



地下水流における移流分散現象及び気液2相流の数値シミュレーションと透水性の空間分布に関する研究

齋藤, 雅彦

(Degree)

博士 (工学)

(Date of Degree)

2001-09-21

(Date of Publication)

2007-08-09

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

乙2570

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2002570>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



神戸大学博士論文

地下水流における移流分散現象及び気液2相流の
数値シミュレーションと透水性の空間分布に関する研究

2001年8月

齋藤 雅彦

目 次

第 1 章	序論	1
1. 1	研究の背景	1
	(1) 水資源としての地下水の保全	1
	(2) 地下空間の利用と地下水対策	2
	(3) 数値解析の発展	2
1. 2	従来の研究	4
	(1) 密度変化を考慮した地盤内の物質移動	4
	(2) 地盤内の気液 2 相流	5
	(3) 逆解析によるパラメータの同定	5
	(4) 確率論を応用した不均質地盤のモデル化	6
1. 3	本研究の目的と構成	8
	参考文献	9
第 2 章	密度変化を考慮した地下水汚染の有限要素解析	13
2. 1	概説	13
2. 2	解析手法	15
	(1) 浸透流の基礎式と有限要素定式化	15
	(2) 移流分散方程式と SUPG 法による有限要素定式化	16
2. 3	解析例-I (Case2-1)	19
	(1) 解析条件	19
	(2) 解析結果	20
2. 4	解析例-II (Case2-2, Case2-3)	24
	(1) 解析条件	24

(2) 解析結果	24
2. 5 解析例-Ⅲ (Case2-4, Case2-5)	27
(1) 解析条件	27
(2) 解析結果	27
2. 6 解析例-Ⅳ (Case2-6, Case2-7)	30
(1) 解析条件	30
(2) 解析結果	30
2. 7 解析例-V (Case2-8, Case2-9)	33
(1) 解析条件	33
(2) 解析結果	33
2. 8 第2章のまとめ	38
参考文献	39
第3章 岩盤内圧縮空気貯蔵に関する地盤内気液2相流解析	40
3. 1 概説	40
3. 2 気液2相流の基礎方程式と有限要素定式化	41
(1) 基礎方程式	41
(2) 水分特性曲線	43
(3) 基礎方程式の無次元化	44
(4) 有限要素定式化	45
3. 3 解析スケールと漏気の関係	48
(1) 解析モデル	48
(2) 空洞内空気圧と漏気量の関係	50
(3) 漏気量の時間変化	52
(4) 解析スケールと水分特性曲線の関係	56

3. 4	空洞内空気圧の周期的変動と漏気量の関係	59
(1)	解析条件	59
(2)	解析結果と考察	60
3. 5	第3章のまとめ	63
参考文献		64
第4章	大規模掘削工事における揚水管理と逆解析の適用	65
4. 1	概説	65
4. 2	解析方法	66
(1)	基礎方程式と有限要素定式化	66
(2)	漏水因子	68
4. 3	逆解析	70
(1)	制約つきシンプレックス法	70
(2)	制約つき最小化問題	71
(3)	最適点の探索手順	71
(4)	収束判定条件	74
4. 4	逆解析による透水係数の推定	76
(1)	現場概要	76
(2)	揚水試験結果の逆解析	78
(3)	施工中の水頭観測結果による逆解析	81
4. 5	地盤の透水性や地中構造物が揚水効果に及ぼす影響	86
(1)	解析条件	86
(2)	解析結果と考察	87
4. 6	第4章のまとめ	90
参考文献		91

第 5 章	確率論を応用した不均質地盤のモデル化	92
5. 1	概説	92
5. 2	ランダムモデルの問題点	94
	(1) 解析条件	94
	(2) 解析結果	95
5. 3	透水係数の空間分布に関する理論的考察と模擬地盤の作成方法	98
	(1) 1次元の場合	98
	(2) 2次元の場合	99
5. 4	模擬地盤の性質	104
	(1) 1次元の場合	104
	(2) 2次元の場合	108
5. 5	平面 2次元定常被圧地下水流の解析	111
	(1) 基礎方程式と有限要素定式化	111
	(2) 解析条件	112
	(3) 解析結果	113
5. 6	各種の空間分布モデルの統計的性質と生成方法	116
	(1) 指数関数モデル	116
	(2) 自己回帰モデル	119
	(3) べき乗モデル	121
	(4) $1/f$ 型モデル	124
5. 7	解析スケールの変化と分散の関係	135
	(1) 指数関数モデルおよび自己回帰モデル	135
	(2) べき乗モデル	136
	(3) $1/f$ 型モデル	137
5. 8	解像度の変化と分散の関係	139
	(1) 指数関数モデルおよび自己回帰モデル	139

(2) べき乗モデル	140
(3) $1/f$ 型モデル	141
5. 9 実測値との比較	143
(1) 解析領域および解析方法	143
(2) 解析結果	143
5. 10 第5章のまとめ	145
参考文献	147
第6章 結論	149
謝辞	152

(別紙様式3)

論文内容の要旨

氏名 齋藤 雅彦

論文題目

地下水流における移流分散現象及び気液2相流の
数値シミュレーションと透水性の空間分布に関する研究

地下水は欠くことのできない重要な水資源である。しかし、適切な管理を怠れば、高度成長期の無秩序な揚水による地盤沈下に代表されるように、深刻な地下水障害を招く。これに加えて近年では、砒素や鉛などの重金属、あるいは TCE（トリクロロエチレン）、PCE（テトラクロロエチレン）などの有機塩素化合物による土壌・地下水の汚染が多発している。汚染物質による健康被害を未然に防ぐためには、汚染域の拡大を防止するとともに、浄化対策等を講じなければならないが、これらを効果的に実施するためには、地下水ならびに汚染物質の挙動に関する十分な理解が必要となる。

一方、都市部において土地の有効利用を図るために、地下空間の利用が進められている。地下空間の開発にあたっては、大規模な掘削工事を伴うことが多いが、このとき地下水の管理や制御は、工事の成否を左右する重要な要素となる。地下空間の開発に伴う地下水障害を確実に回避するためには、地下水の動きを的確に予測する技術が求められている。

このように、汚染物質の拡散過程を把握すること、あるいは適切な揚水管理や建設工事による影響を予測・評価することは、水資源を開発・保全するため、および施工の安全性を確保するために不可欠である。しかしながら地下水の流れ場の全体像を現場観測によって直接的に把握することは現時点で不可能であり、実際には現象そのものではなく、現象をモデル化することによってその挙動を模擬する方法（シミュレーションモデル）が用いられる。数値シミュレーションモデルは、1970年代以降、電子計算機の急速な性能向上とともに発展し、現在では地下水問題に対する数値シミュレーションの応用に関する研究は、きわめて多岐に渡っている。

本研究では、地下水・浸透流に関するいくつかの問題をとりあげ、これらを解析するための数値解析コードを開発し、数値シミュレーションを応用して地盤内の流れと物質輸送に関する考察を行なった。また、地盤の不均質性に関する理論的考察を行い、これに基づく透水係数の空間分布モデルを提案するとともに、その適用性について検討した。

第1章では、研究の背景として、水資源の確保および地下空間開発の観点から地下水解析の必要性、およびこれに対する数値解析の有効性について述べ、従来の研究と課題について整理するとともに、本研究の目的を示した。

第2章では、地下水汚染の問題をとりあげ、有限要素法による飽和・不飽和浸透流解析と、SUPG法による移流分散解析を連立させることにより、断面2次元および3次元空間内の密度変化を考慮した数値シミュレーションを行った。これにより、汚染源が飽和領域内に存在する場合、水との密度差が大きくなると鉛直方向の流れが無視できなくなること、また、汚染源が不飽和領域内に存在する場合は、汚染源付近は長期にわたって高い濃度が維持されること、および密度差の影響は時間の経過とともに小さくなることを確認した。加えて、密度差が大きく、鉛直流が無視できない場合は、汚染物質は3次元的に広がるため、拡散防止対策について検討する場合は3次元的な挙動に注意する必要があることを示した。

第3章では、高压空気の飽和岩盤内への侵入過程を把握するため基礎方程式を無次元化し、これに基づく数値解析を実施した。これにより、解析スケールが異なると、空気の圧縮性と飽和度分布の違いによって、相対的な漏気量も異なること、すなわち、漏気量は解析スケールに比例しないことを示した。また、空気圧が周期的に変動する場合は、空気圧の平均値が水圧を下回っていれば、ピーク時

に水圧を上回ったとしても漏気量が急激に増加しないこと、および空気圧の平均値が水圧と等しく、かつ変動周期が十分短ければ、漏気量は平均値に相当する一定の空気圧を作用させた場合とほぼ同等であることを示した。

第4章では、大規模掘削工事における地下水低下工法の影響を評価するため、逆解析により難透水層である加圧層を含めた透水係数の推定を試みた。また、平面準3次元有限要素解析により、隣接する帯水層間の透水性の違いや土留壁等の地中構造物の有無が揚水効果に及ぼす影響について検討した。その結果、比較的短時間の定常揚水試験から得られる水頭低下曲線にも加圧層からの漏水の影響は反映されており、逆解析によって加圧層の透水係数を推定することは可能であること、ただし、多くの帯水層定数を一度に推定する場合は、観測値の再現精度や推定値のばらつきについて十分吟味する必要があることを示した。また、施工中の現場にて観測された被圧水頭から逆解析によって透水係数を推定し、観測結果を良好に再現することに成功した。これは、逆解析による推定結果によって漏水性地盤における地下水低下工法の影響を適切に評価することが可能であることを意味する。さらに、漏水性被圧帯水層において揚水を行う場合は、揚水対象地盤のみならず、加圧層とそれに隣接する帯水層の透水性、および地中構造物の存在も無視できないことを明らかにした。

第5章では、透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い、これに基づく数値模擬地盤の生成方法を提案するとともに、その統計的性質、周期的性質、および水頭分布・流速分布に関する性質等について検討した。また、従来提案されている透水係数のいくつかの空間分布モデルと本研究で提案したモデル(1/f型モデル)に関する諸性質を整理した上で、各モデルの適用性について考察した。その結果、1/f型モデルによって生成された透水係数分布の確率分布は対数正規分布に従い、従来自然地盤から得られた知見と一致した。また、1次元空間における変動のパワースペクトルは概ね1/f型であること、および2次元等方性地盤ではパワースペクトルは $1/\lambda^2$ に比例すること(λ は空間周波数ベクトルの大きさ)を示した。水頭分布に関しては、滑らかな曲面ではなくフラクタル曲面と考えられること、および地質学的に同一と考えられる地層内においても、透水係数の空間的ゆらぎによって多様な水位・水頭分布を生じる可能性があることを確認した。流速分布については、水位・水頭分布と比較して不均質性の影響を受けやすく、本手法によって生成された模擬地盤においても、自然地盤においてしばしば観察される局所的な水みちが発生した。

自己相関係数は、ほぼ対数関数となり解析スケールに応じて変化することを示した。これを指数関数モデルで近似した場合の積分特性距離は、解析スケールの0.1倍程度となった。これも自然地盤における観測結果から得られている知見と一致する。さらに、従来用いられている指数関数モデルや自己回帰モデルでは、解析スケールの変化に対して分散が一意的に定まらず、べき乗モデルでは、解像度の変化に対して分散が一意的に定まらないのに対し、1/fモデルではスケールおよび解像度の変化に対して分散は同様に変化し、ほぼ対数関数に従うことを明らかにした。このため解析スケールや解像度の変化に対して分散は一意的に定まり、容易に内外挿することができる。加えて実測によって求められたバリオグラムに対しても、1/f型モデルは良好な再現性を有していることを確認した。

第6章では、第2章から第5章でえられた結論をまとめた。

第 1 章 序論

1. 1 研究の背景

(1) 水資源としての地下水の保全

良質な水資源を確保することは、きわめて重要な課題である。日本国内においても、渇水による水不足は頻繁に発生しており、日常生活に支障を来たす場合も少なくない。このような渇水対策として、従来は主としてダムや堰の建設等による地表水の利用に重点が置かれてきた。日本の年間水使用量約 1 0 0 0 億 m³ に対して、その約 8 0 % の水源が地表水である¹⁾。国土面積に対して平野部の少ないわが国においては、急峻な山間部に設けられたダムによる貯水が、水資源を確保する上で現時点でも重要な役割を果たしていることは疑いない。しかし、近年の自然環境の保全に関する市民の意識の向上とともに、生態系への影響などダムや堰の建設にともなう負の側面が問題視されるようになり、すでに一部の自治体では新たなダムの建設をすべて凍結する動きも見られる。このため、今後地表水の利用の大幅な増加は、ほとんど期待できないと考えるべきである。

これに対して、わが国における地下水の利用率は約 2 0 % 程度と推計されている。一方、生活用水に限定すれば約 3 0 %、工業用水では約 4 0 %、さらにビル用水ではほぼ 1 0 0 % が地下水によって賄われており¹⁾、地下水は都市部において欠くことのできない水資源として位置付けられる。地表水の水資源開発に多くを望めないとするならば、地下水の需要は今後も増大すると考えられる。

しかしながら、高度成長期の無秩序な揚水による地盤沈下に代表されるように、適切な管理を怠れば深刻な地下水障害を招くことも忘れてはならない。これに加えて近年では、砒素や鉛などの重金属、あるいは TCE (トリクロロエチレン)、PCE (テトラクロロエチレン) などの有機塩素化合物による土壌・地下水の汚染が多発している。汚染物質による健康被害を未然に防ぐためには、汚染域の拡大を防止するとともに、浄化対策等を講じなければならないが、これらを効果的に実施するためには、地下水ならびに汚染物質の挙動に関する十分な理解が必要となる。

(2) 地下空間の利用と地下水対策

都市部において土地の有効利用を図るために、地下空間の利用が進められている。すでに大都市部では地下街や地下鉄、あるいは電線の地中化や共同溝が整備されつつあるが、加えて近年の建設技術の進歩により、従来ほとんど利用されていない大深度の地下空間利用の可能性が広がった。さらに、平成12年5月には「大深度地下の公共的使用に関する特別措置法」が成立、同年6月には「大深度地下使用技術指針（案）・同解説²⁾」が発行され、地下空間利用は今後も確実に進展すると思われる。

地下空間の開発にあたっては、大規模な掘削工事を伴うことが多い。このとき地下水の管理や制御は、工事の成否を左右する重要な要素となる。もしも地下水対策が不十分であれば、異常出水や盤膨れ、あるいは周辺地盤の沈下による建物被害など、重大な事故や災害の引き金となりえる。

また、大規模な地下構造物の建設が、地下水の流れ場に与える影響も無視できない。たとえば、道路・鉄道等の線状構造物を地下に建設する場合、地下水の流れが遮断されるため、構造物に対して上流側の地下水位が上昇し、下流側が低下する。地下水位の上昇は、地震時の液状化の危険性を増大させ、地下水位の低下は、井戸枯れや地盤沈下を発生させる。さらに海岸部であれば地下水の塩水化を加速する。

以上のような地下空間の開発に伴う地下水障害を確実に回避するためにも、地下水の動きを的確に予測する技術が求められている。

(3) 数値解析の発展

先に述べたように、適切な揚水管理や建設工事による影響を予測・評価すること、あるいは汚染物質の拡散過程を把握することは、水資源を開発・保全するため、および施工の安全性を確保するために不可欠である。しかしながら、地下水の流れ場の全体像を現場観測によって直接的に把握することは現時点で不可能である。このため、実際には現象そのものではなく、現象をモデル化することによってその挙動を模擬する方法（シミュレーションモデル）が用いられる。地下水流を模擬する方法としては、模型実験や従来の井戸公式等の解析モデルのほか、支配方程式を差分法や有限要素法によって数値的に解析する数値モデルが挙げられる。

数値モデルは、1970年代以降、電子計算機の急速な性能向上とともに発展した。

これにともなって解析対象も拡大し、今日では地下水の流れ場だけではなく、地盤内の物質や熱の移動、水以外の空気や難溶解性物質を含めた多相流解析など、より複雑な現象を解明するための取り組みがなされている。また、解析モデルに導入されたパラメータ（地盤の水理特性や境界条件等）を同定する逆解析や、確率論を応用して不均質地盤をモデル化し、解析結果の信頼性を定量的に評価する試みなど、地下水解析における数値シミュレーションは、現在もその応用範囲を広げている。

1. 2 従来の研究

地下水流の数値シミュレーションの応用に関する研究は、きわめて多岐に渡っているが、本研究で取り扱う内容は、主として以下のように大別される。

- ・密度変化を考慮した地盤内の物質移動
- ・地盤内の気液2相流
- ・逆解析によるモデルパラメータの同定
- ・確率論を応用した不均質地盤のモデル化

ここでは、これらに関する従来の研究と問題点について述べる。

(1) 密度変化を考慮した地盤内の物質移動

典型的な問題は、臨海帯水層における塩水侵入である。淡水の比重 1.0 に対して海水の比重は 1.02~1.03 程度であり、海水と淡水が混合しないと仮定すると、海面から淡塩水境界までの深さは、Ghyben-Herzberg の式³⁾により求められることが知られている。川谷ら⁴⁾は、この関係を用いて揚水にもなう塩水侵入問題を平面2次元モデルにより解析している。また、杉尾ら⁵⁾は、残差流手法⁶⁾を用いて多層地盤および異方性地盤内の塩水侵入について解析し、地層条件の影響について検討している。

一方、海水と淡水が混合するという前提では、塩水くさびは塩分の移流分散現象として取り扱うため、塩分の濃度分布を定量的に求めることができる。たとえば、川谷ら⁷⁾は、飽和浸透場における移流分散現象を有限要素法で解析する際の解の精度と安定性を検討するとともに、塩水侵入問題への適用例を示している。Voss ら⁸⁾は、有限要素法によりハワイ・オアフ島の塩水侵入問題を解析している。内山ら⁹⁾は、差分法を用いて海岸域における栄養塩の輸送プロセスについて検討している。しかしながら、これらの解析には断面2次元モデルが用いられており、3次元モデルによる移流分散解析は、菱谷ら¹⁰⁾によって報告されているものの、応用例は少ない。

また、塩水侵入問題以外の地下水汚染問題では、密度差を考慮しない平面2次元移流分散モデルによるものが多い^{11),12),13)}。当然のことながら、水との密度差が問題にならない程度の低濃度の汚染であれば鉛直方向の移動は少なく、平面2次元モ

デルで十分である。しかし、汚染源付近が高濃度で、密度差による鉛直方向の流れが無視できない場合は3次元モデルを用いる必要がある。さらに地表面付近の不飽和域を汚染源とする場合も、鉛直方向の流れが生じるため同様に3次元モデルが必要であるが、このような解析例も非常に少ない。

(2) 地盤内の気液2相流

地盤は、土粒子と空隙によって構成されている。一般に空隙がすべて水で満たされている部分を飽和領域、空隙内に空気を含む部分を不飽和領域として区別している。これは両者の浸透特性が大きく異なるためである。自由水面の変動や降雨の浸透過程等では、飽和領域・不飽和領域が時間とともに変化するが、不飽和浸透特性を得ることができれば、飽和・不飽和浸透流解析^{14), 15), 16)}によって包括的に解析することができる。しかし、この方法は空隙内の空気の運動を無視しているため、地盤内に強制的に空気を送り込む場合などには適用できない。

このため、中川ら¹⁷⁾は、圧縮空気エネルギー貯蔵(CAES)^{18), 19)}における漏気量の算定に、空気の運動を考慮した気液2相流^{20), 21)}の有限要素解析を適用している。しかし、CAESに関しては、貯蔵空洞内の圧力変動が漏気量に与える影響など、未解明な点が多いのも事実である。

(3) 逆解析によるモデルパラメータの同定

数値シミュレーションを行なう際には、何らかのパラメータをあらかじめ設定する必要がある。たとえば地下水の流れ場を解析の対象とするならば、透水係数や貯留係数などの物性値、あるいは境界における水位・水頭や流入・流出量である。ところが、均質ではない自然地盤において、これらの数値をすべて実測によって決定することはきわめて困難である。このため、比較的観測の容易な物理量の観測値を用いて、それをうまく再現できるようなモデルパラメータを自動的に探索する逆解析が試みられるようになった。

逆解析に関する研究は、1980年代半ば以降、大きな進展を遂げている。Carreraら²²⁾は、有限要素法による解析を前提に、最尤法に基づいて目的関数を誘導し、共役勾配法によって目的関数を最小化する手法を提案している。この方法は、取り扱えるパラメータも多く適用性は高いが、地盤内の物質移動問題などに応用すること

は困難である。Woodbury ら^{23), 24)}は、目的関数の最小化に制約つきシンプレックス法を用いて、流れ場における熱伝導現象の逆解析を試みている。この方法は、最小化の過程で目的関数の勾配を求める必要がないため、複雑な定式化を必要とせず、また、有限要素法以外の数値解析法も使用可能である。奥野ら^{25, 26)}は、拡張カルマンフィルタを用いた逆解析手法を提案し、透水係数の空間分布推定に適用している。本城ら^{27), 28)}は、赤池のベイズ情報量規準 (A B I C) を用いて逆解析における不適切性の問題を回避するとともに、最適なモデルパラメータを選択する手法を提案している。また、Takeshita ら²⁹⁾は、遺伝アルゴリズムを用いて多層地盤における揚水試験の評価を試みている。

このように、パラメータの探索方法や、モデルパラメータの選択に関する研究は進んでいるものの、実際の大規模な掘削工事における揚水管理に逆解析が応用された例はあまり報告されていない。

(4) 確率論を応用した不均質地盤のモデル化

一般に、地盤は地質学的に異なった性質を持つ複数の層によって構成されている。各層はその透水性に応じて透水層、難透水層、不透水層等に分類され、解析を行なう際にはそれぞれの層の透水係数を一つの値で代表させることが多い。一方で、同一の土質と考えられる層内においても、透水係数は空間的に大きくばらつくことは経験上よく知られており、その不均質性が地下水の流動に及ぼす影響は小さいと断言できないことも事実である。このような問題に対して、地盤の統計的性質や空間的な相関関係を利用し、解析結果の信頼性を確率的に評価しようとする試みがなされている。たとえば、Smith ら^{30), 31)}は、空間的な相関性を取り入れた自己回帰モデルを用いて透水係数分布を発生させ、モンテカルロ法により1次元および2次元浸透場における不均質性の影響について論じている。また、原田ら³²⁾は、空間的相関性を指数関数型の自己相関関数と仮定した上で、定常揚水試験の信頼性を理論的に評価している。

一方で、透水係数分布の推定に空間分布モデルを応用する試みもなされている。たとえば、前川ら³³⁾は、実測によって得られたバリオグラムに、べき乗型関数を当てはめ、透水係数分布のフラクタル次元を推定し、岩盤内の透水係数分布を推定している。中川ら³⁴⁾は、トレーサー試験結果と数値計算結果を比較し、それらの適合

度から自己回帰モデルのパラメータを評価する方法を提案している。

以上のような確率論的評価あるいは空間分布の推定に用いられる透水係数の空間分布モデルは、多くの実測値から得られた共分散関数やバリオグラムを近似関数で表現したものである。近似関数としては、先に挙げた指数関数、べき乗関数の他、種々のものが提案されている³⁵⁾。

しかしながら、これらの近似関数の適否については、一般に実測値との適合性を基に判断されるのみであり、その理論的背景は必ずしも明確ではない。

1. 3 本研究の目的と構成

本研究は，地下水・浸透流に関するいくつかの数値解析コードを開発するとともに，これらを用いて数値実験をおこない，地盤内の流れと物質輸送に関する新たな知見を提供すること，および地盤の不均質性に関する理論的考察に基づく透水係数の空間分布モデルを提案し，その適用性を検討することを目的とする．

第2章では，水溶性物質による地下水汚染に関する問題を取り上げ，汚染物質の比重の違いや，汚染源の空間的条件による汚染形態の特徴について検討するとともに，3次元モデルを用いて揚水による拡散抑止効果について考察する．

第3章では，圧縮空気エネルギー貯蔵に関して，地盤内における気液2相流解析により解析スケールと漏気量の関係，および空洞内の空気圧が周期的に変動する場合の水封効果について検討する．

第4章では，実際の大規模掘削工事現場において計測された水頭観測値から，逆解析によって漏水性被圧帯水層における加圧層の透水係数を推定し，多層地盤における揚水管理に対する逆解析の適用性について考察する．

第5章では，透水係数の空間分布に関する理論的考察をおこない，これに基づく1次元および2次元の透水係数空間分布モデルを提案する．また，統計的性質について従来の空間分布モデルと比較し，その相違を明らかにするとともに本モデルの有効性を確認する．

第6章では，第2章から第5章でえられた結論をまとめる．

参考文献

- 1) 水収支研究グループ編：地下水資源・環境論－その理論と実践－「第1章 日本における地下水利用と地下水障害」，1993.
- 2) 国土庁大都市圏整備局計画課大深度地下利用企画室監修：大深度地下使用技術指針（案）・同解説，2000.
- 3) Todd, D. K.: *Groundwater Hydrology*, John Wiley & Sons, pp.496-498, 1980.
- 4) 川谷 健，齋藤雅彦：浅層地下水の汲み上げによる塩水侵入の数値シミュレーション，土地造成工学研究施設報告，第6号，pp.71-90，1988.
- 5) 杉尾 哲，森 耕司：不均質地盤における塩水侵入，土と基礎，第37巻第6号，pp.35-40，1989.
- 6) Desai, C. S. and Li, G. C.: A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media, *Advance in Water Resources*, Vol.6, pp.27-35, 1983.
- 7) 川谷 健，小林俊一，金 東錫：地下水流における物質分散現象の数値解法について，建設工学研究所報告，第23号，pp.197-214，1981.
- 8) Voss, C. I. and Souza, W. R.: Variable density flow and solute transport simulation of regional aquifers containing a narrow freshwater-saltwater transition zone, *Water Resources Research*, Vol.23, No.10, pp.1851-1866, 1987.
- 9) 内山雄介，Peter RÖLKE，足立久美子，灘岡和夫，八木 宏：海岸地下浸透流およびそれに伴う沿岸域への栄養塩輸送過程，土木学会論文集，No.635/II-49，pp.127-139，1999.
- 10) 菱谷智幸，西垣 誠，橋本 学：物質移動を伴う密度依存地下水流の3次元数値解析手法に関する研究，土木学会論文集，No.683/III-49，pp.59-69，1999.
- 11) Nelson, R.W.: Evaluating the environmental consequences of groundwater contamination 2. Obtaining location/arrival time and location/outflow quantity distributions for steady flow system, *Water Resources Research*, Vol.14, No.3, pp.416-428, 1978.
- 12) Freeberg, K. M., Bedient, P. B. and Connor, J. A.: Modeling of TCE contamination and recovery in a shallow sand aquifer, *Groundwater*, Vol.25, No.1, pp.70-80, 1987.
- 13) 藤崎克博，平田健正，中杉修身，新保 聡，浅岡公江：パソコンを用いた地下水汚染シミュレーション，地下水汚染とその防止対策に関する研究集会第2回講

- 演集, pp.176-179, 1992.
- 14) Neuman, S. P.: Saturated unsaturated seepage by finite elements, *Proc., ASCE HY*, Vol.99, No.12, pp.2233-2250, 1973.
 - 15) Neuman, S. P.: Galerkin method of analyzing non-steady flow in saturated-unsaturated porous media, *Finite element Method in flow problem*, edited by C. Taylor, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher, John Wiley & Sons, Chap.19, 1974.
 - 16) 赤井浩一, 大西有三, 西垣 誠: 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, 土木学会論文集, 第264号, pp.87-96, 1977.
 - 17) 中川加明一郎, 駒田広也, 宮下国一郎, 村田 満: 岩盤内圧縮空気貯蔵からの漏気防止条件, 土木学会論文集, No.310/III-5, pp.233-241, 1986.
 - 18) 桜井春輔, Kjørholt, K., 田村富雄, 山地宏志: 高压ガス地下貯蔵の実績とわが国の動向, 土木学会論文集, No.474/VI-20, pp.57-65, 1993.
 - 19) 石塚与志雄, 八田敏行, 熊坂博夫, 木下直人, 小野勇司, 若林成樹: ライニング方式圧縮空気貯蔵における岩盤の安定性に関する検討, 清水建設研究報告, No.54, pp.21-32, 1991.
 - 20) Pinder, G. F. and Gray, W. G.: Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic Press, pp.184-190, 1977.
 - 21) Meiri, D.: Two-phase flow simulation of air storage in an aquifer, *Water Resources Research*, Vol.17, No.5, pp.1360-1366, 1981.
 - 22) Carrera, J. and Neuman, S. P.: Estimation of aquifer parameters under transient and steady state condition,
 - 1: Maximum likelihood method incorporating prior information, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.199-210, 1986.
 - 2: Uniqueness, stability, and solution algorithms, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.211-227, 1986.
 - 3: Application to synthetic and field data, *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.228-242, 1986.
 - 23) Woodbury, A. D., Smith, L. and Dunbar, W. S.: Simultaneous inversion of hydrogeologic and thermal data, 1: Theory and application using hydraulic head data, *Water Resources Research*, Vol.23, No.8, pp.1586-1606, 1987.

- 24) Woodbury, A. D. and Smith, L.: Simultaneous inversion of hydrogeologic and thermal data, 2: Incorporation of thermal data, *Water Resources Research*, Vol.24, No.3, pp.356-372, 1987.
- 25) 奥野哲夫, 鈴木 誠: 不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法, 土木学会論文集, No.469/Ⅲ-23, pp.93-102, 1993.
- 26) 奥野哲夫, 鈴木 誠, 市川康明: 複数の揚水試験結果を用いた透水係数の空間分布推定と地下水流動の将来予測, 土木学会論文集, No.493/Ⅲ-27, pp.165-174, 1994.
- 27) 本城勇介, 福井宏行, 小川正二: 拡張ベイズ法による広域地下水解析モデルの逆解析: 定常データに基づく場合, 土木学会論文集, No.535/Ⅲ-34, pp.93-102, 1996.
- 28) 本城勇介, 橘川正男, 小川正二: 拡張ベイズ法による広域地下水解析モデルの逆解析: 非定常データに基づく場合, 土木学会論文集, No.561/Ⅲ-38, pp.175-183, 1997.
- 29) Takeshita, Y., Kohno, I. and Yasui, K.: determination of the hydraulic properties of a multilayered aquifer from pumping test data using genetic algorithms, *Proceedings of International conference on CALIBRATION AND RELIABILITY IN GROUNDWATER MODELING*, pp.229-235, 1999.
- 30) Smith, L. and Freeze, R. A.: Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 1. One-dimensional simulations, *Water Resources Research*, Vol.15, No.3, pp.521-528, 1979.
- 31) Smith, L. and Freeze, R. A.: Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2. Two-dimensional simulations, *Water Resources Research*, Vol.15, No.6, pp.1543-1559, 1979.
- 32) 原田守博, 高木不折: 不均質帯水層における透水試験結果の不確定性, 土木学会論文集, No.443/Ⅱ-18, pp.109-112, 1992.
- 33) 前川恵輔, 尾方伸久, 柳澤孝一, 高瀬博康: フラクタル理論による堆積岩中の透水係数分布の推定, 動燃技報, No.98, pp.71-76, 1996.
- 34) 中川 啓, 神野健二: 現地トレーサー試験と数値計算による不均一浸透場の推定, 土木学会論文集, No.656/Ⅱ-52, pp.47-59, 2000.

35) de Marsily, G.: Quantitative Hydrogeology, Academic Press, pp.303, 1986.

第2章 密度変化を考慮した地下水汚染の有限要素解析

2. 1 概説

近年、廃棄物処理の問題に対して社会的関心が高まっている。とくに、処理場の不足や処理費の高騰もあり、不法投棄が後を絶たず、有害物質による環境汚染が懸念されている。有害物質を含む廃棄物が不法に投棄された場合、あるいは地震・事故等により有害物質が漏洩し地盤に浸透した場合、まず土壌および地下水が汚染され、地下水流によって汚染域が拡大される。したがって、地下水の流動状況を把握し、汚染物質の移流・拡散過程を適切に予測することは、有害物質による健康被害を未然に防止し、適切な対策を実施する上で重要となる。

汚染物質は水に対する溶解性により、金属イオン、農薬、塩分等の水溶性物質と、有機塩素系溶剤、石油製品類等の難溶性物質に大別され、それぞれ移動形態が異なる。これらの現象を数理的に表現する基礎方程式は、水溶性物質の溶質移動については浸透流の基礎式と移流分散方程式、難溶性物質については汚染相・水相・空気相で構成される3相流の基礎式と移流分散方程式を連立させたものとなる。しかしながら、多相流の場合定式化が複雑であることに加えて、浸透特性についても不明な点が多く、測定も困難であることから、現時点では難溶性物質による汚染を解析する場合にも水溶性の場合と同様の基礎方程式で代替されることも多い。

このため、本研究では、水溶性物質による汚染を解析の対象とする。水溶性物質のうち、とくに汚染水の比重が大きい場合は、濃度分布（密度差）が流れ場に与える影響が大きく、さらにその影響が溶質の移流分散過程におよぶことになる。すなわち、流れ場の条件による強制対流と、密度差による自然対流の混在する場を解析しなければならない。一方、広く用いられている Dupuit の仮定に基づく平面2次元解析では、このような密度差による鉛直方向の流れを考慮することができず、また地表面付近（不飽和領域）に汚染源が存在する場合も適用することができない。

本章では、このような水溶性物質による地下水汚染の問題を解析するため、2次元および3次元の有限要素解析プログラムを作成した。ここで、浸透流解析においては、密度変化の影響を考慮した飽和・不飽和浸透流の基礎式を用いている。また、移流分散方程式においては、通常のガラーキン法により離散化すると、移流項が分

散項と比較して卓越する場合に、解が不安定になることが知られている。この不安定性を抑制するため、本研究では風上有限要素法の一つであるSUPG法^{1), 2), 3)}を用いた。これを用いて汚染物質の比重の違いによる汚染形態の特徴について検討するとともに、揚水による拡散抑止効果について考察した。

2. 2 解析手法

(1) 浸透流の基礎方程式と有限要素定式化

密度変化を考慮した飽和・不飽和浸透流の基礎式は以下のように表される。

$$\frac{\rho}{\rho_0} \left(S_s S_w + \beta' n S_w + n \frac{dS_w}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\mathbf{K} \cdot \left(\nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla x_3 \right) \right] \quad (2.1)$$

ここで、 ρ は濃度 C における水溶液の密度、 ρ_0 は濃度 0 における水の密度、 p は圧力水頭、 x_3 は位置水頭、 n は間隙率、 S_w は飽和度、 \mathbf{K} は透水係数テンソル、 S_s は比貯留率、 β' は水の圧縮率、 t は時間である。

水の圧縮性を無視し ($\beta' = 0$)、不飽和領域においては圧力水頭の変化による間隙率の変化は無いもの ($S_w \neq 1$ のとき $S_s = 0$) とする。また、透水係数テンソルは、不飽和透過係数比 K_r および飽和透水係数テンソル \mathbf{K}_s により以下のように表すことができる。

$$\mathbf{K} = K_r \cdot \mathbf{K}_s \quad (2.2)$$

さらに、 dS_w/dp および K_r は、当該地盤の水分特性曲線からもとめる。

境界条件は、圧力水頭が規定される境界では、

$$p = p_1 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad (2.3)$$

流束が規定される境界では、

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \nabla p + \nabla x_3 \right) = V_2 \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad (2.4)$$

ここで、 V は境界流束、 \mathbf{n} は境界上に立てた単位外向法線ベクトルである。

式(2.1)にガラーキン法を適用し、有限要素定式化すると、次式を得る。

$$[\mathbf{A}] \left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\} + [\mathbf{B}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{D}\} + \{\mathbf{Q}\} \quad (2.5)$$

ここで、

$$A_{nm} = \sum_e \int_R \left(S_s S_w + n \frac{dS_w}{dp} \right) \frac{\rho}{\rho_0} N_n N_m dR \quad (2.6)$$

$$B_{nm} = \sum_e \int_R K_{ij} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dR \quad (2.7)$$

$$D_n = -\sum_e \int_R \frac{\rho}{\rho_0} K_{i3} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} dR \quad (2.8)$$

$$Q_n = \sum_e \int_R V N_n d\Gamma \quad (2.9)$$

であり、 N_n は補間関数である。

式(2.5)の時間項を後退差分方で離散化すると、次式を得る。

$$[\mathbf{A} + \Delta t \mathbf{B}] \{\mathbf{p}^{(1)}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{p}^{(0)}\} + \Delta t \{\mathbf{D} + \mathbf{Q}\} \quad (2.10)$$

ここで、 $\mathbf{p}^{(0)}$ は時刻 t における圧力水頭、 $\mathbf{p}^{(1)}$ は時刻 $t + \Delta t$ における圧力水頭である。

(2) 移流分散方程式と SUPG 法による有限要素定式化

地下水流による水溶性物質の輸送過程の基礎式（移流分散方程式）は、以下のよう
に表される。

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\theta \mathbf{D} \cdot \nabla C) - \mathbf{q} \cdot \nabla C \quad (2.11)$$

ここで、 C は濃度、 θ は体積含水率（ $= nS_w$ ）、 \mathbf{D} は分散係数テンソル、 \mathbf{q} はダルシー
流速ベクトルである。

式(2.11)における分散係数テンソル \mathbf{D} は、次式で与えられる⁴⁾。

$$\theta \mathbf{D} = \alpha_T |\mathbf{q}| \boldsymbol{\delta} + (\alpha_L - \alpha_T) \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} + \alpha_m \theta \boldsymbol{\delta} \quad (2.12)$$

ここで、 α_L は流れ方向の分散長、 α_T は流れに垂直な方向の分散長、 α_m は分子拡散
係数、 $\boldsymbol{\delta}$ はクロネッカーデルタテンソルである。

境界条件は、濃度規定の境界で、

$$C = C_B \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad (2.13)$$

濃度勾配規定の境界で、

$$\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{q} \mathbf{D} \cdot \nabla C) = Q_{B1} \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad (2.14)$$

流束規定の境界で、

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} C - \theta \mathbf{D} \cdot \nabla C) = Q_{B2} \quad \text{on} \quad \Gamma_3 \quad (2.15)$$

ここに、 Q_{B1} は境界での濃度勾配による既知の溶質流束、 Q_{B2} は境界での既知の溶質
流束である。

式(2.11)に SUPG 法（Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin 法）を適用し、有限要素

定式化する．通常のガラーキン法では，重み関数として補間関数と同一の関数を用いるが，SUPG法では重み関数として次式を用いる．

$$W_n = N_n + \frac{k_\alpha}{|\mathbf{q}|^2} \mathbf{q} \cdot \nabla N_n \quad (2.16)$$

ここで， k_α は，人工拡散係数であり，次式で与えられる．

$$k_\alpha = \frac{|\mathbf{q}| \Delta L}{2} F(\alpha), \quad F(\alpha) = \coth\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{2}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{|\mathbf{q}| \Delta L}{\theta D_L} \quad (2.17)$$

式(2.16)を重み関数として，式(2.10)にガラーキン法を適用することにより，次式を得る．

$$[\mathbf{A}] \left\{ \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right\} + [\mathbf{B} + \mathbf{E}][\mathbf{C}] = \{\mathbf{F}\} \quad (2.18)$$

ここに，

$$A_{nm} = \sum_e \int_R \theta W_n N_m dR \quad (2.19)$$

$$B_{nm} = \sum_e \int_R \theta D_{ij} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dR \quad (2.20)$$

$$E_{nm} = \sum_e \int_R q_i W_n \frac{\partial N_m}{\partial x_i} dR \quad (2.21)$$

$$F_n = \sum_e \int_{\Gamma} Q_3 W_n d\Gamma \quad (2.22)$$

である．

式(2.18)の時間項を後退差分方で離散化すると，次式を得る．

$$[\mathbf{A} + \Delta t(\mathbf{B} + \mathbf{E})]\{\mathbf{C}^{(1)}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{C}^{(0)}\} + \Delta t\{\mathbf{F}\} \quad (2.23)$$

ここで， $\mathbf{C}^{(0)}$ は時刻 t における濃度， $\mathbf{C}^{(1)}$ は時刻 $t + \Delta t$ における濃度である．

解析は，式(2.10)および式(2.23)を往復する繰り返し計算を行い，両者を満足する解を求める．これらの手順の流れ図を図-2.1に示す．

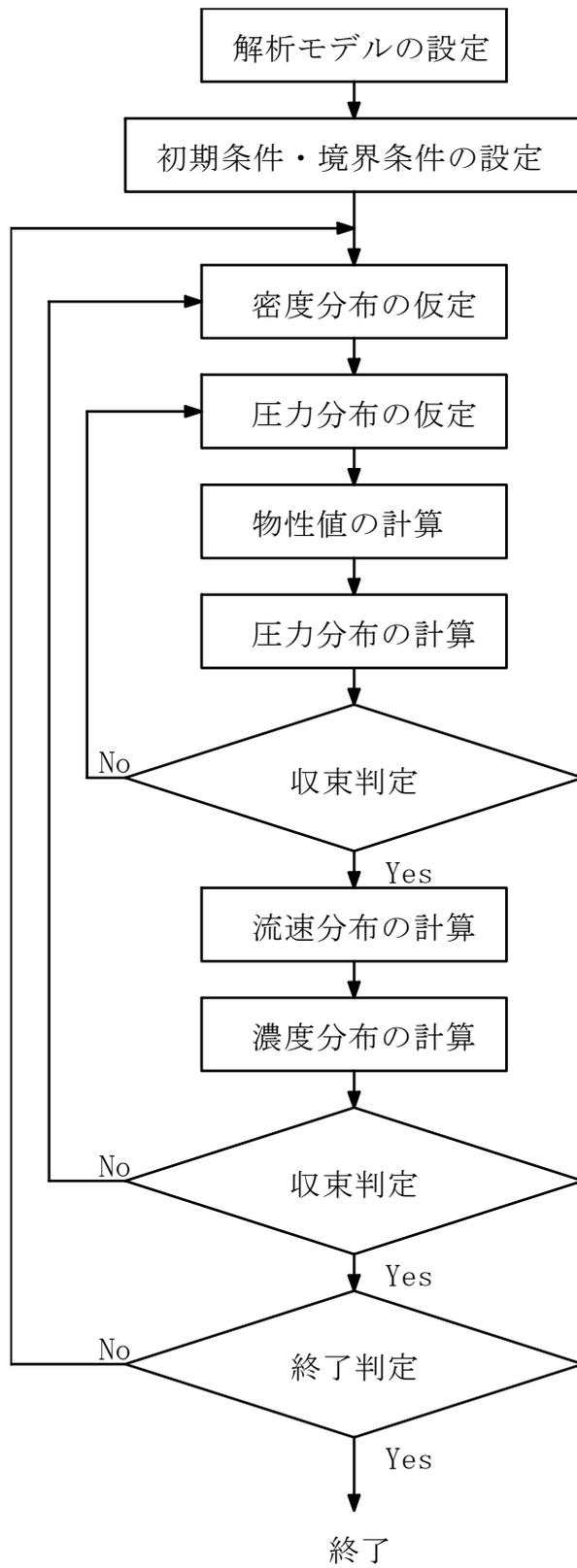


図-2.1 数値解析の流れ図

2. 3 解析例-I (Case2-1)

(1) 解析条件

密度差による自然対流のみが存在する場(Case2-1)を解析する。解析領域は、100 m × 40 m の鉛直断面 2 次元領域 (図-2.2) である。

流れ場における境界条件は、 $x = 0$ m および $x = 100$ m において、 $z \leq 36$ m で $p = 36 - z$ (m H₂O)，および $z > 36$ m で $p \leq 0$ (m H₂O) (ただし $p < 0$ のとき $V = 0$)，その他の境界において $V = 0$ ，濃度場における境界条件は，すべての境界で $Q_{Bl} = 0$ とする。

初期条件は，流れ場において全領域で $p = 36 - z$ (m H₂O)，濃度場において， $46 \text{ m} \leq x \leq 54 \text{ m}$ および $32 \text{ m} \leq z \leq 36 \text{ m}$ (汚染源) で $C = C_1 = 1$ (無次元)，その他は $C = 0$ とする。

密度 ρ と濃度 C の関係は，次式とする。

$$\rho = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) C \quad (2.24)$$

ここに， ρ_1 は，汚染源における密度であり， $\rho_0 = 1.0$ (g/cm³)， $\rho_1 = 1.2$ (g/cm³) とする。

また，不飽和領域における水分特性曲線は図-2.3 に，その他の物性値は表-2.1 に示す。

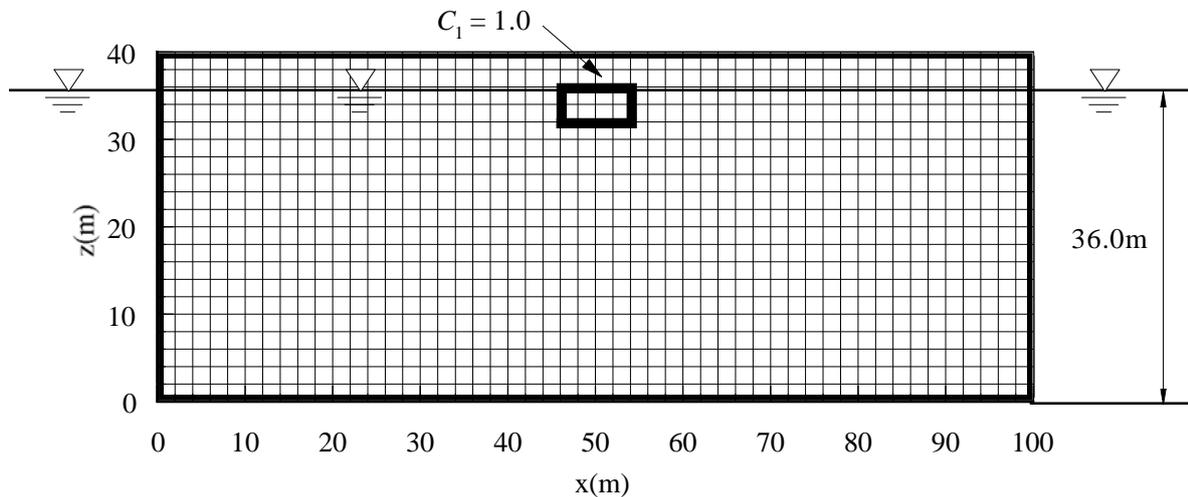


図-2.2 解析領域

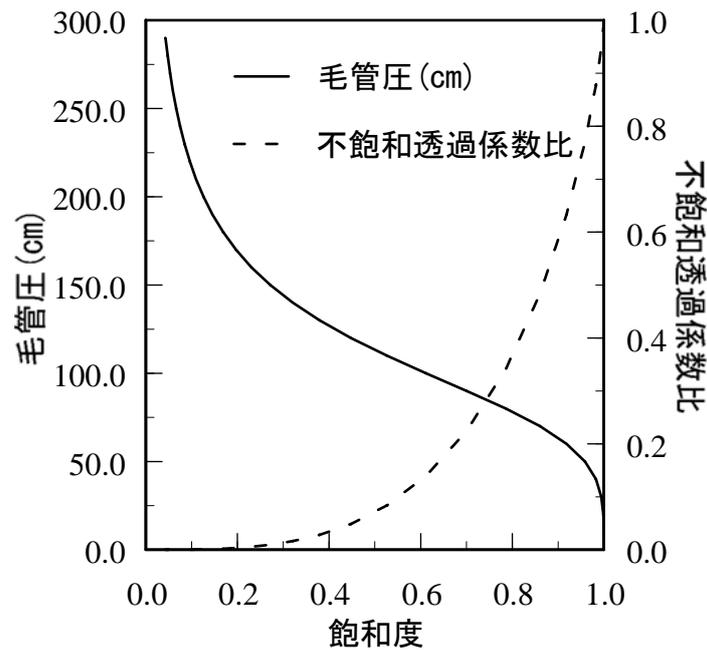


図-2.3 水分特性曲線

表-2.1 物性値

間隙率		0.4
比貯留量	(m^{-1})	1.0×10^{-6}
飽和透水係数	(cm/sec)	1.0×10^{-3}
分散長 (α_L)	(m)	0.1
分散長 (α_T)	(m)	0.01
分子拡散係数	(m^2/sec)	1.0×10^{-9}

(2) 解析結果

図-2.4 に 2120 日後までの $x=50$ m 上における濃度分布の時間変化を、図-2.5 および図-2.6 に、100 日後、320 日後、1160 日後、2120 日後における濃度分布および流速分布(ダルシー流速)を示す。

図-2.4 より、濃度の最大値は、およそ 160 日後には半減するが、その後はゆるやかに低下する。そして、320 日後付近から底面に滞留し始め、2120 日後でも底面付近において汚染源の 20%以上の濃度を保持している。

図-2.5, 図-2.6 より, 初期の段階では, 汚染源近傍の高濃度の領域で密度差のため大きな下向きの流れが生じている. このために汚染源下方の低濃度の部分が左右に排斥され, 同時に汚染源上方では低濃度の水が補給される. このように左右対称の渦を形成しながら高濃度の領域が重力によって下方に移流されていく状態がわかる. 高濃度部分が底面に達すると, 底面上を左右に分かれる流れが大きくなり, 高濃度の領域が左右に拡大されていく.

