E$ が成り立つとき,

$$K_e(r, p) \geq K(e), \quad \forall e \in E^e(r, p) \quad (5.29)$$

を満たす正定対称行列 $K_e(r, p)$ を $K[e^e(r, p)]$ の代わりに用いることにする.

以上より, 補題 5.1 の条件のもとで, すべてのパラメータ (r, p) に対して存在の保証された平衡状態が大域漸近安定であるための LMI 条件が得られる. ところで, パラメトリック絶対安定性に必要なパラメータ (r, p) についての平衡状態の一意性は, これまでの議論では陽には述べていない. しかし, 平衡状態が大域漸近安定であれば, それはただ1つであるので, 安定条件によって一意性は保証される.

定理 5.1 任意のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して, (5.9) 式の LMI を満たす $(n + m)$ 次正方行列 $X = X(p)$ が存在し, 任意の参照入力 $r \in \mathcal{R}$ に対して,

$$E^e(r, p) \subset E \quad (5.30)$$

が成り立つとする. このとき, 任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, 2つの LMI

$$H + \frac{\nu}{2} C^T(p) K_e(r, p) C(p) > 0 \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} A^T(p)H + HA(p) & HB(p) - \frac{\nu}{2} A^T(p)C^T(p) - \frac{1}{2} C^T(p) \\ B^T(p)H - \frac{\nu}{2} C(p)A(p) - \frac{1}{2} C(p) & -K_e^{-1}(r, p) - \frac{\nu}{2} [B^T(p)C^T(p) + C(p)B(p)] \end{bmatrix} < 0 \quad (5.32)$$

を満たす正定対称行列 $H = H(r, p)$ と実数 $\nu = \nu(r, p)$ が存在するならば, ルーリエ系 S はパラメトリック絶対安定である.

定理 5.1 の (5.31) 式の LMI は, $\nu(r, p) < 0$ の場合に (5.25) 式を保証するための条件である. $\nu(r, p) \geq 0$ であれば, (5.31) 式は常に成り立っている.

ところで, p を固定したとき,

$$E_{\mathcal{R}}^e(p) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} E^e(r, p) \quad (5.33)$$

と置けば,

$$K_{\mathcal{R}}(p) \geq K(e), \forall e \in E_{\mathcal{R}}^e(p) \quad (5.34)$$

を満たす正定対称行列 $K_{\mathcal{R}}(p)$ に対して,

$$K_{\mathcal{R}}(p) \geq K_e(r, p), \forall r \in \mathcal{R} \quad (5.35)$$

が成り立つ. したがって, (5.30) 式中の $E^e(r, p)$ を $E_{\mathcal{R}}^e(p)$ で, (5.31), (5.32) 式中の $K_e(r, p)$ を $K_{\mathcal{R}}(p)$ で置き換えると, 保守的ではあるが, r に無関係な $H(p)$ と $\nu(p)$ が存在することが安定条

件となる。つまり、パラメトリック絶対安定性の条件をパラメータ p のみに依存する形に簡単化できる。

5.4 ポリトープ型線形部をもつルーリエ系

前節で与えたパラメトリック絶対安定性のための LMI 条件は、パラメータ (r, p) を含んでいる。そのため、そのままでは、無限個の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ について、LMI 条件を確かめる必要がある。ところで、一般にパラメータを含むシステムがポリトープ型の場合、LMI の解の存在を保証するには、ポリトープの端点に対応するパラメータを含まない有限個の LMI に共通の解の存在を確かめれば十分である結果が多い [6, 20]。

そこで、ここでも、線形部が有限個の線形システムの凸結合からなるルーリエ系 \mathcal{S} を考えよう。このようなルーリエ系をポリトープ型ルーリエ系と呼び、そのパラメトリック絶対安定条件を、パラメータを含まない LMI で表わし、数値例を示そう。

いま、線形部の係数行列が、 l 個の端点行列の組 (A_i, B_i, C_i) ($i = 1, 2, \dots, l$) の凸結合で表わされるとする。すなわち、

$$A(p) = \sum_{i=1}^l p_i A_i, \quad B(p) = \sum_{i=1}^l p_i B_i, \quad C(p) = \sum_{i=1}^l p_i C_i \quad (5.36)$$

であり、パラメータ $p = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]^T$ の領域は、

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in \mathbb{R}^l : \sum_{i=1}^l p_i = 1, \ p_i \geq 0, \ i = 1, 2, \dots, l \right\} \quad (5.37)$$

を満たすとする。

まず、平衡状態の存在条件と $e^e(r, p)$ の存在領域について考える。補題 5.1 では、各 $p \in \mathcal{P}$ ごとに (5.9) 式を満たす行列 $X = X(p)$ の存在を条件としていたが、ここでは、すべての $p \in \mathcal{P}$ に共通の行列 X の存在で条件を置き換える。そうすれば、条件は保守的なものとなるが、LMI はパラメータ p について線形となるため、補題 5.1 の条件は有限個の LMI でつぎのように表わされる。

補題 5.2 l 個の LMI

$$R_i = \begin{bmatrix} M_i^T X + X^T M_i & X^T L_i + J \\ L_i^T X + J^T & 2K^{-1}(0) \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (5.38)$$

に共通の解 X が存在すれば, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, ポリトープ型ルーリエ系 S の平衡状態は存在する. そして, この条件のもとで, すべての (r, p) に対する制御偏差の平衡点 $e^e(r, p)$ の存在領域は,

$$\overline{E}_{\mathcal{R}}^e = \left\{ e \in \mathbb{R}^m : \|e\| \leq \frac{2\sigma_{\max}(X_2)}{\min_i \lambda_{\min}[R_i]} \max_{r \in \mathcal{R}} \|r\| \right\} \quad (5.39)$$

である. ここに,

$$M_i = \begin{bmatrix} A_i & O_{n \times m} \\ C_i & I_m \end{bmatrix}, \quad L_i = \begin{bmatrix} B_i \\ O_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

であり, X_2 は X の下側 m 行からなる部分行列である.

この条件は, 補題 5.1 において, $R(p) = \sum_{i=1}^l p_i R_i$, $\lambda_{\min}[R(p)] \geq \min_i \lambda_{\min}[R_i]$ であることから導かれる.

つぎに, 定理 5.1 の安定条件について考える. (5.39) 式の $\overline{E}_{\mathcal{R}}^e$ が, $\overline{E}_{\mathcal{R}}^e \subset E$ を満たすとする. このとき,

$$\overline{K}_{\mathcal{R}} \geq K(e), \quad \forall e \in \overline{E}_{\mathcal{R}}^e \quad (5.41)$$

を満たす p に依らない行列 $\overline{K}_{\mathcal{R}}$ で, 定理 5.1 における $K_e(r, p)$ を置き換える. さらに, 定理 5.1 の $H(r, p)$, $\nu(r, p)$ を, それぞれ, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に共通な H , ν で置き換える. このとき, (5.31), (5.32) 式は, 行列

$$U_{ik} = H + \frac{\nu}{2} C_i^T \overline{K}_{\mathcal{R}} C_k, \quad (5.42)$$

$$Q_{ik} = \begin{bmatrix} A_i^T H + H A_i & H B_i - \frac{\nu}{2} A_i^T C_k^T - \frac{1}{2} C_i^T \\ B_i^T H - \frac{\nu}{2} C_k A_i - \frac{1}{2} C_i & -\overline{K}_{\mathcal{R}}^{-1} - \frac{\nu}{2} [B_i^T C_k^T + C_k B_i] \end{bmatrix}, \quad i, k = 1, 2, \dots, l \quad (5.43)$$

を用いて, それぞれ,

$$\sum_{i=1}^l p_i \sum_{k=1}^l p_k U_{ik} = \sum_{i=1}^l p_i^2 U_{ii} + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=i+1}^l p_i p_k \{U_{ik} + U_{ki}\} > 0 \quad (5.44)$$

$$\sum_{i=1}^l p_i \sum_{k=1}^l p_k Q_{ik} = \sum_{i=1}^l p_i^2 Q_{ii} + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=i+1}^l p_i p_k \{Q_{ik} + Q_{ki}\} < 0 \quad (5.45)$$

と表わされる. これより, つぎの定理を得る.

定理 5.2 (5.38) 式の l 個の LMI に共通の解 X が存在し、与えられた参照入力 r の領域 \mathcal{R} に対して、

$$\overline{E}_{\mathcal{R}}^c \subset E \quad (5.46)$$

が成り立つとする。このとき、 $l(l+1)$ 個の LMI

$$U_{ii} > 0, \quad U_{ik} + U_{ki} \geq 0, \quad (5.47)$$

$$Q_{ii} < 0, \quad Q_{ik} + Q_{ki} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad k = i+1, i+2, \dots, l \quad (5.48)$$

に共通の正定対称行列 H と実数 ν が存在するならば、ポリトープ型ルーリエ系 S はパラメトリック絶対安定である。

例 5.1 ルーリエ系 S において、線形部の係数行列は、(5.36)、(5.37) 式で表わされ、その端点行列が、

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

であるとする。そして、参照入力 r の領域 \mathcal{R} は、 $\mathcal{R} = \{r \in \mathbb{R}^2 : \|r\| \leq 1\}$ であるとする。また、非線形部に対する (5.3) 式のセクタ条件における $K(e)$ は、 $E = \{e \in \mathbb{R}^2 : \|e\| < 6\}$ に対して、

$$K(e) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 + 0.1\|e\| & 0.1 + 0.01\|e\|^2 \\ 0.1 + 0.01\|e\|^2 & 0.5 + 0.1\|e\| \end{bmatrix}, & \|e\| \leq 4 \text{ のとき} \\ \begin{bmatrix} 1.4 & 0.26 \\ 0.26 & 0.9 \end{bmatrix}, & 4 < \|e\| < 6 \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.50)$$

で与えられるとする。なお、以下で、LMI 条件を解くには、文献 [11] の数値計算ツールを用いた。計算結果の数値は、小数第 3 位を四捨五入したものである。

まず, $A(p)$ の安定性を調べる. 3つのリアプノフ不等式

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.51)$$

は, これらに共通の正定対称行列 P について解くことができ,

$$P = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.03 & 0.01 \\ 0.03 & 0.27 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.16 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

を得る. これと, (5.36) 式より,

$$A^T(p)P + P A(p) < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (5.53)$$

であるから, $A(p)$ は安定である.

つぎに, S の平衡状態の存在を確かめる. (5.38) 式の3つの LMI をこれらに共通の X について解くと,

$$X = \begin{bmatrix} -0.22 & 0.23 & -0.07 & 0.92 & 0.07 \\ 0.11 & -0.57 & 0.39 & 0.62 & 0.09 \\ -0.07 & -0.14 & -0.10 & 0.14 & 0.63 \\ 1.49 & -0.32 & -2.22 & 2.11 & -0.96 \\ 1.16 & 3.88 & 0.57 & 1.01 & 2.21 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

を得る. したがって, S の平衡状態は存在する. この X に対して, $\sigma_{\max}(X_2) = 4.76$, $\min_i \lambda_{\min}[R_i] = 1.92$ であるから, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対する平衡点 $e^e(r, p)$ の存在領域は, (5.39) 式より,

$$\overline{E}_{\mathcal{R}}^e = \{e \in \mathbb{R}^2 : \|e\| \leq 4.96\} \quad (5.55)$$

となる.

さて, 存在が確認できた平衡状態の安定性を調べよう. (5.55) 式より, $\overline{E}_{\mathcal{R}}^e \subset E$ である. このとき,

$$\overline{K}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1.48 & 0.18 \\ 0.18 & 0.98 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

は, (5.41) 式を満たす $K(e)$ ($e \in \overline{E}_{\mathcal{R}}^e$) の上界である. これを用いて, (5.47), (5.48) 式の12個の LMI をこれらに共通な H, ν について解くと, 正定対称行列

$$H = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.03 & 0.01 \\ 0.03 & 0.26 & 0.00 \\ 0.01 & 0.00 & 0.16 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

と実数 $\nu = 0.14$ が得られる。したがって、安定条件も満たされ、ポリトープ型ルーリエ系 S はパラメトリック絶対安定であることが確かめられた。

以上では、ポリトープ型線形部として、(5.36) 式のように l 個の定数行列の組 $(A_1, B_1, C_1), \dots, (A_l, B_l, C_l)$ によって定義される凸結合を考えた。つまり、 $A(p), B(p), C(p)$ のパラメータ依存性は独立ではない。それに対して、より一般的なポリトープ型線形部として、 $A(p)$ は A_1, \dots, A_{l_a} の凸結合、 $B(p)$ は B_1, \dots, B_{l_b} の凸結合、 $C(p)$ は C_1, \dots, C_{l_c} の凸結合の場合も考えられる。このような線形部は、すべての $A_i, B_j, C_k, i = 1, \dots, l_a, j = 1, \dots, l_b, k = 1, \dots, l_c$ の組み合わせによって決まる $l_a l_b l_c$ 個の (A_i, B_j, C_k) によって定義された (5.36) 式の形の凸結合で表現でき、この場合に対しても定理 5.2 は有効である。

5.5 ブロック対角型非線形部をもつルーリエ系

これまで非線形部を表わす φ は m 入力 m 出力の 1 つの関数と考えてきた。しかし、実際の制御系においては、非線形部を互いに独立な複数のブロックに分けることができる場合も多い。そこで、本節では、ブロック数が 2 の場合について、5.2, 5.3 節の結果を拡張し、構造を考慮することによって、LMI 条件を緩めることができることを示す。なお、3 以上のブロック数の場合への拡張や、ポリトープ型線形部をもつ場合に対する条件の導出も同様である。

いま、ルーリエ系 S において、非線形関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は、互いに独立な 2 個のブロックから成り、

$$\varphi(e) = \begin{bmatrix} \varphi_1(e_1) \\ \varphi_2(e_2) \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

と表わされるとする。ここに、 $e = [e_1^T \ e_2^T]^T$, $e_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ($i = 1, 2$) で、 $m_1 + m_2 = m$ とする。そして、各ブロックを表わす関数 $\varphi_i: \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ は連続微分可能で、それぞれが、(5.2)~(5.4) 式に対応する条件

$$\{D\varphi_i(e_i)\}^T = D\varphi_i(e_i), \quad \forall e_i \in \mathbb{R}^{m_i} \quad (5.59)$$

$$\{\varphi_i(e_i + \tilde{e}_i) - \varphi_i(e_i)\}^T K_i^{-1}(e_i) \{\varphi_i(e_i + \tilde{e}_i) - \varphi_i(e_i)\} \leq \tilde{e}_i^T \{\varphi_i(e_i + \tilde{e}_i) - \varphi_i(e_i)\},$$

$$\forall e_i \in E_i, \forall \tilde{e}_i \in \mathbb{R}^{m_i} \quad (5.60)$$

$$\varphi_i(0) = 0 \quad (5.61)$$

を満たすとする. ここに, $D\varphi_i(e_i)$ は $\varphi_i(e_i)$ のヤコビ行列, E_i は \mathbb{R}^{m_i} 内のある原点近傍, $K_i(e_i)$ は $e_i \in E_i$ の連続関数を成分とする正定対称行列である. このような非線形関数 φ を, ここでは, ブロック対角型非線形関数と呼ぶことにする.

(5.59)~(5.61) 式より,

$$K(e) = \text{diag}\{K_1(e_1), K_2(e_2)\}, \quad (5.62)$$

$E = E_1 \times E_2$ とおけば, ブロック対角型非線形関数 φ は, (5.2)~(5.4) 式を満たしている. そのため, 定理 5.1 は本節で考えている非線形部をもつルーリエ系に対しても成り立つ. しかし, 非線形関数のブロック構造を考慮に入れば, 定理 5.1 よりも緩い条件でパラメトリック絶対安定性を保証することができる可能性がある.

まず, 平衡状態の存在条件と $e^e(r, p)$ の存在領域を示そう.

補題 5.3 任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (5.59)~(5.61) 式を満たす任意のブロック対角型非線形関数 φ に対して, ルーリエ系 S の平衡状態が存在するための十分条件は, 任意のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して, LMI

$$\begin{bmatrix} M^T(p)X + X^T M(p) & X^T L(p) + J\Gamma \\ L^T(p)X + \Gamma J^T & 2\Gamma K^{-1}(0) \end{bmatrix} > 0 \quad (5.63)$$

を満たす $(n+m)$ 次正方行列 $X = X(p)$ と対角行列 $\Gamma = \Gamma(p) = \text{diag}\{\gamma_1(p)I_{m_1}, \gamma_2(p)I_{m_2}\}$, $\gamma_i(p) > 0$ ($i = 1, 2$) が存在することである. また, この条件のもとでの

$$e^e(r, p) = \begin{bmatrix} e_1^e(r, p) \\ e_2^e(r, p) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

の部分ベクトル $e_i^e(r, p)$ ($i = 1, 2$) の存在領域は,

$$E_i^e(r, p) = \left\{ e_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \|e_i\| \leq \frac{2\|X_2^T(p)r\|}{\lambda_{\min}[\hat{R}(p)]} \right\} \quad (5.65)$$

である. ここに, $X_2(p)$ は $X(p)$ の下側 m 行からなる部分行列であり, $\hat{R}(p)$ は $X = X(p)$, $\Gamma = \Gamma(p)$ と置いた (5.63) 式左辺を表わす.