これらの結果は, 密度差による自然対流の存在する流れ場における移流分散現象の特徴を, 適切に表現しており, 本手法の妥当性が確認されたものと判断される.

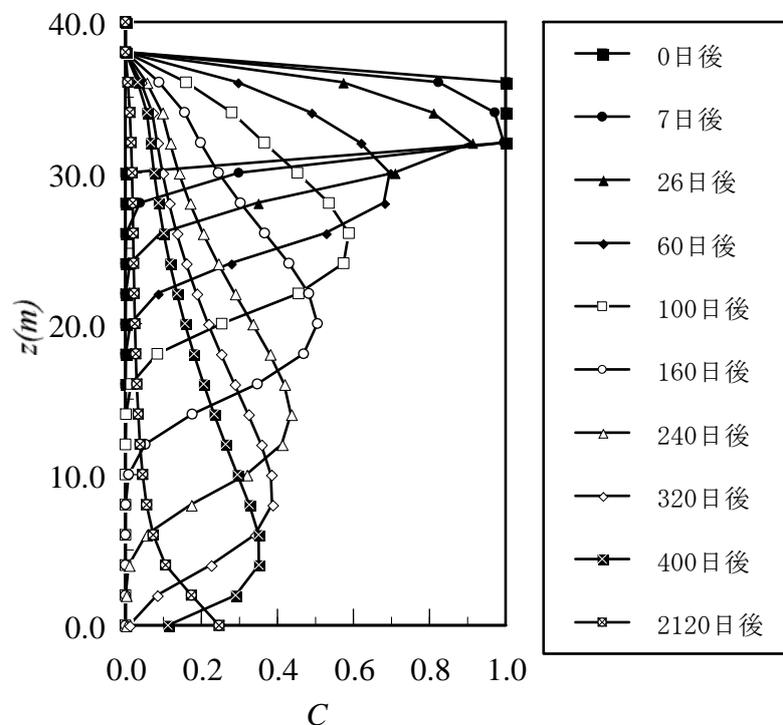
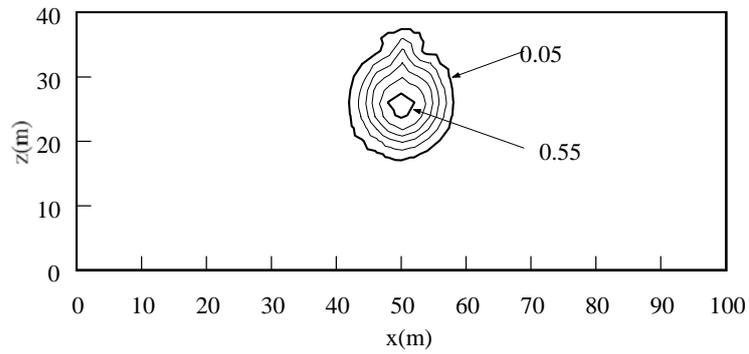
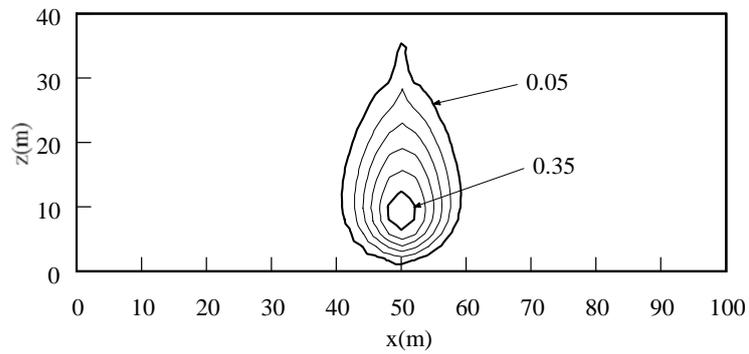


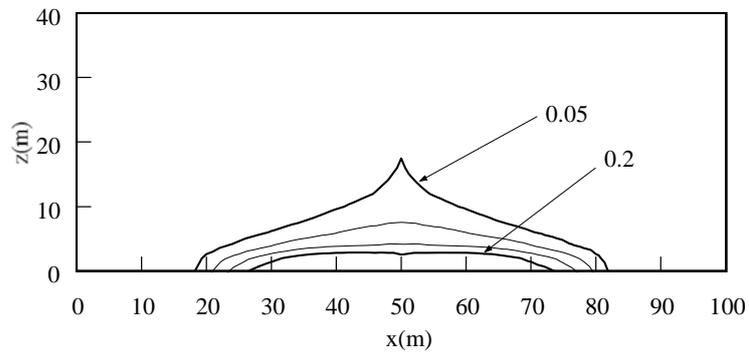
図-2.4 濃度の時間変化 ($x=50.0\text{m}$)



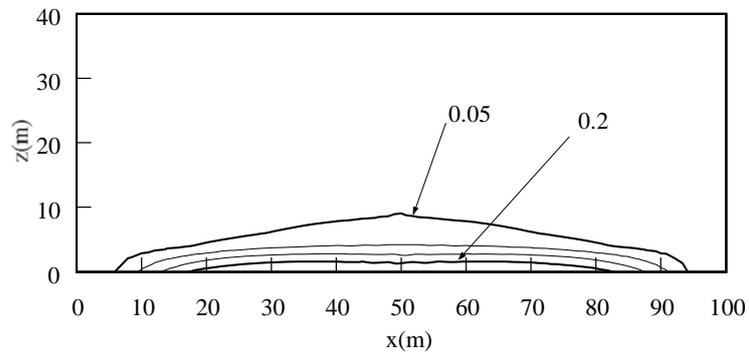
(a) 100 日後



(b) 320 日後

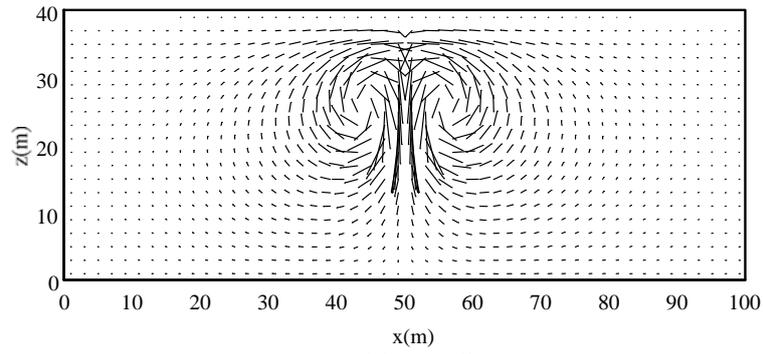


(c) 1160 日後

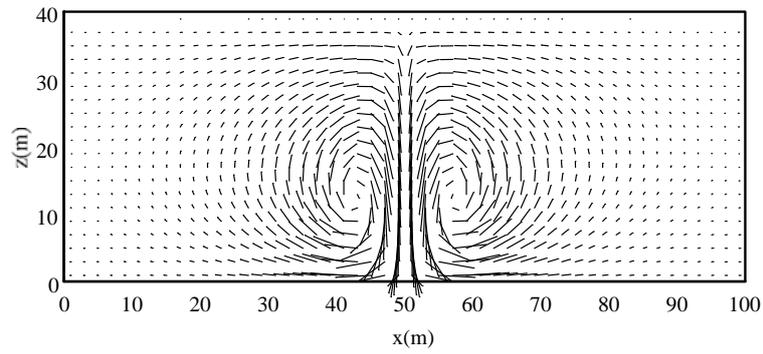


(d) 2120 日後

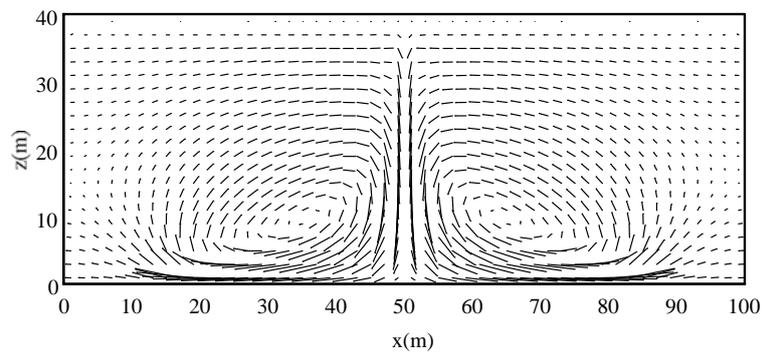
図-2.5 濃度分布



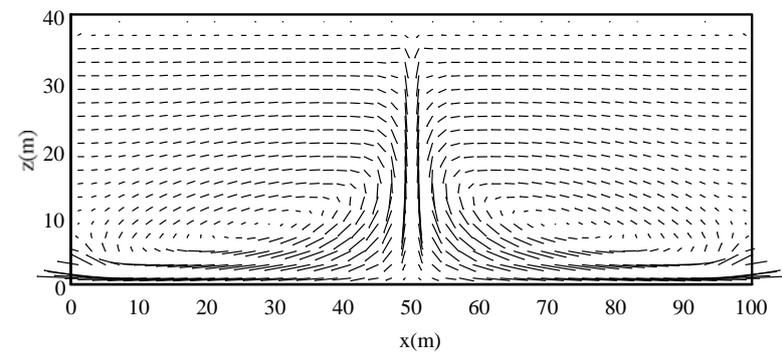
(a) 100日後



(b) 320日後



(c) 1160日後



(d) 2120日後

図-2.6 流速分布

2. 4 解析例-Ⅱ (Case2-2, Case2-3)

(1) 解析条件

ここでは、水頭差による強制対流が存在する浸透場において、飽和領域が汚染された場合について検討する。解析領域は、図-2.7に示すように、左右の境界で2mの水頭差が生じているものとし、汚染源は、水面下およそ2~4mの飽和領域内に存在するものとする。

汚染源における汚染水の密度は、密度差が濃度分布に与える影響を検討するために、Case2-2で $\rho_1 = 1.5 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ 、Case2-3で $\rho_1 = 1.03 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ とする。

その他の物性値は、Case2-1と同様である。

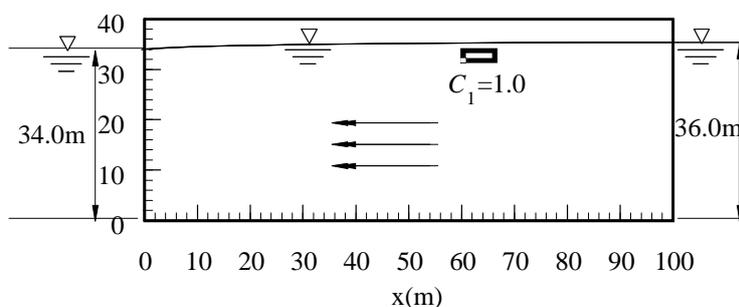


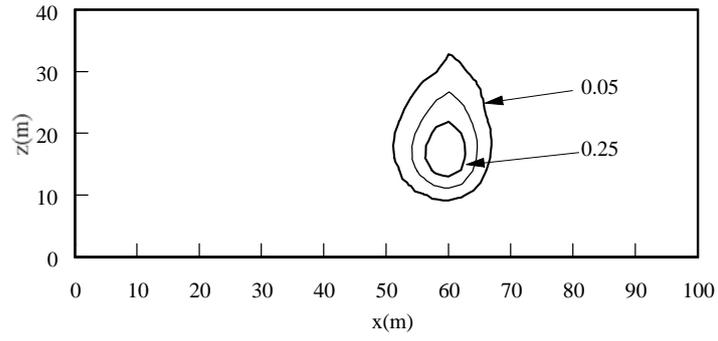
図-2.7 解析領域

(2) 解析結果

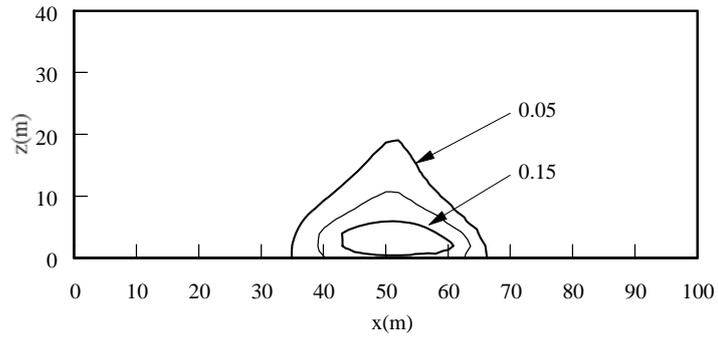
図-2.8、図-2.9はCase2-2の濃度分布と流速分布、図-2.10、図-2.11はCase2-3の濃度分布と流速分布である。

Case2-2では、高濃度の領域において密度差のため大きな下向きの流れが生じ、左右で非対称な渦を形成しながら高濃度領域が移動するのに対し、Case2-3では、密度差の影響は小さく、ほぼ地下水面に沿って下流方向に移動する。

また、両者の濃度分布を比較すると、いずれの時刻においても最大値はCase2-3がCase2-2を上回っている。これは、Case2-2では、流れの方向が時間的に大きく変化するのに対し、Case2-3では、流れの方向がほとんど変化しないため、分散の影響が比較的小さくなるためと思われる。

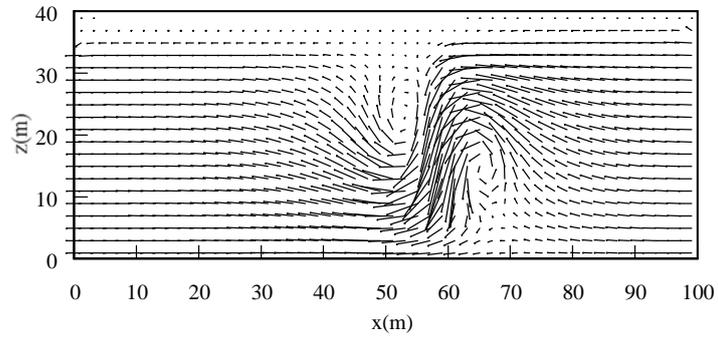


(a) 100 日後

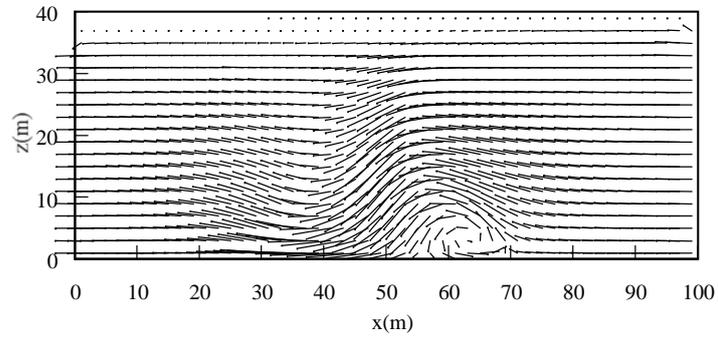


(b) 320 日後

图-2.8 浓度分布 (Case2-2)

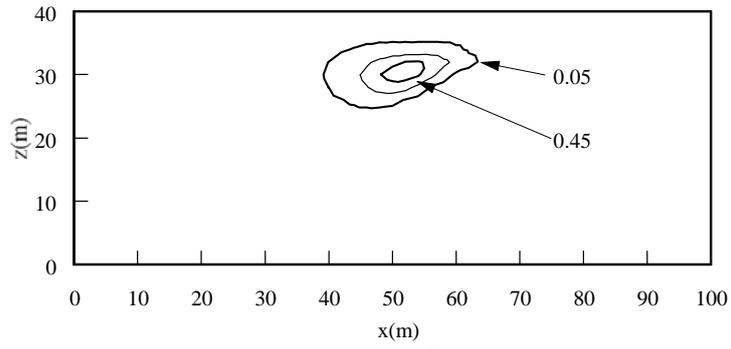


(a) 100 日後

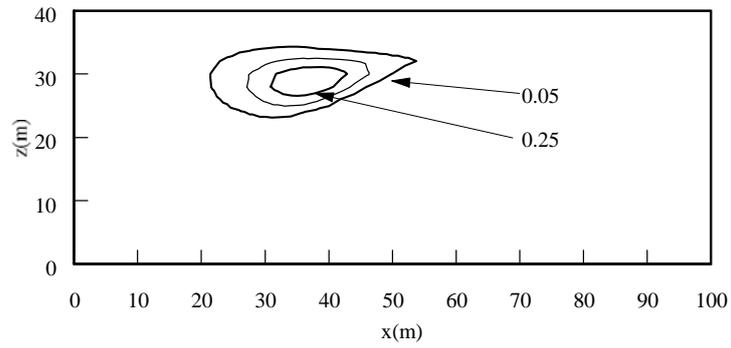


(b) 320 日後

图-2.9 流速分布 (Case2-2)

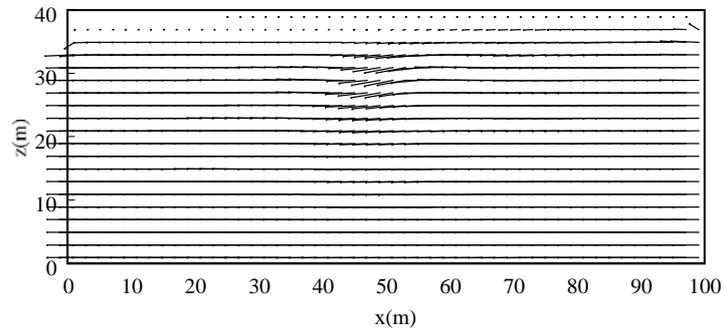


(a) 100 日後

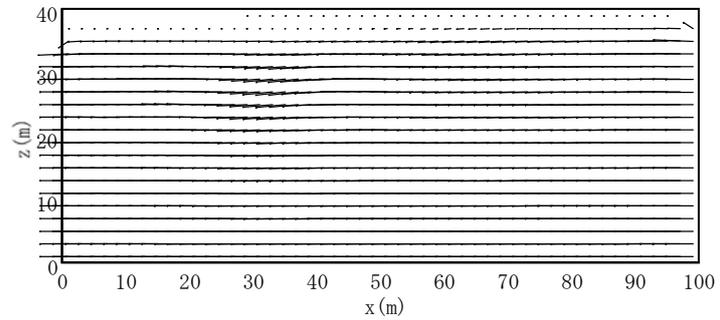


(b) 320 日後

图-2.10 濃度分布 (Case2-3)



(a) 100 日後



(b) 320 日後

图-2.11 流速分布 (Case2-3)

2. 5 解析例-Ⅲ (Case2-4, Case2-5)

(1) 解析条件

ここでは，水頭差による強制対流が存在する浸透場において，不飽和領域が汚染された場合について検討する．

汚染源は，図-2.12 に示すように，地表面下 0~2m の不飽和領域内に存在するものとする．汚染源における汚染水の密度は，Case2-2 および Case2-3 と同様に，Case2-4 で $\rho_1 = 1.5 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ ，Case2-5 で $\rho_1 = 1.03 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ とする．その他の物性値は，Case2-1 と同様である．

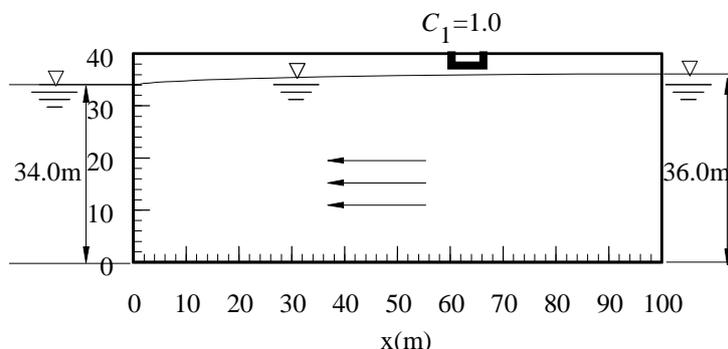


図-2.12 解析領域

(2) 解析結果

図-2.13 は，各時刻における Case2-4 の濃度分布，図-2.14 は Case2-5 の濃度分布である．

Case2-4 では，初期の段階において，汚染域は下方に拡大している．一方で，濃度は汚染源付近が最も大きく，依然として汚染物質の供給源となっている．また，飽和領域内の濃度があまり上昇しないため，密度差も比較的小さい．このため，飽和領域内においては，時間の経過に従って水平方向の流れが卓越するようになり，汚染領域は下流側に移動する．そして長期的には，解析領域内において水面付近の汚染が継続している．

これに対し，Case2-5 では，汚染域はほぼ地下水面に沿って低濃度で拡大するが，Case2-4 と同様に汚染源付近は高濃度に保たれており，長期間にわたって汚染物質の供給源となっている．

これらの結果から，不飽和領域が汚染された場合，その影響は低濃度ながらきわめて長期にわたるものと思われる．

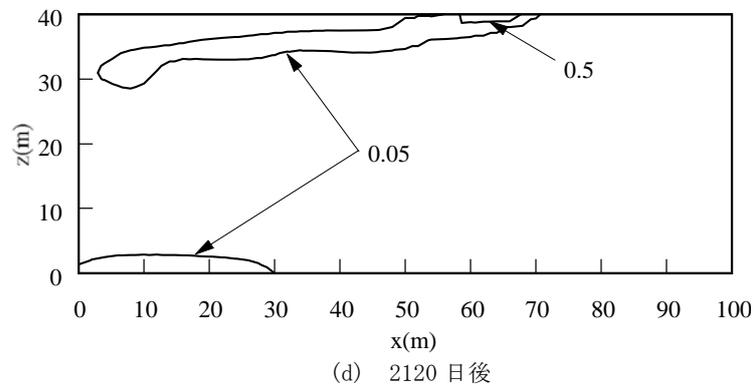
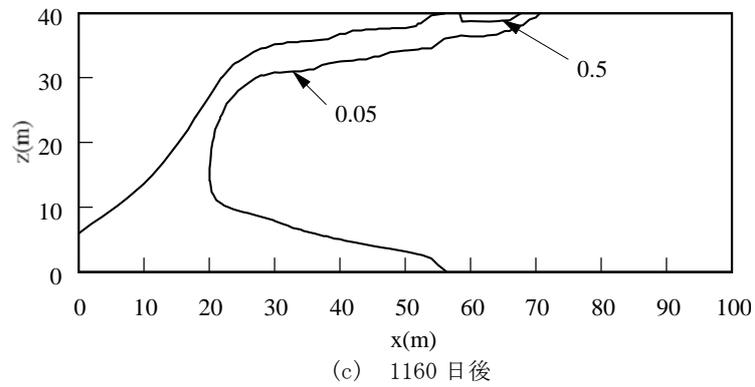
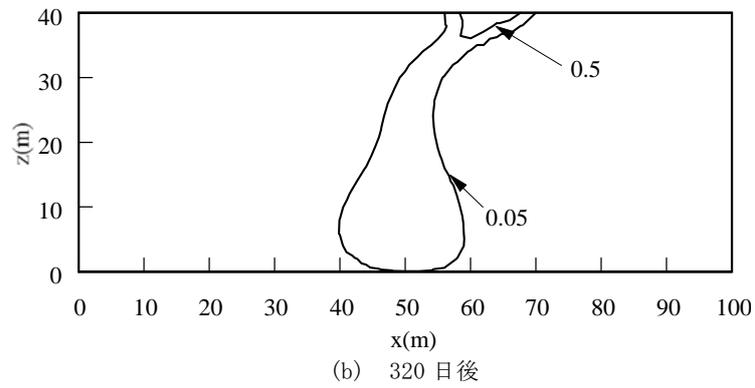
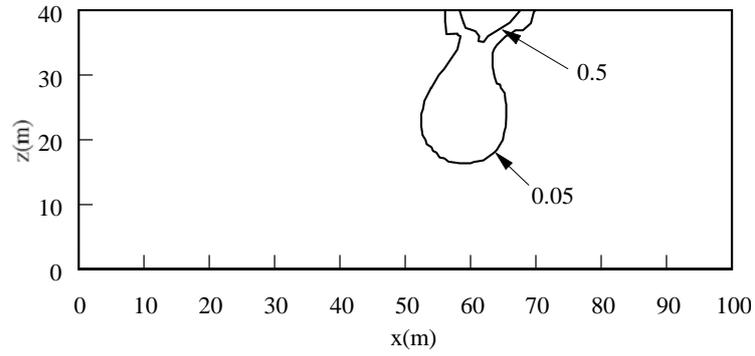
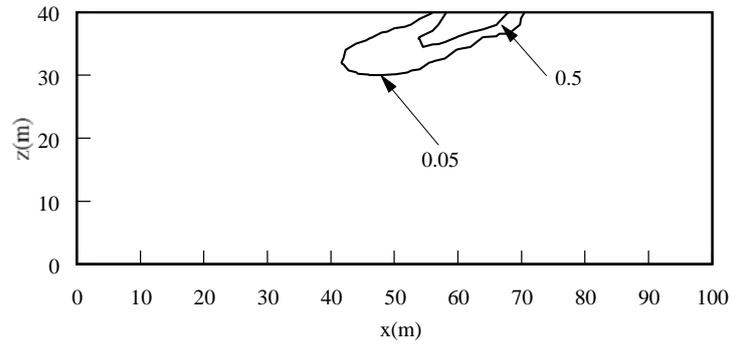
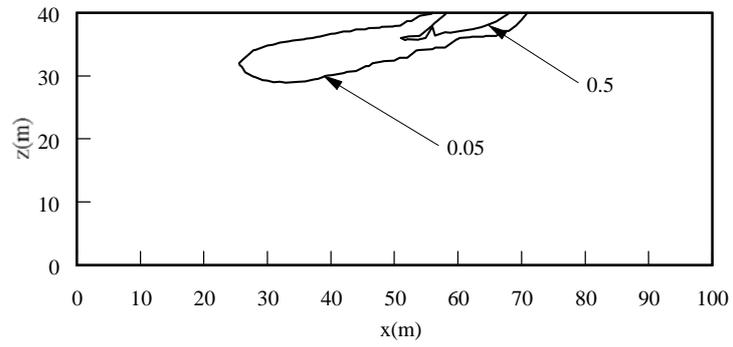


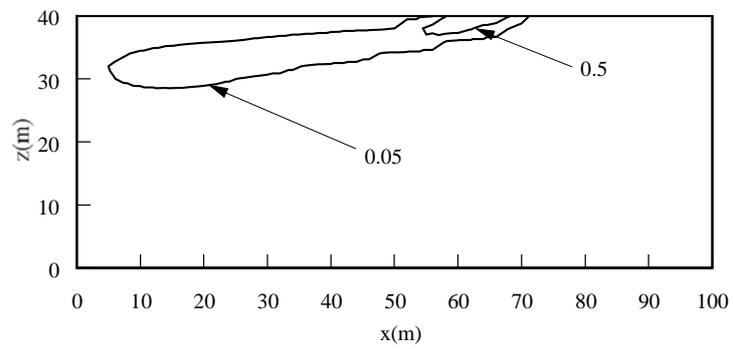
図-2.13 濃度分布 (Case2-4)



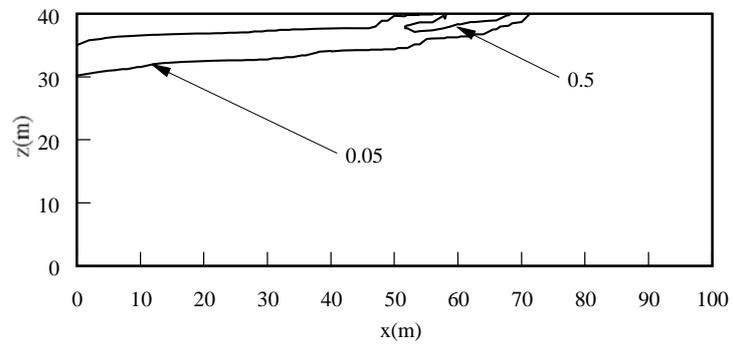
(a) 100 日後



(b) 320 日後



(c) 1160 日後



(d) 2120 日後

図-2.14 濃度分布 (Case2-5)

2. 6 解析例-IV (Case2-6, Case2-7)

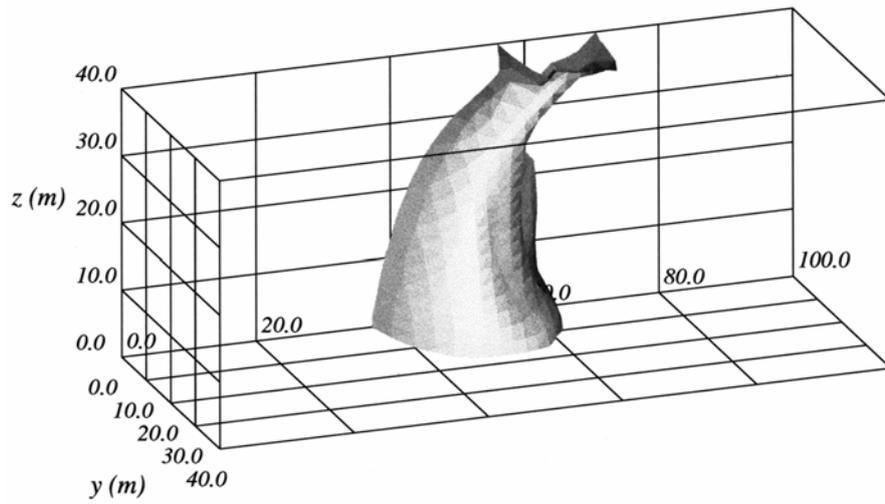
(1) 解析条件

ここでは、Case2-4 および Case2-5 とほぼ同様の条件で3次元解析を行う。これまでの解析例は、いずれも鉛直断面内の2次元問題として取り扱ったが、地下水汚染問題を解析する上では、平面的な汚染状況を把握することも重要であり、必然的に3次元問題となる。

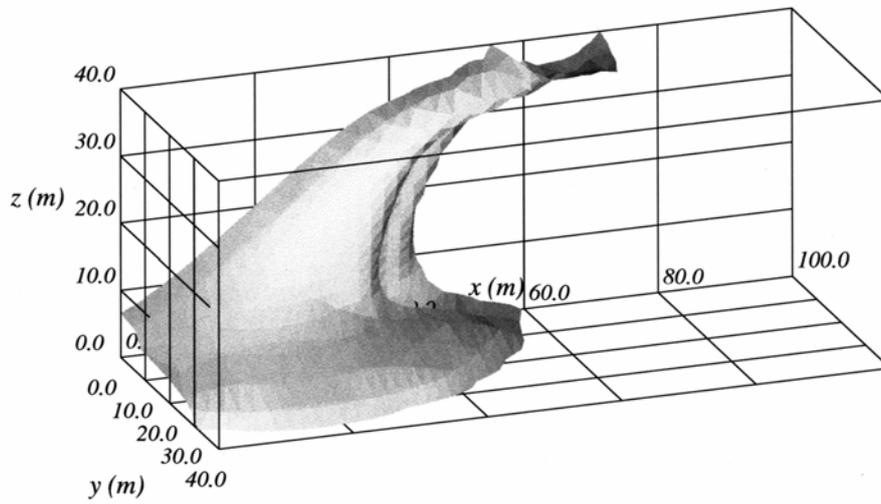
Case2-4 および Case2-5 との相違点は、汚染源の y 方向長さ y_0 が初期条件として追加され、ここでは $y_0 = 10\text{m}$ とした。また、解析領域の y 方向長さは 80m とし、対称性を利用して半分の領域を解析対象とした。

(2) 解析結果

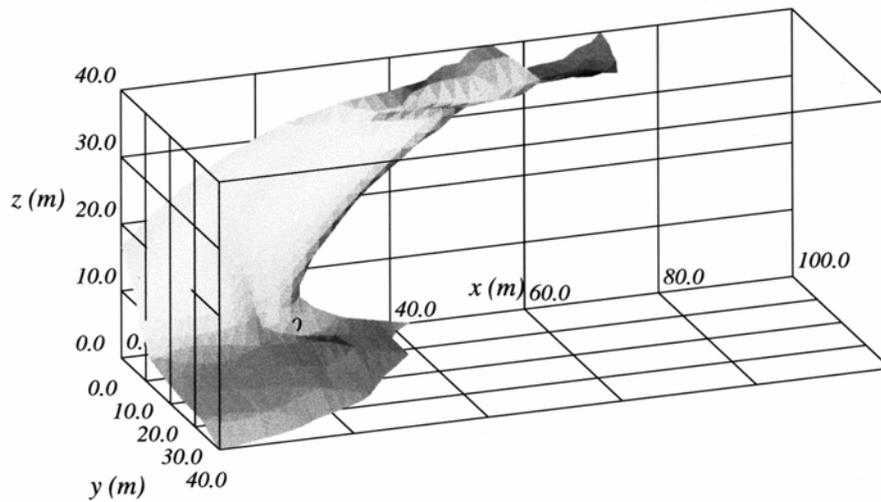
図-2.15, 図-2.16 は、Case2-6 および Case2-7 の各時刻における $C=0.02$ の等濃度面である。Case2-6 では、Case2-4 と同様に、汚染域が底面に達すると、底面に沿って汚染域が拡大し、その後下流方向に移動している。 y 方向への汚染域の広がり、底面付近において最も顕著である。一方、Case2-7 では、地下水面に沿って下流方向に舌状に汚染域が拡大し、 y 方向への広がり、限定的である。これらの結果から、汚染域の拡散過程は、汚染物質の比重によって時間的、空間的に大きく異なり、本手法はそれらを定量的に評価する上で有効であると考えられる。



(a) 320 日後

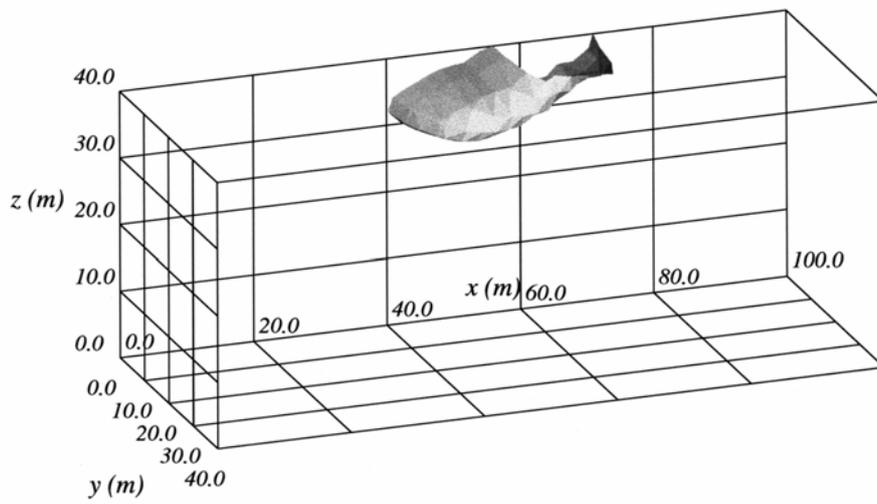


(b) 1160 日後

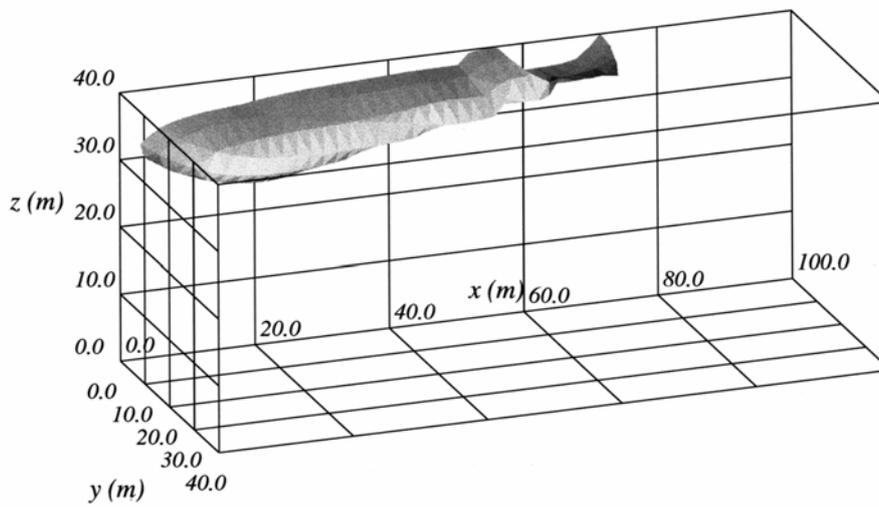


(c) 2120 日後

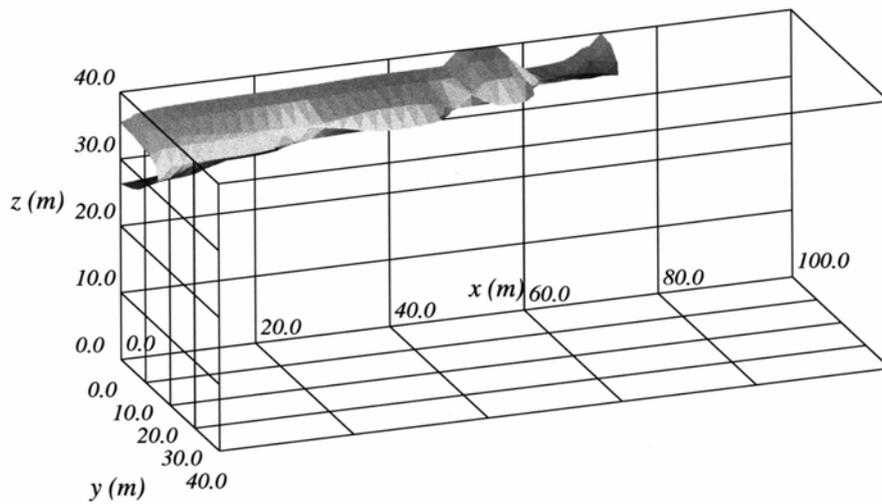
図-2.15 濃度分布の時間変化 (Case2-6)



(a) 320 日後



(b) 1160 日後



(c) 2120 日後

図-2.16 濃度分布の時間変化 (Case2-7)

2. 7 解析例-V (Case2-8, Case2-9)

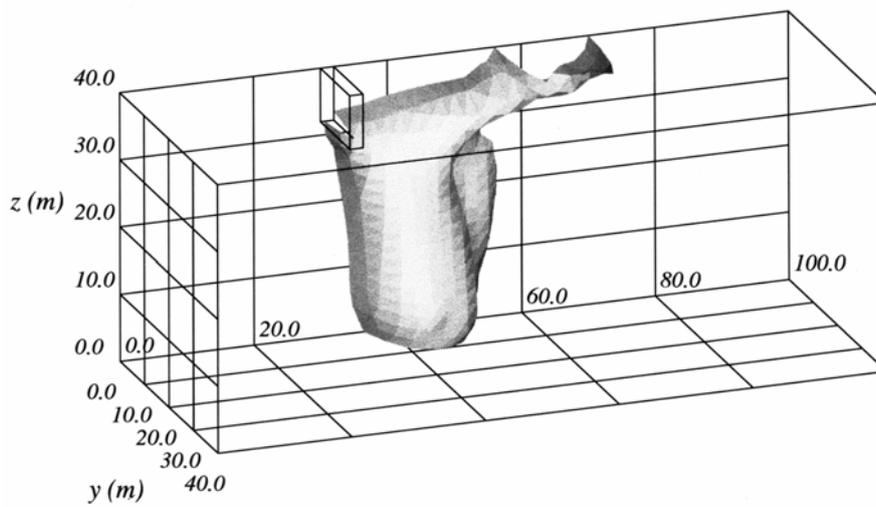
(1) 解析条件

ここでは、Case2-6 と同様の条件で、汚染拡散防止のための揚水を行った場合について検討する。揚水の目的は、汚染源の下流側の水位を周辺の水位よりも低下させることによって地下水流の方向を揚水点の方向に向け、それ以外の方向に汚染域が拡大するのを防止するためである。揚水の方法は、1箇所または複数の揚水井による方法、あるいは掘削溝を設け線状に揚水する方法等が考えられるが、ここでは汚染源の30m下流に幅2m、深さ8mの掘削溝を設ける場合について検討する。

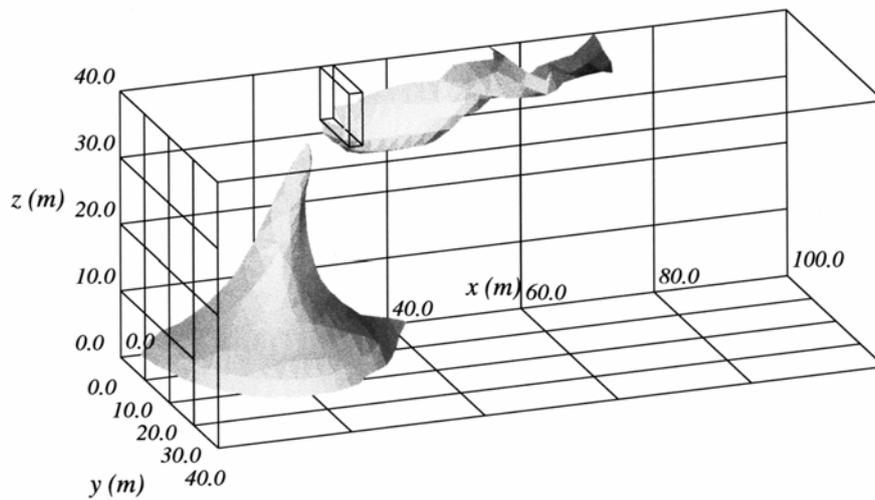
掘削溝の長さは、Case2-8において12m、Case2-9において26mとする。また、掘削溝内の水位は掘削底面に保持され、境界における水位は揚水に関わらず上流側は36m、下流側は34mに維持されるものとする。すなわち、上流境界および下流境界の水位と掘削溝内の水位差はそれぞれ4mおよび2mである。

(2) 解析結果

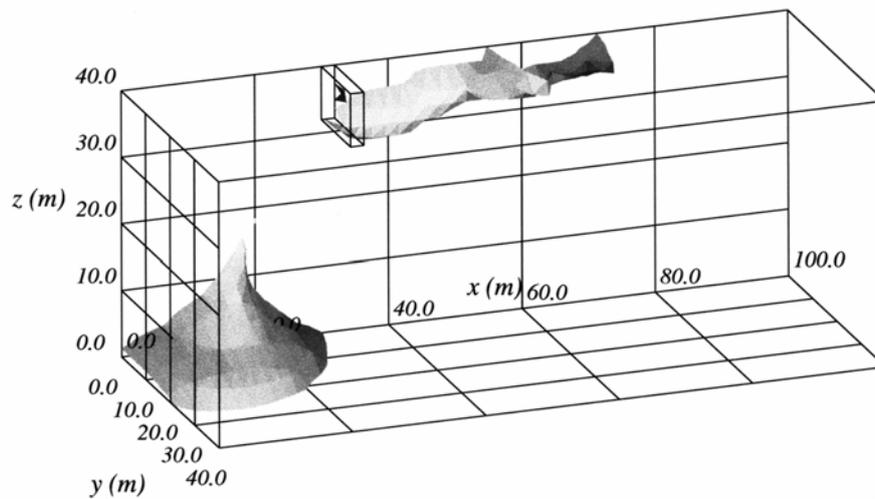
図-2.17、図-2.18は、Case2-8およびCase2-9の各時刻における $C=0.02$ の等濃度面である。汚染域が掘削溝付近に到達するまでは、掘削溝の長さの違いによる挙動の差は顕著ではない。しかし、汚染域が底面付近において拡大するにつれて両者の挙動の差は明確となる。すなわち、Case2-8では底面付近の汚染域は徐々に下流側に移動しているのに対し、Case2-9ではある時点以降は下流側への拡散が進行していないことがわかる。



(a) 320 日後

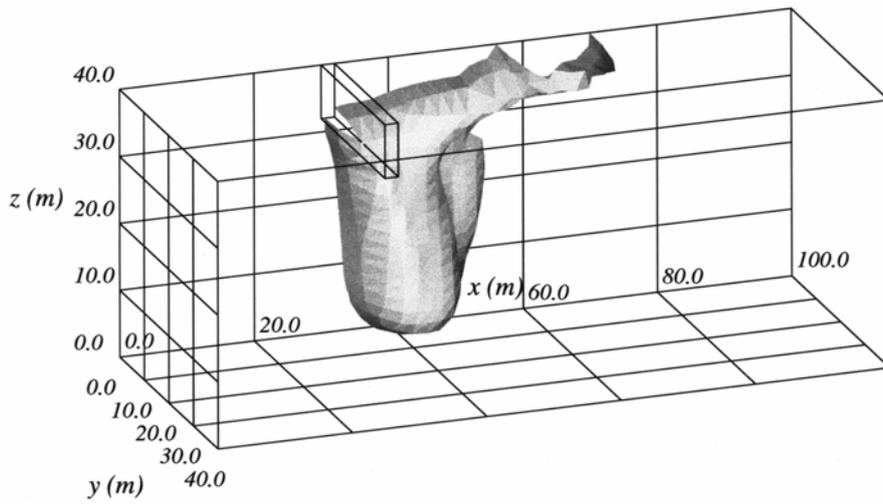


(b) 1160 日後

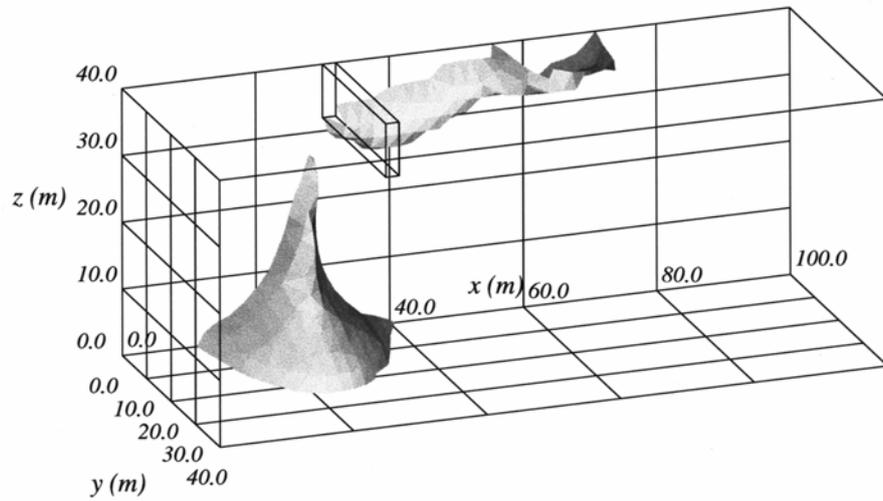


(c) 2120 日後

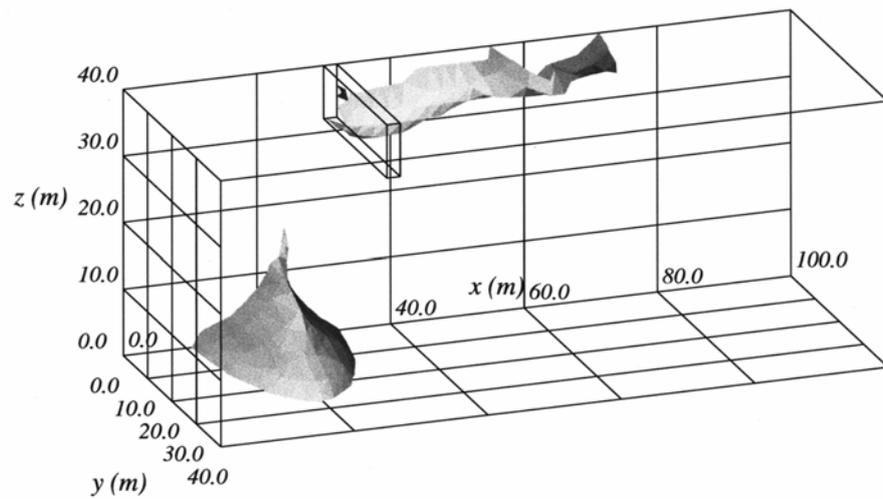
図-2.17 濃度分布の時間変化 (Case2-8)



(a) 320 日後



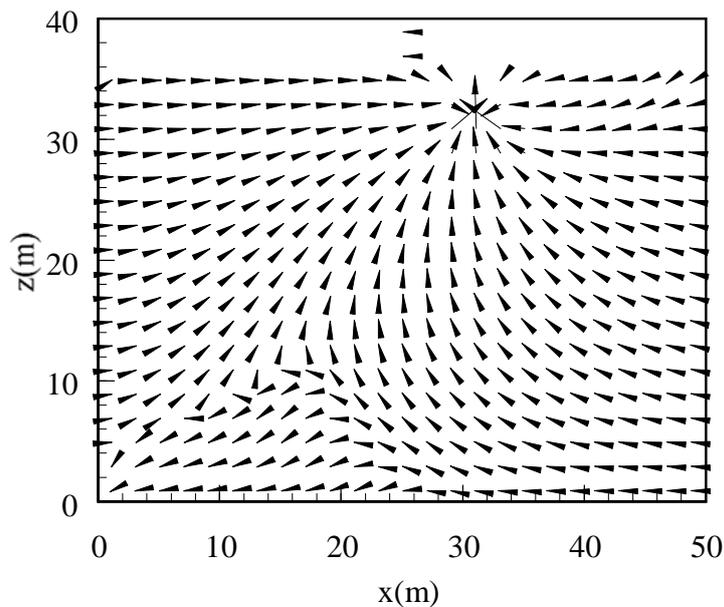
(b) 1160 日後



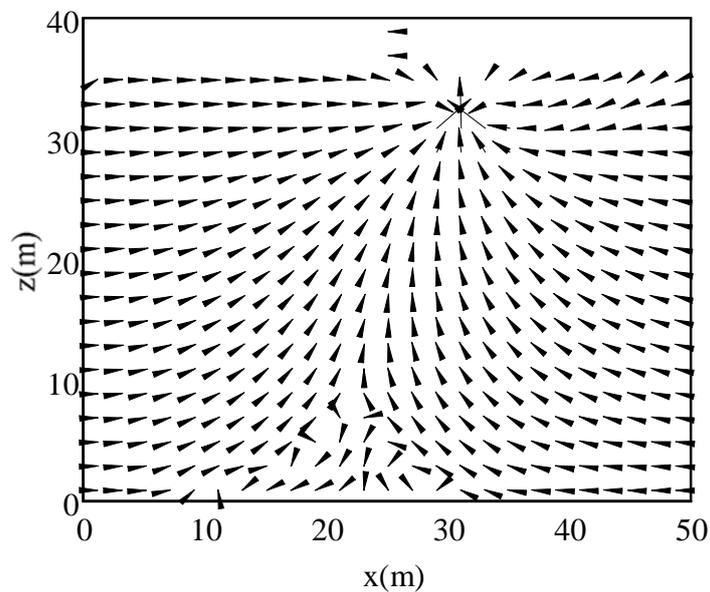
(c) 2120 日後

図-2.18 濃度分布の時間変化 (Case2-9)

つぎに，両者の挙動の違いを流速分布より検討する．**図-2.19**は， $t=2120$ 日後の $y=2.5\text{m}$ の断面における流速分布である．Case2-8 では底部に滞留している比重の大きい汚染物質を吸い上げることができず，底面に沿って下流側に移動しているのに対し，Case2-9 では上流側および下流側から掘削溝に向かって流れており，汚染物質を領域内に封じること成功している．



(a) Case2-8



(b) Case2-9

図-2.19 流速分布 ($y=2.5\text{m}$, $t=2120$ 日)

これらの結果より，汚染の拡散を効果的に防止するための対策について考える上では，汚染物質と水との比重差について意識しなければならないことがわかる．また，汚染物質と水の比重差が大きい場合，汚染物質の拡散過程を2次元的に把握することはできず，したがってこれらの挙動を解析するための解析モデルは空間的に3次元とする必要があると考えられる．

2. 8 第2章のまとめ

本章では，有限要素法による飽和・不飽和浸透流解析と，SUPG法による移流分散解析を連立させることにより，断面2次元および3次元空間内の密度変化を考慮した地下水汚染の数値シミュレーションを行なった．これらによって得られた結果を以下にまとめる．

- 1) 解析例により，本手法は密度差に伴う自然対流の存在する流れ場における移流分散過程を適切に評価しうることを確認した．
- 2) 汚染源が飽和領域内に存在する場合，水との密度差が小さければほぼ地下水面に平行に移動するのに対し，密度差が大きいと鉛直方向の流れが無視できなくなる．また，濃度分布については，密度差が小さい場合のほうが高濃度が維持される傾向がある．これは密度差が大きいほど渦が発達し，分散が促進されるためと考えられる．
- 3) 汚染源が不飽和領域内に存在する場合，汚染源付近は長期に渡って高濃度が維持させる．密度差の影響は，汚染の初期の段階において顕著に見られるが，時間の経過とともに飽和領域内の濃度が低下するため，密度差の影響も小さくなる．
- 4) 密度差が大きく，鉛直流が無視できない場合，汚染物質は3次元的に広がる．このため，拡散防止について検討する場合は，3次元的な挙動に十分注意する必要がある．

参考文献

- 1) Hughes, T. J. R. and Brooks, A. N.: A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion, *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ASME, AMD-34, pp.19-35, 1979.
- 2) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R.: Streamline-upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 32, pp.199-259, 1982.
- 3) Hughes, T. J. R. and Brooks, A. N.: A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure, *Finite Elements in Fluids*, 4 John Wiley & Sons, London, pp.47-65, 1982.
- 4) Scheidegger, A. E.: *The physics of flow through porous media* (3rd ed.), University of Toronto Press, p.353, 1974.

第3章 圧縮空気エネルギー貯蔵に関する地盤内気液2相流解析

3. 1 概説

圧縮空気エネルギー貯蔵（CAES）は、大規模電力貯蔵技術の面から、また地下空間の有効利用の面からも大変魅力的である。そして、その実施にあたって、数10気圧の高圧空気を貯蔵することになる地下空洞は、漏気防止のため緻密な岩塩層や堅硬な岩盤内に設けられる。しかし我が国では、このような圧縮空気貯蔵に適する地層あるいは岩盤を見いだすのは必ずしも容易なことではない。また適当な岩層が見つかったとしても、そこに新たに大空洞を構築することは経済的な面から得策とは言えない。そのため、貯蔵空洞として、例えば鉱山の坑道・空洞を利用することが検討されている。

鉱山地下空洞などは、貯蔵空気の高圧に抗する十分な深さにあり、堅硬な岩質であるけれども、一方、そこに大小の岩盤亀裂が存在することも事実である。したがって、有効な漏気対策が必要となる。対策の一つとして、岩盤亀裂内の自然地下水あるいは亀裂への人工注水による漏気防止と漏気制御が考えられる。そしてこの対策の適用性あるいは実施方法を検討するためには、まず岩盤内の空気および地下水の挙動を十分理解することが求められる。

本章では、高圧空気の飽和岩盤内への侵入過程を把握するため、数値シミュレーションを行なう。岩盤には微細な亀裂が密に分布するものとし、多孔質地盤における気液2相流の支配方程式を適用して、有限要素解析を実行する。このとき、解析スケールの違いによる挙動の違いを把握するため、支配方程式の無次元化を試みる。また、水分特性曲線の違いが漏気量に及ぼす影響、および貯蔵空気圧が空気の貯蔵と放出によって一定周期で変動することを考慮して、貯蔵圧の変動が漏気に及ぼす影響についても調べる。

3. 2 気液2相流の基礎方程式と有限要素定式化

(1) 基礎方程式^{1), 2)}

地盤内を流れる流体 F (ここでは水(w)または空気(a)) の連続の式は,

$$\frac{\partial(nS_F\rho_F)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_F q_{Fi}) = 0 \quad (3.1)$$

ここに, n は空隙率, S_F は流体 F の飽和度, ρ_F は流体 F の密度, q_{Fi} は流体 F の i 方向の流速成分である.

ここで運動方程式として, ダルシーの法則が成り立つとすると, q_{Fi} は次式で与えられる.

$$q_{Fi} = -k_{rF} \frac{k_{ij}}{\mu_F} \left(\frac{\partial P_F}{\partial x_j} + \rho_F g \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \quad (3.2)$$

ここに, k_{rF} は相対透過係数で飽和度 S_F の関数, k_{ij} は地盤の固有透過度テンソル, μ_F は流体 F の粘性係数, P_F は流体 F の圧力, g は重力加速度である.

ここで水の密度変化, 空隙率の時間変化, および空気に作用する重力を無視し, $\rho_w = \text{一定}$, $n = \text{一定}$, $\rho_a g = 0$ とすると, 式(3.1)および式(3.2)より, 水については,

$$n \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k_{rw} \frac{k_{ij}}{\mu_w} \left(\frac{\partial P_w}{\partial x_j} + \rho_w g \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (3.3)$$

空気については,

$$n \frac{\partial}{\partial t} (\rho_a S_a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_a k_{ra} \frac{k_{ij}}{\mu_a} \frac{\partial P_a}{\partial x_j} \right) \quad (3.4)$$

となる.

次に空気の密度 ρ_a は圧力 P_a と絶対温度 T の関数であり, 気体定数を R とすると,

$$\rho_a = \frac{P_a}{RT} \quad (3.5)$$

であり, 標準状態では定数として,

$$\rho_{as} = \frac{P_{as}}{RT_s} \quad (3.6)$$

である. また, 一定質量の空気を考えれば,

$$\rho_a V_a = \rho_{as} V_{as} \quad (3.7)$$

である．ここで，構成体積率 $\beta_a=V_a/V_{as}$ を導入すると，式(3.7)は，次のように書き換えられる．

$$\rho_a = \rho_{as} \frac{V_{as}}{V_a} = \frac{\rho_{as}}{\beta_a} \quad (3.8)$$

また，式(3.8)に式(3.5)，式(3.6)を代入すると， β_a は圧力および温度の関数として，次式で与えられる．

$$\beta_a = \frac{P_{as}}{P_a} \frac{T}{T_s} \quad (3.9)$$

式(3.9)を用いると，式(3.4)は，

$$n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_a}{\beta_a} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k_{ra} k_{ij}}{\beta_a \mu_a} \frac{\partial P_a}{\partial x_j} \right) \quad (3.10)$$

となる．

さらに，水と空気の飽和度については，次の関係が成り立つ．

$$S_a + S_w = 1 \quad (3.11)$$

また，水の飽和度 S_w は毛管圧 P_c の関数であり，

$$P_c = P_a - P_w \quad (3.12)$$

であること，および β_a は圧力 P_a の関数であり，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_a} \right) = \frac{d}{dP_a} \left(\frac{1}{\beta_a} \right) \frac{\partial P_a}{\partial t} \quad (3.13)$$

であることを考慮すると，式(3.3)および式(3.10)の左辺はそれぞれ以下のようになる．

$$n \frac{\partial S_w}{\partial t} = n \frac{dS_w}{dP_c} \frac{\partial P_c}{\partial t} = n \frac{dS_w}{dP_c} \left(\frac{\partial P_a}{\partial t} - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_a}{\beta_a} \right) &= n(1 - S_w) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_a} \right) - n \frac{1}{\beta_a} \frac{dS_w}{dP_c} \frac{\partial P_c}{\partial t} \\ &= n(1 - S_w) \frac{d}{dP_a} \left(\frac{1}{\beta_a} \right) \frac{\partial P_a}{\partial t} - n \frac{1}{\beta_a} \frac{dS_w}{dP_c} \left(\frac{\partial P_a}{\partial t} - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで， $B = \frac{d}{dP_a} \left(\frac{1}{\beta_a} \right)$ ， $C = \frac{dS_w}{dP_c}$ とおくと，基礎方程式は，水相について

$$nC \left(\frac{\partial P_a}{\partial t} - \frac{\partial P_w}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k_{rw} \frac{k_{ij}}{\mu_w} \left(\frac{\partial P_w}{\partial x_j} + \rho_w g \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (3.16)$$

空気相について

$$n \left\{ (1 - S_w) B - \frac{C}{\beta_a} \right\} \frac{\partial P_a}{\partial t} + n \frac{C}{\beta_a} \frac{\partial P_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k_{ra}}{\beta_a} \frac{k_{ij}}{\mu_a} \frac{\partial P_a}{\partial x_j} \right) \quad (3.17)$$

となる.

また, 圧力 P_w および P_a を以下のように水頭換算値とし, ゲージ圧で表せば,

$$p_w = \frac{P_w - P_s}{\rho_w T g}, \quad p_a = \frac{P_a - P_s}{\rho_w T g}, \quad p_c = \frac{P_c}{\rho_w T g}, \quad B' = \frac{d}{dp_a} \left(\frac{1}{\beta_a} \right), \quad C' = \frac{dS_w}{dp_c} \quad (3.18)$$

ただし, P_s は大気圧, $\rho_w T$ は温度 T における水の密度である.

さらに固有透過度が等方性 ($k_{11}=k_{22}=k_{33}=k$) かつ $i \neq j$ のとき $k_{ij}=0$ の場合は,

$$\mu_w' = \frac{\mu_w}{\rho_w T g}, \quad \mu_a' = \frac{\mu_a}{\rho_w T g}, \quad K_w = \frac{k}{\mu_w'}, \quad K_a = \frac{k}{\mu_a'} \quad (3.19)$$

とおくことができ, 温度 T が一定と仮定すると, 式(3.16)および式(3.17)は以下のよう書き換えられる.

$$nC' \left(\frac{\partial p_a}{\partial t} - \frac{\partial p_w}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k_{rw} K_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial x_j} + \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (3.20)$$

$$n \left\{ (1 - S_w) B' - \frac{C'}{\beta_a} \right\} \frac{\partial p_a}{\partial t} + n \frac{C'}{\beta_a} \frac{\partial p_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k_{ra}}{\beta_a} K_a \frac{\partial p_a}{\partial x_j} \right) \quad (3.21)$$

(2) 水分特性曲線

先に述べたように, 解析に必要な物性値である相対透過係数 k_{rw} および k_{ra} は飽和度の関数, 飽和度 S_w は毛管圧 p_c の関数と考えられる. これらの関係 (水分特性曲線) を数学的にモデル化する試みがなされ, 多くのモデルが提案されているが, ここでは式(3.22)の Van Genuchten³⁾の式を用いる.

$$S_e = \frac{1}{\left\{ 1 + (\alpha p_c)^n \right\}^m} \quad (3.22)$$

ここに, α, n, m は形状パラメータであり, n, m は無次元, α は圧力水頭の逆数の次元を持つ. また, S_e は次式で定義される有効飽和度である.

$$S_e = \frac{S_w - S_r}{1 - S_r} \quad (3.23)$$

ここに, S_r は残留飽和度である. また, n と m の関係は, 次式を用いる.

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad (3.24)$$

また，相対透過係数と有効飽和度の関係は，

$$k_{rw} = S_e^\varepsilon \left\{ 1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right) \right\}^2 \quad (3.25)$$

および

$$k_{ra} = (1 - S_e)^\gamma \left(1 - S_e^{1/m} \right)^{2m} \quad (3.26)$$

と表される．ここに， ε および γ は空隙の連続性に関わるパラメータであるが⁴⁾，一般に， $\varepsilon=1/2$ ， $\gamma=1/3$ が用いられることが多い．

また，式(3.22)を p_c で微分すると次式を得る．

$$\frac{dS_w}{dp_c} = -\alpha^n m n (1 - S_r) p_c^{n-1} \left\{ 1 + (\alpha p_c)^n \right\}^{m-1} \quad (3.27)$$

すなわち，パラメータとして α および n を与えれば水分特性曲線が得られる．

(3) 基礎方程式の無次元化

基礎方程式である式(3.20)および式(3.21)について，空間スケールと時間スケールを無次元化する．

まず，空間スケールを代表する長さ L により，長さに関する無次元量 ξ を以下のように定義する．

$$\xi_i = \frac{x_i}{L}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.28)$$

つぎに，時間スケールについて，速度の次元を持つ飽和透水係数の代表値 K_{ws} と L により，無次元時間 τ を以下のように定義する．

$$\tau = \frac{K_{ws}}{L} t \quad (3.29)$$

圧力の水頭換算値は長さの次元を持つので， L を用いて無次元圧力 ψ_w ， ψ_a および ψ_c を以下のように定義する．

$$\psi_w = \frac{p_w}{L}, \quad \psi_a = \frac{p_a}{L}, \quad \psi_c = \frac{p_c}{L} \quad (3.30)$$

式(3.28)，式(3.29)および式(3.30)を用いると，式(3.20)および式(3.21)は以下のようになる．

$$nc \left(\frac{\partial \psi_a}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi_w}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left\{ k_{rw} \frac{K_w}{K_{ws}} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_j} \right) \right\} \quad (3.31)$$

$$n \left\{ (1 - S_w) b - \frac{c}{\beta_a} \right\} \frac{\partial \psi_a}{\partial \tau} + n \frac{c}{\beta_a} \frac{\partial \psi_w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{k_{ra} K_a}{\beta_a K_{ws}} \frac{\partial \psi_a}{\partial \xi_j} \right) \quad (3.32)$$

ただし、 $b=B'L$ 、 $c=C'L$ とする。

構成体積率 β_a は無次元量であるが、式(3.9)、式(3.18)および式(3.30)より、

$$\frac{1}{\beta_a} = \frac{(\rho_{wT} g \psi_a L + P_s) T_s}{P_{as} T} \quad (3.33)$$

で表され、代表長 L の関数となる。

境界条件は、圧力規定の境界 Γ_1 上で、

$$\psi_w = \psi_{wB}, \quad \psi_a = \psi_{aB} \quad (3.34)$$

流量規定の境界 Γ_2 上で、

$$Q_w = -k_{rw} \frac{K_w}{K_{ws}} \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_j} \right) l_i \quad (3.35)$$

$$Q_a = -\frac{k_{ra} K_a}{\beta_a K_{ws}} \frac{\partial \psi_a}{\partial \xi_j} l_i \quad (3.36)$$

である。ここに、 l_i は境界の外向き単位法線ベクトルの i 方向成分である。

(4) 有限要素定式化

無次元化後の基礎方程式である式(3.31)および式(3.32)に Galerkin 法を適用し、離散化して整理すると、以下の式(3.37)および式(3.38)となる⁵⁾。

$$[\mathbf{A}] \left\{ \frac{d\boldsymbol{\psi}_a}{d\tau} - \frac{d\boldsymbol{\psi}_w}{d\tau} \right\} + [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\psi}_w\} = \{\mathbf{C}\} + \{\mathbf{D}\} \quad (3.37)$$

$$[\mathbf{E}] \left\{ \frac{d\boldsymbol{\psi}_a}{d\tau} \right\} + [\mathbf{F}] \left\{ \frac{d\boldsymbol{\psi}_w}{d\tau} \right\} + [\mathbf{G}] \{\boldsymbol{\psi}_a\} = \{\mathbf{H}\} \quad (3.38)$$

ここに、係数行列および列ベクトルの成分は、以下の通りである。

$$A_{nm} = \sum_e \int_R nc N_n N_m dR_e \quad (3.39)$$

$$B_{nm} = \sum_e \int_R k_{rw} \frac{K_w}{K_{ws}} \frac{\partial N_n}{\partial \xi_i} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_j} dR_e \quad (3.40)$$

$$C_n = -\sum_e \int_{\Gamma} Q_w N_n d\Gamma_e \quad (3.41)$$

$$D_n = -\sum_e \int_R k_{rw} \frac{K_w}{K_{ws}} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_j} \frac{\partial N_n}{\partial \xi_i} dR_e \quad (3.42)$$

$$E_{nm} = \sum_e \int_R n \left\{ (1 - S_w) b - \frac{c}{\beta_a} \right\} N_n N_m dR_e \quad (3.43)$$

$$F_{nm} = \sum_e \int_R n \frac{c}{\beta_a} N_n N_m dR_e \quad (3.44)$$

$$G_{nm} = \sum_e \int_R \frac{k_{ra}}{\beta_a} \frac{K_a}{K_{ws}} \frac{\partial N_n}{\partial \xi_i} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_j} dR_e \quad (3.45)$$

$$H_n = -\sum_e \int_{\Gamma} \frac{Q_a}{\beta_a} N_n d\Gamma_e \quad (3.46)$$

ここに、 N_n は補間関数、 R_e と Γ_e はそれぞれ要素 e の領域と境界である。

式(3.37)および式(3.38)の時間項を後退差分によって離散化すると、

$$\begin{bmatrix} \Delta \tau \mathbf{B}^{(1/2)} - \mathbf{A}^{(1/2)} & \mathbf{A}^{(1/2)} \\ \mathbf{F}^{(1/2)} & \Delta \tau \mathbf{G}^{(1/2)} + \mathbf{E}^{(1/2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_w^{(1)} \\ \Psi_a^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{A}^{(1/2)} \Psi_w^{(0)} + \mathbf{A}^{(1/2)} \Psi_a^{(0)} + \Delta \tau (\mathbf{C} + \mathbf{D}) \\ \mathbf{F}^{(1/2)} \Psi_w^{(0)} + \mathbf{E}^{(1/2)} \Psi_a^{(0)} + \Delta \tau \mathbf{H} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

が得られる。ここに、添字(0)は無次元時刻 τ における既知量を表し、添字(1)は $\tau + \Delta \tau$ における未知量を表す。また、添字(1/2)は $\tau + \Delta \tau / 2$ における諸量を表し、

$$\Psi_w^{(1/2)} = \frac{\Psi_w^{(0)} + \Psi_w^{(1)}}{2} \quad (3.48)$$

および

$$\Psi_a^{(1/2)} = \frac{\Psi_a^{(0)} + \Psi_a^{(1)}}{2} \quad (3.49)$$

によって近似される無次元時刻 $\tau + \Delta \tau / 2$ における無次元圧力から求める。

以上の解析手順の流れ図を図-3.1に示す。

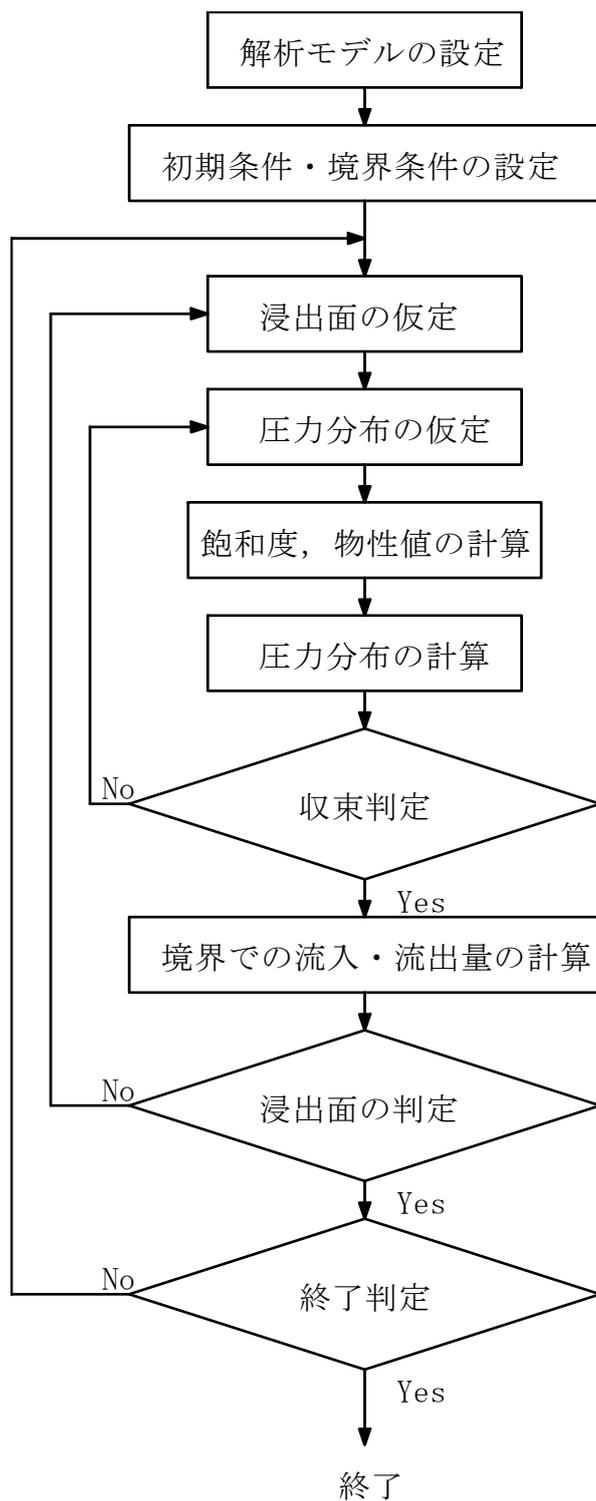


図-3.1 数値解析の流れ図

3. 3 解析スケールと漏気の関係

ここでは、空洞内に一定の空気圧が作用した場合をとりあげ、異なる解析スケールのもとで数値解析を行ない、それらの漏気挙動の違いについて考察する。

(1) 解析モデル

図-3.2 に示すような断面 2 次元の地下空洞モデルを考える。解析領域の代表長さ L は、地表面から不透過性基盤までの距離 L_z とし、無次元化長さ $L_\zeta=1$ とする。図-3.3 は無次元化後の解析領域と有限要素分割である。図-3.3 において、 $\xi = \xi_1$ 、 $\zeta = \zeta_3$ である。その他の長さの L_z に対する比率は、表-3.1 に示す。

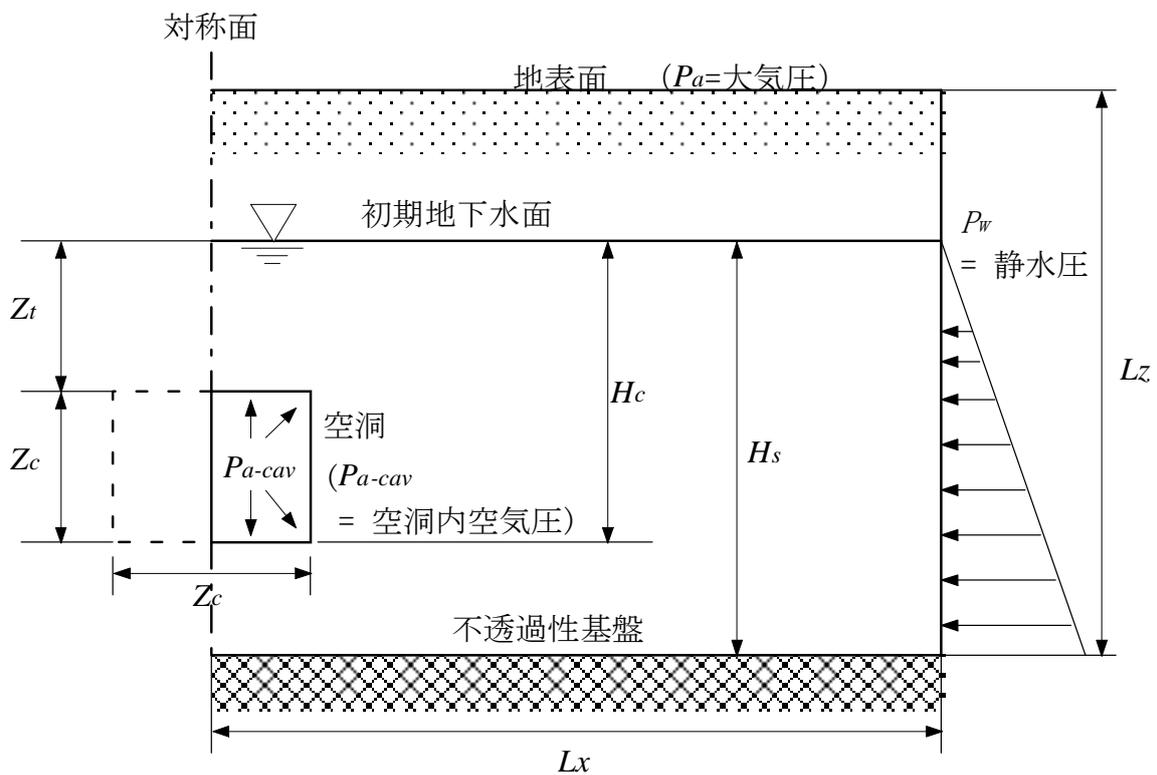


図-3.2 解析モデル

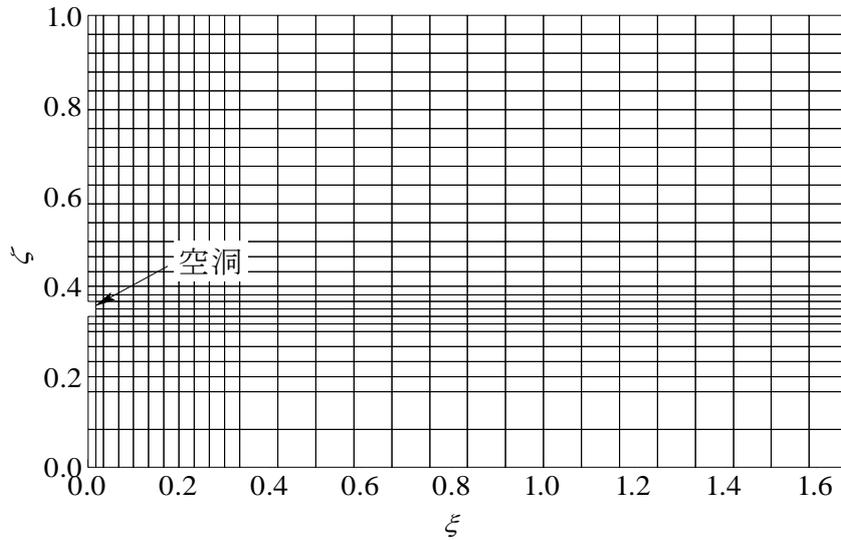


図-3.2 有限要素分割図

表-3.1 無次元化後の各長さ

L_x/L_z	H_s/L_z	H_c/L_z	Z_t/L_z	Z_c/L_z
5/3	11/12	7/12	11/20	1/30

境界条件は，空気については空洞内に空気圧 P_{a-cav} が作用し，地表面に大気圧 P_s が作用する．水については $\xi = 5/3$ ， $\zeta \leq 11/12$ において，静水圧が作用する．また，地表面および空洞内面は浸出面として扱い，地表面において $Q_w < 0$ のとき $P_w = 0$ ， $P_w < 0$ のとき $Q_w = 0$ ，空洞内面において $Q_w < 0$ のとき $P_w = P_{a-cav}$ ， $P_w < P_{a-cav}$ のとき $Q_w = 0$ とする．

解析に用いる水分特性曲線は，Van Genuchten 式で与え，パラメータはそれぞれ $n=2.5$ ， $\alpha=0.00735(\text{cm}^{-1})$ とする(図-3.4)．

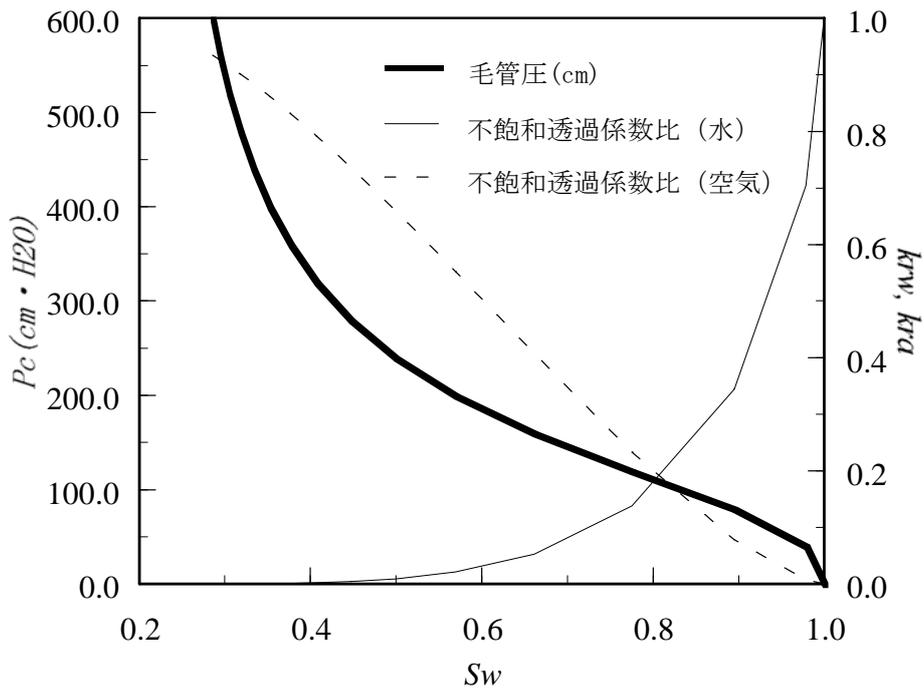


図-3.4 水分特性曲線 ($n=2.5$, $\alpha=0.00735 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$)

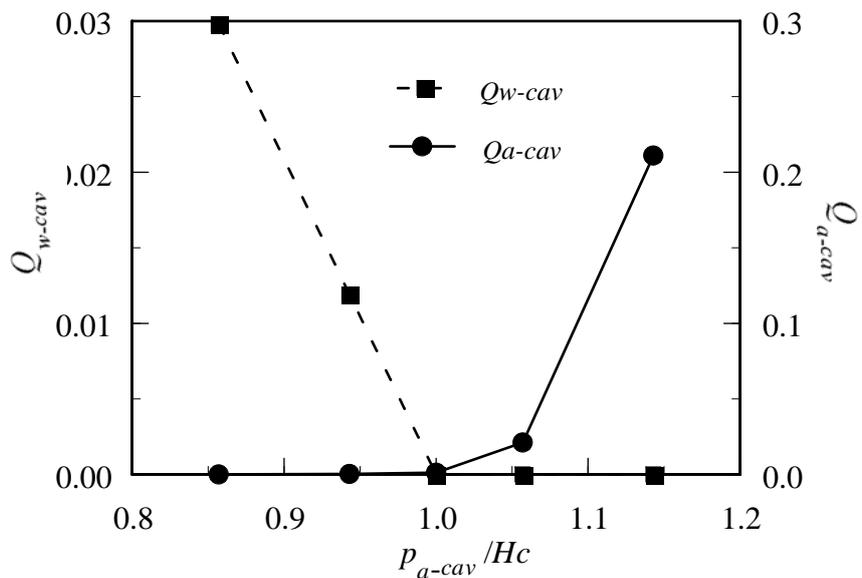
水の粘性係数は、温度 $T=15^\circ\text{C}$ で一定として $\mu_{ws}=1.15 \times 10^{-9} \text{ (MPa} \cdot \text{s)}$ ，飽和透水係数の代表値 K_{ws} は $K_{ws}=1.0 \times 10^{-4} \text{ (cm/s)}$ で、解析領域内で一定 ($K_w=K_{ws}$) とする。空気の透過性を表す比 K_a/K_{ws} は、式(3.19)より水と空気の粘性係数の比 μ_{ws}/μ_a となるが、 μ_a は圧力の関数なので時間的・空間的に変動する。また間隙率は、 $n=0.3$ で一定とする。

(2) 空洞内空気圧と漏気量の関係

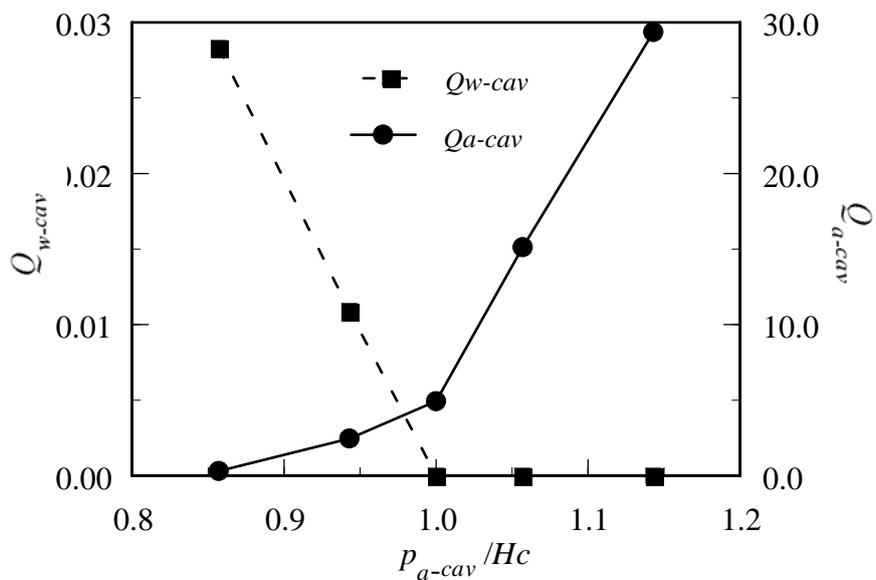
空洞内部に一定の空気圧が作用する場合の漏気量について調べる。ここで、代表長 L は 6.0m および 60.0m の場合を考え、空気圧を表-3.2 に示すように5段階に変化させて、それぞれの圧力に対する $\tau=2.4$ 時点での漏水量（地盤から空洞内に排出する水量= Q_{w-cav} ），および漏気量（空洞から地盤内に侵入する空気量= Q_{a-cav} ）を計算した（図-3.5）。