この補題 5.3 は, 補題 5.1 の証明中の (5.15) 式において, (5.8) 式の原点におけるセクタ条件を用いる部分を, (5.60) 式で $e_i = 0$ ($i = 1, 2$) とおいた φ_i の原点におけるセクタ条件の重みつき

和で置き換えて得られる。すなわち，不等式

$$\begin{aligned}
& 2z^T X^T(p)\{f(z, r) - f(0, r)\} \\
& \geq 2z^T X^T(p)\{f(z, r) - f(0, r)\} + 2 \sum_{i=1}^2 \gamma_i(p)\{\varphi_i^T(e_i)K^{-1}(0)\varphi_i(e_i) - e_i^T \varphi(e_i)\} \\
& = \begin{bmatrix} z^T & \varphi^T(e) \end{bmatrix} \hat{R}(p) \begin{bmatrix} z \\ \varphi(e) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

が成り立つことによる。

つぎに，安定解析を考えよう。(5.20)式の偏差系 \tilde{S} における $\tilde{\varphi}$ は

$$\tilde{\varphi}(\tilde{e}) = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1(\tilde{e}_1) \\ \tilde{\varphi}_2(\tilde{e}_2) \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

と表わすことができる。そこで，正定関数 $V(\tilde{x})$ を

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T H(r, p)\tilde{x} + \sum_{i=1}^2 \nu_i(r, p) \int_0^1 [-C_i(p)\tilde{x}]^T \tilde{\varphi}_i[-\theta C_i(p)\tilde{x}] d\theta \tag{5.68}$$

で定義し，5.3節での(5.24)式のリアプノフ関数の代わりに用いよう。ただし， $C_i(p)$ ($i = 1, 2$)は行列 $C(p)$ の行を e_i の次元に応じて分割した部分行列， $H(r, p)$ は正定対称行列， $\nu_i(r, p)$ ($i = 1, 2$)は，

$$H(r, p) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \min\{\nu_i(r, p), 0\} C_i^T(p) K_i [e_i^e(r, p)] C_i(p) > 0 \tag{5.69}$$

が成り立つ範囲の実数であるとする。前節の $\nu(r, p)$ と(5.25)式についての議論と同様にして，(5.69)式が満たされていれば $\nu_i(r, p)$ が負であっても $V(\tilde{x})$ の正定性は保証される。

$V(\tilde{x})$ の \tilde{S} の状態に沿った全導関数を求め，(5.60)式を用いると，

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{x}) & \leq \tilde{x}^T \{A^T(p)H(r, p) + H(r, p)A(p)\} \tilde{x} \\
& \quad + 2\tilde{x}^T \{H(r, p)B(p) - \frac{1}{2}A^T(p)C^T(p)N(r, p)\} \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \\
& \quad - \tilde{\varphi}^T[-C(p)\tilde{x}] N(r, p) C(p) B(p) \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \\
& \quad + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(r, p) \{-C_i(p)\tilde{x} - K_i^{-1}(e_i^e(r, p))\tilde{\varphi}_i[-C_i(p)\tilde{x}]\}^T \tilde{\varphi}_i[-C_i(p)\tilde{x}] \\
& = \begin{bmatrix} \tilde{x}^T & \tilde{\varphi}^T[-C(p)\tilde{x}] \end{bmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{bmatrix} A^T(p)H(r, p) + H(r, p)A(p) \\ B^T(p)H(r, p) - \frac{1}{2}N(r, p)C(p)A(p) - \frac{1}{2}\Lambda(r, p)C(p) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & H(r,p)B(p) - \frac{1}{2}A^T(p)C^T(p)N(r,p) - \frac{1}{2}C^T(p)\Lambda(r,p) \\ & -\Lambda(r,p)K^{-1}[e^e(r,p)] - \frac{1}{2}[B^T(p)C^T(p)N(r,p) + N(r,p)C(p)B(p)] \end{aligned} \right] \\ & \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\varphi}[-C(p)\tilde{x}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.70)$$

を得る. ここに, $N(r,p) = \text{diag}\{\nu_1(r,p)I_{m_1}, \nu_2(r,p)I_{m_2}\}$ であり, $\lambda_i(r,p)$ ($i = 1, 2$) は非負数, そして, $\Lambda(r,p) = \text{diag}\{\lambda_1(r,p)I_{m_1}, \lambda_2(r,p)I_{m_2}\}$ である.

この $V(\tilde{x})$, $\dot{V}(\tilde{x})$ に対して, 5.3 節における安定解析と同様の議論を行う. その際, $e_i^e(r,p)$ ($i = 1, 2$) の存在領域 $E_i^e(r,p)$ について, $E_i^e(r,p) \subset E_i$ が成り立つとする. そして,

$$K_{ie}(r,p) \geq K_i(e_i), \quad \forall e_i \in E_i^e(r,p) \quad (5.71)$$

を満たす $K_{ie}(r,p)$ からなる行列

$$K_e(r,p) = \text{diag}\{K_{1e}(r,p), K_{2e}(r,p)\} \quad (5.72)$$

を用いて, ブロック対角型非線形部をもつルーリエ系に対するつぎの定理を得る.

定理 5.3 任意のパラメータ $p \in \mathcal{P}$ に対して, (5.63) 式の LMI を満たす $(n+m)$ 次正方行列 $X = X(p)$ と正定対角行列 $\Gamma = \Gamma(p) = \text{diag}\{\gamma_1(p)I_{m_1}, \gamma_2(p)I_{m_2}\}$ が存在し, 任意の参照入力 $r \in \mathcal{R}$ に対して,

$$E_i^e(r,p) \subset E_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.73)$$

が成り立つとする. このとき, 任意の $(r,p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, LMI

$$H + \frac{1}{4}C^T(p)\{N - |N|\}K_e(r,p)C(p) > 0 \quad (5.74)$$

$$\left[\begin{aligned} & A^T(p)H + HA(p) \\ & B^T(p)H - \frac{1}{2}NC(p)A(p) - \frac{1}{2}\Lambda C(p) \\ & HB(p) - \frac{1}{2}A^T(p)C^T(p)N - \frac{1}{2}C^T(p)\Lambda \\ & -\Lambda K_e^{-1}(r,p) - \frac{1}{2}[B^T(p)C^T(p)N + NC(p)B(p)] \end{aligned} \right] < 0 \quad (5.75)$$

を満たす正定対称行列 $H = H(r,p)$, 対角行列 $N = N(r,p) = \text{diag}\{\nu_1(r,p)I_{m_1}, \nu_2(r,p)I_{m_2}\}$, 半正定対角行列 $\Lambda = \Lambda(r,p) = \text{diag}\{\lambda_1(r,p)I_{m_1}, \lambda_2(r,p)I_{m_2}\}$ が存在するならば, ルーリエ系 \mathcal{S} は

パラメトリック絶対安定である。ここに、

$$|N| = \text{diag}\{|\nu_1|I_{m_1}, |\nu_2|I_{m_2}\} \quad (5.76)$$

である。

以上の議論において、 $\gamma_1(p) = \gamma_2(p) = 1$, $\nu_1(r, p) = \nu_2(r, p) = \nu(r, p)$, $\lambda_1(r, p) = \lambda_2(r, p) = 1$ とすれば、定理 5.3 は定理 5.1 と一致する。したがって、非線形関数 φ がブロック対角である場合には、定理 5.3 は定理 5.1 を含み、より緩いパラメトリック絶対安定条件を与えているといえる。

なお、定理 5.1 の導出過程においても、正数 $\gamma(p)$ 、非負数 $\lambda(r, p)$ を導入することは可能である。しかし、それらを 1 とおいても、それらに自由度を与えても、LMI 条件の成立が等価であることを容易に示すことができる。したがって、定理 5.1 では $\gamma(p)$ や $\lambda(p)$ が現れない表現を採用した。

5.6 結言

線形部の係数行列にパラメータを含む多入力多出力ルーリエ系に対して、パラメトリック絶対安定条件をパラメータを含む LMI 条件で与えた。そして、ポリトープ型ルーリエ系に対しては、より保守的ではあるが、既存の数値計算ツールで判定可能な LMI 条件を示した。また、非線形部がブロック対角型の場合には、LMI 条件を緩めることができることを示した。

第 6 章

非線形制御系のパラメトリック絶対安定性

6.1 緒言

パラメータを含む安定な時不変線形部とセクタ条件を満たす静的な非線形部から成るルーリエ系に対して、第 2 章では、パラメトリック絶対安定性という概念を定義した。そして、第 3~5 章では、そのための十分条件を与えた。その安定性は、参照入力とパラメータの変動による平衡状態の変化を考慮した安定性である。本章の目的は、その結果をより一般的なフィードバック制御系に拡張することである。

フィードバック制御系は、制御対象とコントローラから成る。そして、その制御対象の入力端、あるいは、コントローラの出力端のいずれかに静的な非線形特性を含む場合がよくある。たとえば、アクチュエータが非線形特性を含む場合などである。本章では、そのような非線形制御系として、Fig. 6.1 で表わされる構造をもつフィードバック系 S を考える。ここに、 \mathcal{L} はパラメータを含む線形制御対象、 \mathcal{L}_c は線形コントローラ、 \mathcal{N} は静的な非線形要素で、それらはすべて時間不変とする。

また、制御対象がサーボモータを要素としてもったり、PI コントローラが用いられるなど、フィー

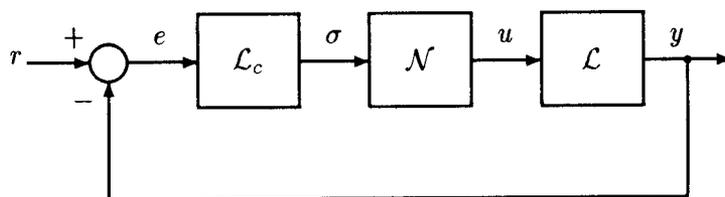


Fig. 6.1. Nonlinear control system S

ドバックループ内に原点極が含まれる場合も多い。そのため、本章では、 \mathcal{L} と \mathcal{L}_c は原点極を含み得るとする。

このようなシステム S は、参照入力と不確かなパラメータをもつルーリエ系を、 $\mathcal{L}_c = 1$ という、特殊な場合として含んでいる。したがって、第2章での指摘が当てはまり、参照入力や制御対象のパラメータの変動によって平衡状態が変化し、そのために安定性も変化し得る。本章では、このような非線形制御系 S に対し、パラメトリック絶対安定性を考える。非線形要素 \mathcal{N} は指定されたセクタ条件を満たす任意のものであり、参照入力やパラメータの変動はある有界なものとする。ここでは、簡単のため、非線形制御系 S は1入力1出力とし、 S がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を、パラメータを含むポポフ型の条件により与える。

ところで、コントローラには、PI コントローラのように、チューニング・パラメータを含むものがある。その値の変更は、制御対象のパラメータ変動と同様、平衡状態を変化させ、安定性に影響する。そこで、パラメトリック絶対安定性の概念と十分条件を、コントローラ \mathcal{L}_c がパラメータを含む場合にも拡張する。

6.2 パラメトリック絶対安定性の定義

Fig. 6.1 において、 \mathcal{L} は、係数行列にパラメータ $p \in \mathbb{R}^l$ を含む1入力1出力線形制御対象で、

$$\mathcal{L}: \begin{cases} \dot{x} = A(p)x + b(p)u \\ y = c(p)x \end{cases} \quad (6.1)$$

で与えられるとする。ここに、 $x \in \mathbb{R}^n$ は \mathcal{L} の状態であり、パラメータ p は、有界閉領域 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l$ を変動領域とする定数ベクトルで、公称値を p^* とする。 \mathcal{L} の操作入力 $u \in \mathbb{R}$ から制御出力 $y \in \mathbb{R}$ までの伝達関数を $g(s, p) = c(p)[sI - A(p)]^{-1}b(p)$ で表わす。

\mathcal{L}_c は、参照入力 $r \in \mathbb{R}$ と y との制御偏差

$$e = r - y \quad (6.2)$$

を入力とする線形コントローラで、

$$\mathcal{L}_c: \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + b_c e \\ \sigma = c_c x_c + d_c e \end{cases} \quad (6.3)$$

で与えられるとする。 $x_c \in \mathbb{R}^m$ は \mathcal{L}_c の状態であり、参照入力 r は、その値を閉区間 $\mathcal{R} = [\underline{r}, \bar{r}]$ ($\underline{r} \leq 0 \leq \bar{r}$) にとる定数で、公称値を 0 とする。 \mathcal{L}_c の入力 e から出力 $\sigma \in \mathbb{R}$ までの伝達関数を

$g_c(s) = c_c(sI - A_c)^{-1}b_c + d_c$ で表わす。ここでは、コントローラ \mathcal{L}_c はパラメータを含まないとする。なお、後に、コントローラにチューニングパラメータを含む場合へと議論を拡張する。

制御対象 \mathcal{L} の係数行列 $A(p)$, $b(p)$, $c(p)$ は、パラメータ $p \in \mathcal{P}$ の連続関数を成分とする行列で、 $(A(p), b(p))$ は可制御対、 $(c(p), A(p))$ は可観測対であるとする。そして、行列 $A(p)$ は、つぎのいずれかの仮定を満たすとする。

(A1) すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、 $A(p)$ は安定、すなわち、固有値の実部が負である。

(A2) すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $A(p)$ は零固有値をただ1つもち、それ以外の固有値は、実部が負である。

また、コントローラ \mathcal{L}_c において、 (A_c, b_c) , (c_c, A_c) は、それぞれ、可制御対、可観測対であるとし、行列 A_c は、つぎのいずれかの仮定を満たすとする。

(B1) A_c は安定。

(B2) A_c は零固有値をただ1つもち、それ以外の固有値は、実部が負である。

すなわち、 \mathcal{L} , \mathcal{L}_c は、安定であるか、または、原点極を1つだけ含むとする。

ところで、仮定 (A2) と (B2) が同時に成り立つ場合には、開ループ系の線形部は全体として原点極を2個含むことになり、参照入力やパラメータに変動がない場合でも、ポポフの安定条件では S の安定性を保証できない [2]。そのため、本章ではこのような場合は考えないことにする。さらに、仮定 (A1) と (B2)、または、(A2) と (B1) が成り立つ場合には、 \mathcal{L} と \mathcal{L}_c は原点に零点をもたないとする。

さて、 \mathcal{N} は、 σ を入力、 u を出力とする静的な非線形要素で、

$$\mathcal{N}: u = \varphi(\sigma) \quad (6.4)$$

で表わす。これは、たとえば、アクチュエータの非線形特性を表わすものである。この非線形関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、0 を内部に含むある有界閉区間 Σ について、

$$\begin{aligned} k_m(\sigma)\bar{\sigma}^2 \leq \bar{\sigma}[\varphi(\sigma + \bar{\sigma}) - \varphi(\sigma)] \leq k_M(\sigma)\bar{\sigma}^2, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \forall \bar{\sigma} \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

を満たすとする。ここに、 $k_m(\sigma)$, $k_M(\sigma)$ は $\sigma \in \Sigma$ によって決まり、連続で、 $k_m(\sigma) \geq 0$, $k_M(\sigma) > 0$ である。この仮定は、点 $\sigma \in \Sigma$ における φ のセクタ条件であり、 $\varphi(\sigma)$ が Σ の内部において単調非減少関数であることを要求している。 Σ の外では増大、または、減少の割合に制限はない。

(6.1), (6.3), (6.4) 式より, システム S は,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(p)x + b(p)\varphi(c_c x_c + d_c r - d_c c(p)x), \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + b_c[r - c(p)x], \quad r \in \mathcal{R}, p \in \mathcal{P}\end{aligned}\quad (6.6)$$

と表わされる. したがって, S は, \mathcal{L} と \mathcal{L}_c 両方の状態 x, x_c をその状態 $z = [x^T x_c^T]^T$ とする非線形システムである.

このシステム S は, $\mathcal{L}_c = 1$ の場合, すなわち, \mathcal{L}_c の伝達関数が $g_c(s) \equiv 1$ の場合であるルーリエ系を特殊な場合として含んでいる. この場合については, 第2章で, 参照入力 r とパラメータ p の変化に伴って平衡状態が変化し得ることを示した. したがって, 本章においても, r, p の両方をパラメータと考える.

(r, p) が公称値 $(0, p^*) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ にあるとき, 公称系 S^*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(p^*)x + b(p^*)\varphi(c_c x_c - d_c c(p^*)x), \\ \dot{x}_c &= A_c x_c - b_c c(p^*)x\end{aligned}\quad (6.7)$$

の平衡状態は, 原点にある. そのため, 公称系 S^* の安定性は原点の大域漸近安定性を意味する. したがって, 公称系 S^* では, 非線形関数に対して, (6.5) 式で $\sigma = 0$ とおいた原点におけるセクタ条件

$$k_m(0)\bar{\sigma}^2 \leq \bar{\sigma}\varphi(\bar{\sigma}) \leq k_M(0)\bar{\sigma}^2, \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathbb{R} \quad (6.8)$$

のみを考えて, システム S^* の安定解析を行えばよい. この場合には, \mathcal{L} と \mathcal{L}_c をまとめて線形部と見なせば, 通常の絶対安定性 [2] の議論に帰着させることができる.