表-3.2 空洞内の空気圧

	ψ_{a-cav}	p_{a-cav}/H_c	備考
1	0.500	0.857	
2	0.550	0.943	$p_{a-cav}=Z_t$
3	0.583	1.000	$p_{a-cav}=H_c$
4	0.617	1.057	
5	0.667	1.143	



(a) $Lz=6.0$ m



(b) $Lz=60.0$ m

図-3.5 空洞内圧力と漏水量・漏気量の関係

図-3.5 において、横軸は空洞内空気圧の水頭換算値 p_{a-cav} と初期水面から空洞下面からの距離 H_s の比を表している。また縦軸は無次元化された漏水量 Q_{w-cav} および漏気量 Q_{a-cav} である。

漏水量については、解析スケールによらず $p_{a-cav}=H_c$ でほぼ 0 となり、それ以下の圧力下における漏水量も、スケールの違いによる影響はほとんど認められない。

一方、漏気量については、 $p_{a-cav} > H_c$ で急激に増加する傾向は変わらないものの、漏気量の値についてはまったく異なり、 $\psi_{a-cav} = 0.667$ では解析スケールを 10 倍にすることによって、無次元漏気量は約 140 倍となっている。

(3) 漏気量の時間変化

空洞内空気圧が一定の場合の漏気量の時間変化について調べる。空気圧は $\psi_{a-cav} = 0.667$ ($p_{a-cav}/H_c = 1.143$) とし、代表長さ L_z は、6.0m, 60.0m, 600.0m の 3 種類とした。

図-3.6 は τ と地表面から外部に放出される無次元漏気量 (Q_{a-s}) の関係を両対数軸上に表示、図-3.7 は各スケールごとに自由水面の時間変化を示している。

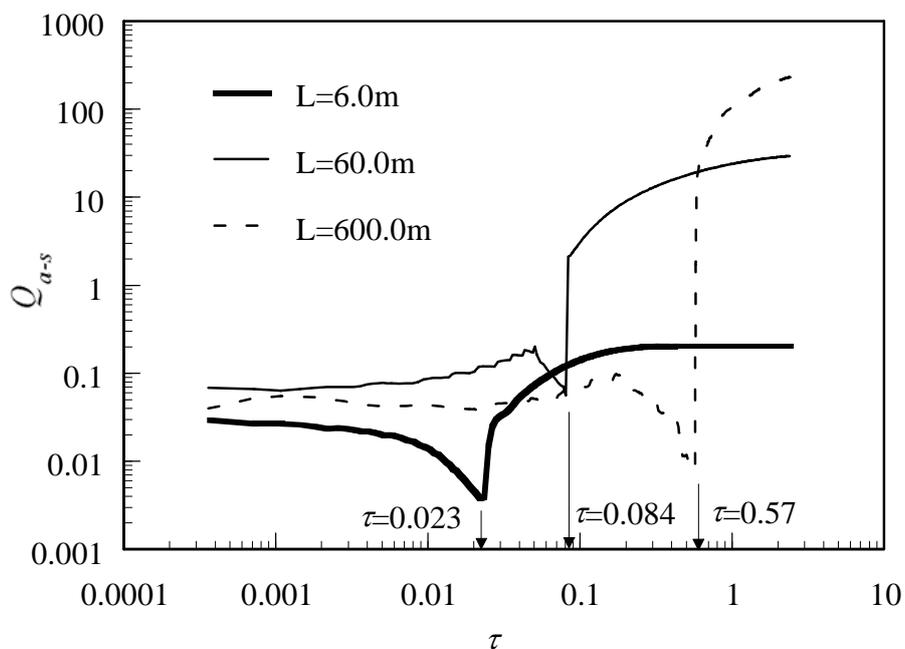
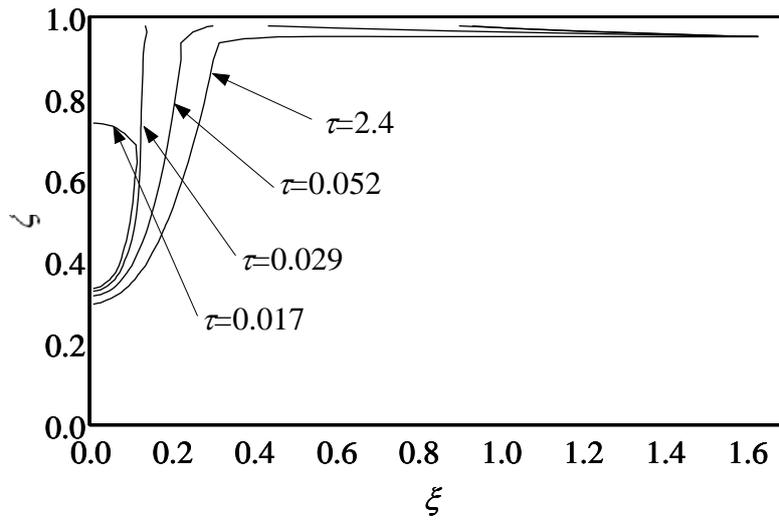
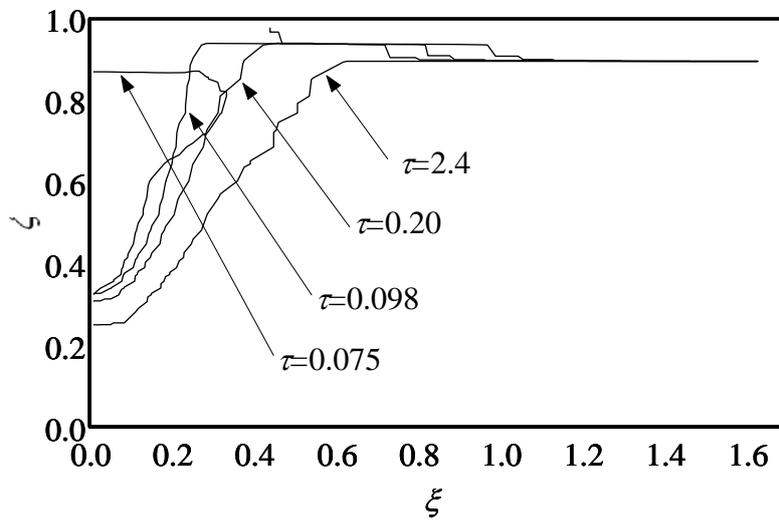


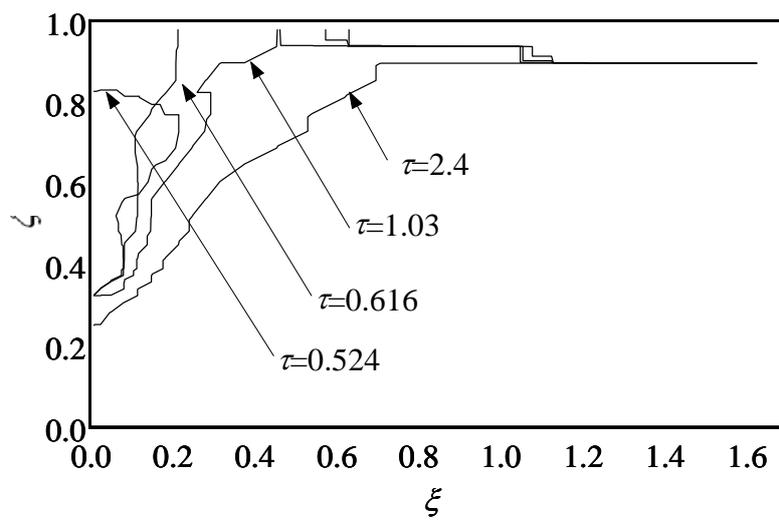
図-3.6 漏気量の時間変化



(a) $L = 6.0\text{m}$



(b) $L = 60.0\text{m}$



(c) $L = 600.0\text{m}$

図-3.7 自由水面の時間変化

図-3.6より、いずれのスケールにおいても、地表面からの漏気量が急激に増加する点がみられる。これは空洞から地盤内に侵入した空気が、この時点で地表面に到達したことを示す。それ以前の漏気は、初期地下水面の上昇により地表面付近の不飽和域の空気が押し出されることにより生じる。また空洞の空気が地表面に到達する時刻は、解析スケールが大きくなるほど遅くなる傾向が見られる。これは、式(3.31)における比水分容量(=nc)がLに比例するため、水面上昇の速度が小さくなるためと考えられる。図-3.7より、 $\tau=2.4$ の時点で比較すると、解析スケールが大きくなるにつれて不飽和領域が拡大している。特にL=600mの場合はこの時点で定常に達していないので、不飽和域がさらに拡大すると考えられる。

漏気量の値は、 $\tau=2.4$ とするとL=60.0mのときはL=6.0mの約140倍、L=600.0mでは、L=60.0mの7.9倍程度となっている。このような相対的な漏気量の差をもたらす要因としては、構成体積率 β_a の影響と相対透過係数比の違い、すなわち飽和度分布の違いが考えられる。

まず、式(3.33)より空洞における $\psi_{a-cav}=0.667$ に対する $1/\beta_a$ を求めると、表-3.3のようになる。

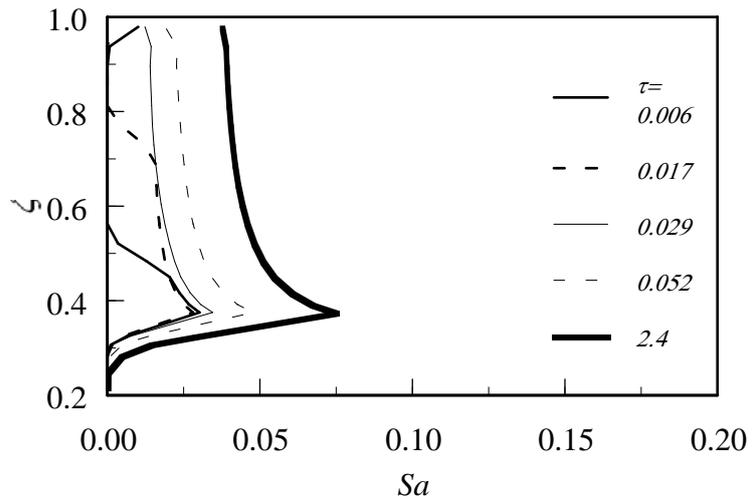
表-3.3 構成体積率の逆数 ($1/\beta_a$)

	L=6.0(m)	L=60.0(m)	L=600.0(m)
$1/\beta_a$	1.303	4.605	37.63

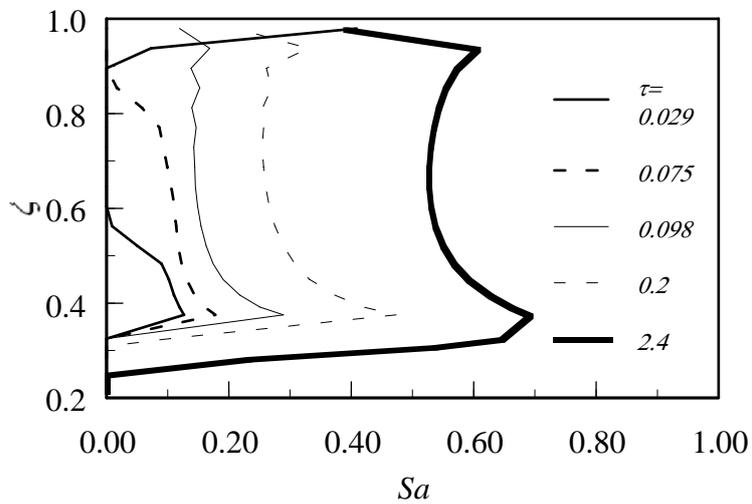
表-3.3より、L=6.0mの場合とL=60.0mの場合を比較すると $1/\beta_a$ は1:3.53、同様にL=60.0mとL=600.0mでは、 $1/\beta_a$ は1:8.17となる。これより、L=60.0mとL=600.0mの漏気量の違いは、ほぼ空気の圧縮率の違いに起因すると考えられるが、L=6.0mとL=60.0mの違いは圧縮率の違いで説明することはできない。

つぎに飽和度分布について検討する。図-3.8に各スケールごとの $\xi=0$ 上の空気の飽和度分布($S_a=1-S_w$)の時間変化を示す。L=6.0mの場合、飽和度 S_a はほとんど上昇せず、空洞付近の最大値でも0.1程度であるのに対し、他の場合は S_a が大きく上昇し、最大値は0.7~0.8程度に達している。

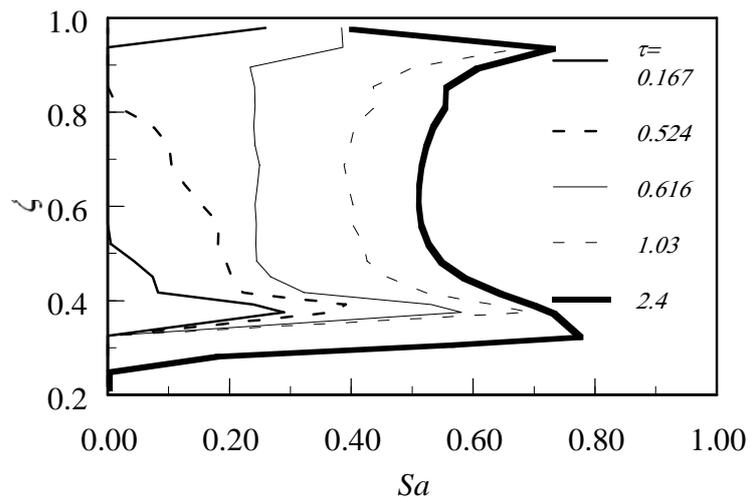
ここで、 $\tau=2.4$ におけるL=6.0mの飽和度分布より平均的には $S_w=1-S_a=0.95$ とすると、相対透過係数比 k_{ra} は約0.02、一方L=60.0mの飽和度分布より $S_w=0.45$ とすると、 k_{ra} は約0.8となる。つまり両者の比は約1:40であるが、圧縮率の違い($1/\beta_a$ の比)とあわせるとほぼ1:140となり、相対的な漏気量の差を説明することができる。



(a) $L=6.0\text{m}$



(b) $L=60.0\text{m}$



(c) $L=600.0\text{m}$

図-3.8 空気の飽和度分布の時間変化

(4) 解析スケールと水分特性曲線の関係

先に述べたように、解析スケールの違いが漏気量に与える影響については、主に空気の圧縮性と、飽和度分布の違いによって説明できる。ここで、空気の圧縮率は解析スケールに関して線形であるのに対し、飽和度分布は水分特性曲線と密接に関係する。

水分特性曲線は、基礎方程式を無次元化する過程で p_c が ψ_c に無次元化される。これまでの解析において、水分特性曲線はすべて図-3.3 に示したものをうけてきたが、これは、式(3.22)の Van Genuchten の式を用いており、 ψ_c を用いて書き換えると次式となる。

$$S_e = \frac{1}{\{1 + (\alpha p_c)^n\}^m} = \frac{1}{\{1 + (L\alpha\psi_c)^n\}^m} \quad (3.50)$$

すなわち、無次元毛管圧にかかる係数を $\alpha' = L\alpha$ とすると、スケールを変えることによって、パラメータ α' が変化することを意味している。たとえば、図-3.9 はこれまでに用いた L に対する無次元化した水分特性曲線を図示したものである。

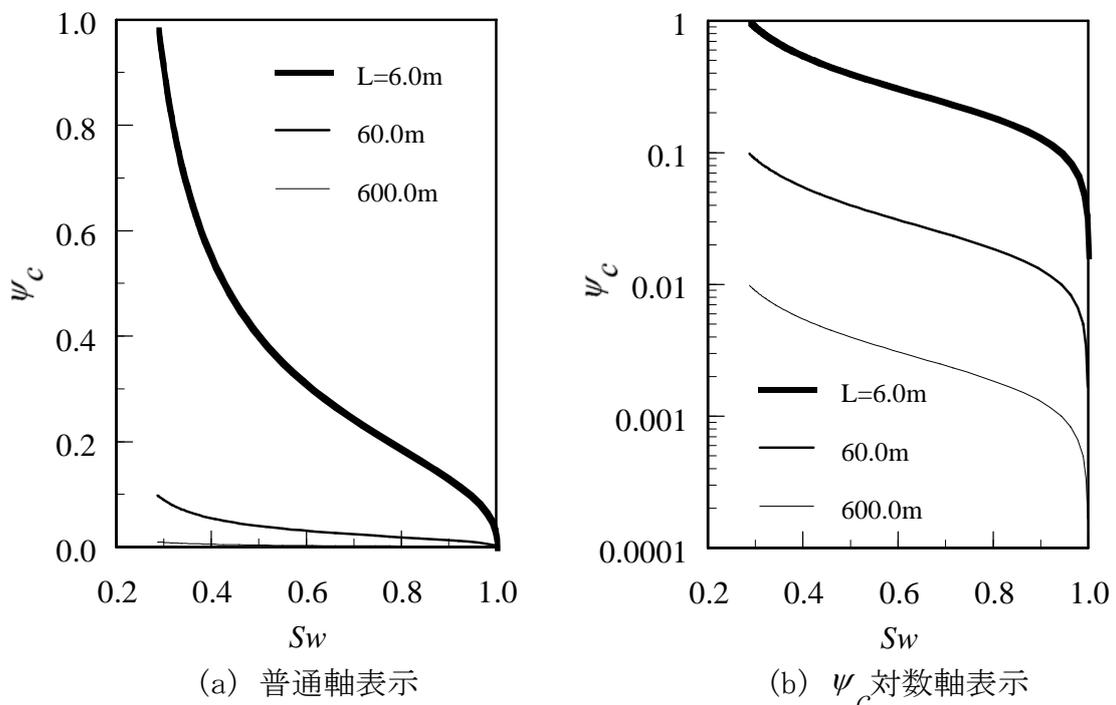


図-3.9 無次元化された水分特性曲線

つぎに、このような水分特性曲線の違いが、飽和度分布に与える影響について調べる。空気の圧縮性の影響を除くため $L=6.0\text{m}$ で一定とし、パラメータ a をそれぞれ 図-3.4 の 10 倍および 100 倍に変化させる。すなわち $\alpha=0.0735(\text{cm}^{-1})$ および $\alpha=0.735(\text{cm}^{-1})$ として漏気量および飽和度分布を求める。その他の解析条件はこれまでと同様であり、空洞内の空気圧は $\psi_{a-cav}=0.667$ で一定とする。

図-3.10 は、地表面から排出される無次元漏気量の時間変化である。空洞内の空気が地表面に達するまでは、漏気量は 図-3.6 とほぼ同様の変化を見せる。これは、地表面付近の不飽和域については空気の圧縮性の影響をほとんど受けないためである。一方、空洞内の空気が地表面に到達以後の漏気量を比較すると、 $\tau=2.4$ において $\alpha=0.00735\text{cm}^{-1}$ と $\alpha=0.0735\text{cm}^{-1}$ の漏気量の比は約 1:45、同様に $\alpha=0.0735\text{cm}^{-1}$ と $\alpha=0.735\text{cm}^{-1}$ の漏気量の比は約 1:0.83 である。これは、スケールを変化させた場合の漏気量の比から、空気の圧縮性の影響を除いて飽和度分布から推定した場合とほぼ一致している。

また、図-3.11 は $\xi=0$ 上の飽和度分布 (S_a) の時間変化である。図-3.8 と比較すると、ほぼ同様の飽和度分布を示しており、スケールの変化に伴う飽和度分布の時間的・空間的な違い、つまり漏気挙動の違いは、無次元化後の水分特性曲線の違いで説明し得ることがわかる。

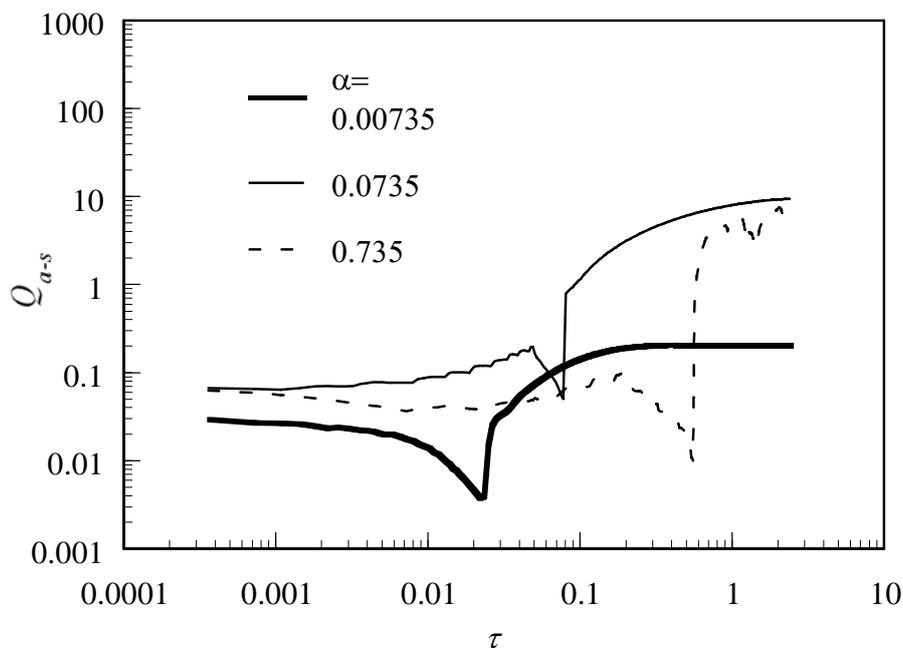
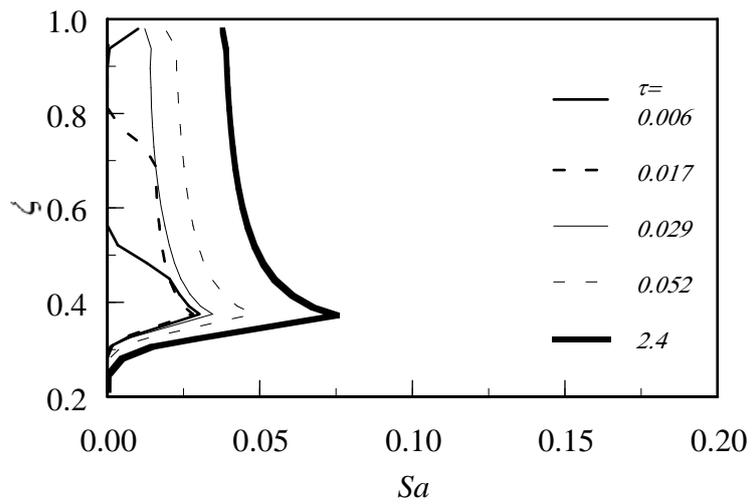
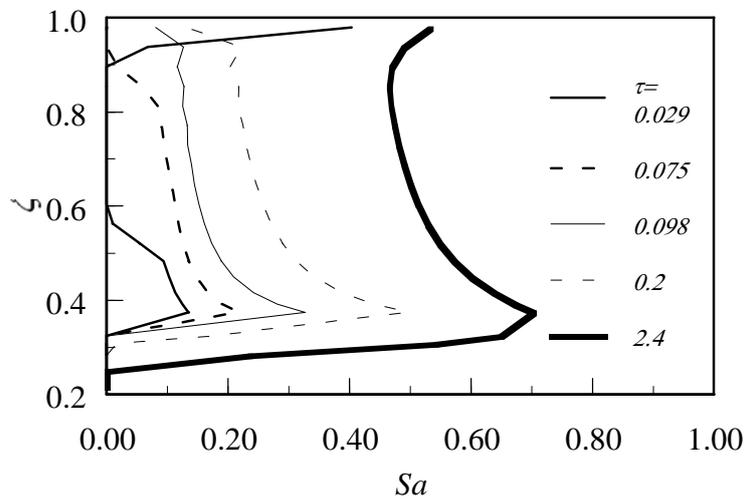


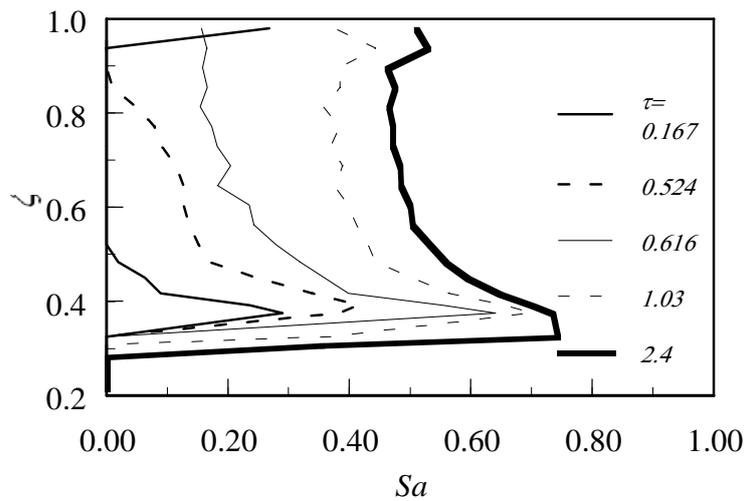
図-3.10 漏気量の時間変化 ($L=6.0\text{m}$)



(a) $\alpha=0.00735 \text{ cm}^{-1}$



(b) $\alpha=0.0735 \text{ cm}^{-1}$



(c) $\alpha=0.735 \text{ cm}^{-1}$

図-3.11 空気の飽和度分布の時間変化 ($L=6.0\text{m}$)

3. 4 空洞内空気圧の周期的変化と漏気量の関係

漏気量に影響を与える要因として、水分特性曲線等の地盤特性の他、地下空洞内の圧力変動が考えられる。空洞内の空気圧は、空気の貯蔵・放出によってある一定の周期で変動するが、その平均値、振幅あるいは周期によって漏気の挙動は異なるものと思われる。

ここでは、空洞内の周期的圧力変動と漏気量の関係について考察する。

(1) 解析条件

解析領域および地盤物性値は、前節において用いたものと同じとする。解析スケールは、 $L=60.0\text{m}$ とし、空洞内の圧力については、図-3.12 に示す正弦曲線とする。ここで平均値は図-3.5 においてほとんど漏気が生じない $\psi_{a-av}=0.5$ と、漏気量が急激に増加する $\psi_{a-av}=0.583$ とする。振幅は $\psi_{a-av}=0.5$ の場合 $\psi_{a-f}=0.083$ および $\psi_{a-f}=0.167$ 、 $\psi_{a-av}=0.583$ の場合 $\psi_{a-f}=0.083$ 、変動周期は、 $\tau=0.0036$ 、 $\tau=0.0144$ および $\tau=0.0576$ とする。これは、 $L=60.0\text{m}$ の場合、 $t=60$ 時間、 $t=240$ 時間および $t=960$ 時間に相当する(表-3.4)。

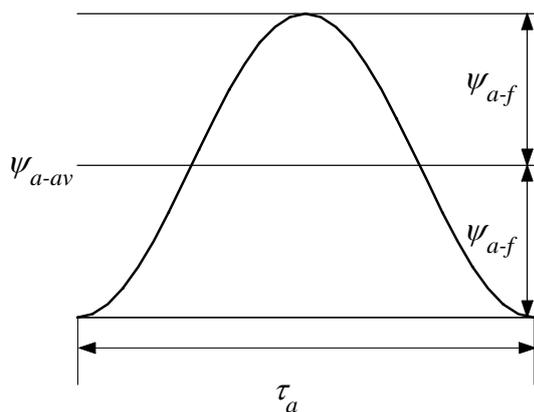


図-3.12 圧力変動曲線

表-3.4 解析条件

	平均値 ψ_{a-av}	振幅 ψ_{a-f}	周期 τ_a
Case3-1	0.5	0.083	0.0036
Case3-2			0.0144
Case3-3			0.0576
Case3-4		0.167	0.0036
Case3-5			0.0144
Case3-6			0.0576
Case3-7	0.583	0.083	0.0036
Case3-8			0.0144
Case3-9			0.0576

(2) 解析結果と考察

図-3.13 に空洞から地盤内に侵入する空気の時間変化を示す。横軸は $\tau=2.304$ から $\tau=2.3616$ まで表示しているが、各ケースで変動幅はほぼ一定であり、この時点ではすでに定常状態に達していると判断した。

図-3.13(a)と図-3.13(b)は、同じ平均値 $\psi_{a-av}=0.5$ に対して振幅が異なる場合を示している。何れの場合も漏気量のピークは 1.0 にも達していない。特に、Case3-4～Case3-6(図-3.13(b))は、空洞内圧力の最大値が 0.667 まで上昇しているにもかかわらず、漏気量は多くても Case3-1～Case3-3(図-3.13(a))の 2 倍程度となっている。また、圧力の変動周期の違いの影響については、図-3.13(a)において Case3-3 の漏気量が他の 2 つの場合より多くなっているが、図-3.13(b)では変動周期が異なってもピーク時の漏気量の差はほとんど見られない。これらの計算結果から、空洞内空気圧の平均値が十分小さい場合は、ピーク時の空気圧が水圧を上回っていても漏気量が急激に増加することは無いと思われる。

つぎに、図-3.13(c) (Case3-7～Case3-9) については、変動周期の違いによって、漏気量に顕著な差が生じていることがわかる。変動周期が最も短い Case3-7 が最も漏気量が多く、つぎに周期が最も長い Case3-9、そして漏気量が最も小さいのが Case3-8 となっている。

Case3-7における漏気量の平均値は約 5.0 であるが、これは図-3.4 (b) の $\psi_{a-cav}=0.583$ ($P_{a-cav}/H_c=1.0$) における漏気量と同程度である。つまり、空洞内圧力の平均値が、水圧と等しく、かつ変動周期が短い場合は、圧力変動の平均値に相当する一定の空気圧を作用させた場合と漏気量はほぼ同等と考えられる。

また、図-3.14 は、Case3-7～Case3-9 における $\xi=0$ 上の空気の飽和度分布の 1/4 周期ごとの時間変化を示している。Case3-7 では空気の飽和度が最も上昇しているが、圧力変動に対してはほとんど反応していない。これに対して、Case3-8 の飽和度は最大でも 0.1 程度までしか上昇せず、かつ空気圧変動に応じて飽和度分布も変化している。

このような現象について、現時点で明確に説明することは難しいが、ある特定の圧力変動の周期に対して、飽和度の変動が共振的に振舞うものと推測される。

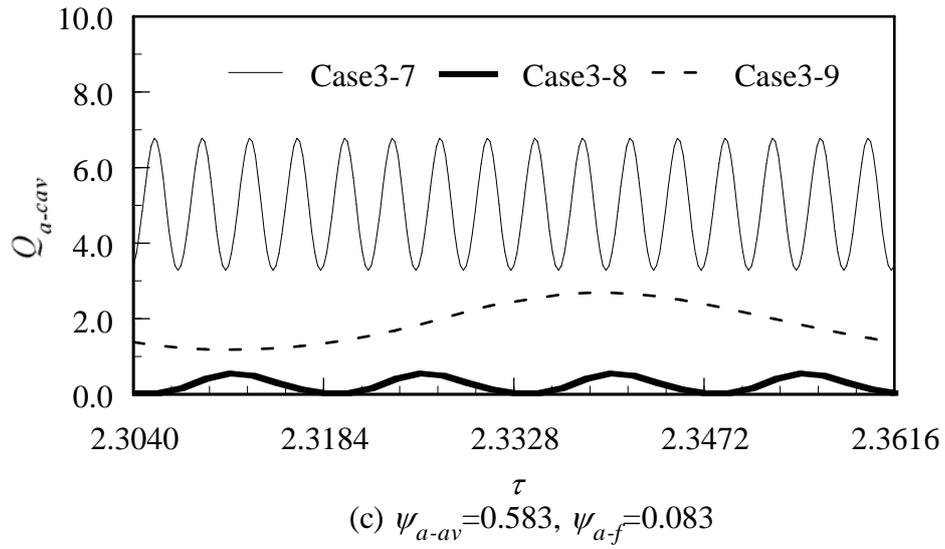
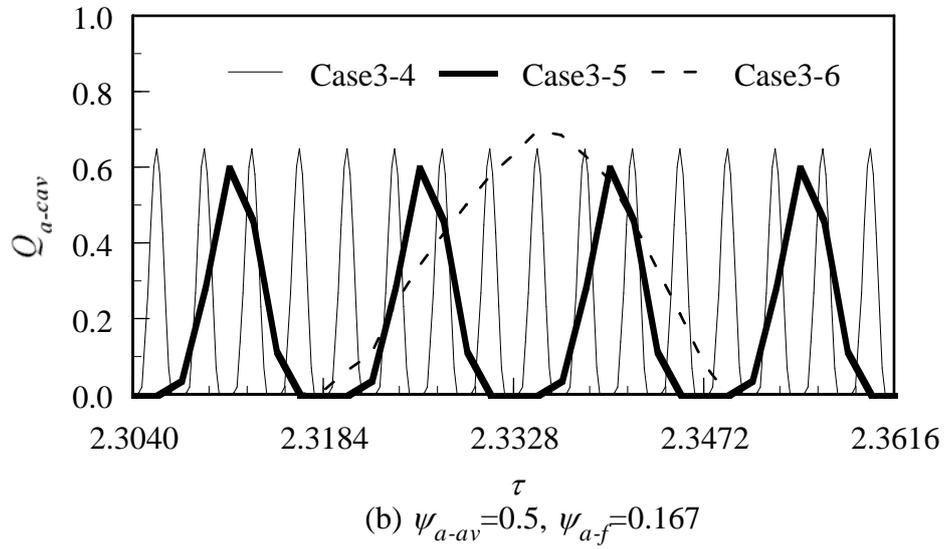
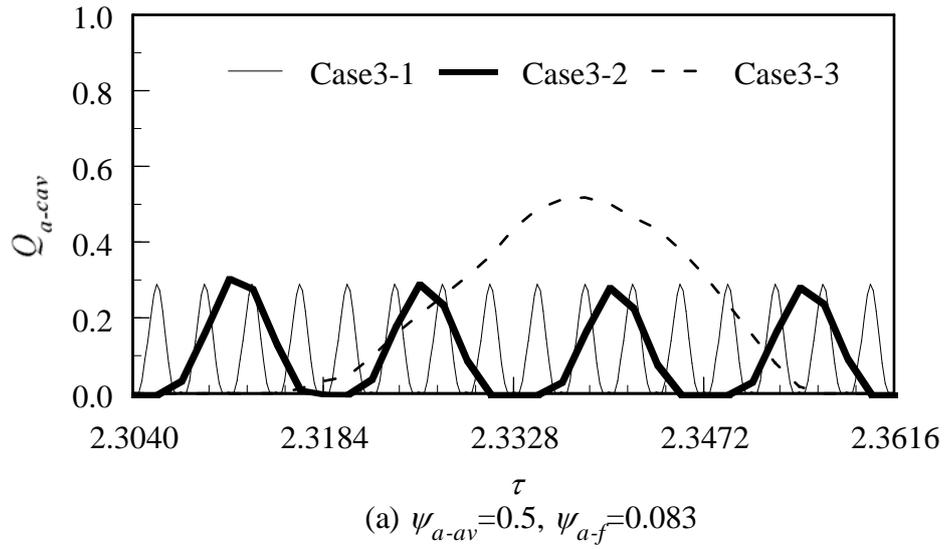
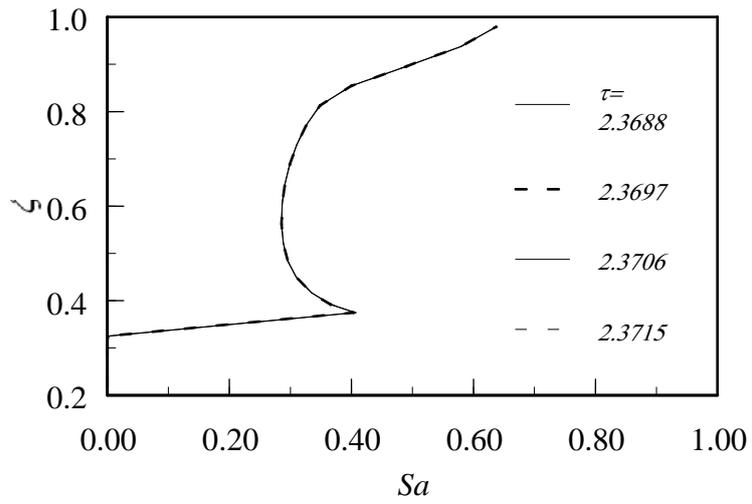
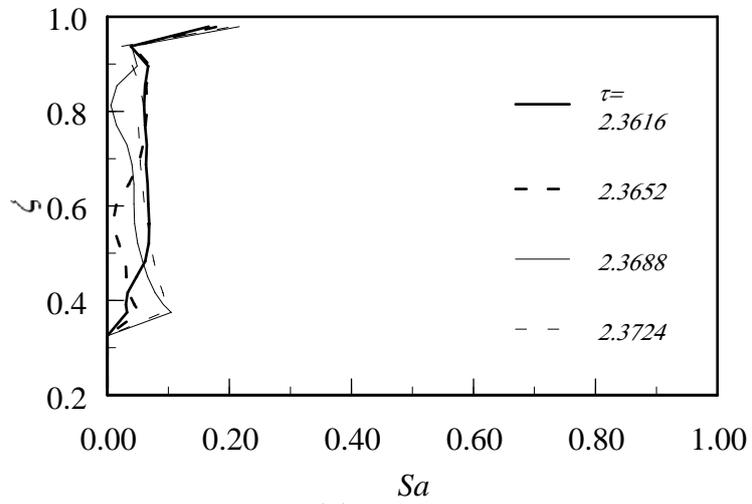


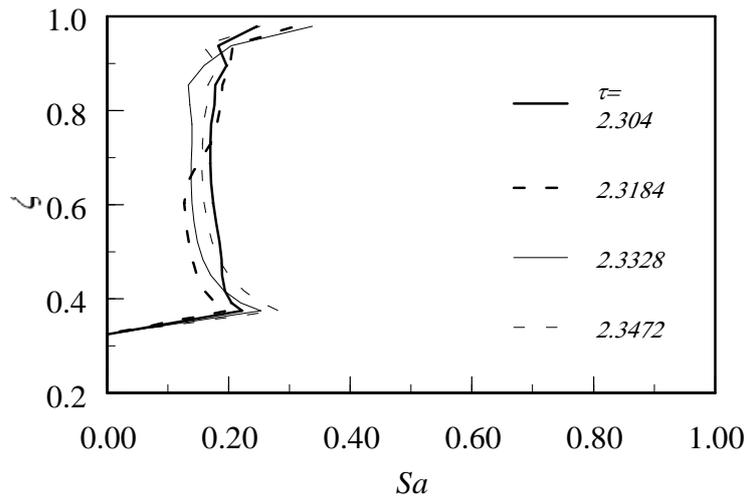
図-3.13 漏気量の時間変化



(a) Case3-7



(b) Case3-8



(c) Case3-9

図-3.14 空気の飽和度分布の時間変化 ($L=6.0\text{m}$)

3. 5 第3章のまとめ

本章では、高圧空気の飽和岩盤内への侵入過程を把握するため、数値シミュレーションを行なった。このとき、解析スケールの違いによる挙動の違いを把握するため、支配方程式の無次元化を試み、また、水分特性曲線の影響、および貯蔵圧の変動が漏気に及ぼす影響について調べた。これらによってえられた結果を以下にまとめる。

- 1) 空洞内に一定の空気圧を作用させた場合、圧力が初期水圧を上回ると漏気量が急激に増加する。
- 2) 解析スケールが異なる場合、スケールが大きくなるほど相対的な漏気量は増加する。これは、空気の圧縮性と飽和度分布の違いによって説明できる。
- 3) 解析スケールによって異なった飽和度分布を生じる理由は、相対的な水分特性曲線によって説明できる。すなわち、解析スケールが変化しても、同じ地盤であれば水分特性曲線は変わらないためである。
- 4) 空洞内の空気圧が周期的に変動する場合、その平均値が初期水圧を十分下回っていれば、空気圧のピークが初期水圧より大きくなっても漏気量が急激に増加することは無い。
- 5) 空洞内圧力の平均値が、水圧と等しく、かつ変動周期が短い場合は、圧力変動の平均値に相当する一定の空気圧を作用させた場合と漏気量はほぼ同等と考えられる。
- 6) 空洞内圧力の平均値が、水圧と等しいとき、漏気量は圧力の変動周期によって異なり、特定の周期に対して共振するような振る舞いが見られる。

参考文献

- 1) Pinder, G. F. and Gray, W. G.: Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic Press, pp.184-190, 1977.
- 2) Meiri, D.: Two-phase flow simulation of air storage in an aquifer, *Water Resources Research*, Vol.17, No.5, pp.1360-1366, 1981.
- 3) Van Genuchten, M. T.: A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Science Society American Journal*, Vol.44, pp.892-898, 1980.
- 4) Maulem, Y.: A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resources Research*, Vol.12, pp.513-522, 1976.
- 5) 中川加明一郎, 駒田広也, 宮下国一郎, 村田 満: 岩盤内圧縮空気貯蔵からの漏気防止条件, 土木学会論文集, No.310/III-5, pp.233-241, 1986.