しかし, (r, p) が公称値から変化すると, $\mathcal{L}_c = 1$ の場合に対して第2章で示したように, 平衡状態が存在しても, それは原点とは限らない. そのため, この場合のシステム S の安定性を考えるには, 移動した平衡点においても非線形関数 φ がセクタ条件を満たす必要がある. そこで, 本章でも, 原点を含むある閉区間 Σ の各点におけるセクタ条件 (6.5) を前提としている.

ここで, 第2章で定義したパラメータの変化に伴う平衡状態の変化を考慮に入れた絶対安定性の概念を, コントローラを含む場合について記述しよう.

定義 6.1 すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ と (6.5) 式を満たす任意の非線形関数 φ に対して, システム S に平衡状態

$$z^e(r, p) = \begin{bmatrix} x^e(r, p) \\ x_c^e(r, p) \end{bmatrix}$$

がただ1つ存在し、それに対する非線形要素 \mathcal{N} への入力 $\sigma^e(r, p)$ が Σ にあるとする。このとき、この平衡状態が大域漸近安定であるならば、システム S はパラメトリック絶対安定であるという。

6.3 平衡点の存在条件と存在領域

システム S がパラメトリック絶対安定であるための条件を導出するために、ここでは、まず、平衡状態の存在性についての条件を与える。そして、つぎの安定解析で、非線形要素 \mathcal{N} の入力の平衡点 $\sigma^e(r, p)$ における φ のセクタ条件を考えるため、 $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲を求める。

(6.6) 式より、 S の平衡状態は、

$$A(p)x + b(p)\varphi(c_c x_c + d_c r - d_c c(p)x) = 0 \quad (6.9)$$

$$A_c x_c + b_c [r - c(p)x] = 0 \quad (6.10)$$

の解である。そして、(6.9)、(6.10) 式の解 $x = x^e(r, p)$, $x_c = x_c^e(r, p)$ の存在性は、

$$A(p)x + b(p)\varphi(\sigma) = 0 \quad (6.11)$$

$$\sigma = c_c x_c + d_c e \quad (6.12)$$

$$A_c x_c + b_c e = 0 \quad (6.13)$$

$$e = r - c(p)x \quad (6.14)$$

の解 $x = x^e(r, p)$, $x_c = x_c^e(r, p)$, $\sigma = \sigma^e(r, p)$, $e = e^e(r, p)$ の存在性と等価である。その存在性を、行列 $A(p)$ に対する仮定 (A1), (A2) と行列 A_c に対する仮定 (B1), (B2) の3つの組み合わせについて考える。

(I) 仮定 (A1), (B1) が成り立つ場合：仮定 (A1) より、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、 $A^{-1}(p)$ が存在するから、(6.11) 式は、

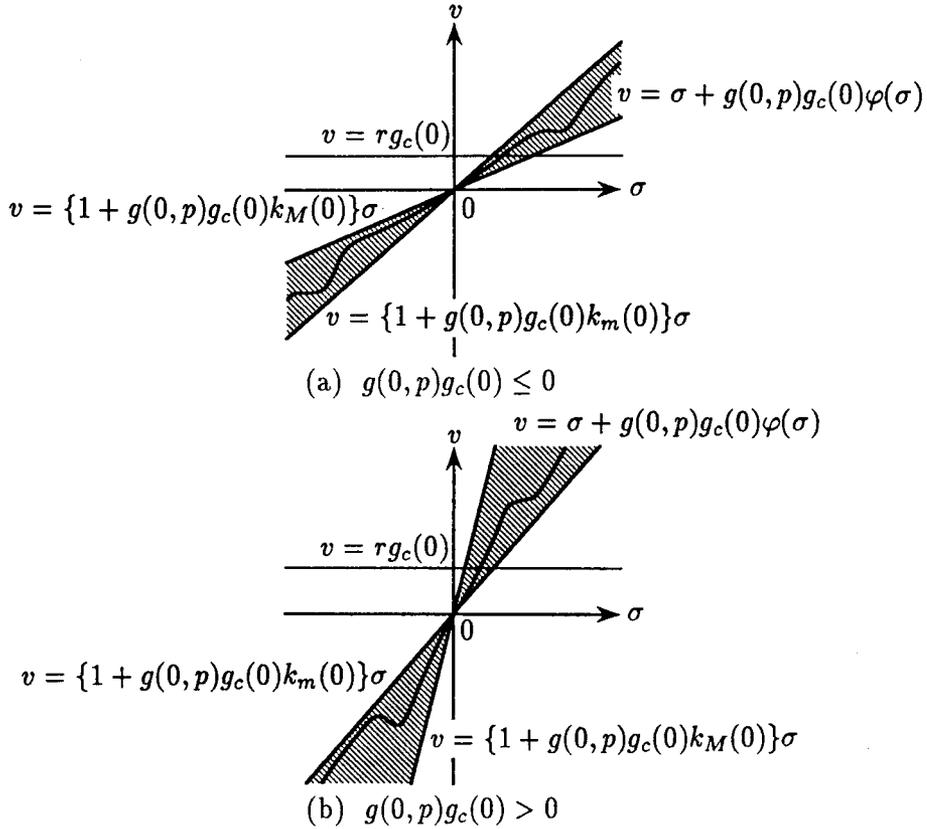
$$x = -A^{-1}(p)b(p)\varphi(\sigma) \quad (6.15)$$

と等価である。これを (6.14) 式に代入すると、

$$e = r - g(0, p)\varphi(\sigma) \quad (6.16)$$

を得る。また、仮定 (B1) より A_c^{-1} が存在するから、(6.13) 式は、

$$x_c = -A_c^{-1}b_c e \quad (6.17)$$

Fig. 6.2. Sector condition on $v = \sigma + g(0, p)g_c(0)\varphi(\sigma)$

と等価である。これを (6.12) 式に代入し、(6.16) 式を用いると、 σ についての代数方程式

$$\sigma = g_c(0)\{r - g(0, p)\varphi(\sigma)\} \quad (6.18)$$

を得る。この (6.18) 式の解 $\sigma = \sigma^e(r, p)$ が存在すれば、(6.15) 式より $x^e(r, p)$ が、そして、(6.14)、(6.17) 式より $x_c^e(r, p)$ が存在し、 S の平衡状態 $z^e(r, p)$ は存在する。

ところで、(6.18) 式の解が存在するのは、Fig. 6.2 の σv -平面上で、曲線 $v = \sigma + g(0, p)g_c(0)\varphi(\sigma)$ と直線 $v = r g_c(0)$ とが交わる時である。原点 $\sigma = 0$ における (6.5) 式のセクタ条件より、曲線 $v = \sigma + g(0, p)g_c(0)\varphi(\sigma)$ は、Fig. 6.2 に示すようなセクタに含まれる。 $\varphi(\sigma)$ の連続性より、この曲線と直線 $v = r g_c(0)$ が交点をもつための十分条件は、 $g(0, p)g_c(0) \leq 0$ の場合には、Fig. 6.2(a) から分かるように、

$$1 + g(0, p)g_c(0)k_M(0) > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (6.19)$$

または、

$$1 + g(0, p)g_c(0)k_m(0) < 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (6.20)$$

である. $g(0,p)g_c(0) > 0$ の場合は, Fig. 6.2(b) のように, そのような交点は常に存在し, しかも, (6.19) 式も常に成立する. したがって, (6.19), (6.20) 式は, 平衡状態が存在するための十分条件である. ところで, (6.20) 式の条件のもとでは, パラメータが公称値 $(r,p) = (0,p^*)$ にある場合においても, 公称系 S^* はポポフの安定条件を満たさないことがいえる. そのため, ここでは, (6.19) 式の条件のみを平衡状態の存在条件とする. この条件のもとで, 任意の $(r,p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対する $\sigma^e(r,p)$ の存在範囲 $\Sigma^e(r,p)$ は, Fig. 6.2 より,

$g(0,p)g_c(0) \leq 0, rg_c(0) \leq 0$, または, $g(0,p)g_c(0) > 0, rg_c(0) > 0$ のとき,

$$\left[\frac{rg_c(0)}{1 + g(0,p)g_c(0)k_M(0)}, \frac{rg_c(0)}{1 + g(0,p)g_c(0)k_m(0)} \right] \quad (6.21a)$$

$g(0,p)g_c(0) \leq 0, rg_c(0) > 0$, または, $g(0,p)g_c(0) > 0, rg_c(0) \leq 0$ のとき,

$$\left[\frac{rg_c(0)}{1 + g(0,p)g_c(0)k_m(0)}, \frac{rg_c(0)}{1 + g(0,p)g_c(0)k_M(0)} \right] \quad (6.21b)$$

で与えられる.

(II) 仮定 (A1), (B2) が成り立つ場合: 仮定 (A1) より, $A^{-1}(p)$ が存在するから, (6.11) 式は (6.15) 式と等価である. また, 付録 B.3 で示されるように, 仮定 (B2) と (A_c, b_c) の可制御性により, (6.13) 式が成り立つには, $e = 0$ でなければならない. すなわち, (6.16) 式より,

$$r - g(0,p)\varphi(\sigma) = 0 \quad (6.22)$$

が, 必要である. そこで, σ に関するこの代数方程式の解 $\sigma^e(r,p)$ が存在すれば, (6.12)~(6.15) 式で $\sigma = \sigma^e(r,p)$, $e = 0$ とおいた代数方程式の解 $x^e(r,p)$, $x_c^e(r,p)$ も存在することを示そう.

(6.15) 式より, $x^e(r,p)$ は $\sigma^e(r,p)$ で表わされる. また, (6.12), (6.13) 式は代数方程式

$$\begin{bmatrix} c_c \\ A_c \end{bmatrix} x_c = \begin{bmatrix} \sigma^e(r,p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

で表わされる. 付録 B.4 で示されるように, (c_c, A_c) の可観測性により, (6.23) 式の解 $x_c^e(r,p)$ は存在する. したがって, (6.22) 式の解の存在性によって, S の平衡状態 $z^e(r,p)$ の存在性がいえる. \mathcal{L} は原点に零点をもたないため, $g(0,p) \neq 0$ である. これより, (6.22) 式が解をもつための十分条件は, 原点 $\sigma = 0$ における (6.5) 式のセクタ条件より, $k_m(0) > 0$ である. この条件のもとで, 任意の $(r,p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対する $\sigma^e(r,p)$ の存在範囲 $\Sigma^e(r,p)$ は,

$r \leq 0, g(0, p) \leq 0$, または, $r > 0, g(0, p) > 0$ のとき,

$$\left[\frac{r}{g(0, p)k_M(0)}, \frac{r}{g(0, p)k_m(0)} \right] \quad (6.24a)$$

$r \leq 0, g(0, p) > 0$, または, $r > 0, g(0, p) \leq 0$ のとき,

$$\left[\frac{r}{g(0, p)k_m(0)}, \frac{r}{g(0, p)k_M(0)} \right] \quad (6.24b)$$

で与えられる.

(III) 仮定 (A2), (B1) が成り立つ場合: 仮定 (A2) と $(A(p), b(p))$ の可制御性より, 付録 B.3 と同様にして, (6.11) 式が成り立つためには,

$$\varphi(\sigma) = 0 \quad (6.25)$$

が必要である. いま, $k_m(0) > 0$ と仮定すると, 原点 $\sigma = 0$ における (6.5) 式のセクタ条件より, (6.25) 式は $\sigma = 0$ を意味する. そこで, (6.11)~(6.14) 式で, $\sigma = 0$ とおいた式を満たす $x = x^e(r, p)$, $x_c = x_c^e(r, p)$ が存在することを示そう. このとき, (6.11) 式は,

$$A(p)x = 0 \quad (6.26)$$

となる. また, (B1) より, A_c^{-1} が存在するから, (6.13) 式は (6.17) 式と等価である. これと, (6.12) 式で $\sigma = 0$ とおいた

$$c_c x_c + d_c e = 0 \quad (6.27)$$

より,

$$g_c(0)e = 0 \quad (6.28)$$

を得る. L_c は原点に零点をもたないから $g_c(0) \neq 0$ であり, これより, $e = 0$ である. したがって, (6.14) 式より,

$$r - c(p)x = 0 \quad (6.29)$$

である. (6.26), (6.29) 式は, 代数方程式

$$\begin{bmatrix} c(p) \\ A(p) \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

で表わされる. $(c(p), A(p))$ の可観測性より, 付録 B.4 と同様にして, (6.30) 式の解 $x = x^e(r, p)$ は (r, p) に対して一意に存在する. このとき, (6.17) 式より, $x_c^e(r, p) = 0$ である.

(注意) (II), (III) の平衡点解析においては, $k_m(0) > 0$ でなくとも, すなわち, $k_m(0) = 0$ であることを許しても, システム S が平衡状態をもつことがある. しかし, 線形部が原点極を含む場合には, $k_m(0) = 0$ という条件のもとでは, 公称系 S^* であっても, 次節で述べるポポフの安定条件を満たさない. そのため, ここでは $k_m(0) = 0$ の場合についての平衡点解析を省いた.

以上の (I)~(III) の場合を補題にまとめる.

補題 6.1 任意の $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, システム S の平衡状態 $z^e(r, p)$ が存在するための十分条件と, $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲 $\Sigma^e(r, p)$ は, 以下のとおりである.

(I) 仮定 (A1), (B1) の場合:

$$\text{条件: } 1 + g(0, p)g_c(0)k_M(0) > 0, \forall p \in \mathcal{P} \quad (6.19)$$

$$\sigma^e(r, p) \text{ の存在範囲 } \Sigma^e(r, p): (6.21) \text{ 式}$$

(II) 仮定 (A1), (B2) の場合:

$$\text{条件: } k_m(0) > 0$$

$$\sigma^e(r, p) \text{ の存在範囲 } \Sigma^e(r, p): (6.24) \text{ 式}$$

(III) 仮定 (A2), (B1) の場合:

$$\text{条件: } k_m(0) > 0$$

$$\sigma^e(r, p) \text{ の存在範囲: } \{0\}$$

(I) の場合の (6.19) 式の条件は,

$$g(0, p)g_c(0) \rightarrow +\infty \quad (6.31)$$

の極限において, 常に成り立つ. $|g(0, p)| < \infty$ であれば, これは, $g_c(0) \rightarrow \pm\infty$ の場合であり, このとき, (I) の場合の (6.21) 式の $\Sigma^e(r, p)$ は (II) の場合の (6.24) 式へ収束する. 一方, $|g_c(0)| < \infty$ であれば, (6.31) 式は, $g(0, p) \rightarrow \pm\infty$ の場合を表わし, (I) の場合の (6.21) 式の $\Sigma^e(r, p)$ は $\Sigma^e(r, p) = \{0\}$ となる. したがって, 補題 6.1 の (II), (III) の $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲は, (I) の場合の極限における $\Sigma^e(r, p)$ を含んでいることが分かる.