第4章 大規模掘削工事における揚水管理と逆解析の適用

4. 1 概説

大規模な掘削工事において、掘削底面以下に被圧帯水層が存在する場合、盤膨れ対策として深井戸による地下水低下工法がしばしば採用される。その場合、設計ならびに制御を適切に行うためには、揚水の効果や影響を事前にあるいは施工中に評価することが必要となる。地下水低下工法において、加圧層が小さいながらも透水性を有する場合、隣接する帯水層からの漏水が生じ、揚水効果を左右する要因の一つとなる。漏水は、揚水によって隣接する帯水層との間に水頭差が生じるとおこるが、漏水の多寡や発生領域の大きさは、加圧層をはじめとする各帯水層の透水性の分布によって異なる。漏水を無視することができない被圧帯水層から揚水した場合、隣接する帯水層に及ぼす影響も無視することはできない。また、多くの場合、掘削領域を締め切る土留め壁（止水壁）等の地中構造物が、揚水対象の帯水層に隣接する帯水層内には設けられるが、それによって漏水の状況が左右されることも考えられる。それゆえ、加圧層の透水性を妥当に評価し、また止水壁が漏水に与える影響を考慮しておくことが重要となる。

しかしながら、実際には加圧層の透水性を事前に、広範囲にわたって精度良く推定することは一般に困難である。そのため、設計段階では加圧層を不透水層として漏水の影響は考慮されないことが多い。

漏水性被圧帯水層についての井戸公式がきわめて限られた条件下ですでに知られている。これは複雑な境界条件や地盤の不均質性、隣接する帯水層の透水性や水頭低下を考慮するときには適用することができない。したがって、これらを含めて解析するには、有限要素解析などの数値解析を実行することが必要となる。

本章では、実際の掘削工事現場において実測された水頭観測値から、帯水層だけでなく加圧層をも対象として地盤の透水性を逆解析によって推定し、その適用性を検討する。また、隣接する帯水層内および加圧層内の流れを考慮に入れ、平面準3次元有限要素解析を適用し、地盤の透水性や地中構造物の存在が揚水効果に与える影響について検討する。

4. 2 解析方法

漏水性被圧帯水層についての井戸公式は、きわめて限られた条件、例えば漏水があっても隣接する帯水層の水頭は低下しないといった条件のもとでは、すでに知られている。しかし、揚水対象の帯水層の構造や境界条件が複雑な場合や、隣接する帯水層の透水性やそこでの水頭低下を考慮しなければならない場合には、井戸公式は当然適用できない。そのため、ここでは平面準3次元および軸対称2次元の有限要素解析を行う。以下では、軸対称2次元解析については既に多くの文献に取り上げられているので割愛し、平面準3次元解析について述べる。

(1) 基礎方程式と有限要素定式化

図-4.1(a), 図-4.1(b)に示すような漏水性被圧帯水層をとりあげる。すなわち、基盤は不透水性、また上部の帯水層は不圧帯水層あるいは完全被圧帯水層とする。ここで、揚水は下部の被圧帯水層からのみ行うものとする。このような場合、透水性のよい帯水層内では、流れは水平流速成分が卓越しており、したがって水平2次元流れと見なして Dupuit の近似が適用できる。これに対して加圧層内の流れは、その水平流速成分が帯水層の流れと比較して無視できるほど小さく、したがって上下2つの帯水層間の水頭差によって生じる鉛直1次元流のみを考慮すればよい(1), 2), 3), 4)。

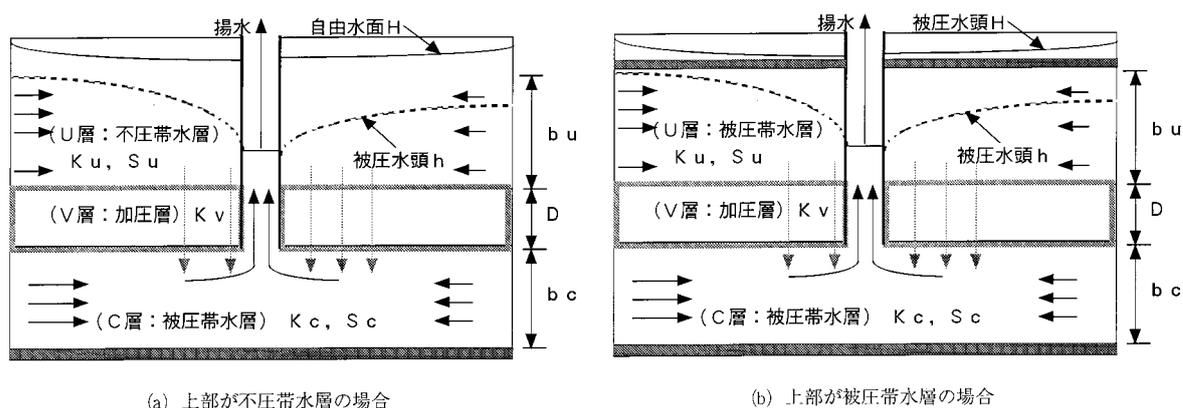


図-4.1 漏水性被圧帯水層の模式図

このとき、非定常浸透流の基礎方程式は、連続の式と Darcy 則より、以下のよう
に表される。

$$S_c \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_c b_c \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_c b_c \frac{\partial h}{\partial y} \right) - k_v \frac{H-h}{D} = -\sum_i Q_{wc}^i \delta(x-x_{wc}^i, y-y_{wc}^i) \quad (4.1)$$

$$S_u \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_u b_u \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_u b_u \frac{\partial H}{\partial y} \right) + k_v \frac{H-h}{D} = -\sum_i Q_{wu}^i \delta(x-x_{wu}^i, y-y_{wu}^i) + I \quad (4.2)$$

ここに、 h, b_c, k_c および S_c は、それぞれ図-4.1 における C 層の被圧水頭、層厚、透
水係数、貯留係数である。 H, b_u, k_u および S_u は、U 層が不圧帯水層であれば、水位、
水深、透水係数、有効間隙率であり、U 層が被圧帯水層であれば、水頭、層厚、透
水係数、貯留係数となる。また、 Q_{wc}^i および Q_{wu}^i は、それぞれ C 層、U 層における
井戸の揚水量、 (x_{wc}^i, y_{wc}^i) および (x_{wu}^i, y_{wu}^i) は C 層および U 層の井戸座標、 δ はデルタ
関数である。さらに、 I は U 層上面からのかん養量、 k_v, D はそれぞれ V 層（加圧層）
の透水係数と層厚である。

境界条件は、水頭が規定される境界では、

$$h = h_B \text{ (C 層)}, \quad H = H_B \text{ (U 層)} \quad (4.3)$$

であり、流束が規定される境界では、

$$-\left(k_c b_c \frac{\partial h}{\partial x} n_x + k_c b_c \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) = V_c \quad (4.4)$$

$$-\left(k_u b_u \frac{\partial H}{\partial x} n_x + k_u b_u \frac{\partial H}{\partial y} n_y \right) = V_u \quad (4.5)$$

ここに、 h_B, H_B は既知の水頭値、 V_c と V_u
はそれぞれ C 層と U 層の外部境界におけ
る単位長さ当たりの流量、 n_x と n_y は境界
にたてた外向法線の方向余弦である。

以下では、式(4.1)および式(4.2)を
Galerkin 法によって有限要素定式化する。
要素分割は、図-4.2 に示すように C 層と
U 層で同じとし、つまり鉛直線上に両層
の対応する節点が存在する。定式化の過
程で Gauss・Green の定理を適用し、境界

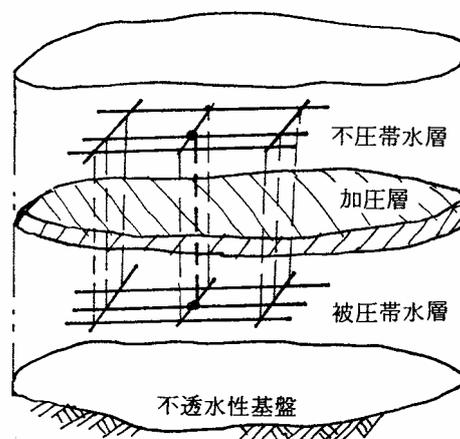


図-4.2 漏水性被圧帯水層の要素分割

条件(式(4.4), 式(4.5))を導入すると,

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{H}\} + [\mathbf{B}]\left\{\frac{d\mathbf{h}}{dt}\right\} + [\mathbf{C}]\{\mathbf{h}\} = \{\mathbf{r}\} \quad (4.6)$$

$$[\mathbf{D}]\left\{\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right\} + [\mathbf{E}]\{\mathbf{H}\} + [\mathbf{A}]\{\mathbf{h}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (4.7)$$

ここに, 係数行列および右辺の列ベクトルの成分は,

$$A_{nm} = -\sum_e \int_{\Omega} \frac{k_v}{D} N_n N_m d\Omega \quad (4.8)$$

$$B_{nm} = \sum_e \int_{\xi} S_c N_n N_m d\xi \quad (4.9)$$

$$C_{nm} = \sum_e \int_{\Omega} \left(k_c b_c \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + k_c b_c \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{k_v}{D} N_n N_m \right) d\Omega \quad (4.10)$$

$$D_{nm} = \sum_e \int_{\Omega} S_u N_n N_m d\Omega \quad (4.11)$$

$$E_{nm} = \sum_e \int_{\Omega} \left(k_u b_u \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + k_u b_u \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{k_v}{D} N_n N_m \right) d\Omega \quad (4.12)$$

$$r_n = -\sum_e \int_{\xi} V_c N_n d\xi - \sum_i Q_{wc}^i N_n(x_{wc}^i, y_{wc}^i) \quad (4.13)$$

$$R_n = -\sum_e \int_{\xi} V_u N_n d\xi - \sum_i Q_{wu}^i N_n(x_{wu}^i, y_{wu}^i) - \int_{\Omega} I N_n d\Omega \quad (4.14)$$

である. ここで, N_n は補関関数, Ω は解析領域, ξ は Ω の外部境界である.

式(4.6), 式(4.7)の時間項を後退差分法によって離散化すると,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} + \Delta t \mathbf{C}^{(1)} & \Delta t \mathbf{A} \\ \Delta t \mathbf{A} & \mathbf{D} + \Delta t \mathbf{E}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{h}^{(1)} \\ \mathbf{H}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Bh}^{(0)} + \Delta t \mathbf{r}^{(1)} \\ \mathbf{DH}^{(0)} + \Delta t \mathbf{R}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

が得られる⁵⁾. ここで, $\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$ など肩に(1)のついた諸量は時刻 $t + \Delta t$ におけるそれらの値を示し, (0)のついた諸量は時刻 t における値を表す.

(2) 漏水因子

漏水性被圧帯水層の水理特性を代表する値として, 漏水因子が定義される. これは透水層と加圧層の透水係数および層厚から式(4.16)および式(4.17)によって定義さ

れ，帯水層の影響半径の代表値と考えられる．

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{k_c \cdot b_c \cdot D}{k_v}} \quad (4.16)$$

$$\lambda_u = \sqrt{\frac{k_u \cdot b_u \cdot D}{k_v}} \quad (4.17)$$

また，被圧帯水層と隣接する帯水層の漏水因子の比 (λ_u/λ_c) は，帯水層の透水量係数の比の平方根であり，隣接する帯水層の漏水領域の相対的な大きさ表すものと考えられる．

4. 3 逆解析

一般に、地盤の水理特性を、広範囲にわたって直接的に計測することは困難である。これに対し、水位・水頭の観測は比較的容易であり、しかも水位・水頭分布やその経時変化は、地盤の水理特性を間接的に反映している。したがって、水位・水頭の観測値から地盤の水理特性を探索することが有効な方法と考えられる。

ここでは、最適化の手法として、目的関数のパラメータによる微分を必要としない非線形最適化手法のひとつである制約付きシンプレックス法^{6), 7)}を用いる。

(1) 制約つきシンプレックス法

シンプレックスとは、 n 次元空間における $(n+1)$ 個以上の点を頂点とする幾何学的図形のことをいう。例えば目的関数が n 個のパラメータによって表される場合、次のような $n+1$ 個以上の点から構成される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= (x_1^1, \dots, x_n^1) \\ &: \\ \mathbf{x}^n &= (x_1^n, \dots, x_n^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= (x_1^{n+1}, \dots, x_n^{n+1}) \\ &: \end{aligned}$$

Spendley⁸⁾らの開発したシンプレックス法は、シンプレックスの各頂点の中で最悪の目的関数値をとる点の、その点以外の頂点の中心に関する鏡映点では、目的関数値の改善が期待される、という考え方に基礎を置いている（図-4.3）。

そして上述の鏡映を続けることにより、シンプレックスを最適点に近づけることが可能であると考えられる。

また、NelderとMead⁹⁾により提案された改良シンプレックス法は、探索の手段として、鏡映の他に目的関数の形状に応じて伸長・収縮・縮小などの修正動作を加え、探索の効率の向上をはかっている（図-4.4）。

一方、Box¹⁰⁾はシンプレックス法を不等式制約付き最小化問題に拡張し、これをコンプレックス法と呼んだ。

制約付きシンプレックス法はNelder-Meadの方法に、Boxの考えを応用したものである。

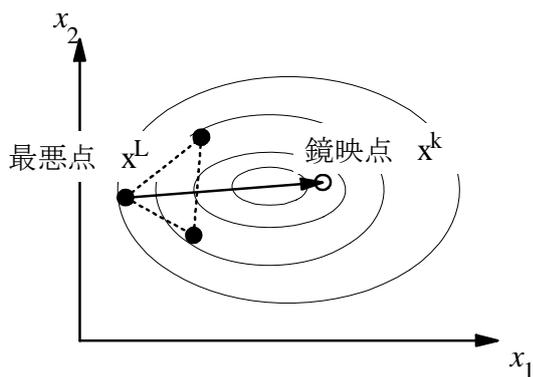


図-4.3 2次元のシンプレックスと鏡映点

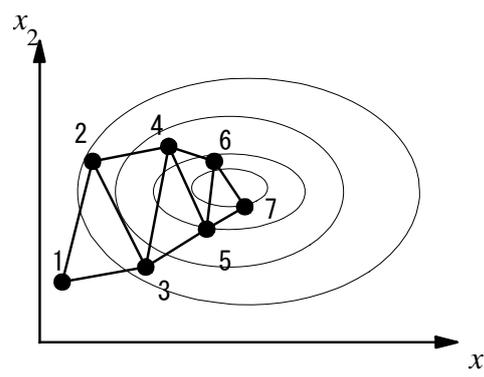


図-4.4 Nelder-Meadの改良シンプレックス法

(2) 制約付き最小化問題

目的関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を m 個の制約条件 $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ (ここに, $j=1, \dots, m; (n \leq m)$) のもとで最小化する場合を考える. ここで, x_1, \dots, x_n は独立変数であり, x_{n+1}, \dots, x_m は x_1, \dots, x_n の関数である. ($x_j = h_j(x_1, \dots, x_n), (j=n+1, \dots, m)$) つまり, n 個の陽的に与えられた制約条件と, $(m-n)$ 個の陰的に与えられた制約条件を満足するように最小化を行う. また, α_j, β_j は定数でそれぞれ制約条件下限值と上限値である. すなわち,

$$\min f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.18)$$

$$\text{subj. to } \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \quad j=1, \dots, n \quad (4.19)$$

$$\alpha_j \leq x_j = h_j(x_1, \dots, x_n) \leq \beta_j \quad j=n+1, \dots, m \quad (4.20)$$

と表せる.

(3) 最適点の探索手順

① シンプレックスの初期配置

シンプレックスを構成する頂点をランダムに K 個配置する. このとき, シンプレックスがその中心へ崩壊してしまう縮退現象を防止するため, 頂点の数は多めにして $K=2n$ (ここに n は独立変数の数, すなわちモデルパラメータの数) とする. 各頂点は, 推定の対象となる n 個のモデルパラメータによって張られる n 次元空間上の位置ベクトルで表される.

はじめに, 1 個の頂点は m 個の全ての制約式(4.19)および式(4.20)を満たすように与える. その他の $(K-1)$ 個の頂点は, それぞれの頂点の n 個の成分を, 一様乱数を用いて,

$$x_j = \alpha_j + r_j(\beta_j - \alpha_j) \quad (j=1, \dots, n) \quad (4.21)$$

で与える．ここに， r_j は一様乱数で $0 \leq r_j \leq 1$ である．

この様にして決められた頂点は，陽的制約条件を満たす．陰的な制約条件が満たされていないときは，その試点（頂点）を，すでに条件を満たして選定された試点の集合の中心方向へ，両点の midpoint まで後退させる．そして，最終的に全制約条件が満たされるように（ $K-1$ ）個の頂点の初期配置が決まる．

② シンプレックスの更新

a) 目的関数を各頂点で計算する．そして，目的関数の値が最大となる頂点（最悪点），2番目に最大となる頂点（第2最大点），および最小となる頂点（最小点）を特定する．これらの頂点を更新するにあたって，頂点の座標とそこでの関数値を次のように定義する．

$\mathbf{x}^k \equiv n$ 次元空間におけるシンプレックスの頂点 k の位置ベクトル
 $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$

$f^k \equiv$ 頂点 k における目的関数の値．

$\mathbf{x}^L, f^L \equiv$ 最大点（最悪点）の位置ベクトルとそこでの目的関数値．

$\mathbf{x}^H, f^H \equiv$ 第2最大点の位置ベクトルとそこでの目的関数値．

$\mathbf{x}^S, f^S \equiv$ 最小点の位置ベクトルとそこでの目的関数値．

$\mathbf{x}^G, f^G \equiv$ 最大点 \mathbf{x}^L を除く全ての頂点の中心の位置ベクトルと，
 そこでの目的関数値．

b) a)で求めた最悪点 \mathbf{x}^L を残りの頂点の中心

$$\mathbf{x}^G = \frac{1}{K-1} \sum \mathbf{x}^k \quad (4.22)$$

に関して鏡映する．すなわち，

$$[\mathbf{x}^k \quad \mathbf{x}^G] = a [\mathbf{x}^L \quad \mathbf{x}^G] \quad (\text{鏡映係数 } a > 1) \quad (4.23)$$

によって \mathbf{x}^L の鏡映点 \mathbf{x}^k を求める．ここに， a は経験的に $a=1.3$ にとられる． \mathbf{x}^k が制約条件をすべて満たすとき（許容点） f^k を算定し f^k の値によって以下のような場合に分け，それぞれの場合に伸張，収縮，縮小のいずれかの修正動作を行う．

$f^S < f^k \leq f^H$ の場合

\mathbf{x}^L のかわりに \mathbf{x}^k を新しいシンプレックスの頂点として採用し、探索を続ける。

・ $f^k < f^S$ の場合

\mathbf{x}^k が新しいシンプレックスで最良点であるから、その方向で一層の改善が期待される。したがって、

$$[\mathbf{x}^E \quad \mathbf{x}^G] = r [\mathbf{x}^k \quad \mathbf{x}^G] \quad (\text{伸張係数 } r > 1) \quad (4.24)$$

によって伸張し \mathbf{x}^E を求める。ここに、 r は通常 $r=2$ とする。この伸張点 \mathbf{x}^E における目的関数 f^E を算定し、 \mathbf{x}^E が許容点で $f^E < f^k$ である場合は、 \mathbf{x}^L の代わりに \mathbf{x}^E を採用する。その他の場合には、 \mathbf{x}^L の代わりに \mathbf{x}^k を採用して探索を続行する。

・ $f^k \geq f^L$ の場合

試点 \mathbf{x}^k が、最悪点よりさらに悪くなる場合であるから、行き過ぎた \mathbf{x}^k を引き戻す動作を行う。すなわち、 $f^L \leq f^k$ であるから、 \mathbf{x}^L の側の内分点の方が関数値は小さくなるのが期待されるので、

$$[\mathbf{x}^C \quad \mathbf{x}^G] = b [\mathbf{x}^L \quad \mathbf{x}^G] \quad (\text{収縮係数 } 0 < b < 1) \quad (4.25)$$

によって \mathbf{x}^L 側に収縮を行い \mathbf{x}^C を求める。ここに b は経験的に $b=0.5$ とする。 \mathbf{x}^C が許容点のときは f^C の値によってさらに次の操作を行う。

ア) $f^C < f^L$

収縮は成功であり \mathbf{x}^L の代わりに \mathbf{x}^C を採用する。

イ) $f^C \geq f^L$

収縮は失敗であり、シンプレックスを縮小する。縮小とは、シンプレックスの大きさが、問題に対して適正でないときにとられる手法で、全ての頂点 \mathbf{x}^k を \mathbf{x}^S に向かって $1/2$ ずつ移動させて縮小したシンプレックスを作る。

・ $f^H < f^k < f^L$ の場合

$f^H < f^k$ であるので、試点 \mathbf{x}^L を \mathbf{x}^k とおきかえても \mathbf{x}^k が最悪点となる場合である。 $f^k < f^L$ であるので \mathbf{x}^k 側の内分点に戻す方が目的関数は小さくなると考えられる。したがって、

$$[\mathbf{x}^L \quad \mathbf{x}^G] = b [\mathbf{x}^k \quad \mathbf{x}^G] \quad (\text{収縮係数 } 0 < b < 1) \quad (4.26)$$

によって \mathbf{x}^k 側へ収縮を行い \mathbf{x}^C を求める。ここに、 b は、 $b=0.5$ とする。 \mathbf{x}^C

が許容点のときには、 $f^k \geq f^L$ の場合と同様に f^L の値によって収縮または縮小を行う。

③ 許容化

試点 \mathbf{x}^k や \mathbf{x}^L が許容点でない場合、それらを許容化した \mathbf{x}^a を求めて、それを \mathbf{x}^L の代わりに採用する。許容化の手順は次の通りである。

- a) \mathbf{x}^k が陽的な制約条件を満たしていないときは、その独立変数 x_j^k を適当な量だけ制約式の境界の内側へ移動させ \mathbf{x}^a とする。(例えば、下限値を下回っている場合は、 $x_j^k = \alpha_j + 0.00001$ 、上限を上回っている場合には $x_j^k = \beta_j - 0.00001$ とする。)
- b) \mathbf{x}^k が陰的な制約条件を満たしていないときには、 \mathbf{x}^k を中心 \mathbf{G} の方向へ収縮率 $1/2$ で 3 回まで戻し、許容点 $\Delta\mathbf{x}$ を見つける。この操作によっても許容点が得られないときには、 \mathbf{G} が許容点かどうかを調べ、許容点でなければ、 $\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{x}^L - \mathbf{x}^G)/10$ を計算する。そして、 $\Delta\mathbf{x}$ ずつ 2 回 \mathbf{x}^G 方向に \mathbf{x}^a を探索する。これでもなお許容点でないときは、シンプレックスを \mathbf{x}^S に向かって縮小する。縮小の方法は上述の $f^k \geq f^L$ の場合の i) と同様である。

(4) 収束判定条件

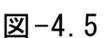
シンプレックスの各頂点の目的関数値 f^i の標準偏差が ε 以下になったとき、最適点に収束したものとし、シンプレックスの中心を最適点 \mathbf{x}^R とする。すなわち、

$$\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (f^i - \bar{f})^2} \leq \varepsilon, \quad \bar{f} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f^i \quad (4.27)$$

のとき、

$$\mathbf{x}^R = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{x}^i \quad (4.28)$$

を最適点とする。

以上の手順の流れ図を -4.5 に示す。

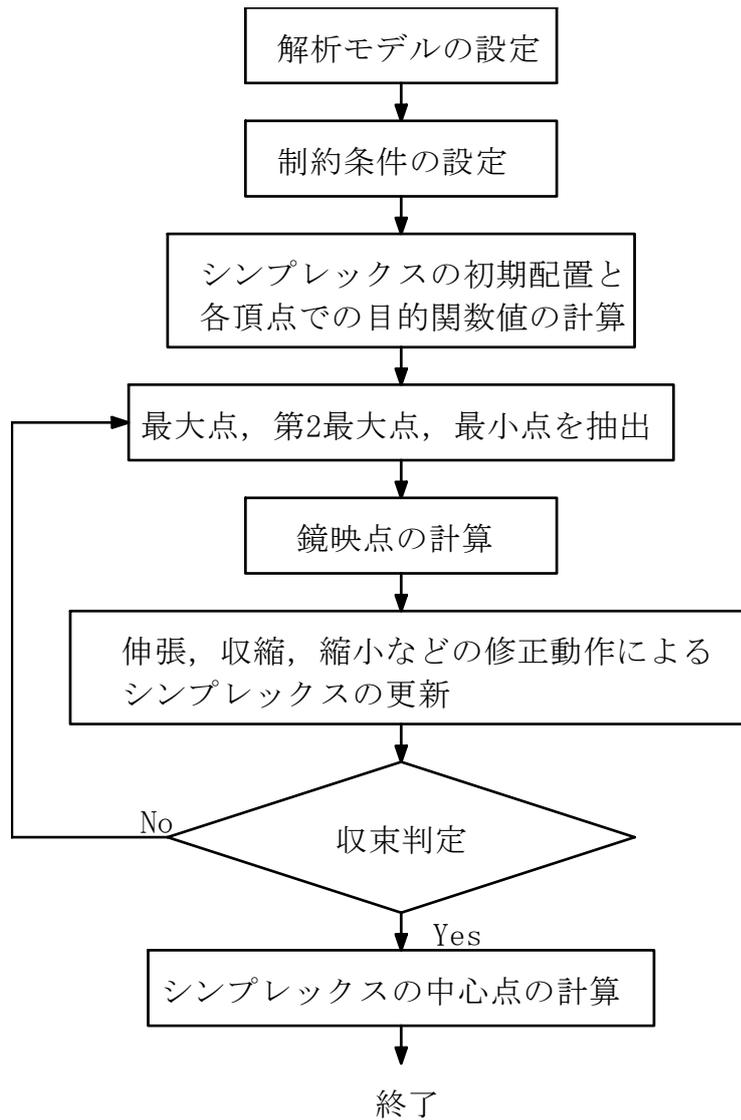


図-4.5 逆解析の流れ図

4. 4 逆解析による透水係数の推定

ここでは、実際の掘削現場において施工前に実施された揚水試験結果と、施工中に観測された水頭分布の観測値から、加圧層を含めた地盤の透水係数を、逆解析手法により推定し、その適用性を検討する。

揚水試験の逆解析では、単一井からの揚水であること、および土留め壁が施工される以前に実施されたことを考慮して、非定常の軸対称鉛直2次元有限要素解析を実行する。また、施工中に観測された水頭分布に基づく逆解析では、揚水開始から長時間経過していること、複数井からの揚水であること、掘削土留め壁の影響を考慮する必要があること、および地盤の不均質性が予想されることのため、定常平面準3次元有限要素解析を実行する。

(1) 現場概要

地下水低下工法を適用する掘削領域を図-4.6に、その地盤構造の概要を図-4.7に示す。現場は、海岸に近い平坦部であり、掘削領域は東西約100m、南北約400mの矩形である。また、最終掘削深度は約15mである。

地盤は、概ね5層に分類され、上方より第1層、第3層、第5層が透水層で第2層、第4層が難透水層である。施工前の地下水位・水頭は、各層ともほぼ平均海面に等しい。

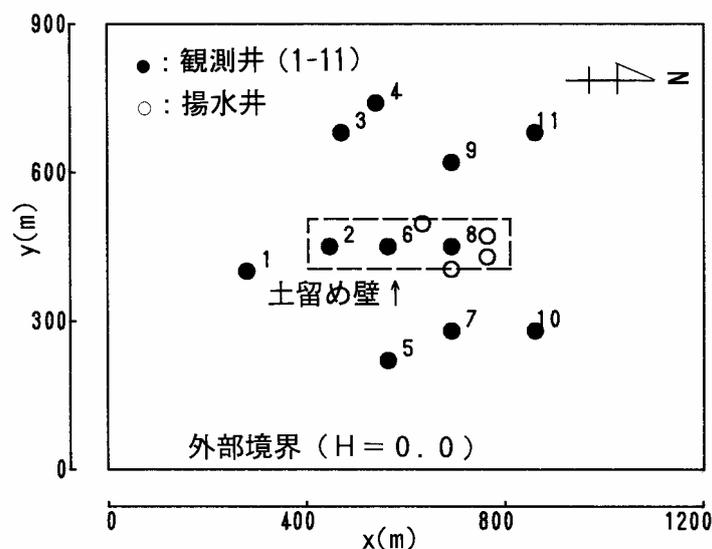


図-4.6 解析領域

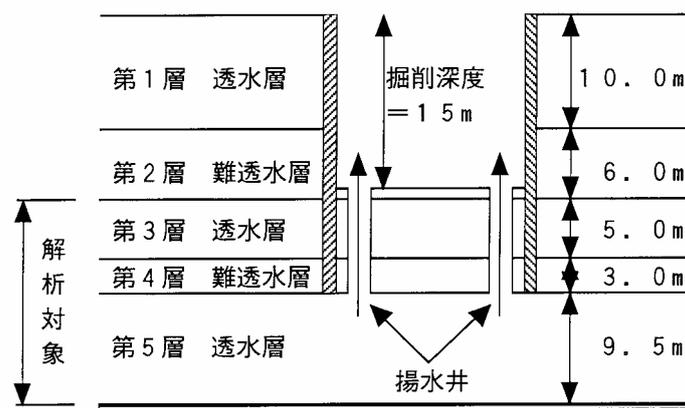


図-4.7 地盤構造の概要

掘削領域を囲む土留め壁は泥水固化工法で施工され、その根入れは施工の難易や精度また経済性を考慮して、第4層までとされた。

揚水は、掘削時に第4層の盤膨れを防止する目的で実施され、第5層から取水されている。揚水井は、計8基で現時点では北側の4基が稼働しており、揚水量は1基当たり約 $0.7 \text{ m}^3 / \text{min}$ 、揚水開始から約3ヶ月が経過している。

第5層の水頭低下量は、掘削領域の内側3ヶ所、外側8ヶ所で観測されている。各観測点における水頭低下量の観測値を表-4.1に示す。

表-4.1 水頭低下量の観測値

観測点	観測値(m)
1	1.7
2	9.4
3	1.3
4	0.3
5	1.4
6	9.3
7	3.2
8	9.7
9	3.0
10	0.7
11	0.1

また、地下水低下工法の実施に先立って、第5層の水理パラメータ推定のため、揚水試験が掘削領域の中央よりやや北側において実施されている。試験結果を図-4.8に示す。

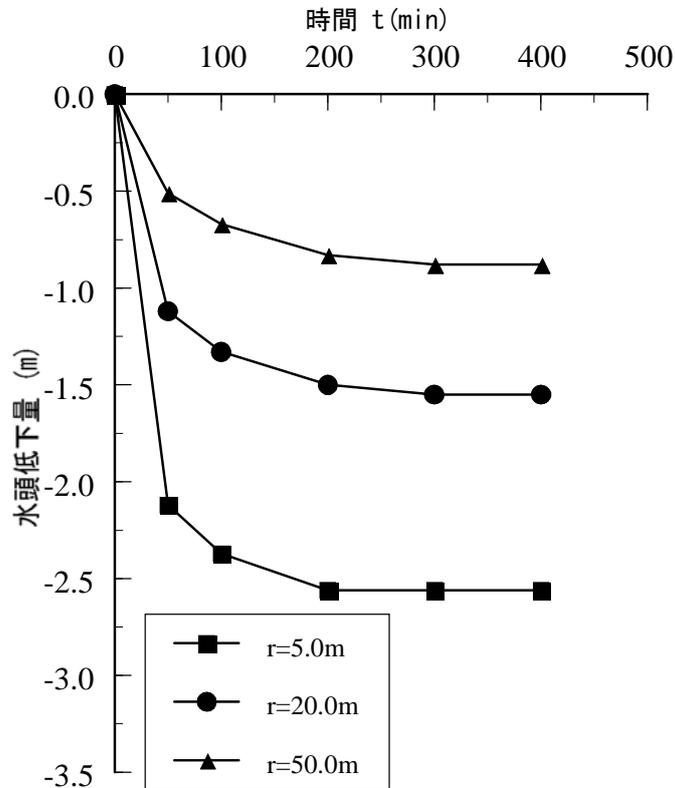


図-4.8 揚水試験結果

(2) 揚水試験結果の逆解析

① 解析条件

一定揚水試験の結果得られた水頭低下曲線から、第3層から第5層を対象に、透水係数 k_3, k_4, k_5 および比貯留率 S_{S3}, S_{S4}, S_{S5} を推定する。

揚水量は、 $0.25 \text{ m}^3/\text{min}$ 、揚水開始から約 400 分後にほぼ定常状態に達したと判断し、揚水を停止している。観測井は、揚水井の中心から $r=5 \text{ m}$ 、 20 m 、 50 m の3点に配置されている。

推定対象のパラメータのうち比貯留率は、一般にばらつきが少ないことから、第3層と第5層は等しいもの ($S_{S3}=S_{S5}=S_S$) と仮定し、1つのパラメータとした。

最小化する目的関数は、次式で与える。

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^M (h_c^i - h_o^i)^2 \quad (4.29)$$

ここで、 n は推定対象のパラメータの数、 $p_1 \sim p_n$ は推定対象のパラメータ、 M は観測値の数、 h_c^i および h_o^i は、 i 番目の水頭の計算値と観測値である。

② 解析結果と考察

逆解析は、シンプレックスの初期配置を決める乱数系列を変化させて5回実施した。表-4.2、図-4.9 および図-4.10 は、5種類の乱数系列によるパラメータ推定結果と、再現性の目安となる目的関数値を示している。それぞれの目的関数値には顕著な差がないので、観測値の再現性は同等と考えられる。しかし、パラメータによっては推定結果にばらつきが見られる。

表-4.2 透水係数・比貯留率の推定結果

乱数系列	k_5 (cm/sec)	k_4 (cm/sec)	k_3 (cm/sec)	S_S (1/m)	S_{S4} (1/m)	目的関数値
I	9.12×10^{-3}	3.01×10^{-6}	1.33×10^{-2}	1.49×10^{-5}	1.69×10^{-3}	0.0217
II	9.06×10^{-3}	1.40×10^{-5}	2.59×10^{-2}	2.57×10^{-5}	3.00×10^{-4}	0.0185
III	9.10×10^{-3}	6.37×10^{-6}	1.88×10^{-1}	1.57×10^{-5}	8.36×10^{-4}	0.0227
IV	9.10×10^{-3}	5.66×10^{-6}	1.08×10^{-3}	1.59×10^{-5}	9.20×10^{-4}	0.0227
V	9.16×10^{-3}	7.93×10^{-6}	4.85×10^{-4}	2.31×10^{-5}	5.46×10^{-4}	0.0265

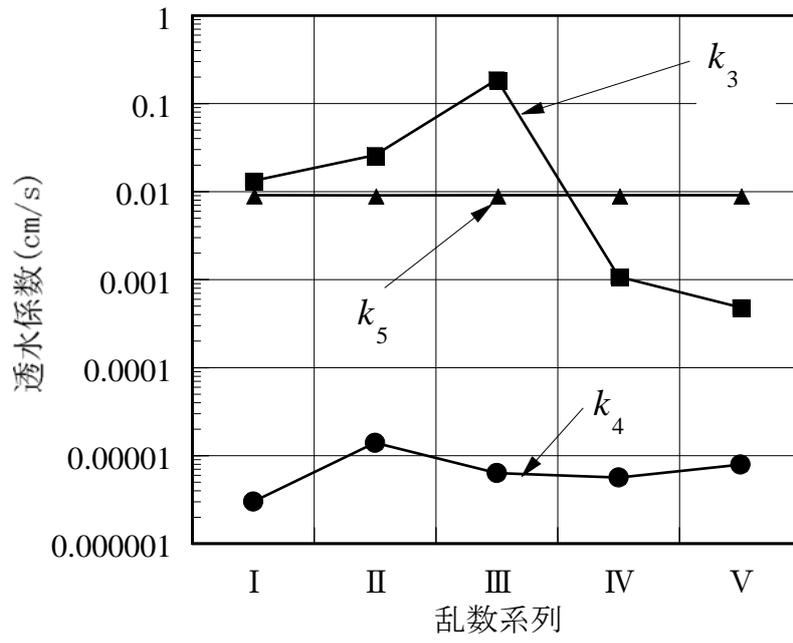


図-4.9 透水係数の推定結果

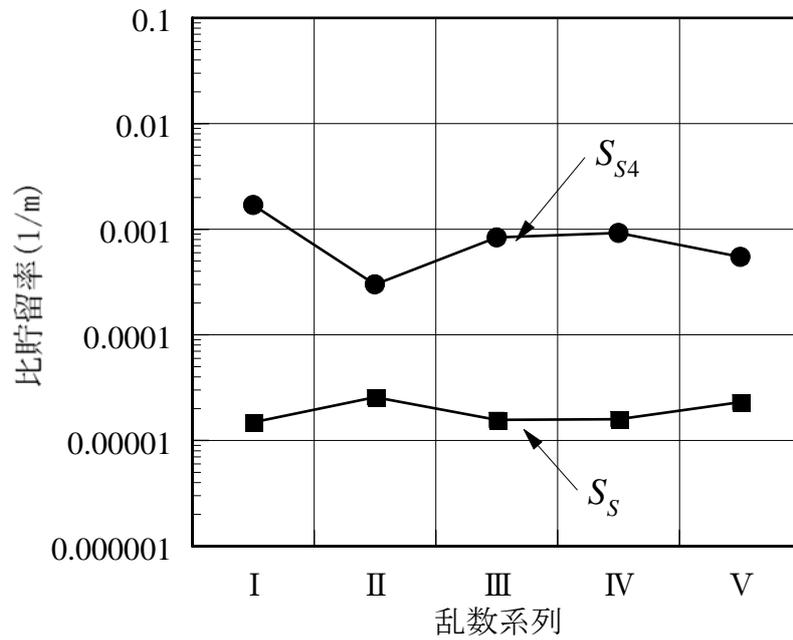


図-4.10 比貯留率の推定結果

第5層の透水係数 k_5 は、各ケースとも $9.1 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$ 程度のほぼ同じ値が推定されており、これが観測値の再現性に最も影響するパラメータであることがわかる。

加圧層の透水係数 k_4 に注目すると、推定値のばらつきは、 $3.0 \times 10^{-6} \text{ cm/sec} \sim 1.4 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}$ であり、概ね 10^{-5} cm/sec 程度であることが窺える。これより、漏水因子を求めると $\lambda_c = 161 \text{ m}$ となる。

最も推定値のばらつきが大きいのは、第3層の透水係数 k_3 である。これは、上部帯水層の透水性は、短期的には揚水層（第5層）の水頭分布にほとんど影響を与えないことを示唆しているが、漏水因子の値が比較的大きく、漏水性が小さいためと考えられる。

比貯留率については、透水層に対して $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \sim 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ 、加圧層に対して $3.0 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} \sim 1.7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ と推定されたが、これらは、砂質土および粘性土に対する一般的な数値の範囲内である¹¹⁾。

以上の結果から、この逆解析によって、比較的短時間の揚水試験で得られる水頭低下曲線を用いても、加圧層の透水係数を実用上支障のない精度で推定できると考えられる。しかしながら、推定対象のパラメータが多くなるとシンプレックスの初期配置が推定結果に影響することがあるので、推定の妥当性については、観測値の再現性や推定値のばらつきの面から十分吟味することが必要である。

(3) 施工中の水頭観測値による逆解析

① 解析条件

図-4.6 に示す 11ヶ所の水頭観測点における施工中の被圧水頭の観測結果より、第3層から第5層を対象に各層の透水係数を推定する。

逆解析はつぎの2ケースとする。Case4-1では、第4層は不透水性、すなわち漏水は生じないものとして第5層の透水係数のみを推定の対象とする。Case4-2では、第3層と第4層の透水係数も推定対象に加える。ここで、第3層、第4層は領域全体にわたって等方性・均質(k_3, k_4)とするが、第5層は事前の調査結果から、解析領域の北側と南側で透水性が異なることが予想されるため、北半分(k_{5N})と南半分(k_{5S})に分けて推定を行った。表-4.3に示す透水係数の制約条件は、土質調査の結果から予想される範囲内としたが、この範囲を上下限值それぞれ1オーダー拡大しても、推定値および目的関数値はほとんど変化しなかった。

表-4.3 透水係数の制約条件 (cm/sec)

		Case4-1	Case4-2
k_3	上限値	—	1.67×10^{-1}
	下限値	—	1.67×10^{-4}
k_4	上限値	—	1.67×10^{-4}
	下限値	—	1.67×10^{-8}
k_{5N}	上限値	1.67×10^{-1}	1.67×10^{-1}
	下限値	1.67×10^{-4}	1.67×10^{-4}
k_{5S}	上限値	1.67×10^{-1}	1.67×10^{-1}
	下限値	1.67×10^{-4}	1.67×10^{-4}

② 解析結果と考察

表-4.4 に逆解析による透水係数の推定結果を示す。

2 ケースともに第 5 層南側の透水係数 k_{5S} は、制約条件の下限値にほぼ等しくなっているが、これは南側からの流入が著しく小さいことを反映している。

k_{5N} の推定値は、Case4-1 では 2.91×10^{-2} cm/sec、Case2 では 7.46×10^{-3} cm/sec であり、特に Case4-2 の推定値は揚水試験の逆解析による推定値と大差はない。

Case4-2 においては、第 4 層（加圧層）の透水係数 k_4 は 3.87×10^{-5} cm/sec と推定されており、揚水試験の逆解析による推定値よりやや大きい。漏水因子は、北側で $\lambda_{5N} = 74$ m、南側で $\lambda_{5S} = 11$ m であり、特に南側においては漏水の影響が著しいことを示している。また、第 3 層については $k_3 = 9.84 \times 10^{-2}$ cm/sec と推定され、漏水因子は $\lambda_3 = 195$ m となっている。

表-4.4 透水係数の推定結果 (cm/sec) と漏水因子 (m)

	Case4-1	Case4-2
k_3	—	9.84×10^{-2}
k_4	—	3.87×10^{-5}
k_{5N}	2.91×10^{-2}	7.46×10^{-3}
k_{5S}	1.68×10^{-4}	1.67×10^{-4}
λ_3	—	195
λ_{5N}	—	74
λ_{5S}	—	11

図-4.11 に水頭観測点における観測値と計算値の差を、図-4.12 に観測値に対する計算値の散布図と回帰直線をそれぞれ示す。図-4.11 より、観測点 1 以外はすべて Case4-2 の方が観測値と計算値の差が小さくなっていることがわかる。また、図-4.12 では Case4-2 の回帰直線の傾きがほぼ 1 となっていること、および決定係数（相関係数の 2 乗）は 0.96 と非常に大きいことから、観測値の再現性が優れていることがわかる。

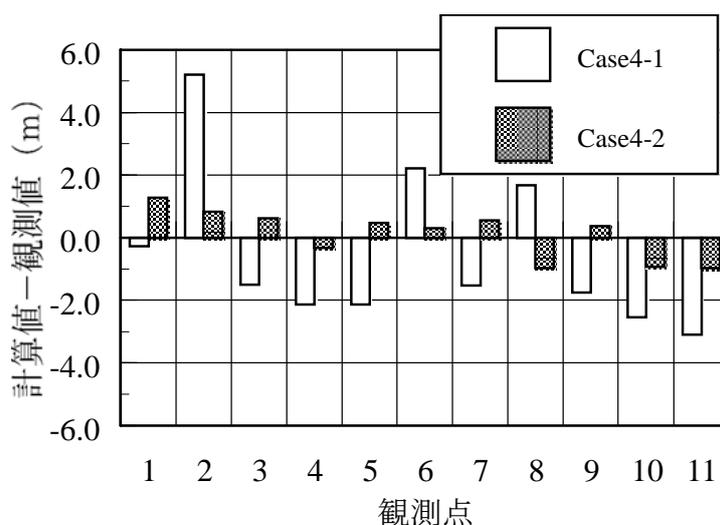


図-4.11 観測点における観測値と計算値の差

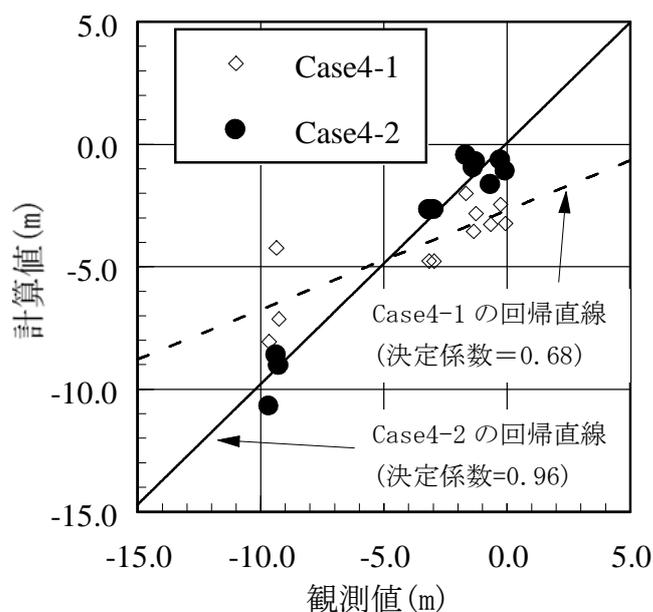


図-4.12 観測値に対する計算値の散布図と回帰直線

Case4-2の方が水頭分布の再現性が良い理由として、ひとつは推定対象のパラメータが多いためと考えられるが、それに加えて第5層の透水係数の推定値に格段の差が認められないことから判断すると、解析に漏水の影響を取り入れたことも、水頭分布の再現性の向上に大きく寄与したと考えられる。

土留め壁の影響について、水頭低下量の観測値に注目すると、表-4.1において観測点 2, 6, 8 (土留め壁の内側) の水頭低下量が、その他の観測点に比べて明らかに大きい。これは、土留め壁の外側においては、第3層からの漏水のため第5層の水頭が低下しにくいのに対して、内側では土留め壁によって第3層に外部から水が供給されず、したがって漏水量も小さくなり、その結果、第5層内側の水頭のみが大きく低下したものと考えられる。

すなわち、第3層に設けられた土留め壁が、第5層の水頭分布にまで影響を与えていることから、漏水性が裏付けられる。また、図-4.13 および図-4.14 は、 $y=450$ mの断面における水頭分布の計算値を示しているが、漏水性を考慮した Case4-2 の水頭分布の計算値には土留め壁の影響が明瞭に表れている。

これらの結果から、被圧水頭の観測値を用いた逆解析により、地盤の透水性をその平面的な不均質性も含めて推定可能であること、およびその結果を用いることによって、漏水性地盤における地下水低下工法の影響をより適切に評価することが可能であることがわかる。

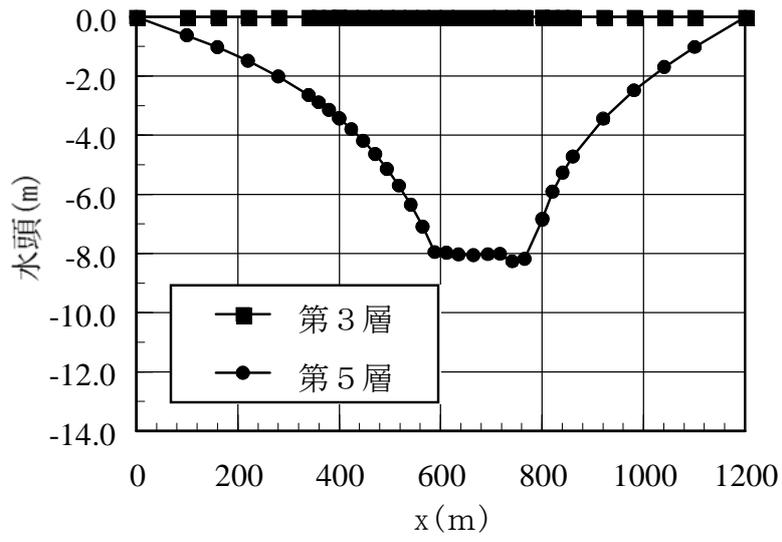


圖-4.13 水頭分布 (y=450m; Case4-1)

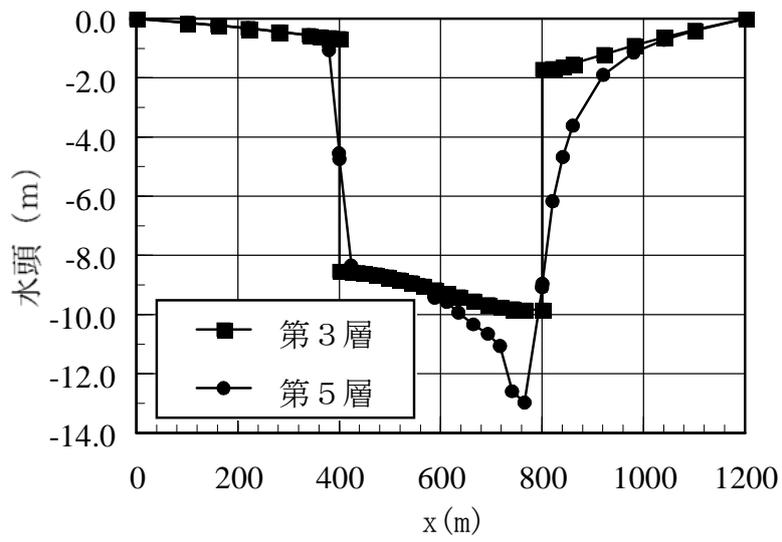


圖-4.14 水頭分布 (y=450m; Case4-2)

4. 5 地盤の透水性や地中構造物が揚水効果に及ぼす影響

前節で述べたように、地下水低下工法として掘削領域内部あるいは周辺部から揚水する場合、揚水効果を適切に評価するためには、揚水対象以外の各層の透水係数や土留め壁の影響を考慮しなければならない。とくに大規模な掘削工事において、漏水の供給源である帯水層を掘削領域として土留め壁（止水壁）で締切の場合、被圧水頭分布に与える漏水の影響は、土留め壁の内外で異なるものと考えられる。ここでは、長期にわたって揚水する場合を考え定常解析を行い、地盤の透水性および締切りの有無が揚水効果に及ぼす影響を調べる。

(1) 解析条件

解析領域は中央に $200\text{m} \times 100\text{m}$ の掘削領域を含む $800\text{m} \times 800\text{m}$ の正方形とするが、その対称性を考慮して $1/4$ の領域を対象とする（図-4.15）。揚水対象の被圧帯水層は層厚 15m であり、加圧層は層厚 5m である。上部帯水層は不圧帯水層で、初期水位は加圧層上面から 20m である。揚水井は掘削土留め壁から 3m 外側に位置し、井戸半径は 0.3m とする。揚水量は $0.5\text{m}^3/\text{min}$ とする。外部境界における境界条件は、被圧層、不圧層ともに水位・水頭は一定で 40m である。また、土留め壁は 5m の加圧層の下面まで根入れされている。（図-4.16）

解析は、各層の透水係数や土留め壁の有無が被圧水頭分布に与える影響を検討するために、透水係数をパラメータとして、表-4.5 に示す9ケース実施した。

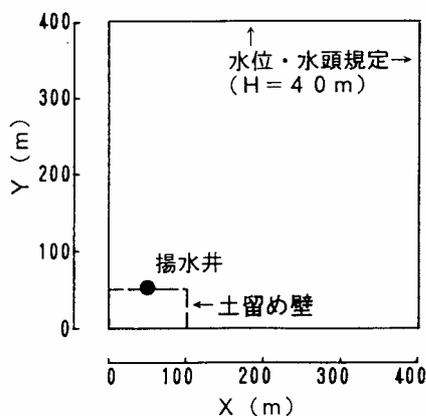


図-4.15 解析領域

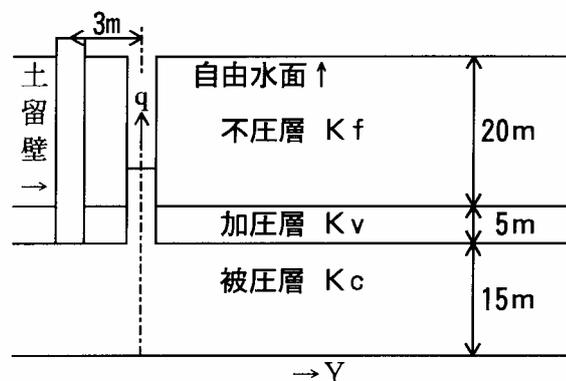


図-4.16 地盤モデル ($x=50.0\text{m}$ 断面)

表-4.5 解析ケース

	Case4-3	Case4-4		Case4-5		Case4-6		Case4-7	
		A	B	A	B	A	B	A	B
土留め壁	—	無	有	無	有	無	有	無	有
k_f (cm/sec)	—	1×10^{-2}				5×10^{-2}			
k_v (cm/sec)	0.0	1×10^{-5}		1×10^{-4}					
k_c (cm/sec)	5×10^{-3}	5×10^{-3}						1×10^{-3}	
λ_u (m)	—	274		87		194		194	
λ_c (m)	∞	194		61		61		27	
λ_u/λ_c	—	1.42		1.42		3.18		7.19	

ここで、Case4-3、Case4-4、Case4-5の各ケースでは、被圧帯水層および上部帯水層の透水係数は同じであり、加圧層の透水係数が異なる。Case4-5とCase4-6では、被圧帯水層および加圧層の透水係数が同じで、上部帯水層の透水係数が異なる。また、Case4-6とCase4-7では、加圧層および上部帯水層の透水係数が同じで、被圧帯水層の透水係数が異なる。さらに、それぞれのケースにおいて、A、Bは土留め壁の有無を表す。

(2) 解析結果と考察

各ケースの断面 $y=0\text{m}$ における被圧水頭の分布を図-4.17～図-4.20に示す。Case4-4およびCase4-5（図-4.17、図-4.18）より、加圧層の透水性が大きくなると土留め壁の有無に関わりなく水頭低下量が減少していることがわかる。

Case4-6はCase4-5に対して上部の不圧帯水層の透水性を増加させた場合、すなわち λ_c は一定で λ_u を増加させた場合である。ここでもやはり土留め壁の有無に関わりなく水頭低下量が減少している（図-4.19）。

ここで、 λ_u/λ_c は、1.42から3.18に増加しているが、 $\lambda_u/\lambda_c=3$ 以下のとき、隣接する不圧帯水層の地下水面が低下することがわかっている¹²⁾。したがって、Case4-6における水頭低下量の減少は、Case4-5と比較して不圧地下水面の低下量が減少したことによるものと思われる。

Case4-6はCase4-5に対して被圧帯水層の透水係数を1/5に減少させた場合である。この場合、揚水量は変わらないので、被圧帯水層の透水係数が低下した分、被圧水

頭も低下することが予想される。しかしながら、土留め壁の有無によって水頭低下量に大きな差が見られた。(図-4.20)。これは、土留め壁が存在しない場合は、漏水量が大きく、揚水の大部は隣接する帯水層からの漏水によって供給されるため、被圧帯水層の透水性にほとんど影響されないのに対して、土留め壁等によって掘削領域が締切られている場合は、その内部において隣接する帯水層の外部境界からの供給が遮断されているため、掘削領域の内部のみ大きな水頭低下が生じるものと考えられる。

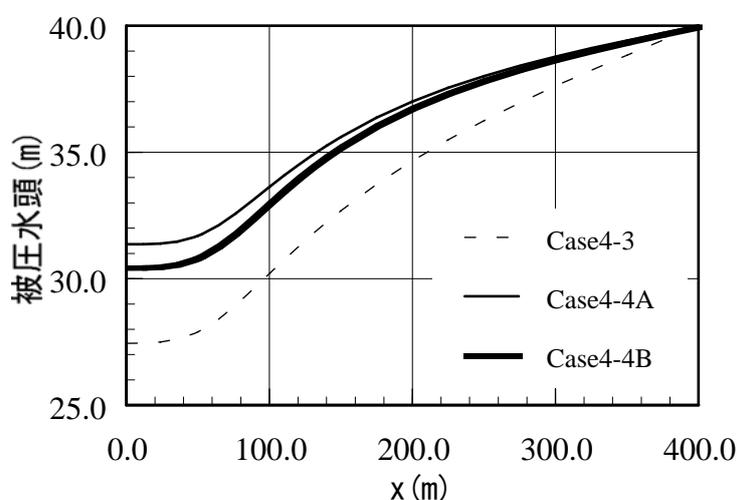


図-4.17 被圧水頭分布 (Case4-4; y=0.0m 断面)

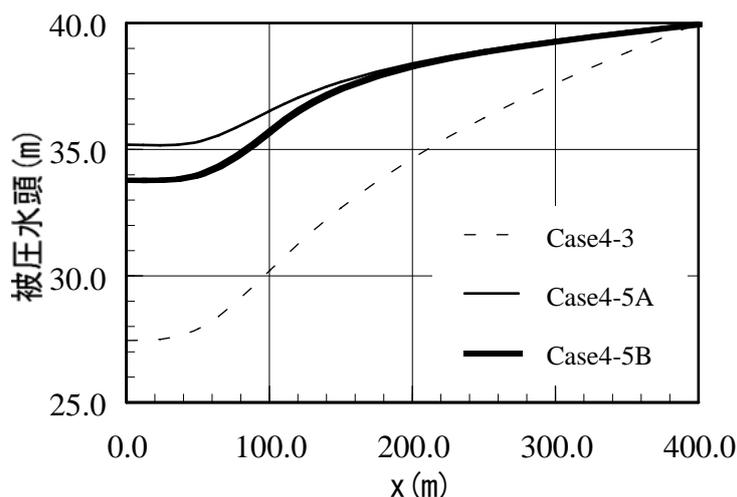


図-4.18 被圧水頭分布 (Case4-5; y=0.0m 断面)

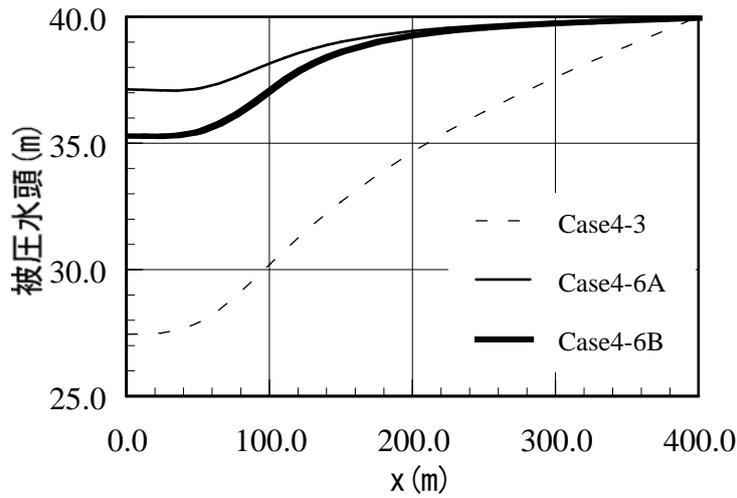


図-4.19 被圧水頭分布 (Case4-6; y=0.0m 断面)

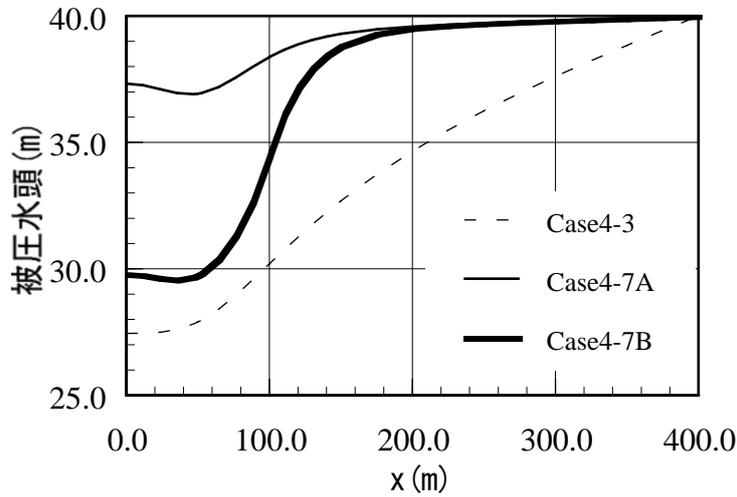


図-4.20 被圧水頭分布 (Case4-7; y=0.0m 断面)

これらの結果より,加圧層および隣接する帯水層の透水性が大きくなるにつれて,被圧帯水層の水頭低下効果が減少すること,また,漏水性が高い場合,土留め壁の有無によって水頭分布が大きく左右されることがわかる.したがって,漏水性被圧帯水層における地下水低下工法の影響評価や必要揚水量の算定の際には,揚水対象の帯水層の透水性はもとより,加圧層とそれに隣接する帯水層の透水性や,土留め壁等の地中構造物も視野に入れておくべきであると思われる.

4. 6 第4章のまとめ

大規模掘削工事における地下水低下工法の影響を適切に評価するためには、隣接する帯水層からの漏水を考慮することが重要である。本研究では、制約付きシンプレックス法による逆解析によって漏水性を判断する上で重要な加圧層を含めた各層の透水係数の推定を試みた。

また、隣接する帯水層と加圧層内の流れを考慮した平面準3次元有限要素解析により、各帯水層の透水性や地下構造物の存在が、揚水効果に及ぼす影響について検討した。これらの結果を以下にまとめる。

- 1) 比較的短時間の揚水試験から得られる水頭低下曲線にも漏水の影響は現れており、これに基づく逆解析によって加圧層の透水係数をある程度推定することは可能である。しかしながら、制約付きシンプレックス法による逆解析で帯水層パラメータを一度に推定する場合、推定値はシンプレックスの初期配置の影響を受けることがあるため、観測値の再現精度や、推定値のばらつきを十分検討することも必要である。
- 2) 被圧水頭の現場観測結果に基づく逆解析により、地盤の透水性をその平面的な不均質性も含めて推定可能である。
- 3) 逆解析による推定結果を用いることによって、漏水性地盤における地下水低下工法の影響をより適切に評価することが可能である。
- 4) 漏水性被圧帯水層における地下水低下工法の影響評価や必要揚水量の算定の際には、揚水対象の帯水層の透水性はもとより、加圧層とそれに隣接する帯水層の透水性や、土留め壁等の地中構造物も視野に入れておくべきである。

参考文献

- 1) Bredehoeft, J. D. and Pinder, G. F.: Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater system, A quasi three-dimensional model. *Water Resources Research*, Vol.6, No.3, pp.883-888, 1970.
- 2) Fujinawa, K.: Finite element analysis of groundwater flow in multiaquifer system, I. The behavior of hydrological properties in an aquitard while being pumped, *J. of Hydrology*, Vol.33, pp.59-72, 1977.
- 3) Fujinawa, K.: Finite element analysis of groundwater flow in multiaquifer system, II. A quasi three-dimensional model, *J. of Hydrology*, Vol.33, pp.349-362, 1977.
- 4) Chorley, D. W. and Frind, E. O.: An iterative quasi three-dimensional finite element model for heterogeneous multiaquifer system, *Water Resources Research*, Vol.14, No.5, pp.943-952, 1978.
- 5) 川谷健, 齋藤雅彦, 土山滋郎: 漏水性被圧帯水層の揚水管理に関する解析的研究, 建設工学研究所報告, 第 38-A 号, pp.101-109, 1996.
- 6) 清水清孝: システム最適化理論, コロナ社, pp.92-99, 1976.
- 7) 川谷健, 齋藤雅彦: 制約付きシンプレックス法による地下水流の逆解析, 土地造成工学研究施設報告, 第 7 号, pp.105-124, 1989.
- 8) Spendley, W., Hext, G. R. and Himsforth, F. R.: Sequential application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary, *Operation Technometrics*, Vol.4, No.4, 1962.
- 9) Nelder, J. A. and Mead, R.: A Simplex Method for Function Minimization, *Computer Journal*, Vol.7, No.4, 1965.
- 10) Box, M. J.: A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with other Methods, *Computer Journal*, Vol.8, No.1, 1965
- 11) 山本莊毅: 新版地下水調査法, 古今書院, pp.28-29, 1983.
- 12) Kawatani, T., Saito, M. and Tsuchiyama, J.: Numerical study on effects of leakage from phreatic aquifer on flow in confined aquifer, 27th IAHR Congress, *Groundwater*, pp.355-360, 1997.

第5章 確率論を応用した不均質地盤のモデル化

5. 1 概説

一般に、地質学的に同一と判断される地層内においても、透水係数は空間的に大きく変動することが多くの既往の調査・研究によって明らかにされている。しかしながら、現位置試験やサンプリング調査によって得られる情報は局所的あるいは平均的なものとならざるを得ず、空間的変動の全貌を把握することは現時点ではほとんど不可能である。

このため、現実に関わる解析を実施する際には、限られた調査地点において得られた調査結果から地質学的に同一と見なすことができる地層については、透水係数は一定値と仮定されることが多い。そして、その限りにおいては、いかに数理的に精緻な解析モデルを用いたとしても、十分信頼性の高い解析結果を得ることは困難である。とくに、地下水汚染問題等の地盤内の物質移動に関しては、地盤内の流速分布が重要な影響を与えるため、その挙動を把握する上で不均質性の影響を無視することはできない。

上記のような問題に対して、地盤の統計的性質や空間的な相関関係を用いて不均質地盤の空間分布モデルを構築し、これを用いて解析結果の信頼性を確率的に評価しようとする試みがなされている。また、透水係数分布の推定に空間分布モデルを応用する試みもなされている。

このような確率論的評価あるいは空間分布の推定に用いられる透水係数の空間分布モデルは、多くの実測値から得られた共分散関数やバリオグラムを近似関数で表現したものである。近似関数としては、先に挙げた指数関数、べき乗関数の他、種々のものが提案されている。

これらの近似関数の適否については、一般に実測値との適合性を基に判断されるが、その理論的背景は必ずしも明確ではないと思われる。

また、これらの空間分布モデルを用いてモデル地盤を生成する際に必要なパラメータは、平均値、ばらつきを表すパラメータ（多くの場合は分散）、および空間的な相関性を表すパラメータの3種類に大別され、通常は限られた実測値に基づいて

決定される。ここで、平均値以外のパラメータについては、実測値を直接的に用いることができない場合が多い。たとえば、分散に関しては、解析対象領域と調査範囲が一致しない場合があること、調査に用いるサンプルのサイズによって標本分散が左右されること等を考慮しなければならない。また、モデル地盤を有限要素法や差分法等の数値解析に用いる際には、サンプルサイズとメッシュサイズあるいはグリッドサイズとの違いも考慮する必要がある。また、相関性を表すパラメータについては、たとえば指数関数モデルにおける相関性を表すパラメータ（積分特性距離）は、地盤固有の値ではなく、概ね解析スケールに比例することが報告されており、調査範囲が解析対象領域より小さい場合などは、観測値をそのまま用いると相関性を過小評価する危険性がある。

本章では、透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い、これに基づく1次元および2次元の数値模擬地盤の作成方法を提案する。また、この手法により作成した模擬地盤を用いて平面2次元定常被圧地下水流の有限要素解析を実施し、地盤の不均質性が地下水流に及ぼす影響について考察する。

加えて、従来提案されている空間分布モデルのうち、比較的よく用いられる指数関数モデル、自己回帰モデルおよびべき乗モデルに加え、著者らの提案する $1/f$ 型モデルをとりあげ、これらのモデルによって生成される模擬地盤の統計的性質を検討する。そして各空間分布モデルの特徴を明らかにした上で、モデルパラメータを設定する際の問題点について考察し、モデルとしての適用性について論じる。

5. 2 ランダムモデルの問題点

同一と判断される層内における透水係数のばらつきは、ほぼ対数正規分布に従うことは、これまでに数多く報告されている^{1), 2), 3)}。最も簡単な空間分布モデルは、この性質のみに着目し、空間的な相関性を無視した一様ランダム分布モデルである。

ここでは、1次元浸透流について、上記のようなランダム性を仮定することによって生じる問題を例示する。

(1) 解析条件

図-5.1に示すような長さ L の1次元飽和浸透モデルを考える。この場合の基礎方程式は、連続の式およびダルシーの法則より式(5.1)で表され、境界条件は式(5.2)で表される。

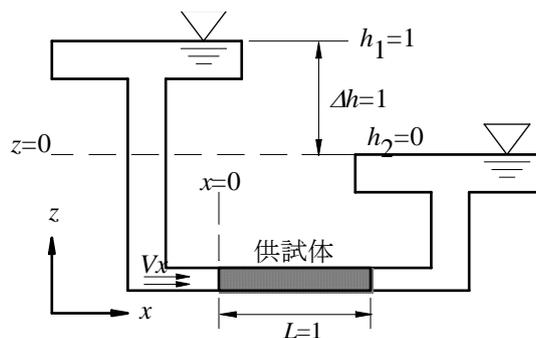


図-5.1 1次元浸透問題

$$\frac{d}{dx} \left(k_x \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (5.1)$$

$$h=h_1 \quad (\text{on } x=0), \quad h=h_2 \quad (\text{on } x=L) \quad (5.2)$$

ここに、 L, x, h, k_x は、いずれも無次元量とし、 $L=1, h_1=1, h_2=0$ とする。また、 k_x は x に対してランダムに分布するものと仮定し、その対数値は、平均値 = 0、標準偏差 = 0.5の正規分布に従うものとする。ここで、均質地盤における透水係数の対数値の標準偏差は、一般には0.2~2.0程度であることが報告されているが¹⁾、ここで用いた0.5は標準的な値と考えられる。

つぎに、 k_x の不均質性を導入するために、供試体を n 個の要素に分割し、各要素に対して k_x^i ($i=1..n$)を対数正規分布からランダムに与える。このとき、分割された各要素の体積は、Bear⁴⁾が示したREV (Representative Elementary Volume) よりも大

きいことを前提とする。

このような条件の下，3種類の分割数を用いて水頭分布を計算した。Case5-1は $n=64$ ，Case5-2は $n=512$ ，Case5-3は $n=2048$ とし，各ケースに対しては乱数系列を変えて5回実施した。

(2) 解析結果

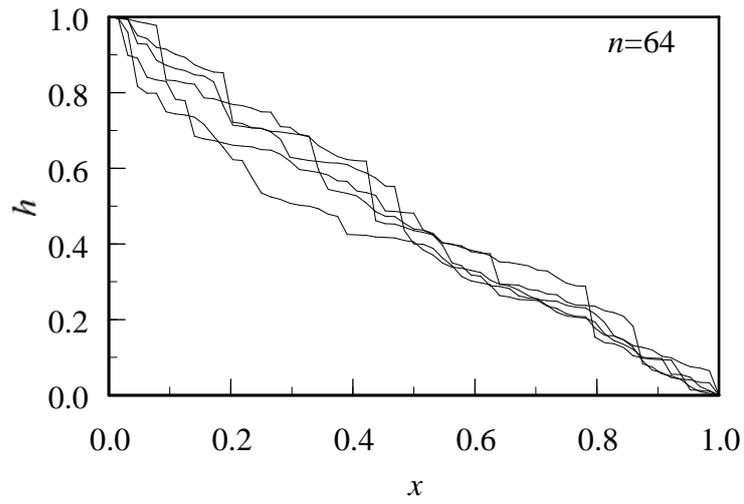
図-5.2(a)-(c)に，得られた水頭分布を示す。Case5-1($n=64$)では，使用した乱数の違いによって水頭分布が異なっているのに対し，Case5-2, Case5-3と分割数が大きくなるにつれて乱数の違いによる水頭分布の差が小さくなり，Case5-3($n=2048$)では見かけ上ほとんど差が見られず，巨視的には直線分布，すなわち完全に均質な場合とほぼ同じになっている。

これは，同じ地盤を解析の対象としていながら，解析上の要素分割数によって地盤の不均質性が地下水流動に及ぼす影響の評価は異なり，分割数を多くするほど不均質性の影響を過小評価してしまうことを示している。

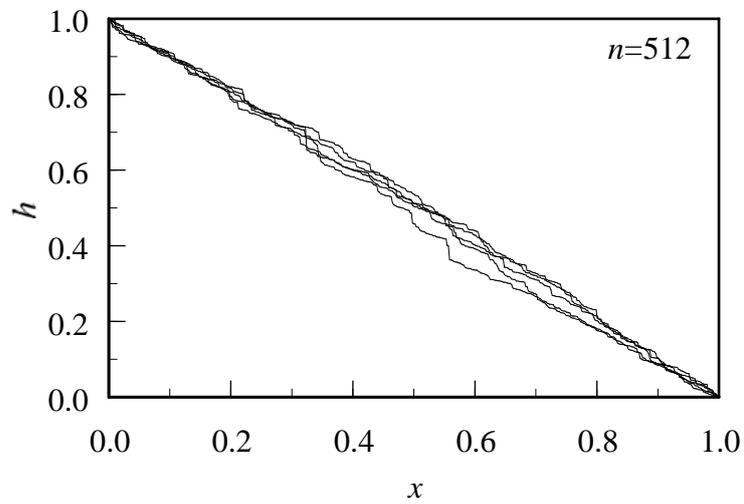
つぎに，透水係数の空間的な変動特性について検討する。一般に，空間的に不規則な変動を定量的に取り扱う場合，自己相関関数あるいはパワースペクトル密度関数が用いられる。自己相関関数は変動の性質を長さで表現したものであり，パワースペクトルは空間周波数で表現したものである。以下では変動の周期性について考察するためパワースペクトルを用いるが，両者はウィナー・ヒンチンの定理によって関係づけられ，一方が得られれば他方も計算することができる。

図-5.4より，この変動はすべての空間周波数成分をほぼ均等に含んでおり (= white noise)， L のどの部分を切り取っても等価透水係数は等しくなることがわかる。これは透水係数の空間分布をランダムに与えたためである。

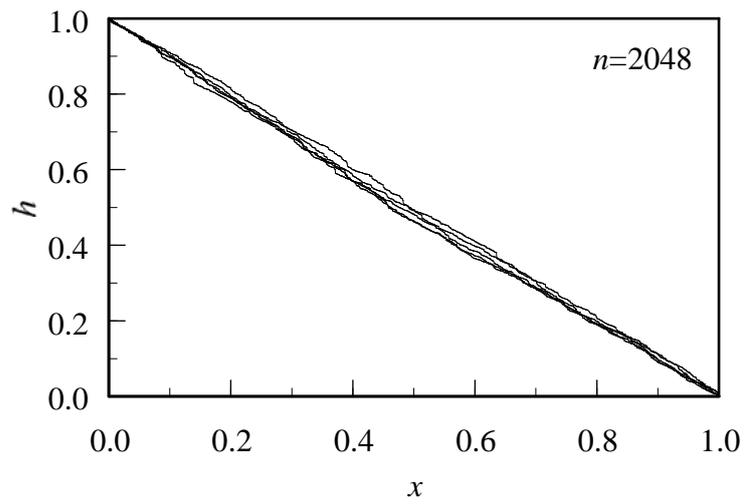
つまり，統計的性質のみに着目し，これを満たすように不均質性を導入しようとして，空間分布をランダムとするならば，その不均質性は巨視的には水頭分布に何ら影響を与えず，均質媒体と等価なものになってしまうことがわかる。



(a) Case5-1



(b) Case5-2



(c) Case5-3

図-5.2 5種類の乱数系列による水頭分布の計算結果

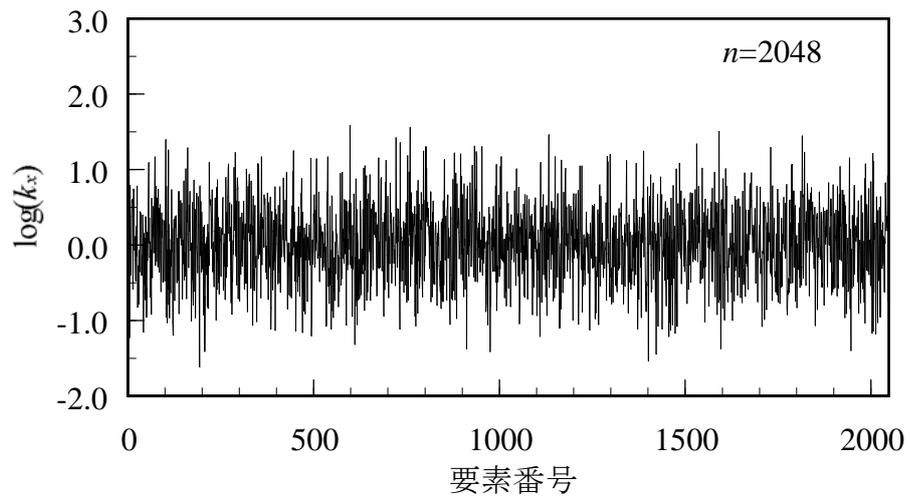


図-5.3 透水係数分布の一例 (Case5-3)

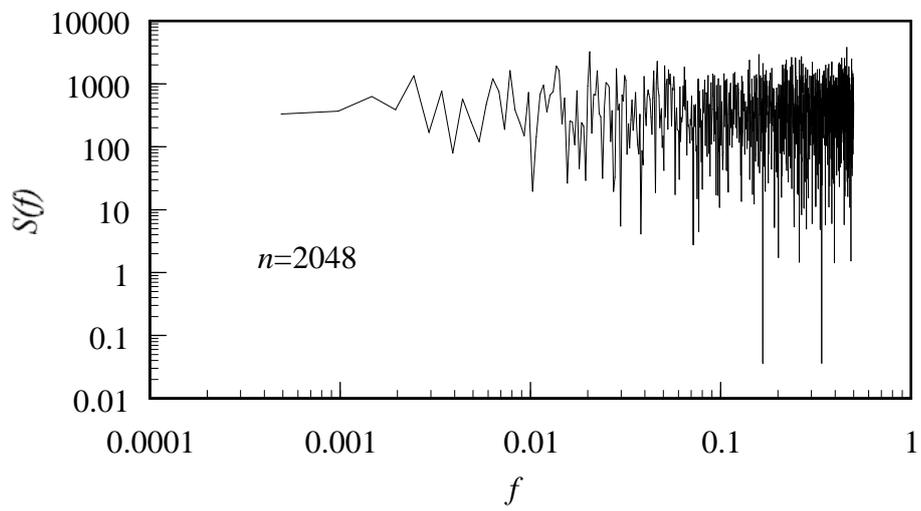


図-5.4 透水係数の変動パワースペクトル (Case5-3)

5. 3 透水係数の空間分布に関する理論的考察と数値模擬地盤の作成方法

前章で述べたように、「透水係数の空間分布はランダムである」との仮定は妥当ではない。本章では、「透水係数の空間分布はランダムではない」ことを前提に、1次元および2次元の不均質浸透場における透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い、これに基づく数値模擬地盤の作成方法を提案する。

(1) 1次元の場合

ここでも、図-5.1に示した1次元飽和浸透モデルを取り上げる。

まず、供試体の全長 L についての等価透水係数を k^0 とし、 $k^0 = 1$ とする。つぎに、図-5.5に示すように供試体を中央で $L/2$ に分割する。これらの $L/2$ に分割された供試体の等価透水係数をそれぞれ k_L^1 および k_R^1 とする。

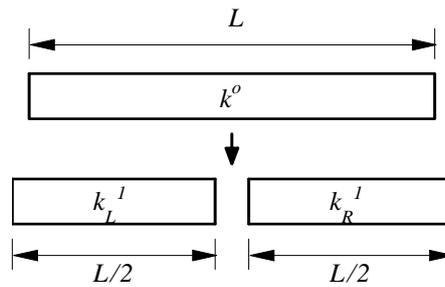


図-5.5 供試体の分割

もし、この供試体が完全に均質であれば、次式が成り立つ。

$$k^0 = k_L^1 = k_R^1 = 1 \quad (5.3)$$

一方、供試体が不均質であれば、上式が成り立つ保証は無く、一般に、

$$k_L^1 \geq k^0 = 1 \geq k_R^1 \quad (5.4)$$

または、

$$k_R^1 \geq k^0 = 1 \geq k_L^1 \quad (5.5)$$

となる。

また、これらの関係は、等価透水係数の算定式より次式となる。

$$k^0 = \frac{2k_L^1 k_R^1}{k_L^1 + k_R^1} = 1 \quad (5.6)$$

ここで、透水係数の空間的な変動量を表す無次元確率変数 α を導入し、

$$k_L^1 = \alpha k^0 = \alpha \quad (5.7)$$

とすると、式(5.6) より、

$$k_R^1 = \frac{\alpha k^0}{2\alpha - 1} = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \quad (5.8)$$

となる。

式(5.8), および, $k_L^1 > 0$, $k_R^1 > 0$ より, α のとりうる範囲は,

$$\alpha > 0.5 \quad (5.9)$$

であることがわかる。

さらに,

$$k_m = \max(k_L^1, k_R^1), \quad k_n = \min(k_L^1, k_R^1) \quad (5.10)$$

および

$$k_m = \alpha_m k^0, \quad k_n = \alpha_n k^0 \quad (5.11)$$

とすると,

$$\alpha_m \geq 1 \quad (5.12)$$

$$0.5 < \alpha_n = \frac{\alpha_m}{2\alpha_m - 1} < 1 \quad (5.13)$$

となり, α_m を与えることにより α_n も同時に定まる。

ここで, α_m の統計的性質は現在のところ不明であるが, 式(5.14)に示す平均値1, 標準偏差 σ_{α_m} の片側正規分布, あるいは式(5.15)に示す平均値 $1 + (1/\theta_{\alpha_m})$ の指数分布等が考えられる。

$$P(\alpha_m) = \frac{2}{\sigma_{\alpha_m} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\alpha_m - 1)^2}{2\sigma_{\alpha_m}^2}\right\} \quad (\alpha_m \geq 1) \quad (5.14)$$

$$P(\alpha_m) = \theta_{\alpha_m} \exp\{-\theta_{\alpha_m}(\alpha_m - 1)\} \quad (\alpha_m \geq 1) \quad (5.15)$$

また, 式(5.10)において, $k_m = k_L^1$ となる確率は0.5とする。

以上のような操作を N 回繰り返すことにより, 供試体は 2^N 個の要素に分割され, 各要素ごとに透水係数が与えられる。

(2) 2次元の場合

図-5.6に示すように, 等価透水係数が,

$$K_x^0 = K_y^0 = K^0 = 1 \quad (5.16)$$

である等方性の矩形領域を, 4個の要素に分割し, それぞれの要素内の等価透水係

数を $K_1^1..K_4^1$ とする. また, 隣接する 2 つの要素からなる領域の等価透水係数を $K_A^1..K_D^1$ とする.

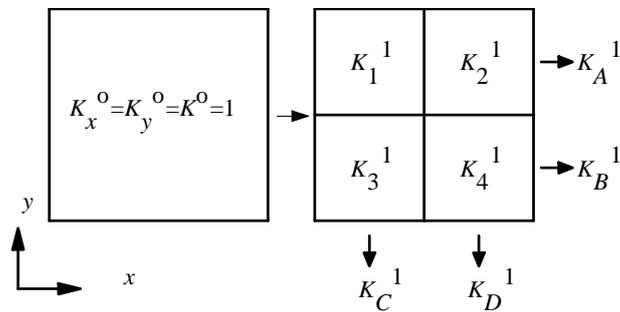


図-5.6 領域の分割 (等方性)

このとき, $K_1^1..K_4^1$ と, $K_A^1..K_D^1$ の関係は次式となる.

$$K_A^1 = \frac{2K_1^1 K_2^1}{K_1^1 + K_2^1} \quad (5.17)$$

$$K_B^1 = \frac{2K_3^1 K_4^1}{K_3^1 + K_4^1} \quad (5.18)$$

$$K_C^1 = \frac{2K_1^1 K_3^1}{K_1^1 + K_3^1} \quad (5.19)$$

$$K_D^1 = \frac{2K_2^1 K_4^1}{K_2^1 + K_4^1} \quad (5.20)$$

また, K_x^0, K_y^0 と, $K_A^1..K_D^1$ の関係は, 以下のように表される.

$$K_x^0 = \frac{K_A^1 + K_B^1}{2} = K^0 = 1 \quad (5.21)$$

$$K_y^0 = \frac{K_C^1 + K_D^1}{2} = K^0 = 1 \quad (5.22)$$

さらに, 式(5.16)~式(5.22) の関係から, 以下の恒等式が導かれる.

$$(K_1^1 - K_4^1)(K_3^1 - K_2^1) = 0 \quad (5.23)$$

すなわち,

$$K_1^1 = K_4^1 \quad \text{or} \quad K_2^1 = K_3^1 \quad (5.24)$$

これは, 式(5.16)が成立するための必要十分条件である.

一方, 地盤が不均質であることを前提とするならば, 必ずしも式(5.24)が満たされる保証は無い. したがって, 地盤が不均質であるならば, 式(5.16)は成り立たない.

そこで, あらためて図-5.7に示すように, x, y方向の等価透水係数が,

$$K_x^0 = \Phi, \quad K_y^0 = \Psi \quad (5.25)$$

である異方性の矩形領域を考える。

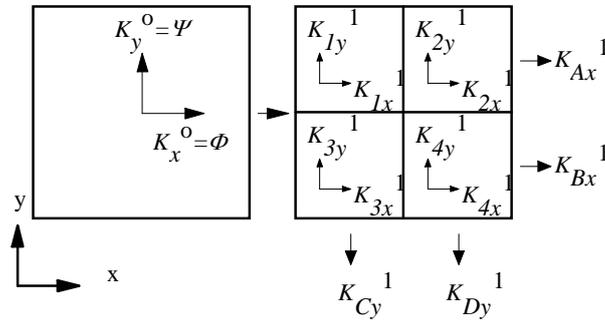


図-5.7 領域の分割 (異方性)

この領域を4個の要素に分割し、それぞれの x, y 方向の等価透水係数を $K_{1x}^1 \dots K_{4x}^1, K_{1y}^1 \dots K_{4y}^1$ とする。また、隣接する2つの要素からなる領域の等価透水係数を $K_{Ax}^1, K_{Bx}^1, K_{Cy}^1, K_{Dy}^1$ とする。

まず、 x 方向について考えると、 $K_{1x}^1 \dots K_{4x}^1$ と、 K_{Ax}^1, K_{Bx}^1 の関係は、次式となる。

$$K_{Ax}^1 = \frac{2K_{1x}^1 K_{2x}^1}{K_{1x}^1 + K_{2x}^1} \quad (5.26)$$

$$K_{Bx}^1 = \frac{2K_{3x}^1 K_{4x}^1}{K_{3x}^1 + K_{4x}^1} \quad (5.27)$$

また、 K_{Ax}^1, K_{Bx}^1 と、 K_x^0 の関係は、次式となる。

$$K_x^0 = \frac{K_{Ax}^1 + K_{Bx}^1}{2} = \Phi \quad (5.28)$$

ここで、1次元の場合と同様に、不均質性を表す確率変数 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ を導入して、

$$K_{1x}^1 = \alpha_x \Phi, \quad K_{4x}^1 = \beta_x \Phi \quad (5.29)$$

$$K_{Ax}^1 = \gamma_x \Phi, \quad K_{Bx}^1 = (2 - \gamma_x) \Phi \quad (5.30)$$

とすると、 K_{2x}^1, K_{3x}^1 は、式(5.26)、式(5.27)、式(5.29)および式(5.30)より、

$$K_{2x}^1 = \frac{\alpha_x \gamma_x}{2\alpha_x - \gamma_x} \Phi \quad (5.31)$$

$$K_{3x}^1 = \frac{(2 - \gamma_x) \beta_x}{2\beta_x + \gamma_x - 2} \Phi \quad (5.32)$$

このとき、 γ_x の制約条件は、 $K_{Ax}^1 > 0, K_{Bx}^1 > 0$ および式(5.30)より、

$$0 < \gamma_x < 2 \quad (5.33)$$

また、 α_x, β_x の制約条件は、 $K_{2x}>0, K_{3x}>0$, 式(5.31)および式(5.32)より、次式となる。

$$\alpha_x > \frac{\gamma_x}{2}, \beta_x > \frac{2-\gamma_x}{2} \quad (5.34)$$

ここで、

$$\alpha'_x = \frac{\alpha_x}{\gamma_x}, \beta'_x = \frac{\beta_x}{2-\gamma_x}, \gamma'_x = \frac{1}{\gamma_x} \quad (5.35)$$

とおくと、 α_x, β_x , および γ_x が、それぞれ確率変数であることから、 α'_x, β'_x , および γ'_x も確率変数となる。

このとき、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ の制約条件は、式(5.33), 式(5.34), および式(5.35)より

$$\alpha'_x > 0.5, \beta'_x > 0.5, \gamma'_x > 0.5 \quad (5.36)$$

となる。

さらに、1次元の場合と同様に、

$$\alpha'_{xm} \geq 1, \beta'_{xm} \geq 1, \gamma'_{xm} \geq 1 \quad (5.37)$$

$$0.5 < \alpha'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \beta'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \gamma'_{xn} < 1 \quad (5.38)$$

とすると、 α'_x, β'_x および γ'_x のとりうる値は、

$$\alpha'_x = \alpha'_{xm} \quad \text{or} \quad \alpha'_x = \alpha'_{xn} = \frac{\alpha'_{xm}}{2\alpha'_{xm}-1} \quad (5.39)$$

$$\beta'_x = \beta'_{xm} \quad \text{or} \quad \beta'_x = \beta'_{xn} = \frac{\beta'_{xm}}{2\beta'_{xm}-1} \quad (5.40)$$

$$\gamma'_x = \gamma'_{xm} \quad \text{or} \quad \gamma'_x = \gamma'_{xn} = \frac{\gamma'_{xm}}{2\gamma'_{xm}-1} \quad (5.41)$$

となる。このようにして、式(5.37)を満たす $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ から式(5.39)～式(5.41)により $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ が与えられると、式(5.35)より $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ が得られ、さらに式(5.29), 式(5.31), および式(5.32)より、 $K_{1x}^{-1}..K_{4x}^{-1}$ が得られる。ここで、 $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ の確率密度関数は、1次元の場合と同様に、式(5.42)に示す平均値=1, 標準偏差= $\sigma_{\chi_m}(\chi; \alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x)$ の片側正規分布, あるいは式(5.43)の指数分布と仮定する。

$$p(\chi_m) = \frac{2}{\sigma_{\chi_m} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\chi_m-1)^2}{2\sigma_{\chi_m}^2}\right\} \quad (\chi_m \geq 1) \quad (5.42)$$

$$p(\chi_m) = \theta_{\chi_m} \exp\{-\theta_{\chi_m}(\chi_m-1)\} \quad (\chi_m \geq 1) \quad (5.43)$$

また、式(5.39)～式(5.41)において $\chi = \chi_m$ となる確率は、すべて0.5とする。以上

の操作を N 回繰り返せば、領域は 4^N 個の要素に分割され、 x 方向の透水係数の空間分布が決定される。

つぎに、 y 方向について考える。既に述べたように、広域的には異方性を有する可能性があるが、小領域に分割された各要素内において、 y 方向の透水性が、 x 方向の透水性と著しく異なる可能性は小さい。したがって、分割後の各要素内の y 方向の透水係数は、 x 方向の透水係数と等しいと仮定して、次のように定める。

$$K_y^N = K_x^N \quad (5.44)$$

5. 4 模擬地盤の性質

(1) 1次元の場合

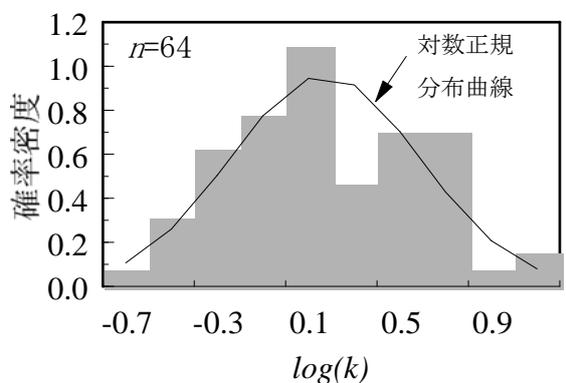
前節にて述べた方法により模擬地盤を作成し、5. 2節で取り上げた1次元浸透モデルを再度解析する。

模擬地盤の作成の際に必要なパラメータは、式(5.14)を仮定すると、確率変数 α_m の平均値と標準偏差である。ここでは、平均値1、標準偏差 $\sigma_{\alpha m} = 0.5$ とした。この標準偏差 $\sigma_{\alpha m}$ は、5. 3節で述べたように、隣接する要素間のばらつきを表すものであり、5. 2節で用いた k_x の対数値の標準偏差とは物理的意味が異なる。たとえば、 $\alpha_m = 1.5$ の場合、隣接する要素間の透水係数の比は $k_n/k_m = 1/2$ となる。また、5. 2節と同様に、3種類の分割数を用いてその結果を比較する(Case5-4~Case5-6)。各ケースの分割数は、Case5-4; $n=64$ ($N=6$)、Case5-5; $n=512$ ($N=9$)、Case5-6; $n=2048$ ($N=11$)であり、それぞれ乱数系列を変えて5回実施した。

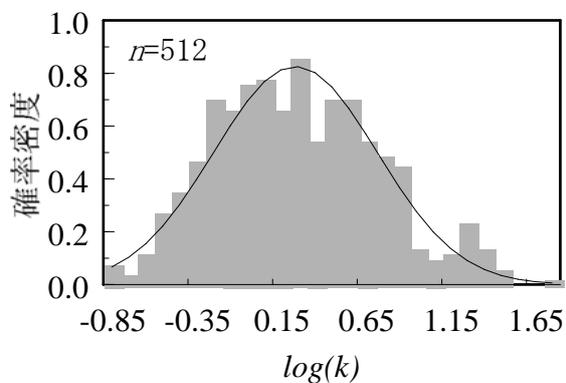
図-5.8に、各ケースにおける透水係数の頻度分布の一例を示す(図中において、透水係数は対数値、頻度は確率密度に換算済)。

模擬地盤の作成にあたって、透水係数の頻度分布に関する情報は、一切与えていないにもかかわらず、いずれのケースにおいても、ほぼ対数正規分布に従っていることがわかる。これは以下のように説明することができる。

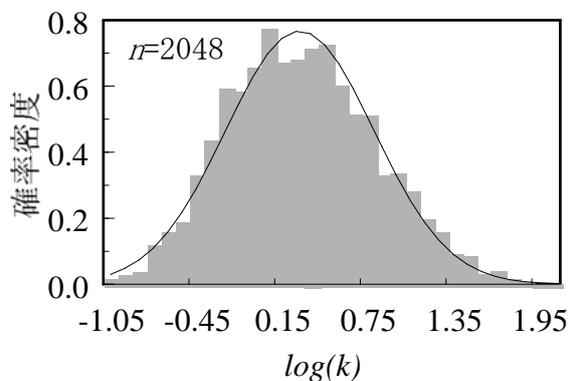
領域を N 回分割する場合、要素 i の透水係数 k_i^N は、各分割スケールにおける確率



(a) Case5-4



(b) Case5-5



(c) Case5-6

図-5.8 透水係数の頻度分布の一例

変数 $\alpha_{I(j)}^j$ ($j = 1..N, 1 \leq I(j) \leq 2^j$; $I(j)$ は要素 i が j 回目の分割時に属していた要素番号)の積として次式で表すことができる.

$$k_i^N = k^0 \cdot \alpha_{I(1)}^1 \cdot \alpha_{I(2)}^2 \cdot \dots \cdot \alpha_i^N \quad (5.45)$$

式(5.45)の両辺の対数をとると,

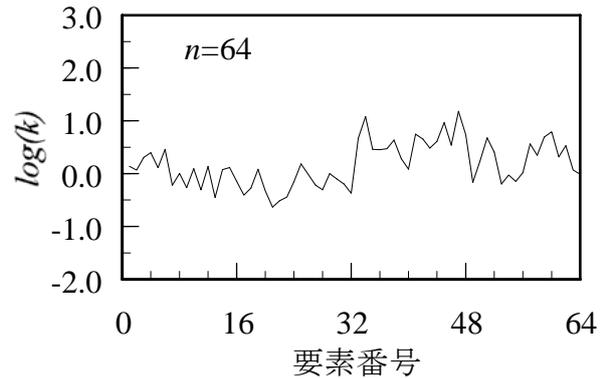
$$\log k_i^N = \log k^0 + \log \alpha_{I(1)}^1 + \log \alpha_{I(2)}^2 + \dots + \log \alpha_i^N \quad (5.46)$$

ここで確率変数 $\alpha_{I(j)}^j$ が独立で同一の分布に従うならば中心極限定理により $\log k_i^N$ は正規分布となる. したがって k_i^N は対数正規分布となる.