以上の平衡点解析において, (III) の場合, 非線形関数 φ によらず, 平衡状態は一意である. しかし, (I) と (II) の場合, 補題 6.1 の条件では, 平衡状態の一意性まではいえない. パラメトリック

ク絶対安定性の定義が要求する平衡状態の一意性は、補題 6.1 の条件のもとで存在がいた平衡状態の大域漸近安定性を、次節で示すことによって保証される。

6.4 パラメトリック絶対安定性のためのポポフ型条件

システム S の平衡状態 $z^e(r, p)$ が存在するとき、(6.5) 式のセクタ条件を満たすすべての φ に対して、 $z^e(r, p)$ が大域漸近安定であるための条件をポポフの安定条件により示す。そして、補題 6.1 の条件を考慮し、 S がパラメトリック絶対安定であるための条件を与える。

$p \in \mathcal{P}$ を任意に固定するとき、システム S は、平衡状態からの偏差 $\tilde{z} = z - z^e(r, p) = [\tilde{x}^T \tilde{x}_c^T]^T$ を用いると、つぎの偏差系 \tilde{S} で表わされる。

$$\begin{aligned}\tilde{L}: \quad \dot{\tilde{x}} &= A(p)\tilde{x} + b(p)\tilde{u}, \quad \tilde{y} = c(p)\tilde{x} \\ \tilde{L}_c: \quad \dot{\tilde{x}}_c &= A_c\tilde{x}_c + b_c\tilde{e}, \quad \tilde{\sigma} = c_c\tilde{x}_c + d_c\tilde{e} \\ \tilde{N}: \quad \tilde{u} &= \tilde{\varphi}(\tilde{\sigma})\end{aligned}\tag{6.32}$$

ここに、 $\tilde{x} = x - x^e(r, p)$, $\tilde{x}_c = x_c - x_c^e(r, p)$, $\tilde{e} = -\tilde{y}$,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}) = \varphi[\sigma^e(r, p) + \tilde{\sigma}] - \varphi[\sigma^e(r, p)]\tag{6.33}$$

である。この \tilde{S} の平衡状態は $\tilde{z} = [\tilde{x}^T \tilde{x}_c^T]^T = [0^T \ 0^T]^T$ である。 $\sigma^e(r, p) \in \Sigma$ であるならば、 $\sigma = \sigma^e(r, p)$ における (6.5) 式のセクタ条件と等価な

$$k_m[\sigma^e(r, p)]\tilde{\sigma}^2 \leq \tilde{\sigma}\tilde{\varphi}(\tilde{\sigma}) \leq k_M[\sigma^e(r, p)]\tilde{\sigma}^2, \quad \forall \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}\tag{6.34}$$

が成り立つ。これは、 $\tilde{\varphi}$ の原点におけるセクタ条件を表わしている。

\tilde{S} は参照入力 0 のフィードバック系であるから、その安定解析のためには、 \tilde{L} と \tilde{L}_c をまとめて 1 つの線形部と考えればよい。そうすれば、システム \tilde{S} は、伝達関数が $g(s, p)g_c(s)$ である線形部と (6.34) 式のセクタ条件を満たす非線形部 \tilde{N} からなるルーリエ系とみなすことができる。したがって、(6.5) 式を満たすすべての φ に対してシステム S の平衡状態 $z^e(r, p)$ が大域漸近安定であるためには、ルーリエ系 \tilde{S} が絶対安定であることを示せばよい。そのための条件は、ポポフの安定条件 [2] によれば、つぎのようになる。すなわち、

$$\operatorname{Re}\{[1 + j\nu(r, p)\omega]g(j\omega, p)g_c(j\omega)\} + \frac{1}{k_M[\sigma^e(r, p)]} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+\tag{6.35}$$

を満たす実数 $\nu(r, p)$ が存在し、さらに、 \mathcal{L} , \mathcal{L}_c のどちらかが原点極を1つもつ場合には、

$$k_m[\sigma^e(r, p)] > 0 \quad (6.36)$$

と、

$$sg(s, p)g_c(s)\Big|_{s=0} > 0 \quad (6.37)$$

が成り立つことである。ただし、 $\overline{\mathcal{R}}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ である。

この条件は、非線形要素 \mathcal{N} への入力平衡点 $\sigma^e(r, p)$ を含んでおり、その値が既知でなければ確かめることはできないように見える。ところで、前節では、この $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲を、(I)~(III) のそれぞれの場合について求めている。そこで、以下では、この $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲を用いて、安定条件を判定可能な条件として表わそう。

まず、(III) の場合には、補題 6.1 より、 $\sigma^e(r, p)$ は $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ の値にかかわらず、0 である。したがって、 $\sigma^e(r, p) = 0$ とおけば、(6.35) 式は r に依存せず、 p のみによって決まる実数 $\nu(r, p) = \nu(p)$ の存在と、 $k_m(0) > 0$ 、そして、(6.37) 式の成立が安定条件となる。

一方、(I), (II) の場合には、補題 6.1 の条件のもとで、 $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲 $\Sigma^e(r, p)$ は、それぞれ、(6.21), (6.24) 式で与えられている。そこで、 $k_M[\sigma^e(r, p)]$ を

$$k_M^e(r, p) = \max\{k_M(\sigma) : \sigma \in \Sigma^e(r, p)\} \quad (6.38)$$

で置き換えた

$$\operatorname{Re}\left\{1 + j\nu(r, p)\omega\right\}g(j\omega, p)g_c(j\omega) + \frac{1}{k_M^e(r, p)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathcal{R}}_+ \quad (6.39)$$

を用いれば、 $\sigma^e(r, p)$ が分からなくても、(6.35) 式は判定可能になる。

ところで、 p を任意に固定したとき、すべての $r \in \mathcal{R}$ に対して (6.39) 式を満たす $\nu(r, p)$ が存在するための必要十分条件は、(6.39) 式の $k_M^e(r, p)$ を

$$k_{\mathcal{R}}(p) = \max\{k_M^e(r, p) : r \in \mathcal{R}\} \quad (6.40)$$

で、 $\nu(r, p)$ を r に独立な $\nu(p)$ でそれぞれ置き換えて、実数 $\nu(p)$ が存在することである。この $k_{\mathcal{R}}(p)$ は、補題 6.1 の (I), (II) のそれぞれの仮定のもとで、

$$k_{\mathcal{R}}(p) = \max\{k_M(\sigma) : \sigma \in \Sigma_{\mathcal{R}}^e(p)\} \quad (6.41)$$

を用いて計算することができる。ここに、 $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p)$ は、すべての $r \in \mathcal{R}$ に対する平衡点 $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲であり、(6.21), (6.24) 式より、以下で与えられる。すなわち、(I) の場合には、

$g(0, p) \leq 0, g_c(0) \leq 0$ のとき、

$$\left[\frac{\bar{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_m(0)}, \frac{\underline{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_m(0)} \right] \quad (6.42a)$$

$g(0, p) \leq 0, g_c(0) > 0$ のとき、

$$\left[\frac{\underline{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_M(0)}, \frac{\bar{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_M(0)} \right] \quad (6.42b)$$

$g(0, p) > 0, g_c(0) \leq 0$ のとき、

$$\left[\frac{\bar{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_M(0)}, \frac{\underline{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_M(0)} \right] \quad (6.42c)$$

$g(0, p) > 0, g_c(0) > 0$ のとき、

$$\left[\frac{\underline{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_m(0)}, \frac{\bar{r}g_c(0)}{1 + g(0, p)g_c(0)k_m(0)} \right] \quad (6.42d)$$

で、(II) の場合には、

$g(0, p) < 0$ のとき、

$$\left[\frac{\bar{r}}{g(0, p)k_m(0)}, \frac{\underline{r}}{g(0, p)k_m(0)} \right] \quad (6.43a)$$

$g(0, p) > 0$ のとき、

$$\left[\frac{\underline{r}}{g(0, p)k_m(0)}, \frac{\bar{r}}{g(0, p)k_m(0)} \right] \quad (6.43b)$$

で与えられる。また、この $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p)$ を使うと、(6.36) 式も

$$k_m(\sigma) > 0, \quad \sigma \in \Sigma_{\mathcal{R}}^e(p) \quad (6.44)$$

で確かめることができる。

以上で得られた安定条件は、すべての $r \in \mathcal{R}$ に対する平衡点 $\sigma^e(r, p)$ の存在範囲 $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p)$ を含んでいる。したがって、これらの安定条件が判定可能なものとなるためには、前提として、(6.42), (6.43) 式の $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p)$ が、非線形関数に対する (6.5) 式のセクタ条件が定義されている範囲 Σ に含まれているということが必要である。

補題 6.1 と上述の議論より、システム S がパラメトリック絶対安定であるための定理を得る。

定理 6.1 つぎの (I)~(III) のいずれかが成り立つならば, システム S はパラメトリック絶対安定である.

(I) 仮定 (A1), (B1) のもとで, (6.19) 式が成り立つとき, 与えられた参照入力 r の範囲 \mathcal{R} とすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, (6.42) 式の $\Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ}(p)$ が

$$\Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ}(p) \subset \Sigma \quad (6.45)$$

を満たし,

$$\operatorname{Re}\{[1 + j\nu\omega]g(j\omega, p)g_c(j\omega)\} + \frac{1}{k_{\mathcal{R}}(p)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (6.46)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(p)$ が存在する.

(II) 仮定 (A1), (B2) のもとで, 与えられた参照入力 r の範囲 \mathcal{R} とすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, (6.43) 式の $\Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ}(p)$ が (6.45) 式を満たし, (6.37) 式と (6.44) 式が成り立ち, (6.46) 式を満たす実数 $\nu = \nu(p)$ が存在する.

(III) 仮定 (A2), (B1) のもとで, $k_m(0) > 0$ であり, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, (6.37) 式が成り立ち,

$$\operatorname{Re}\{[1 + j\nu\omega]g(j\omega, p)g_c(j\omega)\} + \frac{1}{k_M(0)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (6.47)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(p)$ が存在する.

ところで, (I) の場合, 一般には, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して線形部 \mathcal{L} , \mathcal{L}_c の定常ゲインが正, すなわち, $g(0, p) > 0$, $g_c(0) > 0$ であることが多い. この場合, (6.19) 式は満たされ, 平衡状態は常に存在する. さらに, このとき, $k_m(0) = 0$ であれば, (6.42) 式の $\Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ}(p)$ は,

$$\Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ}(p) = \mathcal{R}_c \equiv [\underline{r}g_c(0), \overline{r}g_c(0)] \quad (6.48)$$

であり, (6.41) 式の $k_{\mathcal{R}}(p)$ は, p に依存しない定数

$$k_{\mathcal{R}}(p) = k_{\mathcal{R}}^* \equiv \max\{k_M(\sigma) : \sigma \in \mathcal{R}_c\} \quad (6.49)$$

となる. この場合の安定条件を以下に述べる.

系 6.1 仮定 (A1), (B1) のもとで, $g(0, p) > 0$, $g_c(0) > 0$ であり, $k_m(0) = 0$ であるとする. このとき $\mathcal{R}_c \subset \Sigma$, かつ, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\operatorname{Re}\{[1 + j\nu\omega]g(j\omega, p)g_c(j\omega)\} + \frac{1}{k_{\mathcal{R}}^*} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (6.50)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(p)$ が存在するならば、システム S はパラメトリック絶対安定である。

仮定 (A1) を満たし、 $\mathcal{L}_c = 1$ 、 $k_m(\sigma) = 0$ ($\sigma \in \Sigma$) であれば、システム S はルーリエ系となる。本章の定理 6.1 の (I) と系 6.1 で $g_c(s) \equiv 1$ 、 $k_m(\sigma) = 0$ ($\sigma \in \Sigma$) とおいた条件は、このルーリエ系に対するもので、第3章の定理 3.1 の条件と一致している。したがって、本章で得られた結果は、ルーリエ系に対する結果を含んでいる。

定理 6.1 や系 6.1 で与えた (6.46), (6.47), (6.50) 式のポポフ型の条件は、文献 [7, 19, 21] などの結果を用いて、ポポフ軌跡によって確かめることが可能である。そのような例をコントローラにチューニングパラメータを導入した後、第 6.6 節で与える。

6.5 コントローラがパラメータを含む場合

PI コントローラのように、コントローラがチューニングパラメータを含む場合がよくある。そこで、前節で与えた定理 6.1 を、コントローラ \mathcal{L}_c がパラメータを含む場合へ拡張しよう。

Fig. 6.1 のシステム S において、 \mathcal{L} と \mathcal{N} は第 6.2 節のものとし、 \mathcal{L}_c は係数行列にパラメータ $p_c \in \mathbb{R}^{l_c}$ を含み、

$$\mathcal{L}_c: \begin{cases} \dot{x}_c = A_c(p_c)x_c + b_c(p_c)e \\ \sigma = c_c(p_c)x_c + d_c(p_c)e \end{cases} \quad (6.51)$$

で与えられるとする。 \mathcal{L}_c の e から σ までの伝達関数を $g_c(s, p_c) = c_c(p_c)[sI - A_c(p_c)]^{-1}b_c(p_c) + d_c(p_c)$ で表わす。パラメータ p_c は、有界閉領域 $\mathcal{P}_c \subset \mathbb{R}^{l_c}$ を変動領域とする定数ベクトルであるとする。

このシステム S に対して、第 6.2~6.4 節までの議論をそのまま拡張することができる。すなわち、パラメトリック絶対安定性の概念を、つぎのように述べる。

定義 6.2 すべての $(r, p, p_c) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}_c$ と (6.5) 式を満たす任意の非線形関数 φ に対して、システム S に平衡状態

$$z^e(r, p, p_c) = \begin{bmatrix} x^e(r, p, p_c) \\ x_c^e(r, p, p_c) \end{bmatrix}$$

がただ 1 つ存在し、それに対する非線形要素 \mathcal{N} への入力 $\sigma^e(r, p, p_c)$ が Σ にあるとする。このとき、この平衡状態が大域漸近安定であるならば、システム S はパラメトリック絶対安定であるという。

また、第 6.2 節の (B1), (B2) の仮定を、つぎの (B1'), (B2') で置き換える。

(B1') すべての $p_c \in \mathcal{P}$ に対して、 $A_c(p_c)$ は安定。

(B2') すべての $p_c \in \mathcal{P}$ に対して、 $A_c(p_c)$ は零固有値をただ 1 つもち、それ以外の固有値は、実部が負である。

そして、定理 6.1 の拡張により、システム S がパラメトリック絶対安定であるための条件は以下のようになる。

定理 6.2 つぎの (I')~(III') のそれぞれの場合において、システム S がパラメトリック絶対安定であるための条件は、与えられた参照入力 r の範囲 \mathcal{R} とすべてのパラメータ $p \in \mathcal{P}$, $p_c \in \mathcal{P}_c$ に対して、以下の平衡状態の存在条件と安定条件が成り立つことである。

(I') 仮定 (A1), (B1') の場合：

平衡状態の存在条件：

$$1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_M(0) > 0 \quad (6.52)$$

$\sigma^e(r, p, p_c)$ の存在範囲 $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c)$ ：

$g(0, p) \leq 0$, $g_c(0, p_c) \leq 0$ のとき、

$$\left[\frac{\bar{r}g_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_m(0)}, \frac{rg_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_m(0)} \right]$$

$g(0, p) \leq 0$, $g_c(0, p_c) > 0$ のとき、

$$\left[\frac{rg_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_M(0)}, \frac{\bar{r}g_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_M(0)} \right]$$

$g(0, p) > 0$, $g_c(0, p_c) \leq 0$ のとき、

$$\left[\frac{\bar{r}g_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_M(0)}, \frac{rg_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_M(0)} \right]$$

$g(0, p) > 0$, $g_c(0, p_c) > 0$ のとき、

$$\left[\frac{rg_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_m(0)}, \frac{\bar{r}g_c(0, p_c)}{1 + g(0, p)g_c(0, p_c)k_m(0)} \right]$$

安定条件： $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c) \subset \Sigma$ を満たし、

$$\operatorname{Re}\{[1 + j\nu\omega]g(j\omega, p)g_c(j\omega, p_c)\} + \frac{1}{k_{\mathcal{R}}(p, p_c)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (6.53)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(p, p_c)$ が存在する。ここに、

$$k_{\mathcal{R}}(p, p_c) = \max\{k_M(\sigma) : \sigma \in \Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c)\} \quad (6.54)$$

である。

(II') 仮定 (A1), (B2') の場合：

平衡状態の存在条件： $k_m(0) > 0$

$\sigma^e(r, p, p_c)$ の存在範囲 $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c)$ ： (6.43) 式

安定条件： $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c) \subset \Sigma$,

$$k_m(\sigma) > 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c) \quad (6.55)$$

$$sg(s, p)g_c(s, p_c)\Big|_{s=0} > 0 \quad (6.56)$$

が成り立ち、(6.53) 式を満たす実数 $\nu = \nu(p, p_c)$ が存在する。

(III') 仮定 (A2), (B1') の場合：

平衡状態の存在条件： $k_m(0) > 0$

$\sigma^e(r, p, p_c)$ の存在範囲： $\{0\}$

安定条件： (6.56) 式が成り立ち、

$$\operatorname{Re}\{[1 + j\nu\omega]g(j\omega, p)g_c(j\omega, p_c)\} + \frac{1}{k_M(0)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (6.57)$$

を満たす実数 $\nu = \nu(p, p_c)$ が存在する。

次節で示すように、定理 6.2 の (6.53), (6.57) 式のポポフ型の条件は、文献 [7, 19, 21] などの結果を用いて、ポポフ軌跡によって確かめることができる。

6.6 ポポフ軌跡を用いた数値例

Fig. 6.1 のシステム S が、以下の \mathcal{L} , \mathcal{L}_c , \mathcal{N} からなる場合について考える。すなわち、制御対象 \mathcal{L} は、

$$\mathcal{L}: \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0]x \quad (6.58)$$

で与えられており、パラメータ $p = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta_0]^T$ の存在領域は、

$$\mathcal{P} = \{p: \alpha_0 \in [2.8, 3.2], \alpha_1 \in [3.8, 4.2], \alpha_2 \in [3.8, 4.2], \beta_0 \in [0.9, 1.1]\} \quad (6.59)$$

であるとする。このとき、すべてのパラメータ値について、 \mathcal{L} は安定で、可制御かつ可観測である。また、 \mathcal{L} を伝達関数で表わすと、

$$g(s, p) = \frac{\beta_0}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (6.60)$$

である。

コントローラ \mathcal{L}_c は、

$$\mathcal{L}_c: \dot{x}_c = e, \quad \sigma = \kappa_p \kappa_I x_c + \kappa_I e \quad (6.61)$$

で与えられているとする。ここに、

$$e = r - y \quad (6.62)$$

であり、参照入力 r は区間 $\mathcal{R} = [-1, 1]$ の値をとるとする。パラメータ $p_c = [\kappa_p \ \kappa_I]^T$ の変動領域は、

$$\mathcal{P}_c = \{p_c: \kappa_p \in [0.2, 2], \kappa_I \in [0, 0.5]\} \quad (6.63)$$

であるとする。このとき、 \mathcal{L}_c は可制御かつ可観測であり、伝達関数で表わすと、

$$g_c(s, p_c) = \kappa_p \left(1 + \frac{\kappa_I}{s}\right) \quad (6.64)$$

である。つまり、コントローラ \mathcal{L}_c は、 κ_p , κ_I をチューニングパラメータとする PI コントローラで、原点極を1つ含んでいる。

非線形要素 \mathcal{N} は、

$$k_m(\sigma) = 0.5, \quad k_M(\sigma) = 2.5, \quad \sigma \in \Sigma = [-8, 8] \quad (6.65)$$

とおいたセクタ条件 (6.5) を満たす連続関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ によって, (6.4) 式で表わされるとする.

このシステム S は, 仮定 (A1), (B2') を満たすから, 定理 6.2 の (II') の場合の条件を満たすことを示せば, S のパラメトリック絶対安定性がいえる. $k_m(0) = 0.5 > 0$ より, 平衡状態は存在する. そして, (6.43) 式より, $\sigma^e(r, p, p_c)$ の存在範囲は,

$$\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c) = \left[-\frac{2\alpha_0}{\beta_0}, \frac{2\alpha_0}{\beta_0} \right] \quad (6.66)$$

である. いま, $2\alpha_0/\beta_0 \leq 64/9 = 7.11\dots$ であるから, $\Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c) \subset \Sigma$ は満たされている. また,

$$k_m(\sigma) = 0.5 > 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma_{\mathcal{R}}^e(p, p_c) \quad (6.67)$$

$$sg(s, p)g_c(s, p_c) \Big|_{s=0} = \frac{\kappa_P \kappa_I \beta_0}{\alpha_0} > 0 \quad (6.68)$$

であるから, (6.55), (6.56) 式も成り立つ. さらに, (6.54) 式より, $k_{\mathcal{R}}(p, p_c) = 2.5$ である.

そこで, (6.53) 式を満たす実数 $\nu(p, p_c)$ の存在性を示そう. ここでは, そのための十分条件である

$$\operatorname{Re}[(1 + j\nu_0\omega)g(j\omega, p)g_c(j\omega, p_c)] + \frac{1}{k_{\mathcal{R}}(p, p_c)} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (6.69)$$

を満たすすべての $p \in \mathcal{P}$, $p_c \in \mathcal{P}_c$ に共通の実数 ν_0 の存在性を示す. これは, ポポフ型の安定条件であり, ポポフ軌跡を用いて確かめることができる. そのために, 文献 [21] の多角形区間演算 (PIA) を用いて, 非負の ω について, すべての $(p, p_c) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}_c$ に対するポポフ軌跡が存在する領域を覆う多角形を描いたものを Fig. 6.3 に示す. これによると, 多角形軌跡を右に見る $-1/k_{\mathcal{R}}(p, p_c) = -0.4$ を通る直線を引くことができる. したがって, (6.69) 式を満たす実数 ν_0 が存在し [2], ここで考えたシステム S がパラメトリック絶対安定であることを示すことができた.

6.7 結言

パラメータを含む線形制御対象に, 静的な非線形要素を介して線形コントローラが配されているフィードバック系に対して, 参照入力とパラメータの変化による平衡状態の変化を考慮に入れたパラメトリック絶対安定性を考えた. そして, そのための十分条件を, 制御対象とコントローラが共に原点極をもたない場合, どちらか一方が原点極を1つ含む場合のそれぞれについて, パラメータを含むポポフ条件の形で与えた. また, コントローラがチューニングパラメータを含む場合へも結果を拡張し, 実システムへの適用範囲を拡げることができた. 本章では, 簡単のため,

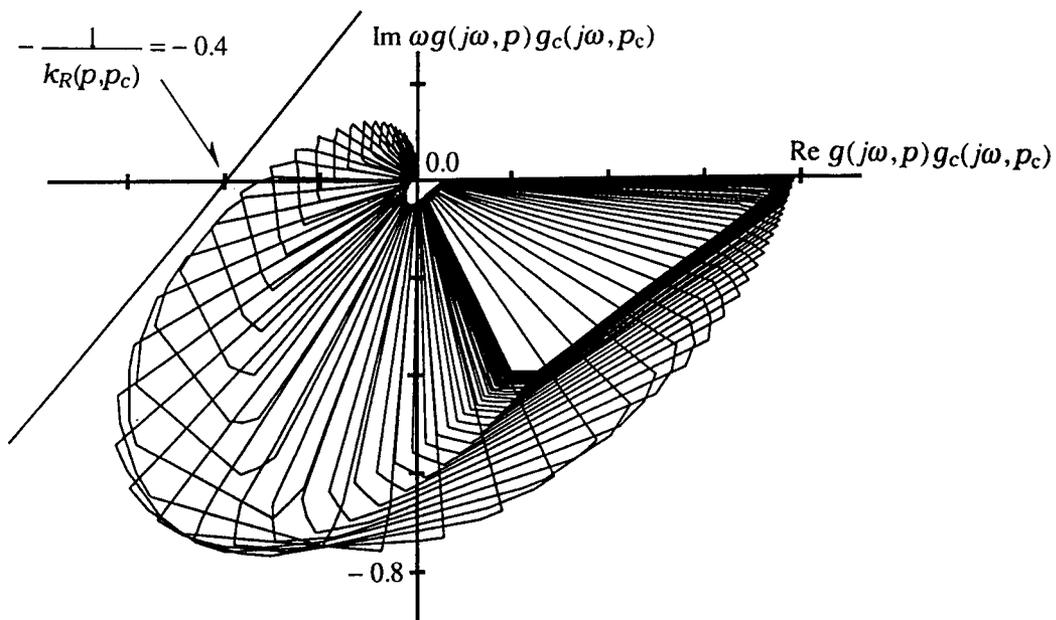


Fig. 6.3. Region of Popov plot

1入力1出力フィードバック系を対象とし、ポポフ型の条件を与えたが、多入力多出力系への拡張や、LMIによる条件の導出も同様に可能である。

第7章

結論

従来から考えられてきたパラメータを含む非線形制御系の絶対安定性では、平衡状態の存在が前提とされていた。それに対し、本研究での主張は、つぎの通りである。すなわち、このようなシステムでは、その前提は成り立つとは限らず、平衡状態の存在をまず保証した上でシステムの絶対安定性を考えるべきである。そして、平衡状態の存在を保証できたとしても、すぐに従来の安定条件を適用できるわけではない。それは、絶対安定性を考える以上、非線形要素はあるセクタ条件を満たす任意のもので、陽には与えられず、システムの平衡状態そのものを計算することは不可能であるからである。そのため、平衡状態の存在条件を与え、平衡状態に対応する非線形要素への入力存在領域を推定し、それに基づいてシステムの絶対安定条件を導出する必要がある。

本論文は、この主張を基に行なった研究結果をまとめたものである。以下にその研究成果を示す。

第2章では、パラメータを含む非線形制御系では、参照入力やパラメータによる平衡状態の変化がシステムの安定性に影響を及ぼし得ることを、最も基本的な非線形制御系であるルーリエ系を例に挙げて示した。これによって、線形部にパラメータを含むルーリエ系の安定解析では、非線形部、参照入力、パラメータによる平衡状態の存在性を考慮する必要性があることを明らかにした。そして、このような事実にもとづき、パラメトリック絶対安定性の概念を定義した。それは、非線形部があるセクタ条件を満たす任意のものであり、参照入力とパラメータが既知の有界領域内の任意の値をとり得るとき、システムの平衡状態の存在とシステムの絶対安定性を要求するものとした。

第3～5章では、線形部にパラメータを含むルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための十分条件を導出した。第3章では、1入力1出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるための条件を線形部の伝達関数を用いたポポフ型の条件で与え、それがポポフ軌跡を用いて判定で

きることを示した。そして、このポポフ型条件の多入力多出力ルーリエ系への拡張を第4章で行ない、得られた条件が多角形区間演算 (PIA) を用いて判定可能であることを示した。さらに、第5章では、多入力多出力ルーリエ系のパラメトリック絶対安定条件を、線形部が状態空間におけるポリトープ型の場合に容易に判定可能な線形行列不等式 (LMI) の形式で与え、その有効性を例で示した。

第2～5章では線形部が安定なルーリエ系を対象としてパラメトリック絶対安定性を考えていた。これに対して、第6章では、より一般的な非線形制御系として、パラメータを含む線形制御対象と線形コントローラが静的な非線形要素で結ばれているフィードバック系を対象とした。そして、線形制御対象と線形コントローラは安定であるか、どちらか一方が原点極を含み得るとした。また、線形コントローラもパラメータを含む場合も対象とし、この非線形制御系がパラメトリック絶対安定であるためのポポフ型条件を与えた。

本論文で与えた結果のうち、第4章の多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型のパラメトリック絶対安定条件は、付録Aで示した結果を用いれば、さらに非線形部のクラスを広げることが可能である。また、第6章では、ルーリエ系を一般化した非線形制御系は、簡単のため、1入力1出力系を考えたが、第4、5章での結果も拡張可能である。さらに、本論文で扱った非線形制御系を、パラメータを含む安定な非線形システムとセクタ条件を満たす静的な非線形要素からなるフィードバック系へ拡張することも今後の課題である。

安定性は、制御系が有すべき最も基本的な性質である。その安定性においても、パラメータを含む非線形制御系では、本研究が示すように、平衡状態の変化についての議論が必要である。非線形システムに対するロバスト制御系の設計においても、当然、このような議論がなされるべきである。本論文が、そのための一助となることを期待する。

付録 A

多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ型安定条件とその拡張

第3章では、線形部に不確かなパラメータを含む多入力多出力ルーリエ系がパラメトリック絶対安定であるためのポポフ型条件を導出した。ここでは、その際に用いた、ポポフ型安定条件の適用可能な非線形関数のクラスを明らかにする。そして、さらに広いクラスに対しても適用できるポポフ型条件を導出する。これにより、第3章で示したパラメトリック絶対安定条件は、より広いクラスの非線形関数へと拡張可能となる。

ところで、本文中の安定解析では、パラメータを任意に固定し、存在を仮定した平衡状態を原点とする偏差系を用いた。その偏差系では、参照入力も0であった。そこで、以下の議論では、ルーリエ系の線形部はパラメータを含まず、参照入力も0に固定された表現としている。また、非線形部の位置も、ポポフ型安定条件に関する過去の文献に従っており、本文中のルーリエ系とは若干異なっているが、参照入力を0としているため、結果は同じものとなる。

ポポフは、非線形部が1変数関数で、時不変かつセクタ条件を満たす場合について、ルーリエ系が安定であるための周波数領域の条件を与えた。このようなポポフ条件の、非線形部が多変数関数の場合への拡張が、これまでも考えられてきた [3, 8, 14, 16, 17, 18, 27]。それらによると、非線形関数の満たすべき条件として、セクタ条件とともに、微分可能性を仮定した上で、そのヤコビ行列の対称性が要求されている [14, 16]。これらの条件は、ルーリエ・ポストニコフ型リアプノフ関数を1変数関数の場合と同様に用いるために仮定されたものである。一方、多変数ベクトル値非線形関数の特別な場合である1変数関数の集合に対しては、微分可能性を仮定する必要がないことが知られている [17, 18, 27]。ここでは、これらのクラスを包含するために、非線形関数の一部の微分可能性を除いて対称性を定義し、それがポポフ条件を導くために十分であることを

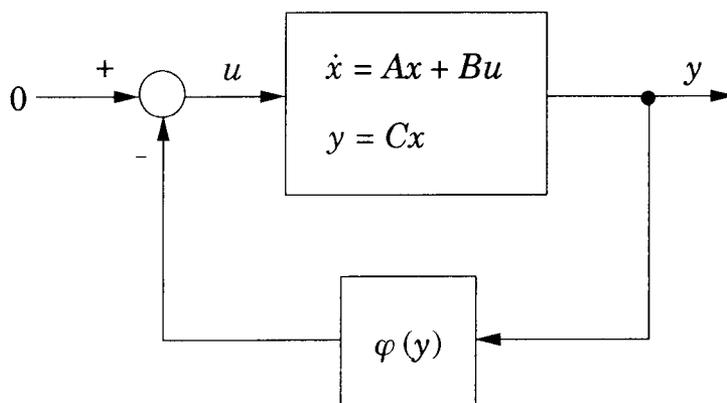


Fig. A.1. Lur'e system

示す。

ところで、非対称な非線形関数を含むルーリエ系へのポポフ条件の拡張についての議論は、これまでなされていない。そこで、非線形関数が対称でない場合には、ポポフ条件が安定条件として十分でないことを指摘し、新たにポポフ型の周波数領域での安定条件を与える。そのために、非線形関数を対称部と非対称部に分け、非対称部を摂動として扱う。得られた結果は、非線形関数が対称部のみからなる場合には、ポポフ条件と一致するものとなっている。

A.1 多入力多出力ルーリエ系に対するポポフ条件

つぎの多入力多出力ルーリエ系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & y &= Cx \\ u &= -\varphi(y) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここに、 $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, $u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^T$, $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T$ は、それぞれ線形部の状態、入力、出力を表わす。A は安定、すなわち、A のすべての固有値の実部が負であるとする。(A, B), (C, A) は、それぞれ可制御、可観測対であるとする。非線形関数

$$\varphi(y) = [\varphi_1(y) \ \varphi_2(y) \ \cdots \ \varphi_m(y)]^T$$

は R^m から R^m への連続関数で、多変数ベクトル値関数に対するセクタ条件

$$\varphi(y)^T K^{-1} \varphi(y) \leq y^T \varphi(y), \quad \forall y \in R^m \quad (\text{A.2})$$

を満たすものとする。ここに、 K は、正定対称行列である。

ポポフ条件を導出する際に用いられるルーリエ・ポストニコフ型のリアプノフ関数として、1入力1出力系の場合からの類推により、つぎの形のものを考える。

$$V(x) = x^T P x + q \int_0^1 \varphi^T(\lambda C x) C x d\lambda \quad (\text{A.3})$$

ここで、 P は正定行列、 q は非負数である。(A.2)式のセクタ条件より、(A.3)式第2項は非負であることから、 V は正定である。リアプノフの定理より、 $V(x)$ の(A.1)式の解に沿った全導関数 $\dot{V}(x)$ が負定となる条件が、(A.1)式で表わされるルーリエ系の安定条件となる。

1入力1出力系の場合には、ポポフ条件のもとで、 $\dot{V}(x)$ が負定であることを示す際に、

$$\int_0^1 \varphi(\lambda y) y d\lambda = \int_0^y \varphi(\sigma) d\sigma$$

の勾配 (gradient) が $\varphi(y)$ になることを用いる。しかし、多入力多出力系の場合には、非線形関数 φ に対する上述の連続性の仮定のみでは、これを保証するには不十分である。これを簡単な例をあげて示しておく。

例 A.1 φ が線形の場合について示せば十分である。いま、

$$\varphi(y) = [y_1 + y_2 \quad -y_1 + y_2]^T$$

とする。このとき、

$$\int_0^1 \varphi^T(\lambda y) y d\lambda = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

である。勾配は、

$$\text{grad} \int_0^1 \varphi^T(\lambda y) y d\lambda = [y_1 \quad y_2]^T$$

であり、明らかに $\varphi(y)$ と異なる。

1入力1出力系であれ、多入力多出力系であれ、ポポフ条件のもとで、安定性を示すためには、

$$\text{grad} \Phi(y) = \varphi(y), \quad \forall y \in R^m \quad (\text{A.4})$$

を満たすスカラ関数 $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ を用いて, リアプノフ関数が,

$$V(x) = x^T P x + q\Phi(Cx) \quad (\text{A.5})$$

の形であればよい. ここに, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ である. すなわち, (A.4) 式を満たすスカラ関数 Φ の存在が必要なのであって, それが (A.3) 式第 2 項のような積分形式で表わされることは, 実は本質的ではない. そこで, その存在性を保証する補題を与える. なお, 証明は A.3.1 節で与える.

補題 A.1 $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) に対して,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(\cdot)$$

が連続で, かつ,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.6})$$

ならば,

$$\text{grad } \Phi(y) = \varphi(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.4})$$

を満たすスカラ関数 $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ が存在する.

これまでも, (A.4) 式を満たす Φ の存在を仮定した議論がいくつかなされている. しかし, 文献 [3, 8] では, どのような非線形関数 φ に対して Φ が存在するかは明確には述べられていない. また, 文献 [14] や [16] では, Φ が存在するための条件として, 非線形関数 φ のヤコビ行列 $\mathcal{D}\varphi$ の存在を仮定して,

$$\{\mathcal{D}\varphi(y)\}^T = \mathcal{D}\varphi(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.7})$$

を挙げている. しかしながら, 非線形関数の各成分が, 1 変数関数, すなわち,

$$\varphi_i(y) = \varphi_i(y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{A.8})$$

である場合には, φ の微分可能性を仮定せずに連続性のみで (A.4) 式を満たす Φ の存在がいえることから, (A.7) 式の条件は, このような場合を含む形になっていない.