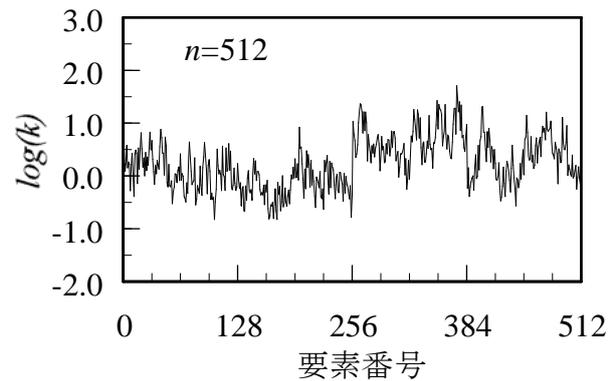
つまり, 3章で述べた方法により作成された模擬地盤の透水係数の確率分布は, 対数正規分布で近似し得ることを示しており, これは自然地盤に関する従来の知見と合致している.

図-5.9は, 各ケースにおける透水係数(対数値)の空間分布の一例, 図-5.10は, これらの変動のパワースペクトルである.

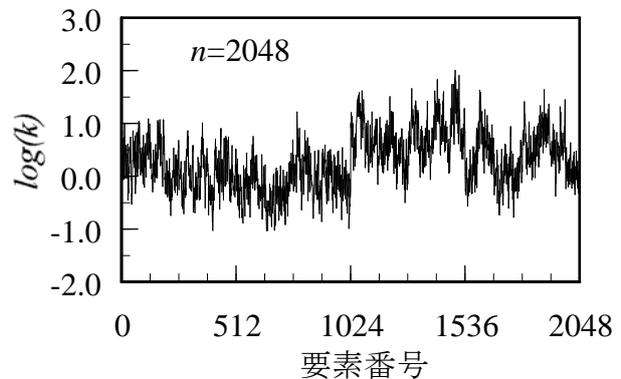
図-5.10より, この地盤の透水係数の空間変動は, 概ね $1/f$ 型スペクトル (= pink noise) となっている. $1/f$ 型スペクトルは, 自然現象に限らず, 様々な分野で観測されているが⁵⁾, 特に地盤工学の分野では, 脇田ら⁶⁾が不同沈下の現場観測例からそのスペクトルが $1/f^\beta$ 型であること, すなわちフラクタル的性質を有することを明らかにしている. このことは, 自然地盤が空間的に自己相似性を有することを示唆するものであり, 透水係数の空間分布もフ



(a) Case5-4



(b) Case5-5



(c) Case5-6

図-5.9 透水係数分布の一例

ラクタル的であることが推察される。

図-5.11に、水頭分布の計算結果を示す。ここで太線で表したものは、図-5.9(a)～(c)に示した透水係数分布により得られた水頭分布である。

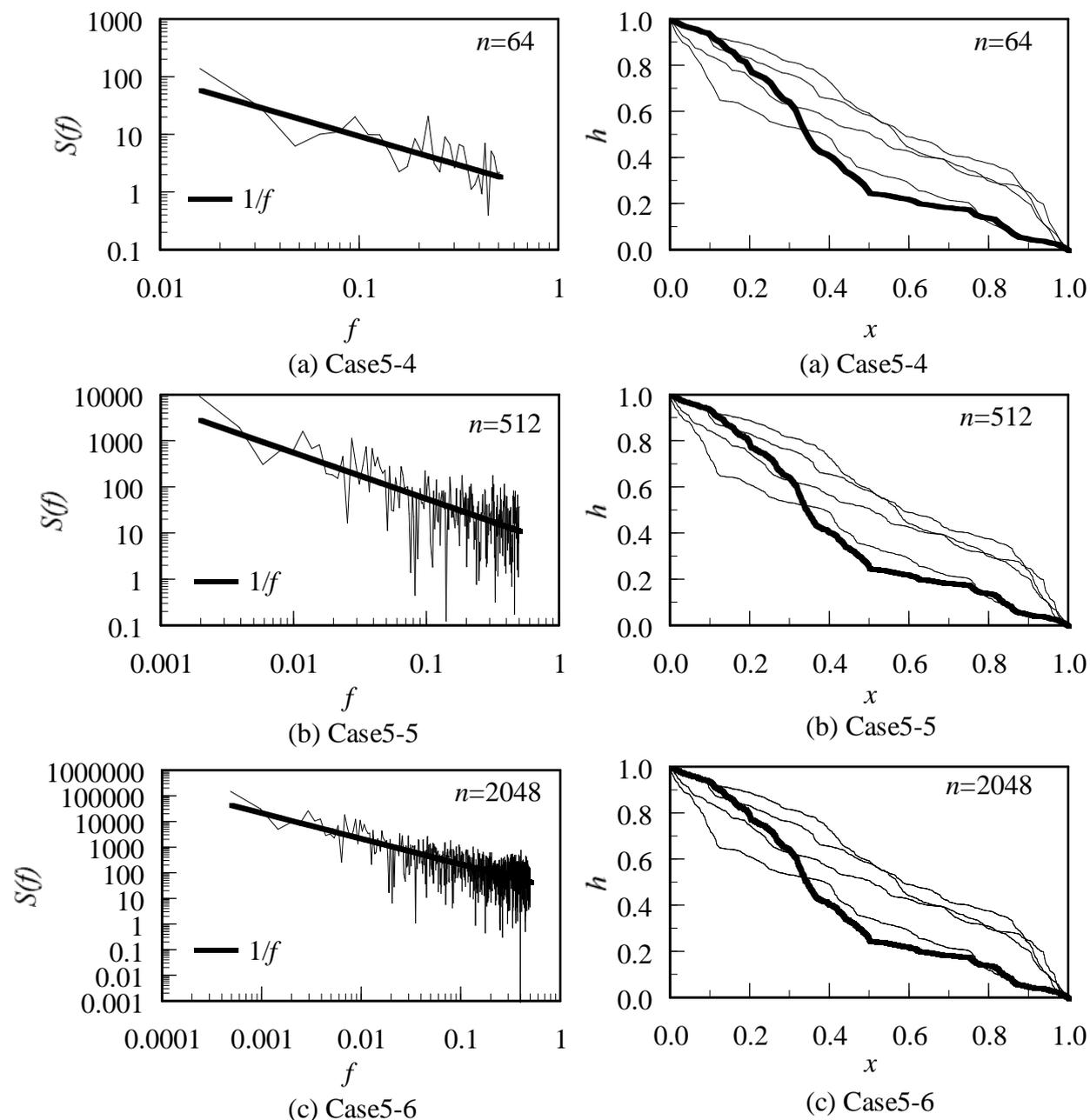


図-5.10 透水係数の変動パワー
スペクトルの一例

図-5.11 5種類の乱数系列による
水頭分布の計算結果

図-5.12は、これら太線で表した水頭分布の、 $x=0$ 近傍の拡大図である。微視的には、分割数が大きいほど、細かい凹凸があらわれる。これより、不均質性を有する地盤内の地下水面は、なめらかな曲線ではなく、やはりフラクタル曲線と考えることができる。

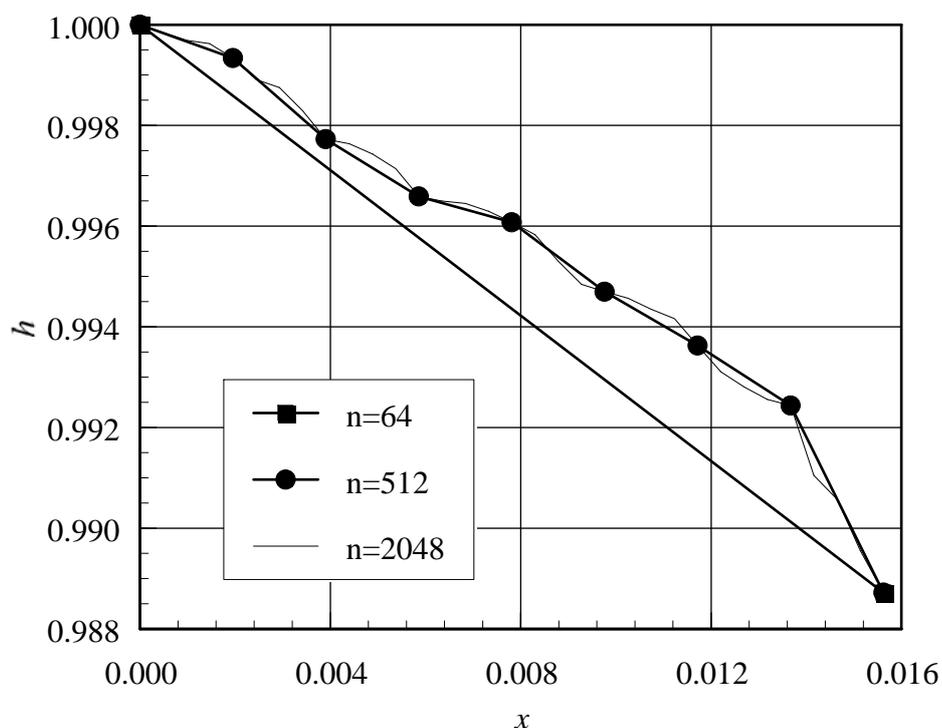


図-5.12 $x=0$ 近傍の水頭分布

一方、巨視的には各ケースによる水頭分布の差異は見られない。すなわち、2章で示した解析例のように分割数によって水頭分布の変動幅が大き左右されることなく、分割数の差は単に解像度の差として現れるのみである。

したがって、水頭分布の概形を知る上では分割数をそれほど多くする必要はないものと思われる。また、何れのケースにおいても使用する乱数によって水頭分布は、大きく異なっている。

このことは、同じような統計的性質を持つ地盤であっても、透水係数の空間的なゆらぎのため、一定の範囲内で様々な水頭分布が生じる可能性があり、確率論的な取扱いが必要と考えられる。

(2) 2次元の場合

前節にて述べた方法により、2次元の模擬地盤を作成する。このとき、必要となるパラメータは、式(5.42)を仮定すると、確率変数 χ_m ($\chi: \alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$)の平均値と標準偏差である。ここでは、平均値はすべて1とし、標準偏差 σ_{χ_m} を変化させて表-5.1に示す3ケースの模擬地盤を作成した。

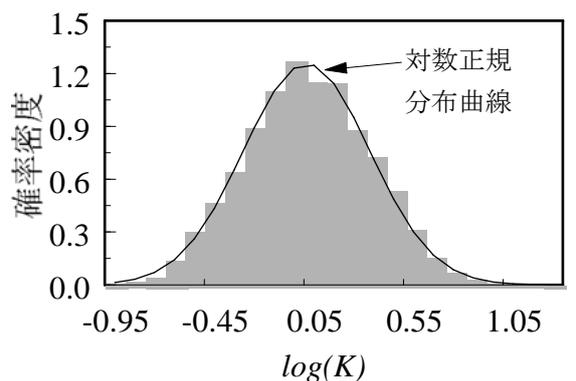
表-5.1 各ケースの標準偏差 σ_{χ_m}

	Case5-7	Case5-8	Case5-9
$\sigma_{\alpha'_{xm}}, \sigma_{\beta'_{xm}}$	0.3	0.6	0.3
$\sigma_{\gamma'_{xm}}$	0.3	0.3	0.6

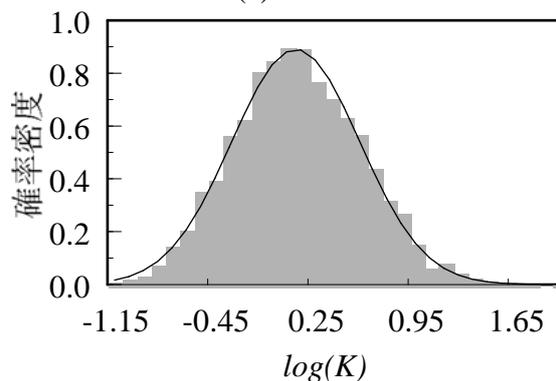
これらの標準偏差が意味するものは、 α, β に関しては要素間のばらつきを規定するのに対して、 γ に関しては方向間のばらつきを規定するものである。たとえば、 γ'_x の標準偏差は、 K_x のy軸方向間のばらつきを規定する。また、分割数は、 $n=4096$ ($N=6$)とし、乱数系列は各ケース共通で1回ずつ発生させた。最初の分割時に用いるx方向の等価透水係数は、 $K_x^0 = \Phi = 1$ (無次元)とした。

図-5.13に、透水係数 $K_x^N (=K_y^N)$ の頻度分布を示す(図中において、透水係数は対数値、頻度は確率密度に換算済)。1次元の場合と同様に、各ケースの頻度分布は対数正規分布に従っていることがわかる。

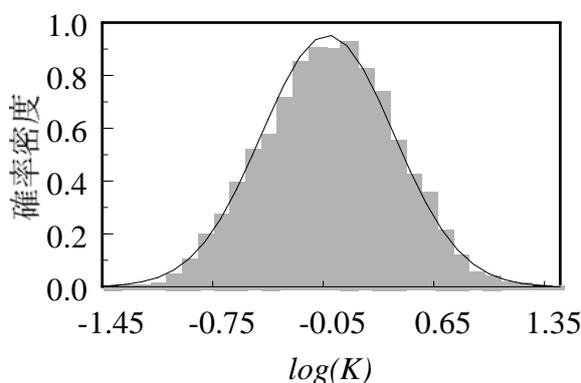
図-5.14は、x方向の5断面における K_x^N の変動のパワースペクトルである。これ



(a) Case5-7



(b) Case5-8



(c) Case5-9

図-5.13 透水係数の頻度分布

も1次元の場合と同様、いずれのケースにおいても、ほぼ $1/f$ 型となっている。

図-5.15 は、 K_x^N (対数值) の平面分布である。また、表-5.2 に、分割後の各ケースにおける等価透水係数 Φ 、 Ψ および両者の比 Ψ/Φ を示す。

Case5-8では、Case5-7と比較して、 y 方向の透水性が増しているのに対し、Case5-9では、両方向共に減少、特に y 方向の減少幅が大きい。つまり、 $\sigma_{\alpha'xm}$ および $\sigma_{\gamma'xm}$ の値によって、対象領域全体の透水性が様々に変化することがわかる。

これらの結果から、2次元浸透場において、透水係数の不均質性を考える場合、その空間分布によって広域的な透水性が左右されることも考慮しておく必要があるものと考えられる。

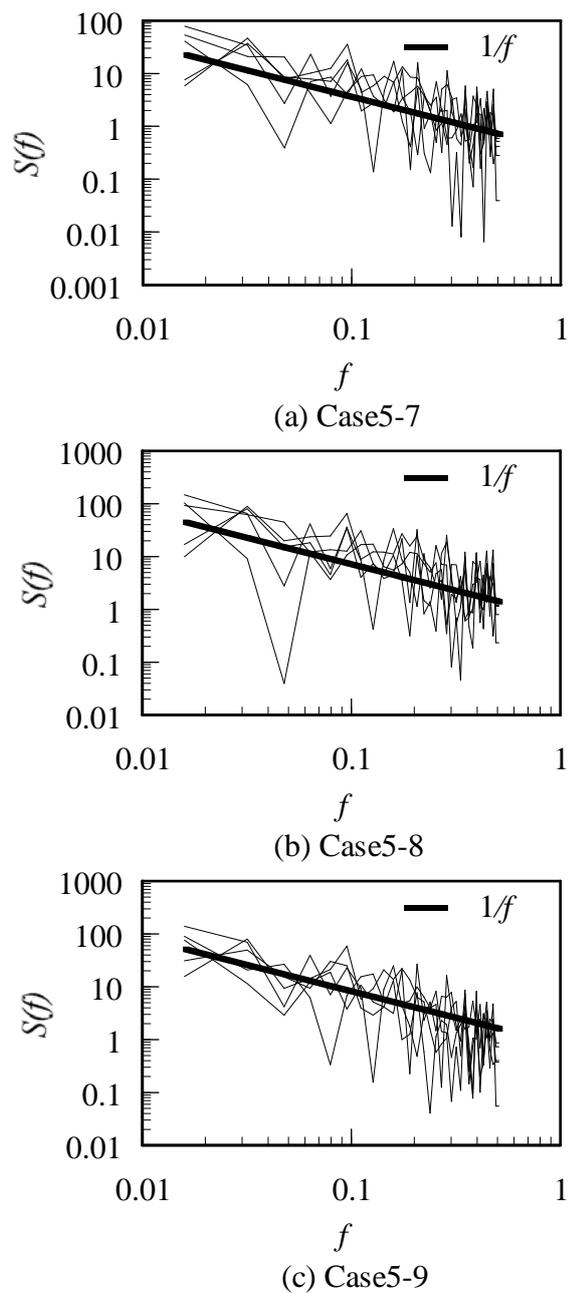


図-5.14 透水係数の変動パワースペクトル (x 方向 5 断面)

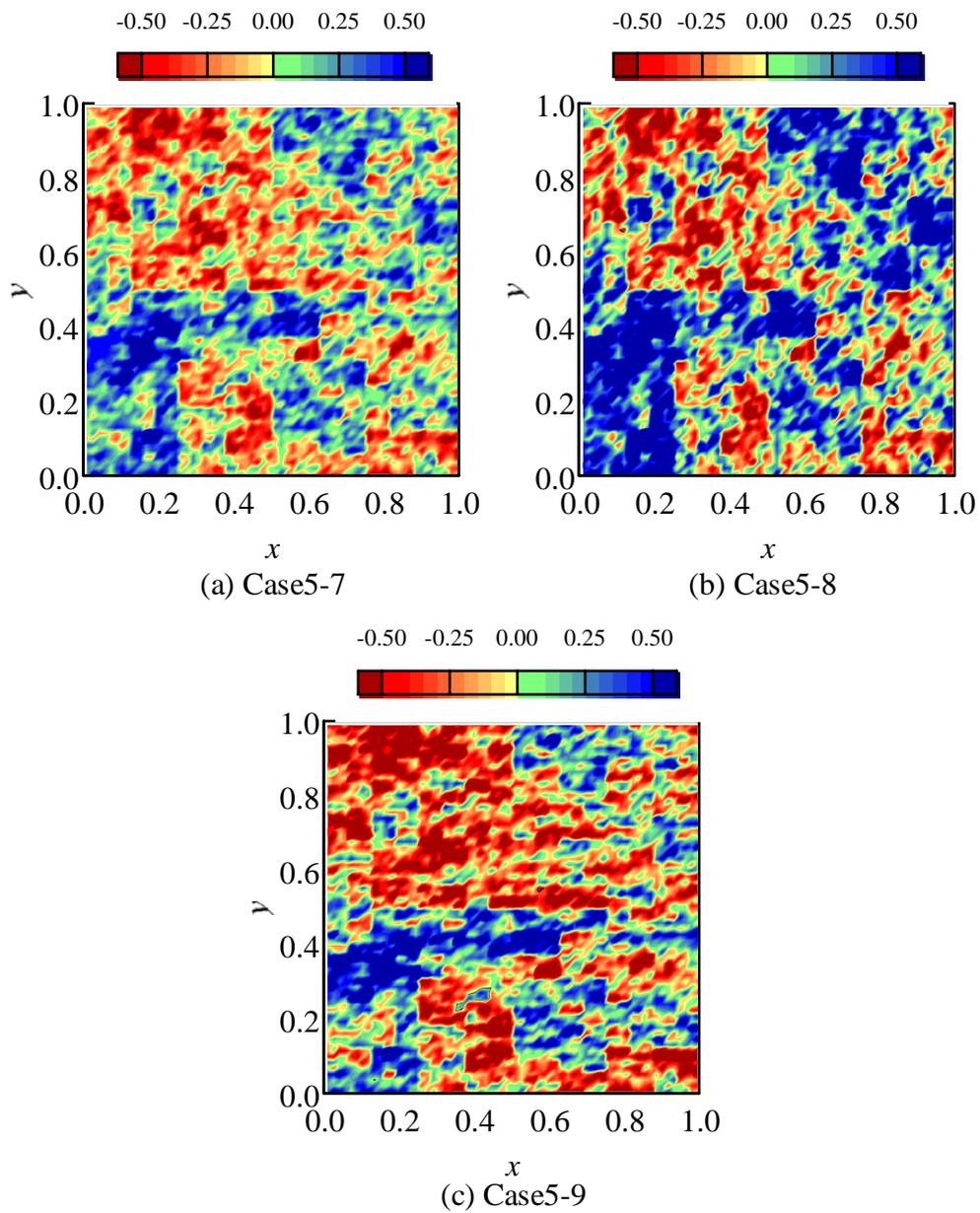


図-5.15 透水係数の対数値の平面分布

表-5.2 分割後の等価透水係数 Φ , Ψ

	Case5-7	Case5-8	Case5-9
Φ (分割後)	0.842	0.844	0.629
Ψ (分割後)	0.823	0.870	0.559
Φ / Ψ	0.977	1.031	0.889

5. 5 平面 2 次元定常被圧地下水流の解析

5. 3 節で述べた方法を用いて平面 2 次元の模擬地盤を作成し、定常被圧地下水流の有限要素解析を行う。

5. 4 節で、すでに 1 次元問題の解析例を示し、不均質場においては水頭分布は一意的に定まらないこと、および水頭分布の概形を知る上では、多くの分割を必要としないことを述べた。しかし、この場合連続条件より、流速分布は、すべての点で等しくなってしまう。

一方 2 次元の場合、透水係数の空間的変動による影響は、水頭分布のみならず流速分布にも大きく現れるものと考えられる。

本節では、2 次元場における透水係数と流速の空間分布の関係を重点的に検討する。

(1) 基礎方程式と有限要素定式化

平面 2 次元被圧帯水層内における定常地下水流の基礎方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(BK_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(BK_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.47)$$

ここに、 h は水頭、 B は帯水層厚、 K_x 、 K_y はそれぞれ x 方向、 y 方向の透水係数である。

境界条件は、水頭規定の境界で、

$$h = h_B \quad (5.48)$$

流量規定の境界で、

$$-\left(BK_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + BK_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) = Q \quad (5.49)$$

ここに、 h_B は既知の水頭値、 Q は外部境界の単位長さあたりの流量、 n_x と n_y は境界にたてた外向法線ベクトルの方向余弦である。

式(5.47)に Galerkin 法を適用して離散化すると、

$$[\mathbf{A}] \{ \mathbf{h} \} = \{ \mathbf{Q} \} \quad (5.50)$$

ここに、

$$A_{nm} = \sum_e \int_{R_e} \left(BK_x \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + BK_y \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dR_e \quad (5.51)$$

$$Q_n = -\sum_e \int_{\Gamma_e} Q N_n d\Gamma_e \quad (5.52)$$

であり， N_n は補間関数， R_e と Γ_e はそれぞれ要素 e の領域と境界を表す．

(2) 解析条件

解析領域は，図-5.16に示すように，1辺が640mの正方形領域である．帯水層厚は，全領域にわたって一定であり， $B=10\text{m}$ である．また，最初の分割時に与える全領域にわたる等価透水係数は， $K_x^0 = \Phi = 10^{-2}\text{cm/sec}$ である．

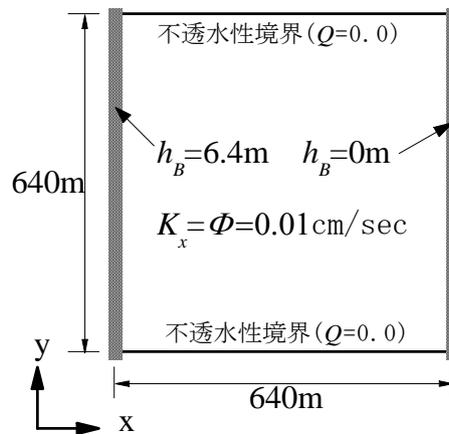


図-5.16 解析領域

境界条件は， $x=0\text{m}$ で $h_B=6.4\text{m}$ ， $x=640\text{m}$ で $h_B=0\text{m}$ であり， $y=0\text{m}$ および $y=640\text{m}$ における境界は不透水性である．有限要素解析における要素分割は4096要素（ $10\text{m} \times 10\text{m}$ の正方形要素），節点数は4225点とした．

また，模擬地盤作成時の α'_{xm} ， β'_{xm} ， γ'_{xm} の確率密度関数は式(5.42)を仮定し，ばらつきを規定する標準偏差 $\sigma_{\chi m}(\chi; \alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x)$ は， $\sigma_{\chi m} = 0.3$ とした．

解析は，領域の分割数（有限要素法における要素数ではなく，3章で示した N に相当）が流速分布に与える影響を調べるため，これをパラメータとして，4ケース実施し，各ケースにおいて，水頭分布，流速分布，流線，および粒子追跡（パーティクル・トレース）を求めた．表-5.3に各ケースで用いたパラメータを示す．なお，ここで用いた乱数系列は，前章のCase5-7～Case5-9と同一であり，したがって，Case5-13における透水係数の頻度分布，および平面分布の形状は，図-5.13(a)～図-5.15(a)に示したCase5-7のものと同じである．

表-5.3 各ケースの分割数

	Case5-10	Case5-11	Case5-12	Case5-13
分割回数 N	2	3	4	6
最終分割長さ	160m	80m	40m	10m

(3) 解析結果

図-5.17～図-5.20に、各ケースの水頭分布、流速分布、および流線と粒子追跡の結果を示す。ここで流速分布は、全要素の平均値を上回るもののみをその大きさに無関係に一定の長さで表示している。また、粒子追跡は、同時刻に $x=0$ 上の各点を出発した粒子が、流線に沿ってダルシー流速で移動し、3500日後に到達する点を示したものである。

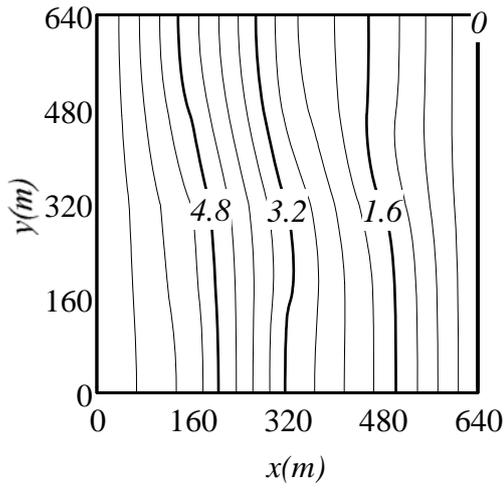
水頭分布については、1次元の場合と同様に、各ケースによる違いは、あまり顕著ではない。特に、 $N=3$ 以上では、微細な凹凸を除けば、巨視的にはほとんど同一の水頭分布を示している。

一方、流速分布については、各ケースによって大きく異なっている。分割の粗いCase5-10の場合、流速が相対的に大きい部分は、 $0m < y < 320m$ にほぼ集中しているのに対し、分割を細かくして行くにつれて、流速の大きい部分が分散し、小規模な水みちが多数表れていることがわかる。

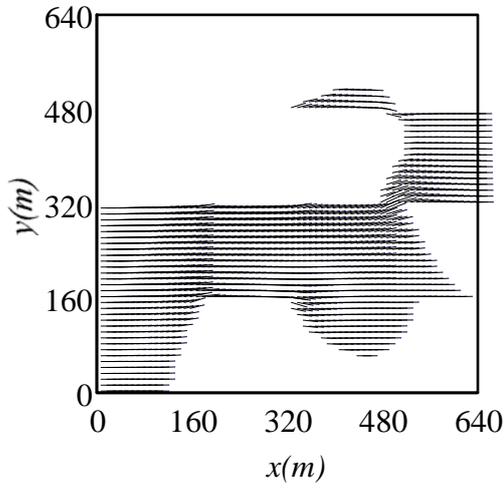
このように、相対的に流速の大きい部分が全体に分散すると、流れは一様流に近づいている印象を受けるが、粒子追跡の結果は逆であり、最も速い粒子と、最も遅い粒子の到達距離の差は、分割数が大きくなるにつれて増大している。

また、流線は、分割を小さくするほど滑らかさが失われ、細かな変動が表れている。一方、ここで取り上げた各要素が等方性の勾配場では、等水頭線と流線は直交することから、水頭分布についても、分割を小さくするほど滑らかさが失われることがわかる。すなわち、5.4節の1次元の水頭分布で示したように、2次元場においても水頭分布はフラクタル性を持つものと考えられる。

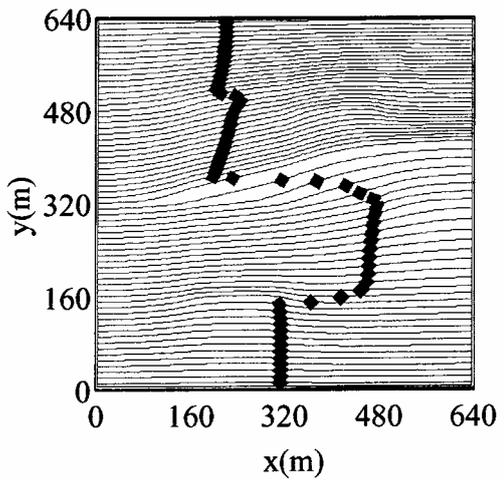
以上の結果から、水位・水頭分布が問題となる場合であれば、それほど多数の要素に分割する必要はないが、地下水汚染問題など流速分布が重要となる場合は、局所的な水みちの影響を無視することができず、したがって、可能な限り多くの要素に分割する必要があるものと思われる。



(a) 水頭分布

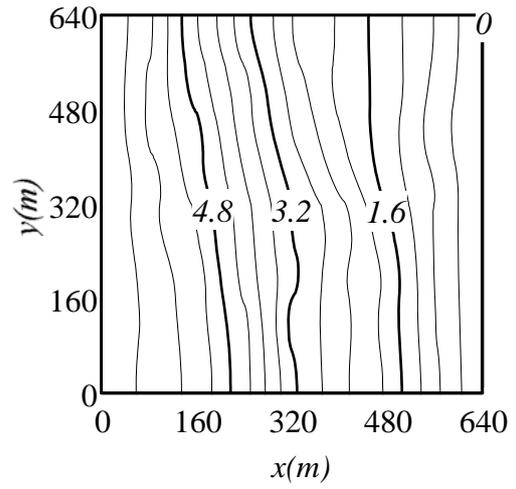


(b) 流速分布

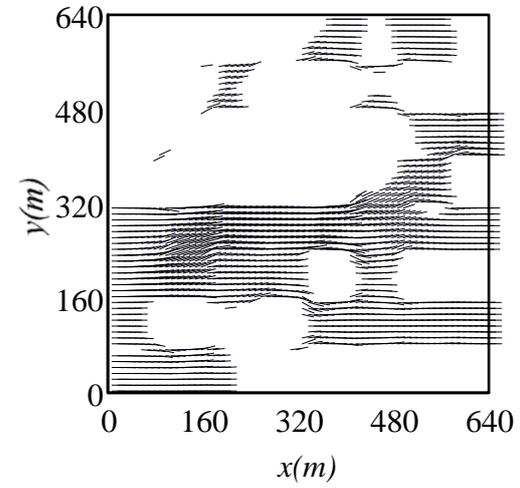


(c) 流線と粒子追跡

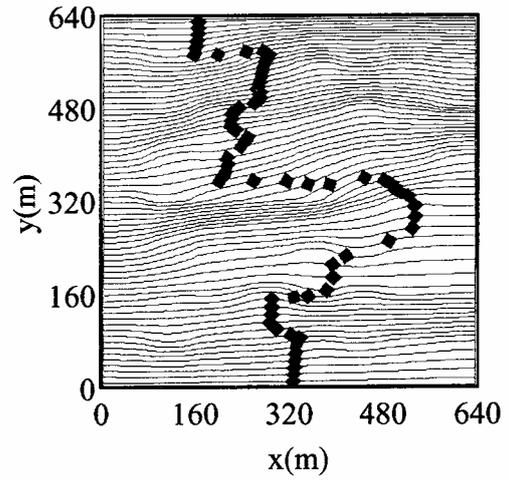
図-5.17 Case5-10



(a) 水頭分布

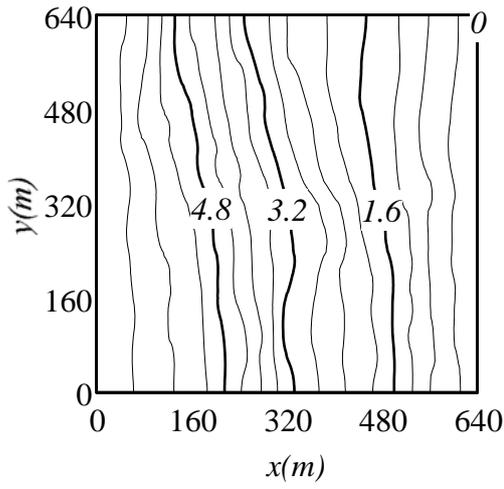


(b) 流速分布

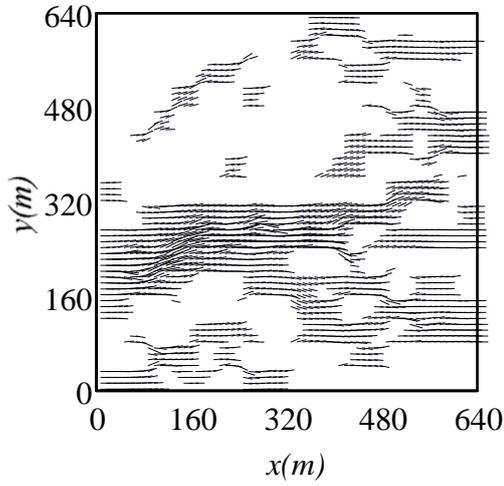


(c) 流線と粒子追跡

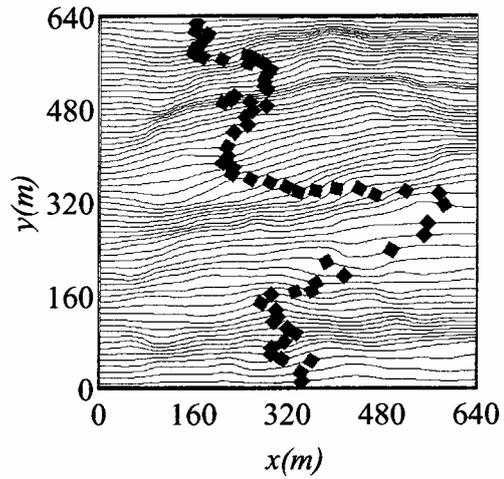
図-5.18 Case5-11



(a) 水頭分布

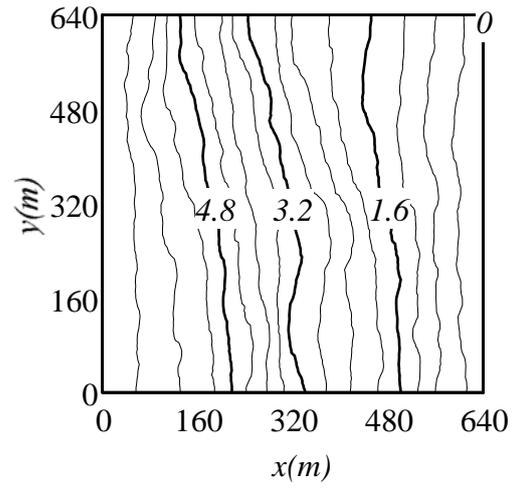


(b) 流速分布

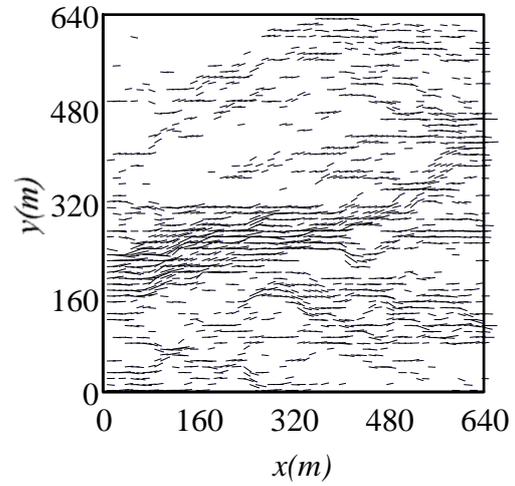


(c) 流線と粒子追跡

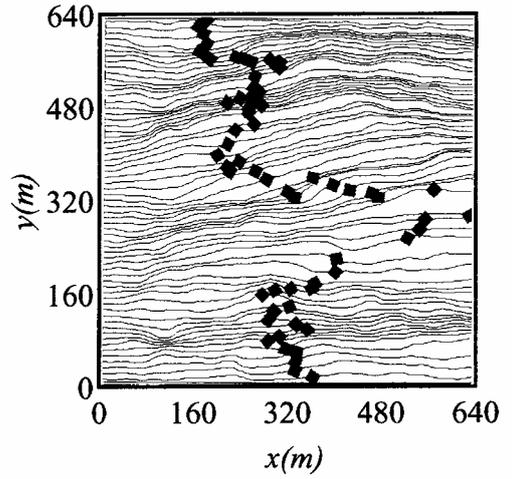
図-5.19 Case5-12



(a) 水頭分布



(b) 流速分布



(c) 流線と粒子追跡

図-5.20 Case5-13

5. 6 各種の空間分布モデルの統計的性質と生成方法

透水係数の空間分布モデルは、これまでもいくつか提案されている。以下では、これらの中から比較的良好に用いられる指数関数モデル、自己回帰モデルおよびべき乗モデルをとりあげ、本章にて提案したモデル（以下1/f型モデルと記す）との違いについて考察する。まず、2次元等方性地盤を対象とし、これに対する各モデルの統計的性質（自己相関係数、バリオグラム、およびパワースペクトル密度関数）について整理するとともに、各モデルの模擬地盤の生成方法について述べる。

(1) 指数関数モデル

一般に、自然地盤における土質定数の相関性は、2点間の距離が大きくなるにしたがって低下する。透水係数の場合は、頻度分布がほぼ対数正規分布となることから、相関性は対数変換値で評価される。

指数関数モデルでは、透水係数の対数変換値の自己相関係数を、式(5.53)のように指数関数で近似する。

$$\rho(r) = \exp(-r/L) \quad (5.53)$$

ここに、 $\rho(r)$ は自己相関係数、 r は2点間の距離、 L は積分特性距離（自己相関距離）である。

式(5.53)における積分特性距離 L は、距離の次元を持ち、任意の2点間の相関性を特徴づけるパラメータである。定性的には、 L が0に近づくほどランダム性が増す。しかし、必ずしもある地盤に対して固有の値が定まるのではなく、解析スケールによって変化し、図-5.21に示すように、概ね解析スケールの1/10程度が一つの目安となることが報告されている^{7), 8)}。

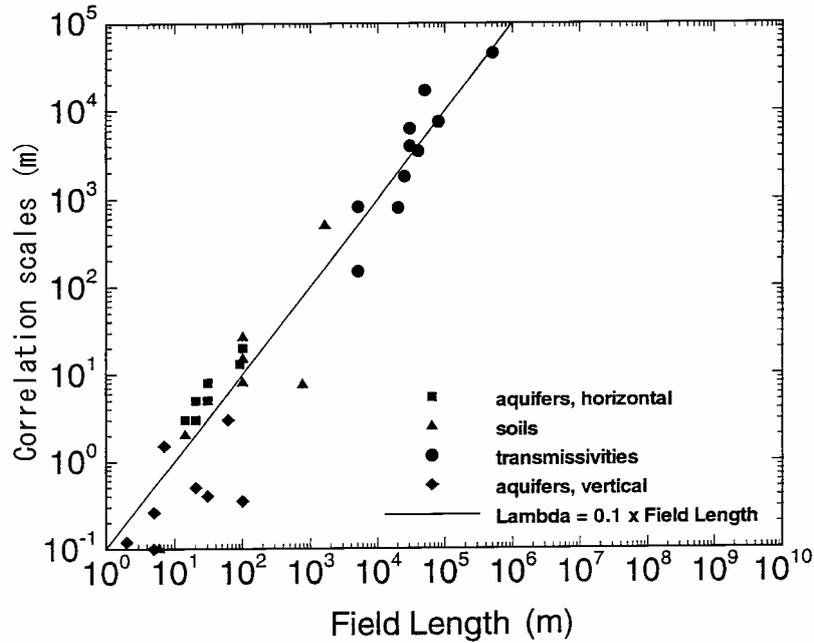


図-5.21 解析場の大きさと相関距離の関係^{7),8)}

一方，式(5.54)で定義される（セミ）バリオグラム $\gamma(r)$ は，クリギング推定法等によって空間分布を推定する際に用いられ，自己相関係数との関係は式(5.55)で示される．

$$\gamma(r) = \frac{1}{2} E \left[\{Y(\mathbf{p} + \mathbf{r}) - Y(\mathbf{p})\}^2 \right] \quad (5.54)$$

$$\gamma(r) = \sigma_Y^2 \{1 - \rho(r)\} \quad (5.55)$$

ここに， $\gamma(r)$ はセミバリオグラム， $Y(\mathbf{p})$ は位置 \mathbf{p} における透水係数の対数変換値 ($Y(\mathbf{p}) = \log K(\mathbf{p})$)， E は[]内の期待値を表す記号， σ_Y は標準偏差である．