一方, ここで与えた補題では, $i = j$ の場合

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}(y) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

の存在は仮定していないから、非線形関数が (A.8) 式を満たす場合を特殊な場合として含んでいる。ここでは、補題 A.1 の仮定を満たす非線形関数を対称な非線形関数と呼ぶことにする。

対称な非線形関数に対しては、平均値の定理より、

$$\Phi(y) = \int_0^1 \varphi^T(\lambda y) y d\lambda, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.9})$$

と書ける。このとき、(A.3) 式のルーリエ・ポストニコフ型リアプノフ関数をポポフ条件導出のために用いることができ、線形部の伝達関数を

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{A.10})$$

とおいて、つぎの定理を得る。

定理 A.1 非線形関数 φ が対称で、(A.2) 式のセクタ条件を満たすとき、

$$\frac{1}{2}[(1 + jq\omega)G(j\omega) + (1 - jq\omega)G^T(-j\omega)] + K^{-1} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (\text{A.11})$$

を満たす実数 q が存在するならば、(A.1) 式のルーリエ系の零解は大域的漸近安定である。

定理 A.1 は、 $\omega \rightarrow \infty$ においても (A.11) 式の条件が成立することを要求している。すなわち、少なくとも

$$\frac{q}{2}(CB + B^T C^T) + K^{-1} > 0 \quad (\text{A.12})$$

でなければならない。したがって、(A.11) 式が成立するための q は、これを満たす範囲で探せばよい。

定理 A.1 の証明は、 $q \geq 0$ の場合には、文献 [3] と同様である。 $q < 0$ の場合は、Fig. A.2 で表わされる等価変換 [2] を用いることによって示すことができる。なお、この定理は後に述べる定理 A.2 に含まれるので、証明は与えない。

多入力多出力ルーリエ系を対象としたリアプノフの方法によるポポフ型安定条件の導出は、これまでにも考えられてきた [3, 17, 18, 27]。しかし、文献 [3] では、前に述べたように (A.4) 式を満たす Φ の存在性についての議論が欠けている。また、文献 [17, 18, 27] などでは、非線形関数の各成分が、(A.8) 式を満たす 1 変数関数であるような単純な場合しか扱っていない。

非線形関数が (A.8) 式を満たす場合に対しては、文献 [17, 18] では、

$$\frac{1}{2}[(D + jF\omega)G(j\omega) + G^T(-j\omega)(D - jF\omega)] + DK^{-1} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (\text{A.13})$$

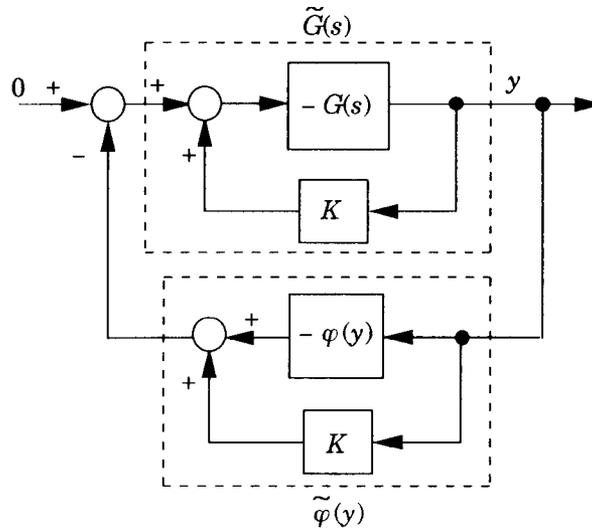


Fig. A.2. Equivalent transformation for Theorems A.1 and A.2

を満たす対角行列 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_m\} > 0$, $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ が存在する, というポポフ型の安定条件が与えられている. このような対角行列 D , F の求め方は文献 [22] で与えられている. また, 文献 [27] での安定条件は, (A.13) 式において $D = I$ としたものとなっている.

ここで考えているような一般的な非線形関数の場合にも, ある正則な行列 D , F の存在性を条件とする (A.13) 式と同様のポポフ型の条件を導出することが可能である. しかし, スカラ関数 Φ として

$$\text{grad } \Phi(y) = F\varphi(y) \quad (\text{A.14})$$

を満たすものの存在が要求され, 非線形関数 φ そのものからは, ここで行なっているようなリアプノフの安定解析法が適用できるか否かの判定は不可能である. しかも, 一般に, (A.13) 式を満たす行列 D , F の存在性を確かめるのは困難であるため, このような条件は実際的ではない. したがって, ここでは, (A.11) 式を満たすスカラ q の存在という形でポポフ型の安定条件を導出した.

よく知られているように 1 変数系の場合, (A.11) 式の条件を満たす q の存在をポポフ軌跡を用いて図的に判定することができる. 多入力多出力系の場合については, まだ文献 [14] や, 本論文 4.4 節の判定例がある程度である.

A.2 ポポフ条件の拡張

前節では、関数 φ が対称である場合には、ポポフ条件が、(A.1) 式で表わされるルーリエ系の安定性を保証するための十分条件であることを示した。これに対して、 φ が対称でない場合には、ポポフ条件はこのルーリエ系の安定条件としては不十分であることが、つぎの例により示される。

例 A.2 (A.1) 式で表わされるルーリエ系の線形部が 2 入力 2 出力で、その伝達関数行列が

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

で与えられているとする。また、 φ も線形で

$$\varphi(y) = Ny, \quad (\text{A.16})$$

ただし、

$$N = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

とする。この φ は補題 A.1 の仮定を満たさないことから、対称ではない。

さて、 K を

$$K = \begin{bmatrix} 10.1 & 0 \\ 0 & 10.1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

とすれば、(A.2) 式のセクタ条件が成り立つ。これより、(A.11) 式右辺を $q = 2$ として計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(1 + 2j\omega)G(j\omega) + (1 - 2j\omega)G^T(-j\omega)] + K^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{10}{101} + \frac{2(3\omega^2 + 1)}{(\omega^2 + 1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{10}{101} + \frac{3(3\omega^2 + 1)}{(\omega^2 + 1)^2} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

であるから、(A.11) 式のポポフ条件が成立している。しかしながら、線形システムであるこのルーリエ系の特性式

$$\det\{I + NG(s)\} = \frac{s^4 + 4s^3 + 6.5s^2 + 5s + 7.56}{(s+1)^4} \quad (\text{A.20})$$

が複素 s 平面の閉右半平面に零点をもつため、零解は不安定である。

この事実を動機として、以下では、非線形関数 φ が、対称でない場合について、ポポフ条件に相当する周波数領域における安定条件を導出する。

ここでは、 φ に対して、

$$\varphi_s(y) = \text{grad} \int_0^1 \varphi^T(\lambda y) y d\lambda, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.21})$$

と定義する。さらに、

$$\varphi_r(y) = \varphi(y) - \varphi_s(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.22})$$

とおくとき、 φ_r が、ある $\delta \geq 0$ に対して、

$$\|\varphi_r(y)\| \leq \delta \|y\|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.23})$$

を満たすものとする。ここに、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表わす。もし、 φ が対称であるならば、補題 A.1 と (A.9) 式より、 $\varphi_s = \varphi$ となる。この事実をもとに、一般に (A.21) 式で定義される φ_s を改めて φ の対称部、(A.22) 式で定義される φ_r を非対称部と呼ぶことにする。

A.2.1 非線形関数全体がセクタ条件を満たす場合

まず、非線形関数 φ 全体が (A.2) 式のセクタ条件を満たす場合について、ポポフ型の周波数領域での安定条件を与えよう。(A.3) 式のルーリエ・ポストニコフ型リアプノフ関数は $q \geq 0$ ならば正定であるから、(A.1) 式のルーリエ系の解に沿った (A.3) 式的全導関数が負定となるための条件を求めることにより、つぎの定理を得る。なお、 $q < 0$ の場合については、Fig. A.2 の等価変換を用いることにより示される。証明の詳細は A.3.3 節で与える。

定理 A.2 非線形関数 φ が、(A.2) 式のセクタ条件を満たし、その非対称部 φ_r が (A.23) 式を満たすとする。このとき、

$$\frac{1}{2}[(1 + jq\omega)G(j\omega) + (1 - jq\omega)G^T(-j\omega)] + K^{-1} - \frac{\delta}{2}|q|(1 + \omega^2)G^T(-j\omega)G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (\text{A.24})$$

を満たす実数 q が存在するならば、(A.1) 式のルーリエ系の零解は大域的漸近安定である。

定理 A.2 において、 $\omega \rightarrow \infty$ に対する (A.24) 式の条件は、

$$\frac{q}{2}(CB + B^T C^T) + K^{-1} - \frac{\delta}{2}|q|B^T C^T C B > 0 \quad (\text{A.25})$$

である。したがって、(A.24)式が成立するための q は、これを満たす範囲で探すことになる。

(A.24)式が成立するためには、(A.11)式のポポフ条件が必要である。(A.11)式のポポフ条件が成立していれば、

$$\frac{1}{2}[(1 + jq\omega)G(j\omega) + (1 - jq\omega)G^T(-j\omega)] + K^{-1} \geq \rho I > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (\text{A.26})$$

を満たす正数 ρ が存在する。この ρ を用いて (A.24)式が成立する δ の範囲が

$$\delta < \frac{2\rho}{|q| \sup_{\omega} \|(1 + j\omega)G(j\omega)\|^2} \quad (\text{A.27})$$

で与えられる。すなわち、非対称部 φ_r を摂動とみなせば、ポポフ条件のもとでは (A.23), (A.27)式を満たす摂動が加わっても (A.1)式のルーリエ系の安定性は保たれる。また、 $q = 0$ に対してポポフ条件が成立している場合には、(A.27)式は $\delta < \infty$ となるから、(A.2)式のセクタ条件を満たす範囲なら、どのような摂動が加わってもルーリエ系は安定である。

定理 A.2 は、ルーリエ系が安定であるための十分条件を与えているにすぎない。そのため、証明中における摂動部 φ_r を含む項の評価の仕方によって、安定条件は、さまざまな表現が可能である。たとえば、(A.24)式の条件はつぎの条件で置き換えることができる。

$$\frac{1}{2}[(1 + jq\omega)G(j\omega) + (1 - jq\omega)G^T(-j\omega)] + K^{-1} - \frac{\delta}{2}(1 + q^2\omega^2)G^T(-j\omega)G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (\text{A.28})$$

この条件と (A.24)式の条件との間には包含関係はなく、どちらの条件がより厳しいとはいえない。

φ が補題 A.1 の意味で対称であるときには、 $\delta = 0$ であるから、定理 A.2 は定理 A.1 に帰着する。

A.2.2 対称部がセクタ条件を満たす場合

つぎに、非線形関数 φ の対称部 φ_s がセクタ条件

$$\varphi_s^T(y)K_s^{-1}\varphi_s(y) \leq y^T\varphi_s(y), \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (\text{A.29})$$

を満たす場合について、ポポフ型の条件を導出する。ここに、 K_s は正定対称行列である。非線形関数 φ の対称部 φ_s が (A.21)式で定義されることから、平均値の定理 (文献 [9] の定理 (8.14.3) の $p = 1$ の場合) より、

$$\int_0^1 \varphi^T(\lambda y) y d\lambda = \int_0^1 \varphi_s^T(\lambda y) y d\lambda \quad (\text{A.30})$$

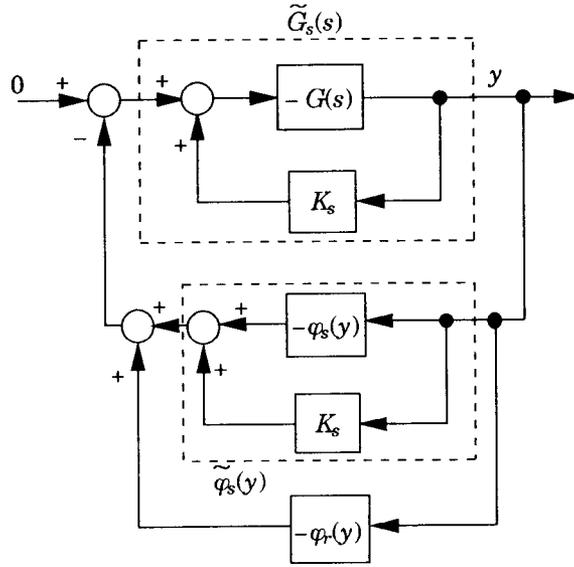


Fig. A.3. Equivalent transformation for Theorem A.3

である。このことから、(A.3) 式のリアプノフ関数は、

$$V(x) = x^T P x + q \int_0^1 \varphi_s^T(\lambda C x) C x d\lambda \quad (\text{A.31})$$

と表わせる。これより、 φ_s がセクタ条件を満たしていれば、 $q \geq 0$ のとき、(A.31) 式右辺第 2 項は非負となって、これをリアプノフ関数として用いることにより、つぎのポポフ型の安定条件を得る。なお、 $q < 0$ の場合の条件は、Fig. A.3 の等価変換を用いることにより導かれる。

定理 A.3 非線形関数 φ の対称部 φ_s が (A.29) 式のセクタ条件を満たし、非対称部 φ_r が (A.23) 式を満たすとする。このとき、

$$\frac{q}{2}(CB + B^T C^T) + K_s^{-1} - \frac{\delta}{4} q^2 C B B^T C^T > 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(1 + jq\omega)G(j\omega) + (1 - jq\omega)G^T(-j\omega)] + K_s^{-1} \\ & + \delta[K_s^{-2} + \frac{1}{2}\{(1 + jq\omega)G(j\omega)K_s^{-1} + (1 - jq\omega)K_s^{-1}G^T(-j\omega)\} \\ & - (I + \delta K_s^{-1})\{\frac{1}{4}(1 + q^2\omega^2)G^T(-j\omega)(I + \delta K_s^{-1})^{-1}G(j\omega) - G^T(-j\omega)G(j\omega)\}(I + \delta K_s^{-1})] \\ & > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

を満たす実数 q が存在するならば、(A.1) 式のルーリエ系の零解は大域的漸近安定である。

ここでは, (A.11) 式のポポフ条件との比較のために, 安定条件を (A.33) 式の表現で与えたが, 証明では, これと等価なつぎの条件を用いている.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(1+jq\omega)(I+\delta K_s^{-1})^{-1}G(j\omega) + (1-jq\omega)G^T(-j\omega)(I+\delta K_s^{-1})^{-1}] + (K_s + \delta I)^{-1} \\ & - \frac{\delta}{4}(1+q^2\omega^2)G^T(-j\omega)(I+\delta K_s^{-1})^{-1}G(j\omega) - \delta G^T(-j\omega)G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}_+ \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

この条件は, (A.33) 式の右から $(K_s + \delta I)^{-1}K_s$ を左から $K_s(K_s + \delta I)^{-1}$ を乗じれば得られる.

定理 A.1 と定理 A.2 では, (A.11), (A.24) 式の周波数領域条件が $\omega \rightarrow \infty$ でも成立することを要求している. 定理 A.3 では (A.33) 式の周波数領域条件に対して陽にはそれを要求していない. しかし, $\omega \rightarrow \infty$ における (A.34) 式の左辺は証明中の (A.61) 式, (A.68) 式の Γ であり, (A.32) 式の条件のもとでそれは正定である. したがって, $\omega \rightarrow \infty$ における (A.33) 式の左辺も正定である.

定理 A.2 と同様に, 本定理でも, φ が補題 A.1 の意味で対称であるときには, $K_s = K$, $\delta = 0$ であることから, 定理 A.3 は定理 A.1 に帰着する.

(A.34) 式において,

$$(I + \delta K_s^{-1})^{-1} = K_s^{1/2}(K_s + \delta I)^{-1}K_s^{1/2} \quad (\text{A.35})$$

であることから, $\|K_s\| \rightarrow 0$ の場合には, 定理 A.3 の仮定は,

$$\delta \|G(j\omega)\| < 1, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}_+ \quad (\text{A.36})$$

となる. したがって, $\varphi = \varphi_r$ の場合には, 定理 A.3 は, 一巡ループに沿ったゲインが 1 未満であれば (A.1) 式の系の零解は大域的漸近安定であるというよく知られた結果に帰着する.

また, 定理 A.3 の条件は, 摂動部 φ_r が線形部の状態 x と時間 t にも依存する形 $\varphi_r(x, y, t)$ で,

$$\|\varphi_r(x, y, t)\| \leq \delta \|y\|$$

を満たす場合にも成り立つ. したがって, 文献 [10] で与えられた時不変型非線形部に時変型非線形部が摂動として加わった 1 入力 1 出力系に対する移行ポポフ条件の多入力多出力系への拡張にもなっている.

A.3 定理, 補題の証明

A.3.1 補題 A.1 の証明

$\Phi(\cdot)$ を

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^m \int_0^{y_i} \varphi_i(y_1, \dots, y_{i-1}, \sigma_i, 0, \dots, 0) d\sigma_i \quad (\text{A.37})$$

とする. ただし, ここでは, $\varphi_i(y)$ を

$$\varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

と表わした. (A.6) 式より,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(y) = \varphi_j(y) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{A.38})$$

であるから, (A.4) 式が成り立つ. さらに, セクタ条件 (A.2) と (A.9) 式より, $\Phi(y) \geq 0$ となる.

A.3.2 定理 A.2, A.3 の証明のための補題

定理 A.2, A.3 の証明のために, 文献 [4, 15] の結果より導かれる補題を与える.

補題 A.2 行列 A が安定であり, (A, B) , (H, A) がそれぞれ可制御, 可観測対であるとき, 行列 $\Gamma > 0$, $R \geq 0$ に対して,

$$\Gamma + H(j\omega I - A)^{-1} B + B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} H^T - B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} R (j\omega I - A)^{-1} B > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A.39})$$

ならば,

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -LL^T - R - Q \\ PB &= H^T - L\Gamma^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

を満たす行列 $P > 0$, $Q > 0$, L が存在する.

A.3.3 定理 A.2 の証明

まず, $q \geq 0$ の場合について示す. (A.3) 式で与えられる $V(x)$ は正定であるから, リアプノフの定理より, $V(x)$ の (A.1) 式の解に沿った全導関数 $\dot{V}(x)$ が負定であることを示せばよい. (A.21),

(A.22) 式より,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T(A^T P + PA)x - 2x^T P B \varphi(Cx) + q\varphi_s^T(Cx)C[Ax - B\varphi(Cx)] \\ &= x^T(A^T P + PA)x - 2x^T P B \varphi(Cx) + q\varphi^T(Cx)C[Ax - B\varphi(Cx)] \\ &\quad - q\varphi_r^T(Cx)C[Ax - B\varphi(Cx)],\end{aligned}\tag{A.41}$$

(A.23) 式より,

$$\begin{aligned}-q\varphi_r^T(y)C[Ax - B\varphi(y)] &\leq q\|\varphi_r(y)\|\|C[Ax - B\varphi(y)]\| \\ &\leq q\delta\|y\|\|C[Ax - B\varphi(y)]\| \\ &\leq \frac{\delta q}{2}\{\|y\|^2 + \|C[Ax - B\varphi(y)]\|^2\}\end{aligned}\tag{A.42}$$

であることと, セクタ条件 (A.2) を用いると

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq x^T(A^T P + PA)x - x^T(2PB - qA^T C^T)\varphi(Cx) - q\varphi^T(Cx)CB\varphi(Cx) \\ &\quad + \frac{\delta q}{2}\{\|Cx\|^2 + \|C[Ax - B\varphi(Cx)]\|^2\} + x^T C^T \varphi(Cx) - \varphi^T(Cx)K^{-1}\varphi(Cx) \\ &\leq x^T \left[A^T P + PA + \frac{\delta q}{2}(A^T C^T C A + C^T C) \right] x \\ &\quad - 2x^T \left[PB - \frac{q}{2}A^T C^T - \frac{1}{2}C^T + \frac{\delta q}{2}A^T C^T C B \right] \varphi(Cx) \\ &\quad - \varphi^T(Cx) \left[K^{-1} + \frac{q}{2}(CB + B^T C^T) - \frac{\delta q}{2}B^T C^T C B \right] \varphi(Cx)\end{aligned}\tag{A.43}$$

となる. いま,

$$\Gamma = \frac{q}{2}(CB + B^T C^T) + K^{-1} - \frac{\delta q}{2}B^T C^T C B\tag{A.44}$$

$$H = \frac{q}{2}C A + \frac{1}{2}C - \frac{\delta q}{2}B^T C^T C A\tag{A.45}$$

$$R = \frac{\delta q}{2}(A^T C^T C A + C^T C)\tag{A.46}$$

とおく. (A.24), (A.25) 式より補題 A.2 の仮定が成り立ち¹, (A.40) 式を満たす行列 $P > 0$, $Q > 0$, L が存在する. この行列 P が (A.3) 式における P として選んであったとすると, (A.43) 式より,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq x^T(A^T P + PA + LL^T + R)x - [\Gamma^{1/2}\varphi(Cx) - L^T x]^T [\Gamma^{1/2}\varphi(Cx) - L^T x] \\ &\leq -x^T Q x\end{aligned}\tag{A.47}$$

¹もし, (H, A) が可観測対でなければ, q を選び直して可観測対とすることができる.

となる。したがって、 $\dot{V}(x)$ は負定である。

つぎに、 $q < 0$ の場合について示す。ルーリエ系 (A.1) に Fig. A.2 で表わされる等価変換を施す。これによって、線形部の伝達関数 $\tilde{G}(s)$ は、

$$\tilde{G}(s) = -G(s)[I + KG(s)]^{-1} \quad (\text{A.48})$$

となり、また、非線形部は、

$$\tilde{\varphi}(y) = -\varphi(y) + Ky \quad (\text{A.49})$$

と変換される。ここに、後に述べるように、(A.24) 式が成り立つとき $[I + KG(s)]^{-1}$ の安定性がいえるから、 $\tilde{G}(s)$ は安定である。また、 $\tilde{\varphi}(\cdot)$ は、 $\varphi(\cdot)$ と同じセクタ条件

$$\tilde{\varphi}(y)^T K^{-1} \tilde{\varphi}(y) \leq y^T \tilde{\varphi}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.50})$$

を満たす。これらのことと、上述の $q \geq 0$ の場合の結果より、

$$\frac{1}{2}[(1+j\tilde{q}\omega)\tilde{G}(j\omega)+(1-j\tilde{q}\omega)\tilde{G}^T(-j\omega)]+K^{-1}-\frac{\delta}{2}\tilde{q}(1+\omega^2)\tilde{G}^T(-j\omega)\tilde{G}(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (\text{A.51})$$

を満たす $\tilde{q} > 0$ が存在するならば、ルーリエ系 (A.1) の零解は大域的漸近安定であることがいえる。したがって、 $q = -\tilde{q}$ とおくと、仮定 (A.24) のもとで、(A.51) 式が成立することを示せばよい。(A.24) 式より、

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} \left[(1+jq\omega)G(j\omega) + (1-jq\omega)G^T(-j\omega) \right] + K^{-1} + \frac{\delta}{2}q(1+\omega^2)G^T(-j\omega)G(j\omega) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1-jq\omega)[I + G^T(-j\omega)K][-G(j\omega)] + (1+jq\omega)[-G^T(-j\omega)][I + KG(j\omega)] \right\} \\ &\quad + [I + G^T(-j\omega)K] K^{-1} [I + KG(j\omega)] + \frac{\delta}{2}q(1+\omega^2)G^T(-j\omega)G(j\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

である。また、 $[I + KG(s)]^{-1}$ の安定性より、 $[I + KG(j\omega)]^{-1}$ が存在する。したがって、(A.52) 式の左から $[I + G^T(-j\omega)K]^{-1}$ 、右から $[I + KG(j\omega)]^{-1}$ を乗じることにより、(A.51) 式を得る。

最後に、(A.24) 式が保証する (A.11) 式のポポフ条件のもとで、 $[I + KG(s)]^{-1}$ が安定であることを述べておこう。

$$F(s) = G(s) + K^{-1}$$

とおくと、(A.11) 式は、

$$(1+jq\omega)F(j\omega) + (1-jq\omega)F^T(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (\text{A.53})$$

を意味する. これに $F(j\omega)$ の固有ベクトルとその共役転置を右, 左から掛けることにより,

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i[F(j\omega)]\} - q\omega \operatorname{Im}\{\lambda_i[F(j\omega)]\} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{R}_+ \quad (\text{A.54})$$

がいえる. ただし, $\lambda_i[\cdot]$ は固有値を表わす. このとき, $\operatorname{Im}\{\lambda_i[F(j\omega)]\} = 0$ となる ω について $\operatorname{Re}\{\lambda_i[F(j\omega)]\} > 0$ であるから, $\lambda_i[F(j\omega)]$ の複素平面上の軌跡は原点を囲まない. したがって, 文献 [5] と同様の議論により $F^{-1}(s)$ は安定であり, $F^{-1}(s)K^{-1} = [I + KG(s)]^{-1}$ も安定である.

A.3.4 定理 A.3 の証明

まず, $q \geq 0$ の場合について, (A.31) 式で与えられるリアプノフ関数 $V(x)$ の (A.1) 式の解に沿った全導関数 $\dot{V}(x)$ が負定となることを示す. (A.23) 式より,

$$\begin{aligned} -2\{x^T PB + \frac{q}{2}\varphi_s^T(y)CB\}\varphi_r(y) &\leq 2\|B^T Px + \frac{q}{2}B^T C^T \varphi_s(y)\| \|\varphi_r(y)\| \\ &\leq 2\|B^T Px + \frac{q}{2}B^T C^T \varphi_s(y)\| \cdot \delta \|y\| \\ &\leq \delta [\|B^T Px + \frac{q}{2}B^T C^T \varphi_s(y)\|^2 + \|y\|^2] \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

であることと, セクタ条件 (A.29) より,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(A^T P + PA)x - 2x^T\{PB - \frac{q}{2}A^T C^T\}\varphi_s(Cx) - q\varphi_s^T(Cx)CB\varphi_s(Cx) \\ &\quad - 2\{x^T PB + \frac{q}{2}\varphi_s^T(Cx)CB\}\varphi_r(Cx) \\ &\leq x^T(A^T P + PA + \delta PBB^T P + \delta C^T C)x \\ &\quad - 2x^T(PB - \frac{q}{2}A^T C^T - \frac{1}{2}C^T - \frac{\delta q}{2}PBB^T C^T)\varphi_s(Cx) \\ &\quad - \varphi_s^T(Cx)[\frac{q}{2}(CB + B^T C^T) + K_s^{-1} - \frac{\delta q^2}{4}CBB^T C^T]\varphi_s(Cx) \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

となる. ここで,

$$\Gamma_0 = K_s^{-1} + \frac{q}{2}(CB + B^T C^T) - \frac{\delta q^2}{4}CBB^T C^T \quad (\text{A.57})$$

とおくと, (A.32) 式より, $\Gamma_0 > 0$ であるから,

$$L_0 = [PB(I - \frac{\delta q}{2}CB)^T - H_1^T]\Gamma_0^{-1/2} \quad (\text{A.58})$$

$$H_1 = \frac{q}{2}CA + \frac{1}{2}C \quad (\text{A.59})$$

が定義できる. これを用いて (A.56) 式を書き直すと,

$$\dot{V}(x) \leq x^T(A^T P + PA + \delta C^T C + \delta P B B^T P + L_0 L_0^T)x - [\Gamma_0^{1/2} \varphi_s(Cx) + L_0^T x]^T [\Gamma_0^{1/2} \varphi_s(Cx) + L_0^T x] \quad (\text{A.60})$$

となる. さらに,

$$\Gamma = [(I - \frac{\delta q}{2} C B)^T \Gamma_0^{-1} (I - \frac{\delta q}{2} C B) + \delta I]^{-1} \quad (\text{A.61})$$

$$H = [H_1^T \Gamma_0^{-1} (I - \frac{\delta q}{2} C B) \Gamma]^T \quad (\text{A.62})$$

とにおいて,

$$\delta \Gamma_0 + (I - \frac{\delta q}{2} C B)(I - \frac{\delta q}{2} C B)^T = I + \delta K_s^{-1} \quad (\text{A.63})$$

を用いると,

$$\delta P B B^T P + L_0 L_0^T = \Gamma^{-1} (P B - H^T)^T + \delta H_1^T (I + \delta K_s^{-1})^{-1} H_1 \quad (\text{A.64})$$

となる. したがって, (A.60) 式より,

$$\dot{V}(x) \leq x^T [A^T P + PA + R + (P B - H^T) \Gamma^{-1} (P B - H^T)^T] x \quad (\text{A.65})$$

を得る. ただし,

$$R = \delta [C^T C + H_1^T (I + \delta K_s^{-1})^{-1} H_1] \quad (\text{A.66})$$

である. さらに, (A.63) 式を用いると,

$$H = [H_1^T (I + \delta K_s^{-1})^{-1} (I - \frac{\delta q}{2} C B)]^T \quad (\text{A.67})$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{q}{2} (I + \delta K_s^{-1})^{-1} C B + \frac{q}{2} B^T C^T (I + \delta K_s^{-1})^{-1} + (K_s + \delta I)^{-1} \\ &\quad - \frac{\delta q^2}{4} B^T C^T (I + \delta K_s^{-1})^{-1} C B \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

となって, 定理 A.3 の仮定と (A.34) 式より, 補題 A.2 の条件 が成り立つ². これより, (A.40) 式を満たす行列 $P > 0$, $Q > 0$, L が存在する. この行列 P が (A.31) 式における P として選んであったとすると, (A.65) 式より,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq x^T (A^T P + PA + LL^T + R)x \\ &= -x^T Qx \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

²ここでも, もし, (H, A) が可観測対でなければ, q を選び直して可観測対とすることができる.

となる. したがって, $\dot{V}(x)$ は負定である.

$q < 0$ の場合は, ルーリエ系 (A.1) に Fig. A.3 の等価変換を施すことにより, 定理 A.2 の証明と同様にして示される.

付録 B

第 4, 5, 6 章における平衡点解析のための補足

B.1 パラメータを含む代数方程式の解の存在条件

パラメータを含む代数方程式の解の存在条件を以下で示そう。ここで述べる結果は、第 4, 5 章で多入力多出力ルーリエ系の平衡状態の存在条件を求めるために用いている。

パラメータ r を含む代数方程式

$$f(z, r) = 0 \quad (\text{B.1})$$

の解が、すべての $r \in \mathcal{R}$ に対して存在するための十分条件を述べる。ここに、関数 $f(z, r)$ は $\mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathcal{R}$ で定義され、 $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ に値をもち、 z に関して連続微分可能、 r に関して連続なものとする。ただし、 \mathcal{R} は \mathbb{R}^l の単連結有界閉領域であるとする。また、ある $(z^*, r^*) \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathcal{R}$ に対して、

$$f(z^*, r^*) = 0 \quad (\text{B.2})$$

であるとする。

補題 B.1 すべての $r \in \mathcal{R}$ に対して、(B.1) 式の代数方程式の解 $z^e(r)$ が存在するための十分条件は、

$$\|f(z, r) - f(z^*, r)\| \geq \mu \|z - z^*\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \forall r \in \mathcal{R} \quad (\text{B.3})$$

を満たす定数 $\mu > 0$ が存在することである。ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである。

この補題 B.1 は、つぎの補題 B.2 をもとにして、(B.1) 式の解の存在条件をユークリッドノルムを用いて表わしたものである。

補題 B.2 [12] すべての $r \in \mathcal{R}$ に対して, (B.1) 式の代数方程式の解 $z^e(r)$ が z^* を含むある有界な開領域 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{\bar{n}}$ に存在するための十分条件は, z^* が (B.2) 式のただ 1 つの解であり, かつ,

$$\det \mathcal{D}_z f(z^*, r^*) \neq 0 \quad (\text{B.4})$$

$$f(z, r) \neq 0, \quad \forall z \in \partial \mathcal{Z}, \forall r \in \mathcal{R} \quad (\text{B.5})$$

が成り立つことである. ここに, $\mathcal{D}_z f$ はベクトル値関数 $f(z, r)$ の z に関するヤコビ行列であり, $\partial \mathcal{Z}$ は領域 \mathcal{Z} の境界を表わす.

(補題 B.1 の証明) 補題 B.2 の条件が満たされることを示そう.

z^* が (B.2) 式のただ 1 つの解であることは, $r = r^*$ と置いた (B.3) 式より明らかである.

そこで, まず, (B.4) 式を示す. そのために, 0 でない実数 ε と任意の $\hat{z} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ に対し, $z = z^* + \varepsilon \hat{z}$, $r = r^*$ と置いた (B.3) 式の左辺に平均値の定理 (文献 [9] の定理 (8.14.3) の $p = 1$ の場合) を用いると,

$$\varepsilon^2 \hat{z}^T \int_0^1 \{ \mathcal{D}_z f(z^* + \varepsilon \theta_1 \hat{z}, r^*) \}^T d\theta_1 \cdot \int_0^1 \mathcal{D}_z f(z^* + \varepsilon \theta_2 \hat{z}, r^*) d\theta_2 \hat{z} \geq \varepsilon^2 \mu^2 \|\hat{z}\|^2 \quad (\text{B.6})$$

を得る. 両辺を ε^2 で割り, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると, $\mathcal{D}_z f(z, r^*)$ の z に関する連続性より,

$$\hat{z}^T [\mathcal{D}_z f(z^*, r^*)]^T \mathcal{D}_z f(z^*, r^*) \hat{z} \geq \mu^2 \|\hat{z}\|^2 \quad (\text{B.7})$$

となる. $\mu > 0$ であるから, (B.4) 式が満たされる.

つぎに, (B.5) 式を示す. (B.3) 式より, 任意の $(z, r) \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathcal{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \|f(z, r)\| &\geq \mu \|z - z^*\| - \|f(z^*, r)\| \\ &\geq \mu \|z - z^*\| - f_{\mathcal{R}}^* \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

が成り立つ. ただし,

$$f_{\mathcal{R}}^* = \max_{r \in \mathcal{R}} \|f(z^*, r)\|$$

である. したがって, $\eta > f_{\mathcal{R}}^*/\mu$ を満たす定数 η を用いて, \mathcal{Z} を $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^{\bar{n}} : \|z - z^*\| < \eta\}$ と置けば, (B.5) 式は満たされる. \square

B.2 補題 4.1 の証明

第 4 章 4.2 節で示した平衡点解析のための補題 4.1 の証明を述べよう。そのために、補題 B.1 を用いる。

任意に $p \in \mathcal{P}$ を固定して、

$$f(e, r) = e - r + G_0(p)\varphi(e) \quad (\text{B.9})$$

と置くと、(4.9) 式は、

$$f(e, r) = 0 \quad (\text{B.10})$$

と表わされる。この代数方程式に対して、補題 B.1 の仮定が満たされることを以下で示す。

まず、

$$f(0, 0) = 0 \quad (\text{B.11})$$

であるから、 $e^* = 0$ 、 $r^* = 0$ に対して、(B.2) 式は満たされている。

以下では、(B.3) 式を満たす $\mu > 0$ の存在を示そう。

$$W_0(p) = G_0(p) + \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1}(0) \quad (\text{B.12})$$

$$\hat{e} = e - \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1}(0)\varphi(e) \quad (\text{B.13})$$

と置くと、

$$f(e, r) = \hat{e} - r + W_0(p)\varphi(e) \quad (\text{B.14})$$

と表わされる。(4.17) 式より、

$$\frac{1}{2}\{W_0(p) + W_0^T(p)\} > 0 \quad (\text{B.15})$$

であるから、 $W_0^{-1}(p)$ が存在する。そこで、(4.11) 式と (4.16) 式を用いると、

$$\begin{aligned} \|W_0^{-T}(p)\hat{e}\| \cdot \|f(e, r) - f(0, r)\| &\geq \hat{e}^T W_0^{-1}(p)\{f(e, r) - f(0, r)\} \\ &\geq \hat{e}^T W_0^{-1}(p)\hat{e} + \hat{e}^T \varphi(e) \\ &\geq \hat{e}^T W_0^{-1}(p)\hat{e} \\ &= \frac{1}{2}\hat{e}^T W_0^{-1}(p)\{W_0(p) + W_0^T(p)\}W_0^{-T}(p)\hat{e} \\ &\geq \rho_0(p)\|W_0^{-T}(p)\hat{e}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

が成り立つ。これより,

$$\|f(e, r) - f(0, r)\| \geq \frac{\rho_0(p)}{\|W_0(p)\|} \|\hat{e}\| \quad (\text{B.17})$$

を得る。

$\gamma_0(p) > 0$ の場合には, (4.17) 式より $\delta_0(p) = 1$ と選ぶことができる。このとき, $\rho_0(p) = \gamma_0(p)$, $W_0(p) = G_0(p)$, $\hat{e} = e$ であるから, (B.17) 式は,

$$\|f(e, r) - f(0, r)\| \geq \frac{\gamma_0(p)}{\|G_0(p)\|} \|e\| \quad (\text{B.18})$$

と表わせる。 $\gamma_0(p) \leq 0$ の場合, (4.17) 式より, $\delta_0(p) < 1$ である。このことと (4.11) 式のセクタ条件を用いると,

$$\begin{aligned} \|\hat{e}\| &= \|e - \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1}(0)\varphi(e)\| \\ &= \left\| K^{-1/2}(0) \left[K^{1/2}(0)e - \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1/2}(0)\varphi(e) \right] \right\| \\ &\geq \frac{1}{\|K^{1/2}(0)\|} \|K^{1/2}(0)e - \{1 - \delta_0(p)\}K^{-1/2}(0)\varphi(e)\| \\ &\geq \frac{1}{\|K^{1/2}(0)\|} \left[\delta_0(p)\|K^{1/2}(0)e\| + \{1 - \delta_0(p)\} \{ \|K^{1/2}(0)e\| - \|K^{-1/2}(0)\varphi(e)\| \} \right] \\ &\geq \frac{\delta_0(p)\|K^{1/2}(0)e\|}{\|K^{1/2}(0)\|} \\ &\geq \delta_0(p) \sqrt{\frac{\lambda_{\min}[K(0)]}{\lambda_{\max}[K(0)]}} \|e\| \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

が成り立つ。これと (B.17) 式より,

$$\|f(e, r) - f(0, r)\| \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}[K(0)]}{\lambda_{\max}[K(0)]}} \frac{\delta_0(p)\rho_0(p)}{\|W_0(p)\|} \|e\| \quad (\text{B.20})$$

を得る。

したがって, (4.14) 式の $\mu_0(p)$ の定義と, (B.18), (B.20) 式より,

$$\|f(e, r) - f(0, r)\| \geq \mu_0(p)\|e\| \quad (\text{B.21})$$

が成り立ち, $\mu = \mu_0(p)$ に対して (B.3) 式の成立がいえる。以上より, 補題 B.1 の条件が満たされ, すべての $(r, p) \in \mathcal{R} \times \mathcal{P}$ に対して, (4.9) 式の解 $e^e(r, p)$ は存在する。

さて, $e^e(r, p)$ の存在領域を求めよう. (B.21) 式で $e = e^e(r, p)$ と置けば,

$$\|r\| \geq \mu_0(p) \|e^e(r, p)\| \quad (\text{B.22})$$

を得る. これより, 平衡点 $e^e(r, p)$ は, (4.13) 式の $E^e(r, p)$ に存在するのである. \square

(注意) なお, (B.19) 式の中では,

$$\|K^{1/2}(0)e\| \geq \|K^{-1/2}(0)\varphi(e)\| \quad (\text{B.23})$$

が成り立つことを用いたが, これが, (4.11) 式より導かれることを以下に示そう. $K(0)$ は正定対称行列であるから, 任意の $e \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq [e - K^{-1}(0)\varphi(e)]^T K(0)[e - K^{-1}(0)\varphi(e)] \\ &= e^T K(0)e - 2e^T \varphi(e) + \varphi^T(e) K^{-1}(0)\varphi(e) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

が成り立つ. これと (4.11) 式より,

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^T \varphi(e) - \varphi^T(e) K^{-1}(0)\varphi(e) \\ &\leq e^T K(0)e - e^T \varphi(e) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

であるから,

$$0 \leq e^T \varphi(e) \leq e^T K(0)e \quad (\text{B.26})$$

が満たされる. この (B.26) 式と (4.11) 式より, (B.23) 式と等価な

$$\varphi^T(e) K^{-1}(0)\varphi(e) \leq e^T K(0)e \quad (\text{B.27})$$

が成り立つのである. \square

B.3 6.3 節 (II) の場合の制御偏差

零固有値をもつ $m \times m$ 行列 A_c と m 次元ベクトル b_c が可制御対で,

$$A_c x_c + b_c e = 0 \quad (\text{B.28})$$

を満たすならば, $e = 0$ であることを示そう.

行列 A_c の零固有値に対する左固有ベクトルを $\xi \neq 0$ とする. (B.28) 式の両辺に左から ξ を掛けると,

$$\xi b_c e = 0 \quad (\text{B.29})$$

を得る. ところで, (A_c, b_c) の可制御性より,

$$\text{rank}[b_c \ A_c b_c \ \cdots \ A_c^{m-1} b_c] = m \quad (\text{B.30})$$

であるから,

$$[\xi b_c \ 0 \ \cdots \ 0] = \xi [b_c \ A_c b_c \ \cdots \ A_c^{m-1} b_c] \neq 0 \quad (\text{B.31})$$

である. したがって, $\xi b_c \neq 0$ であり, (B.29) 式より $e = 0$ である.

B.4 6.3 節 (6.23) 式の解の存在

零固有値をただ 1 つもつ $m \times m$ 行列 A_c と m 次元行ベクトル c_c が可観測対であるとき, 実数 σ に対して, x_c についての代数方程式

$$\begin{bmatrix} c_c \\ A_c \end{bmatrix} x_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma \quad (\text{B.32})$$

の解がただ 1 つ存在することを示そう.

(c_c, A_c) の可観測性より, すべての複素数 s に対して,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c_c \\ A_c - sI \end{bmatrix} = m \quad (\text{B.33})$$

が成り立つ. $s = 0$ とおけば,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c_c \\ A_c \end{bmatrix} = m \quad (\text{B.34})$$

である. 一方, $\text{rank} A_c = m - 1$ であるから,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c_c & 1 \\ A_c & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_c & 0 \end{bmatrix} = m \quad (\text{B.35})$$

となる. これと (B.34) 式より,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c_c & 1 \\ A_c & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} c_c \\ A_c \end{bmatrix} = m \quad (\text{B.36})$$

であるから, (B.32) 式の解はただ 1 つ存在する.

参考文献

- [1] J. Ackermann and W. Sienel: What is a “large” number of parameters in robust systems?; Proc. 29th Conf. Decision and Contr., Honolulu, Hawaii (U.S.A.), pp. 3496~3497 (1990)
- [2] M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher: Absolute Stability of Regulator Systems (English translation by E. Polak), Holden-Day, San Francisco (1964)
- [3] B. D. O. Anderson: Stability of control systems with multiple nonlinearities; J. Franklin Inst., Vol. 282, No. 3, pp. 155~160 (1966)
- [4] B. D. O. Anderson: A system theory criterion for positive real matrices; J. SIAM Control, Vol. 5, pp. 171~182 (1967)
- [5] J. J. Belletrutti and A. G. J. MacFarlane: Characteristic loci techniques in multivariable-control-system design; Proc. IEE, Vol. 118, No. 9, pp. 1291~1297 (1971)
- [6] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)
- [7] M. Dahleh, A. Tesi and A. Vicino: On the robust Popov criterion for interval Lur’e system; IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-38, No. 9, pp. 1400~1405 (1993)
- [8] C. A. Desoer and M. Y. Wu: Stability of a nonlinear time-invariant feedback system under almost constant inputs; Automatica, Vol. 5, pp. 231~233 (1969)
- [9] J. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis, Academic Press, p. 190 (1969)
- [10] 古谷, 佐伯, 荒木: 移行ポポフ条件; システム制御情報学会論文誌, Vol. 7, No. 7, pp. 247~254 (1992)

- [11] P. Gahinet, and A. Nemirovskii: A general purpose LMI solver with benchmarks; Proc. 32nd Contr. Decision and Contr., pp. 3162~3165 (1993)
- [12] M. Ikeda, Y. Ohta, and D. D. Šiljak: Parametric stability; In G. Conte, A. M. Perdon, and B. Wyman eds., New Trends in Systems Theory, Birkhäuser, pp. 1~20 (1991)
- [13] 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, (社)計測自動制御学会 (1978)
- [14] A. I. Mees and D. P. Atherton: The Popov criterion for multiple-loop feedback systems; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-25, pp. 924~928 (1980)
- [15] 美多, 千田, 王: 強正実条件と疑似強正実条件; 計測自動制御学会論文集, Vol. 25, No. 7, pp. 751~757 (1989)
- [16] H. Miyagi and A. R. Bergen: Stability studies of multimachine power systems with the effects of automatic voltage regulators; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-31, pp. 210~215 (1986)
- [17] J. B. Moore and B. D. O. Anderson: A generalization of the Popov criterion; J. Franklin Inst., Vol. 285, No. 6, pp. 488~492 (1968)
- [18] K. S. Narendra and J. H. Taylor: Frequency Domain Criteria for Absolute Stability, Academic Press, New York (1973)
- [19] 西村, 森, 黒江, 小亀: 区間プラントを含むルーリエ系に対するポポフの定理の適用について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 4, pp. 165~170 (1993)
- [20] 小原, 杉江: 凸最適化を用いた制御系設計, システム/制御/情報, Vol. 38, No. 3, pp. 139~146 (1994)
- [21] Y. Ohta, L. Gong, and H. Haneda: Polygon interval arithmetic and design of robust control systems; Proc. 29th Conf. Decision and Contr., Honolulu, Hawaii (U.S.A.), pp. 1065~1067 (1990)

- [22] M. Saeki, Y. Okubo and K. Ando: Search method for the matrix multiplier time constant and the weighting matrix of the multivariable Popov stability criterion; *Int. J. Control*, Vol. 48, pp. 2075~2084 (1988)
- [23] W. Sienel: Algorithms for tree structured decomposition, *Proc. 31th Conf. Decision and Contr.*, Tucson, Arizona (U.S.A.), pp. 739~740 (1992)
- [24] D. D. Šiljak: *Nonlinear Systems, The Parameter Analysis and Design*, Wiley, New York (1969)
- [25] D. D. Šiljak: Polytopes of nonnegative polynomials; *Proc. ACC*, Pittsburgh, PA (U.S.A.), pp. 193~199 (1989)
- [26] A. Tesi and A. Vicino: Robust absolute stability of Lur'e control systems in parameter space; *Automatica*, Vol. 27, No. 1, pp. 147~151 (1991)
- [27] H. Tokumaru and N. Saito: On the absolute stability of automatic control system with many nonlinear characteristics; *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ.*, Japan, Vol. XXVII, pp. 347~379 (1965)
- [28] T. Wada, D. D. Šiljak, Y. Ohta, and M. Ikeda: Parametric stability of control systems; In H. Kimura and S. Kodama (Eds.), *Recent Advances in Mathematical Theory of Systems, Control, Networks and Signal Processing II*; *Proceedings of the International Symposium MTNS-91*, Mita Press, pp. 377~382 (1992)
- [29] 和田, 池田, 太田, Šiljak: ルーリエ系のパラメトリック安定性について; 第22回制御理論シンポジウム資料, pp. 131~136 (1993)
- [30] 和田, 池田: 多変数ルーリエ系に対するポポフ型安定条件の拡張; システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 9, pp. 416~424 (1993)
- [31] T. Wada and M. Ikeda: Extended Popov criteria for multivariable Lur'e systems; *Proc. the 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, U.S.A., pp. 20~21 (1993)

- [32] 和田, 池田, 太田, Šiljak: ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性; システム制御情報学会論文誌, Vol. 7, No. 4, pp. 142~149 (1994)
- [33] 和田, 池田, 太田, Šiljak: 非線形制御系のパラメトリック絶対安定性; システム制御情報学会論文誌, Vol. 7, No. 7, pp. 255~264 (1994)
- [34] 和田, 池田, 太田, Šiljak: 多入出力ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性 - LMI 条件とポリトープ型システムへの適用 -; 第 23 回制御理論シンポジウム資料, pp. 283~288 (1994)
- [35] 和田, 池田, 太田, Šiljak: ブロック対角型非線形部をもつルーリエ系のパラメトリック絶対安定条件; 第 37 回 自動制御連合講演会前刷, pp. 131~134 (1994)
- [36] 和田, 池田, 太田, Šiljak: 多入出力ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性 - ポポフ型条件と PIA によるその判定 -; 第 17 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp. 143~148 (1994)
- [37] 和田, 池田, 太田, Šiljak: 多入出力ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性 - 線形行列不等式条件とポリトープ型システムへの適用 -; 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, No. 9 (1995) (掲載予定)
- [38] 和田, 池田, 太田, Šiljak: 多入出力ルーリエ系のパラメトリック絶対安定性 - ポポフ型条件と多角形区間演算によるその判定 -; 計測自動制御学会論文集へ投稿中

謝辞

本研究を遂行するにあたり終始適切な御教示，御助言を賜わった神戸大学工学部 池田雅夫教授に心から感謝の意を表する。同教授の御指南がなければ本研究は為し得ないものであった。

本論文をまとめるにあたり適宜御助言を賜わり，また，種々御配慮いただいた神戸大学工学部，平井一正教授，ならびに，北村新三教授に深く感謝する。

筆者にこのような研究の機会を与えられ，さまざまな御助言と御激励をいただいた大阪府立大学工学部 小野敏郎教授に厚く感謝の意を表する。

筆者に安定論への門戸を開かれ，緻密な数学的理論展開を御教授いただいた大阪大学工学部 故山本稔教授に謝意を表する。同教授の御存命中に本研究を成し遂げられなかったことは心残りである。

筆者の恩師であり，筆者に研究の厳しさを御教授下さった杉山博 大阪大学名誉教授に謝意と敬意を表する。

大阪大学工学部において筆者の学生時代に御指導いただき，筆者に研究者への道を開いて下さった立命館大学理工学部 杉本末雄教授に深謝する。

本研究に対して適切な御助言をいただき，また，数値計算プログラム PIA を御提供いただいた神戸大学工学部 太田有三助教授に感謝する。本研究で提唱した概念の基となるパラメトリック安定性の発案者であり，有益な御助言をいただいた Santa Clara University, Dragoslav D. Šiljak 教授に感謝する。

本研究に対して，適宜御助言をいただいた大阪府立大学工学部 大須賀公一助教授に感謝する。本論文の作成にあたり，御助力をいただいた大阪府立大学工学部 藤中透講師に感謝する。また，筆者の同僚であり，多々御支援いただいた大阪府立大学工学部，吉田浩治助手，ならびに，西村恭子教務技師に謝意を表する。そして，筆者の要領を得ない研究発表を忍耐強く聞いて下さった大阪府立大学工学部 小野研究室の皆様感謝する。さらに，度々御世話になった神戸大学工学部，

平井研究室，ならびに，池田研究室の皆様には謝意を表す。

本論文第5章の例題で用いた数値計算ツール“LMI-lab”を快く御提供下さった National Research Institute in Computer and Control Sciences (INRIA), Pascal Gahinet 教授に感謝する。

なお，本研究の一部は，科学研究費補助金（課題番号 第 04750426 号）の援助によるものであることを付記して謝意を表す。