次に，パワースペクトルは，2次元等方性の場合，以下のように共分散関数を用いてハンケル変換形のスペクトル表現で表せる⁹⁾．

$$R(r) = \sigma_Y^2 \cdot \rho(r) \quad (5.56)$$

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(\lambda \cdot r) \cdot R(r) \cdot r \cdot dr \quad (0 \leq \lambda < \infty) \quad (5.57)$$

ここに， $R(r)$ は共分散関数， λ は2次元空間周波数ベクトルの大きさ， $S(\lambda)$ はパワースペクトル， $J_0(\lambda r)$ は0次のベッセル関数である．

式(5.53)，式(5.56)および式(5.57)より，指数関数モデルのパワースペクトルは式(5.58)のように求められる．

$$S(\lambda) = \frac{2\pi\sigma_Y^2}{L(\lambda^2 + L^{-2})^{3/2}} \quad (5.58)$$

指数関数モデルを用いてサンプル場を生成する方法としては、共分散行列をコレスキー分解して得られる下三角行列を一様乱数ベクトルに乗じる方法が一般的である。ただし、この方法は、要素数が多くなる場合、すなわち、共分散行列のサイズが大きくなると、メモリー容量の制約を受け、また計算にも長時間を要する。このため、本研究では、式(5.58)よりパワースペクトルおよびフーリエスペクトルを求めた上で、複素乱数を用いて2次元FFTにより模擬地盤を生成した。

図-5.22は、 1×1 の領域における自己相関係数の理論値 ($L=0.05, 0.1, 0.2$)、図-5.23は、 $L=0.1$ として、この方法によって生成された透水係数分布の一例である。ここで、透水係数の対数変換値の平均値 Y_m 、および標準偏差 σ_Y は、それぞれ $Y_m=0$ および $\sigma_Y=0.5$ とし、分割数は 64×64 とした。

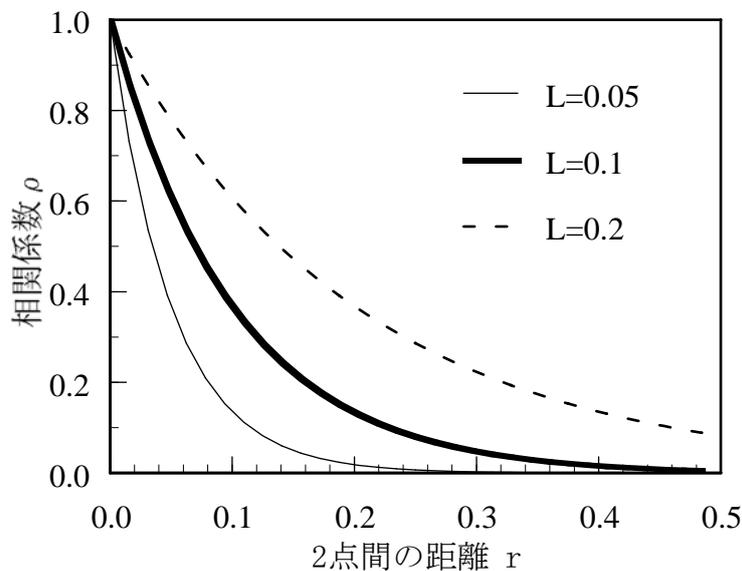


図-5.22 指数関数モデルの自己相関係数

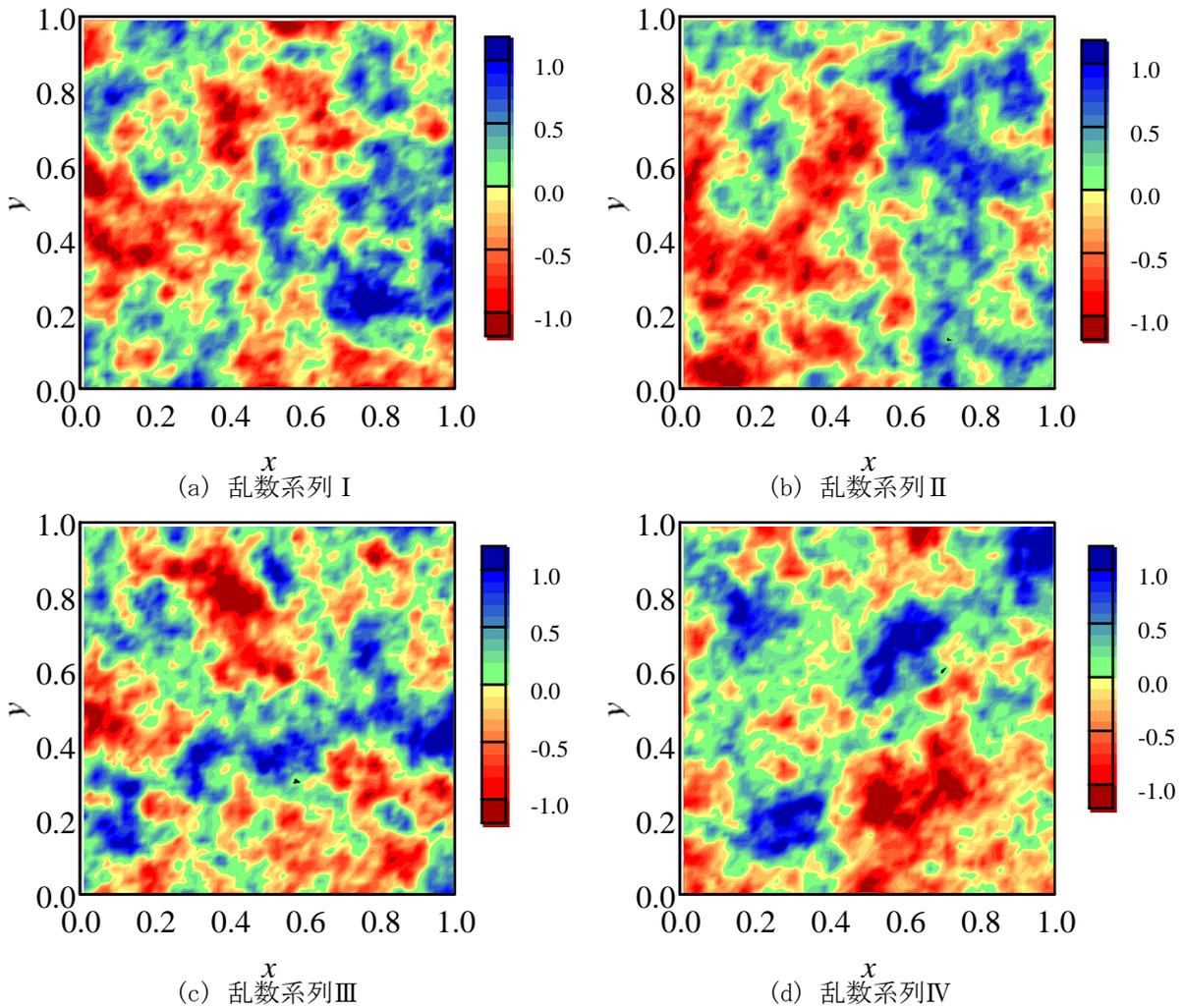


図-5.23 指数関数モデルによる透水係数分布の一例

(2) 自己回帰モデル

2次元等方性の自己回帰モデルは、透水係数の対数変換値 $Y(\mathbf{p})$ の分布が式(5.59)の自己回帰式に従うものと仮定する。

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \kappa^2 Y = \eta W(x, y) \quad (5.59)$$

ここに、 κ 、 η は定数、 $W(x, y)$ は白色雑音場である。

式(5.59)において、2点間の相関性を特徴づけるパラメータは κ であり、距離の逆数の次元を持つが、指数関数モデルにおける積分特性距離 L と同様に、地盤特有のものではなく、解析スケールに応じて変化する。

この自己回帰モデルの共分散関数、およびパワースペクトルは、以下のように与

えられる⁹⁾.

$$R(r) = \frac{\eta^2}{4\pi\kappa^2} \kappa r \cdot K_1(\kappa r) = \sigma_Y^2 \cdot \kappa r \cdot K_1(\kappa r) \quad (5.60)$$

$$S(\lambda) = \frac{\eta^2}{4\pi^2(\lambda^2 + \kappa^2)^2} = \frac{\sigma_Y^2 \kappa^2}{\pi(\lambda^2 + \kappa^2)^2} \quad (5.61)$$

ここに、 $K_1(\kappa r)$ は1次の第2種変形ベッセル関数である。

自己回帰モデルによるサンプル場は、式(5.59)を差分法や有限要素法で解くことによって容易に得られる。しかし、同一の乱数系列を用いることによってモデル間の相違をより明瞭に示すため、本研究では指数関数モデルと同様に、式(5.61)から2次元FFTによって模擬地盤を生成した。

図-5.24は、 1×1 の領域における自己相関係数の理論値 ($1/\kappa=0.04, 0.065, 0.09$)、図-5.25は、 $1/\kappa=0.065$ として、生成された透水係数分布の一例である。このとき、実現値は、図-5.23の指数関数モデルと同一の乱数系列を用いている。

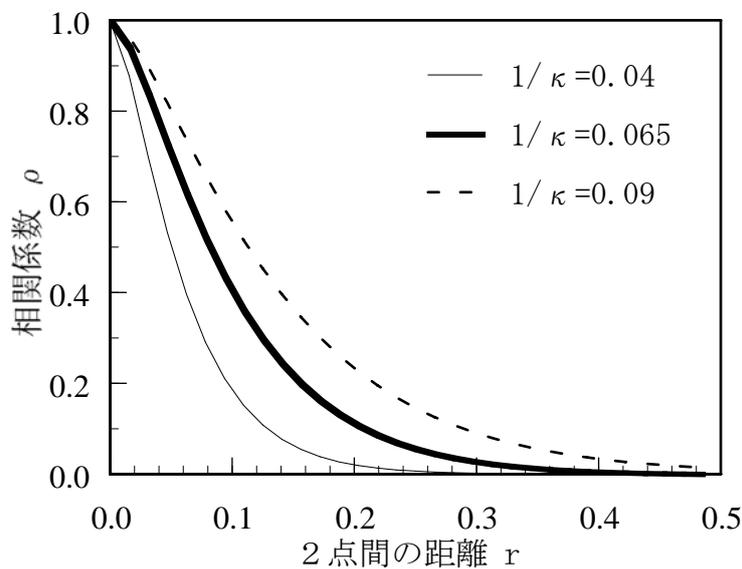


図-5.24 自己回帰モデルの自己相関係数

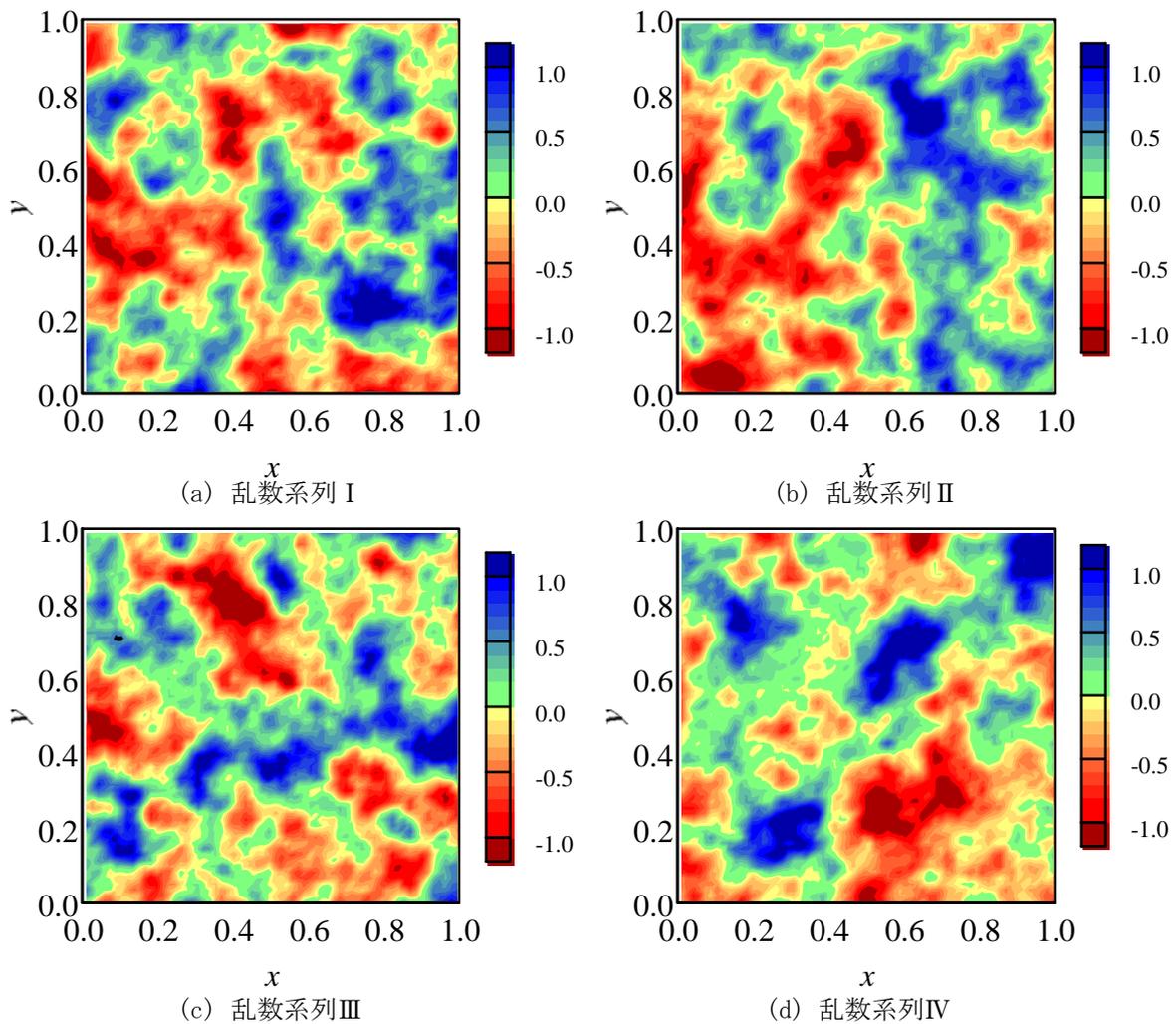


図-5.25 自己回帰モデルによる透水係数分布の一例

(3) ベキ乗モデル

べき乗モデルでは、式(5.54)のバリオグラムを、式(5.62)で表されるべき乗型の関数（フラクタルスケーリング則）によって近似する。

$$\gamma(r) = a \cdot r^{2H} \quad (5.62)$$

ここで、 a , H は定数である。

式(5.55)および式(5.62)より、自己相関係数は式(5.63)となる。

$$\rho(r) = 1 - \frac{a}{\sigma_Y^2} r^{2H} \quad (5.63)$$

式(5.62)において、2点間の相関性を特徴づけるパラメータは定数 H ($0 < H < 1$) である。定性的には H が小さいほど2点間の相関性は小さい。これまでに報告され

ている式(5.62)の適用例によれば、 H の値は 1次元場において0.1~0.5程度、2次元場では0.25程度となっている^{10), 11), 12)}。また、 σ_v は定数 a および H によって変化する。

先に示した指数関数モデルおよび自己回帰モデルのバリオグラムは $r \rightarrow \infty$ で σ_v^2 に収束するのに対し、べき乗モデルのバリオグラムは無窮大に発散する。また、指数関数モデルのパラメータ L および自己回帰モデルのパラメータ κ は解析スケールによって異なるが、べき乗モデルにおけるパラメータ H はスケールの影響を受けない。

べき乗モデルのパワースペクトルは、以下のように近似できるとされている^{11), 13)}。

$$S(\lambda) = S(1) \cdot \lambda^{-(2H+d)} \quad (5.64)$$

ここに、 $S(1)$ は、 $\lambda=1$ におけるスペクトル密度、 d は対象とする空間の次元である。ただし、式(5.64)は、 $H \equiv 0$ の場合は成り立たないことに注意する必要がある。例えば、式(5.62)において、 $H \equiv 0$ とすると、 $\gamma(r) \equiv a$ ($r > 0$)となるが、これはほぼ白色雑音場であることを表す。この場合、パワースペクトルも λ に関わらずほぼ一定値となり、式(5.64)の形にはならない。

べき乗モデルによるサンプル場の生成は、Bellinら¹⁴⁾によって開発された生成プログラム (HYDRO-GEN) を用いた。これは、インターネット上で無償公開されている (http://www.ing.unitn.it/~bellin/Hydro_ge.htm)。

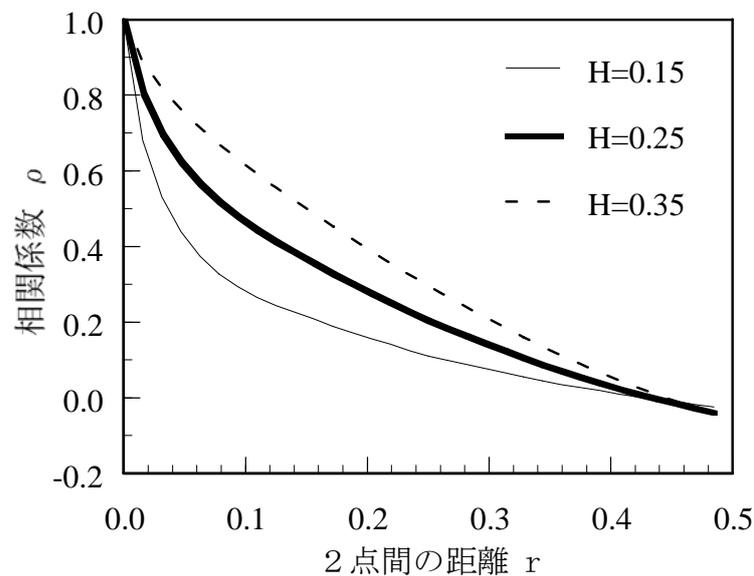


図-5.26 べき乗モデルによる自己相関係数

図-5.26は、べき乗モデルにおける自己相関係数 ($a=0.34$; $H=0.15, 0.25, 0.35$)、図-5.27は、 $H=0.25$ として、生成された透水係数分布の一例である。また、図-5.28

は、 $H=0.25$ として、異なる乱数を用いて透水係数分布を100回生成し、それらのパワースペクトルの平均値を示している。図-5.28より、生成された透水係数分布から求めたパワースペクトルは、低い周波数領域では式(5.62)の直線上にあるが、高い周波数領域では必ずしも式(5.62)に従っていないことがわかる。

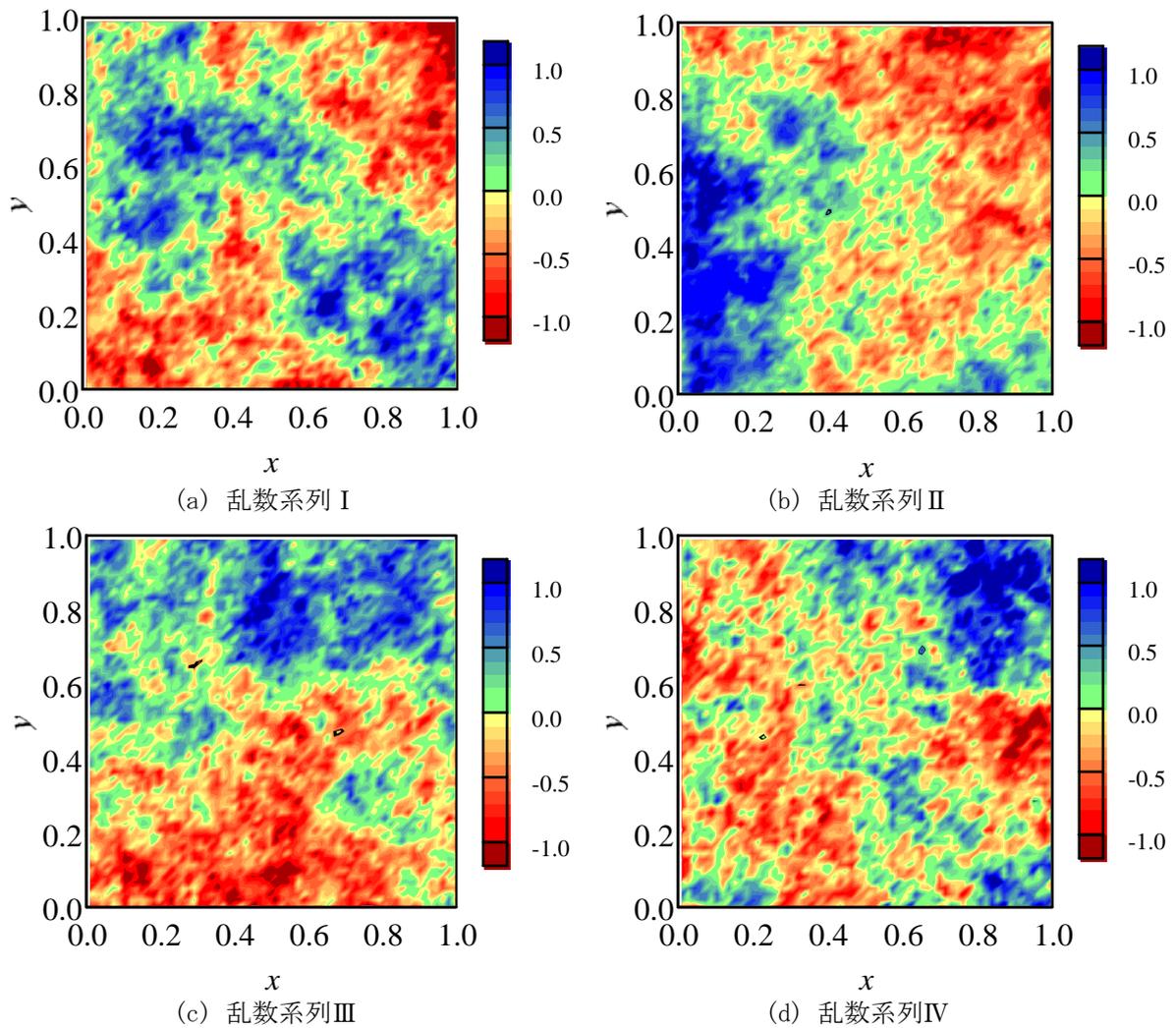


図-5.27 べき乗モデルによる透水係数分布の一例

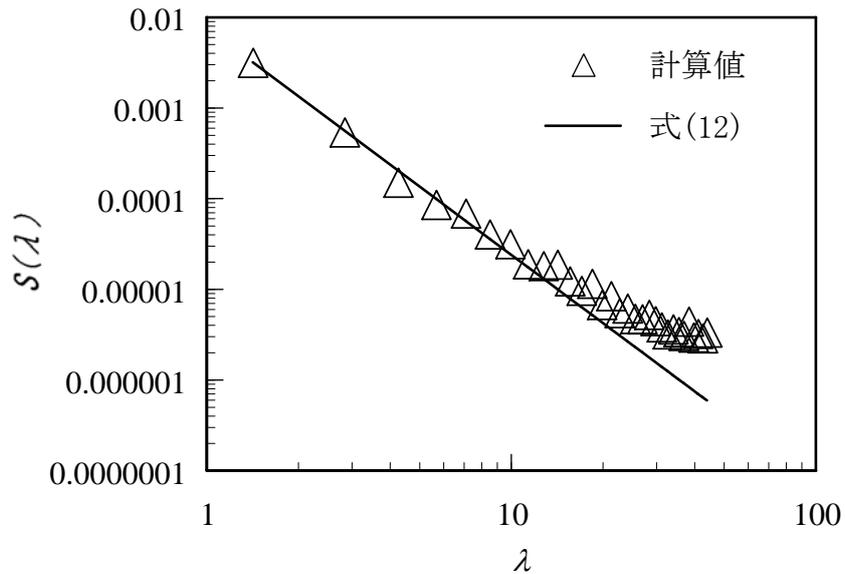


図-5.28 べき乗モデルのパワースペクトル(H=0.25)

(4) 1/f型モデル

本章で提案している1/f型モデルは、先に述べた各モデルのように近似関数や微分方程式を用いるのではなく、透水係数分布に関する理論的考察に基づいた一定の生成規則に従って模擬地盤を生成する。その生成方法はすでに5.3節で述べたので、以下では統計的性質について整理するとともに、問題点を抽出し、その解決方法を提示する。

① 自己相関係数とパワースペクトル

図-5.29は、生成時の α'_{xm} 、 β'_{xm} 、 γ'_{xm} の確率密度関数として式(5.43)を仮定し、ばらつきを規定するパラメータを $\theta_{\alpha'm} = \theta_{\beta'm} = 1.25$ 、 $\theta_{\gamma'm} = 2.5$ として、透水係数分布を100回生成し、それらの2次元自己相関係数の平均値を示したものである。相関係数の等高線がほぼ同心円状になっていることから、この条件では、透水係数分布は平均すると等方性となっていることがわかる。

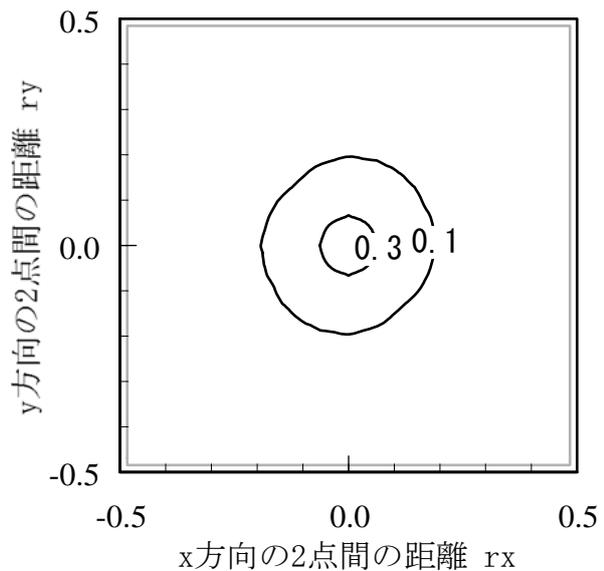


図-5.29 1/f型モデルの自己相関係数分布

図-5.30は、図-5.29における $r_y=0$,

$r_x \geq 0$ の断面を示したものであり、**図-5.31**は**図-5.30**の r_x 軸を対数軸としたものである。**図-5.30**より、このモデルによって生成された透水係数分布は、指数関数モデル ($L=0.1$) と比較して、ランダム性が強いことがわかる。また**図-5.31**では、自己相関係数は、ほぼ直線となっていることから、対数関数で近似し得ると考えられる。

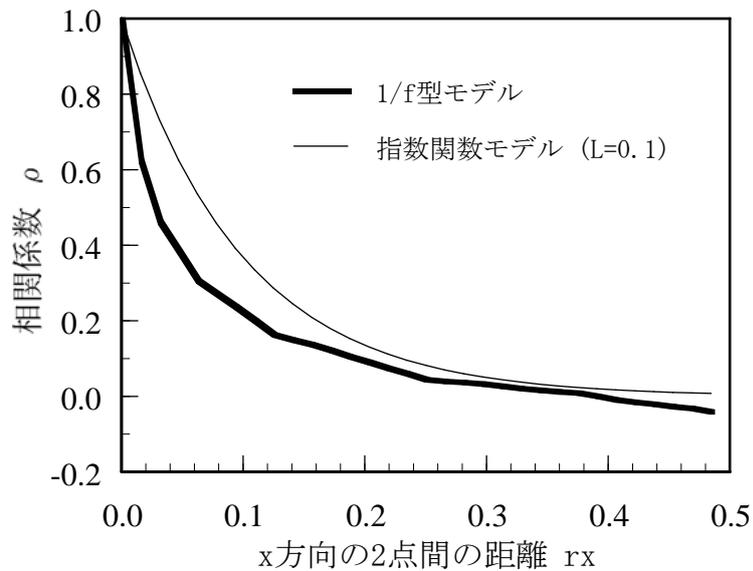


図-5.30 1/f型モデルの自己相関係数 ($r_y=0, r_x \geq 0$)

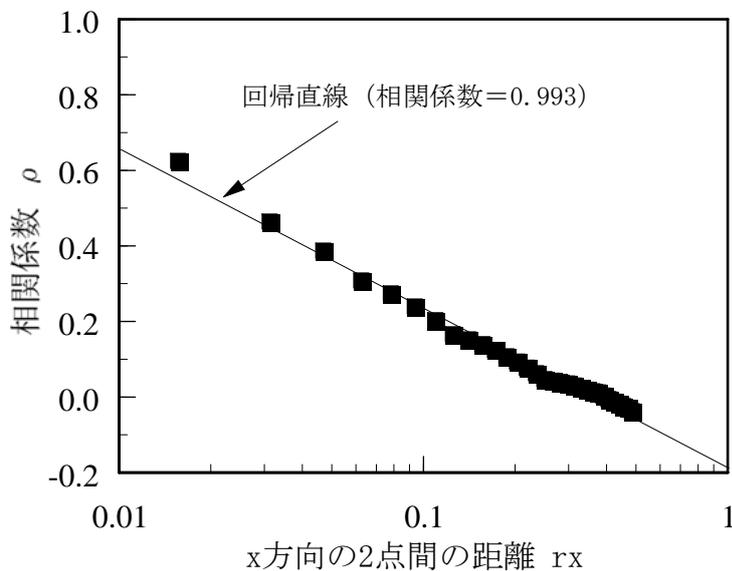


図-5.31 1/f型モデルの自己相関係数 ($r_y=0, r_x \geq 0$) (片対数軸)

1/f型モデルにおける相関性の制御は、確率変数 α , β , γ のばらつきを定めるパラメータ θ を各分割段階で変化させることによって可能である。指数分布の性質は、 θ が大きくなるほどばらつきが小さくなる。すなわち、分割を進めていくにつれて θ を大きくしていけば、最終段階での透水係数のばらつきは小さくなり、相関性を高めることができる。具体的には、 i 回目の分割時のパラメータ θ^i に対して $i+1$ 回目のパラメータ θ^{i+1} を次式で定める。

$$\theta^{i+1} = \varepsilon \theta^i \quad (1 \leq i < N, \varepsilon > 0) \quad (5.65)$$

ここに、 ε は定数であり、 $0 < \varepsilon < 1$ とすると相関性は小さくなり、 $1 < \varepsilon$ とすると相関性は大きくなる。

図-5.32(a), (b)は、 $\theta^1_{\alpha_m} = \theta^1_{\beta_m} = 1.25$, $\theta^1_{\gamma_m} = 2.5$ として、それぞれ $\varepsilon=1.0$ および $\varepsilon=1.1$ の場合のパワースペクトル(図-5.29と同様に、100回の平均値)および回帰直線を示す。ここで、回帰直線の傾きは、 $\varepsilon=1.0$ の場合に-1.94、 $\varepsilon=1.1$ の場合に-2.11が得られている。これより、2次元場における1/f型モデルのパワースペクトルは、 $\varepsilon=1.0$ とした場合、概ね λ^{-2} に比例することがわかる。また、 ε が大きくなると、スペクトルの傾きが増していることから、相関性が大きくなっていることが示される。

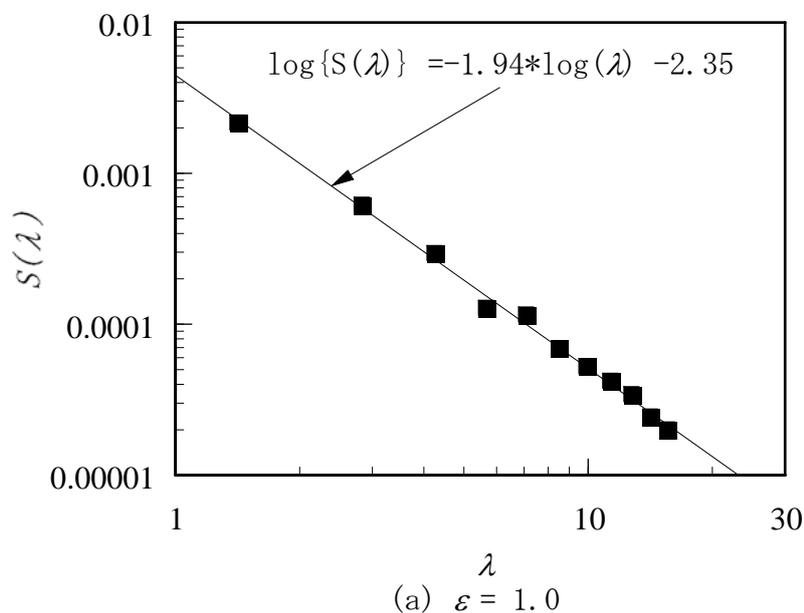


図-5.32 1/fモデルのパワースペクトル(1)

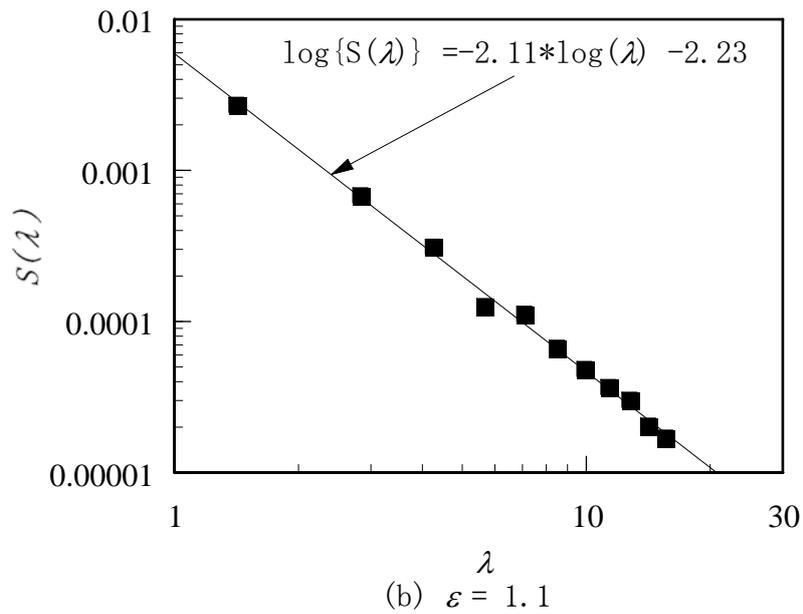


図-5.32 1/fモデルのパワースペクトル(2)

② 1/f型モデルの問題点と対処

この方法の問題点の一つとして、局所的に相関性のばらつきが生じる点が挙げられる。例えば、図-5.33のように2回分割する場合、全体領域は16の小領域(要素)に分割される。このとき、A-B、およびB-Cの要素間距離は等しくなるが、相関性はA-B間の方が強くなる。これは、2回目の分割の際には、1回目に分割された矩形要素ごとに独立して分割規則を適用するため、例え隣接する要素間であって

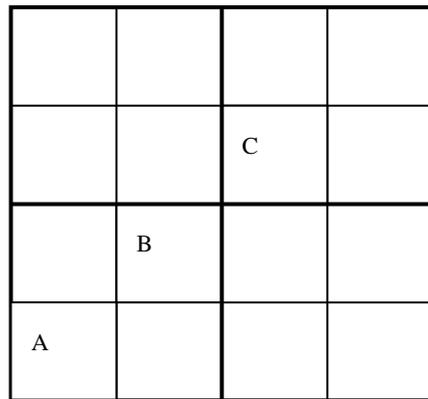


図-5.33 2回分割する場合

も、その後の分割では連続性が考慮されないためである。このことは、自己相関係数が小さく評価される原因の一つと考えられる。

上記のような問題を回避するために、以下では、図-5.32で求められたパワースペクトルを直接用いてサンプル場を生成する方法を採用する。

すなわち、以下の式(5.66)を用いてFFTにより透水係数分布を生成する。

$$S(\lambda) \propto \lambda^{-\zeta} \quad (5.66)$$

ここに、 ζ はスペクトルの傾きである。

図-5.34は、図-5.32(b)に基づいて $\zeta=2.1$ として生成された透水係数分布の自己相関係数（100回の平均値）、図-5.35は、透水係数分布の一例である。

図-5.34より、指数関数モデル（ $L=0.1$ ）とほぼ同様の自己相関係数が得られている。このことから、自然地盤におけるスペクトルの傾き ζ については、 $\zeta=2.0$ 程度が一つの目安と考えられる。

実際には、図-5.34の $1/f$ 型モデルのような実測値が得られた場合、指数関数モデルが適用されることが多い。しかしながら、図-5.35と図-5.23（同一の乱数を用いた指数関数モデルによる透水係数分布）を比較すると、図-5.35の方がより細かい変動が見られ、両者の分布の性質は明らかに異なることがわかる。

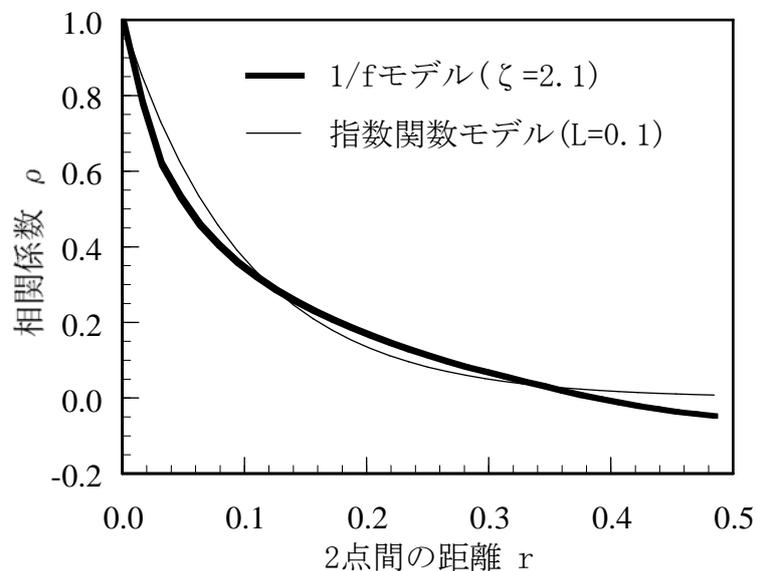


図-5.34 1/fモデルの自己相関係（ $\zeta=2.1$ ）

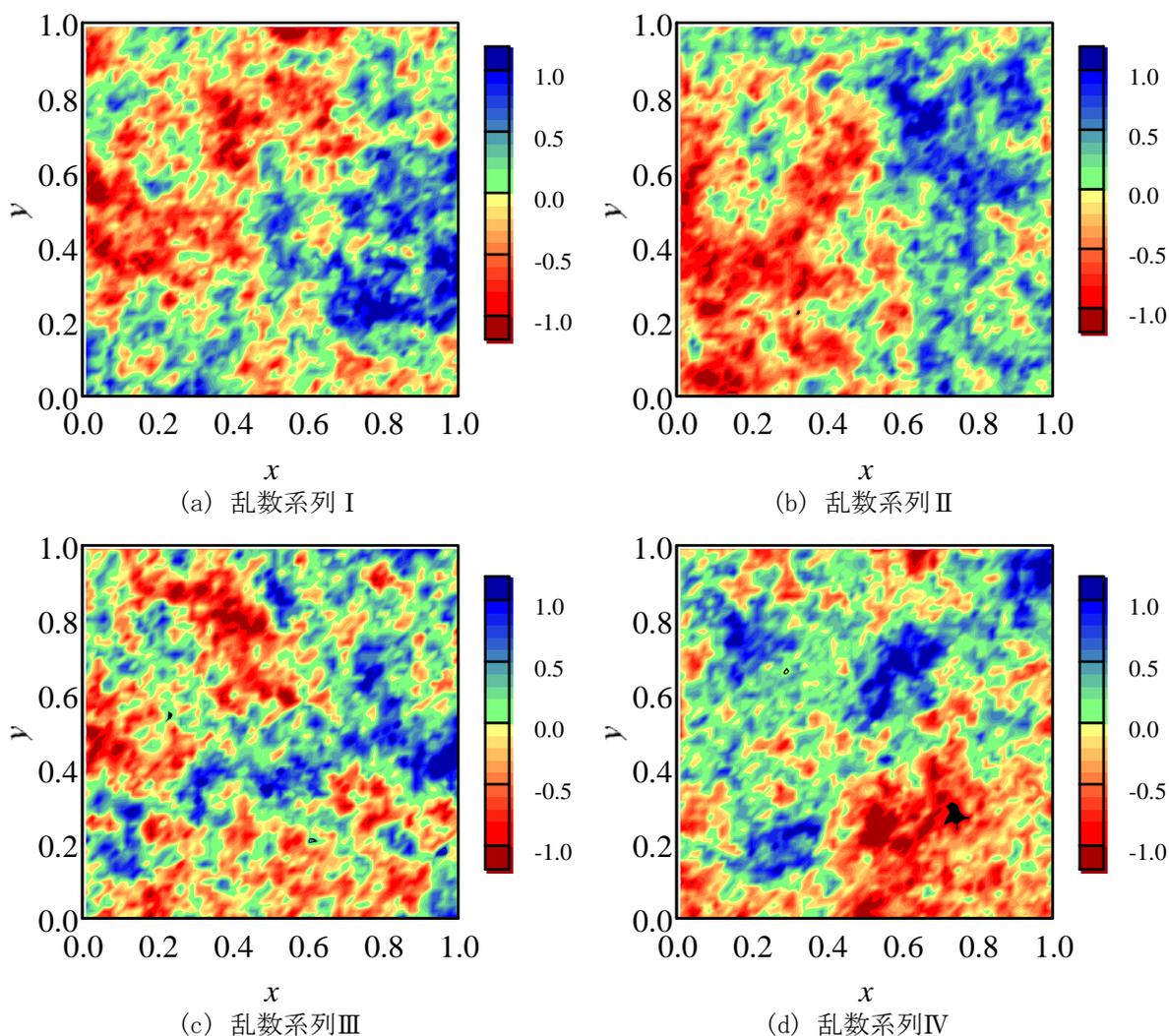


図-5.35 1/f型モデルによる透水係数分布の一例

③異方性および3次元モデルへの拡張

式(5.66)において、 λ は2次元空間周波数ベクトルの大きさを表し、

$$\lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \quad (5.67)$$

である。もし、 x 方向と y 方向の自己相関係数の比が $1:\omega$ ($0 < \omega \leq 1$)とすると、式(5.67)は、以下のようにすればよい。

$$\lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = \sqrt{\lambda_x^2 + \omega^2 \lambda_y^2} \quad (5.68)$$

また、ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を $-\varphi$ ($0 \leq \varphi < \pi$) 回転したベクトル $\boldsymbol{\lambda}'$ を用いると、任意の方向性を

持つ異方性地盤を生成することができる。

つぎに、3次元等方性の場合には、式(5.66)における ζ を、 $\zeta \doteq 3.0$ とする。また、水平方向と鉛直方向の異方性を考える場合は、

$$\lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \omega^2 \lambda_z^2} \quad (5.69)$$

とし、2次元の場合と同様に、ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を x 軸周りに $-\varphi_x$ ($0 \leq \varphi_x < \pi$)、 y 軸周りに $-\varphi_y$ ($0 \leq \varphi_y < \pi$)回転したベクトル $\boldsymbol{\lambda}'$ を用いると、任意の方向性を持つ3次元の異方性地盤を生成することができる。

図-5.36は、 $\omega=0.2$ とした場合の自己相関係数分布、図-5.37は、このようにして生成された透水係数分布の例、また、図-5.38は3次元等方性の場合、図-5.39は3次元異方性の場合の生成例である。

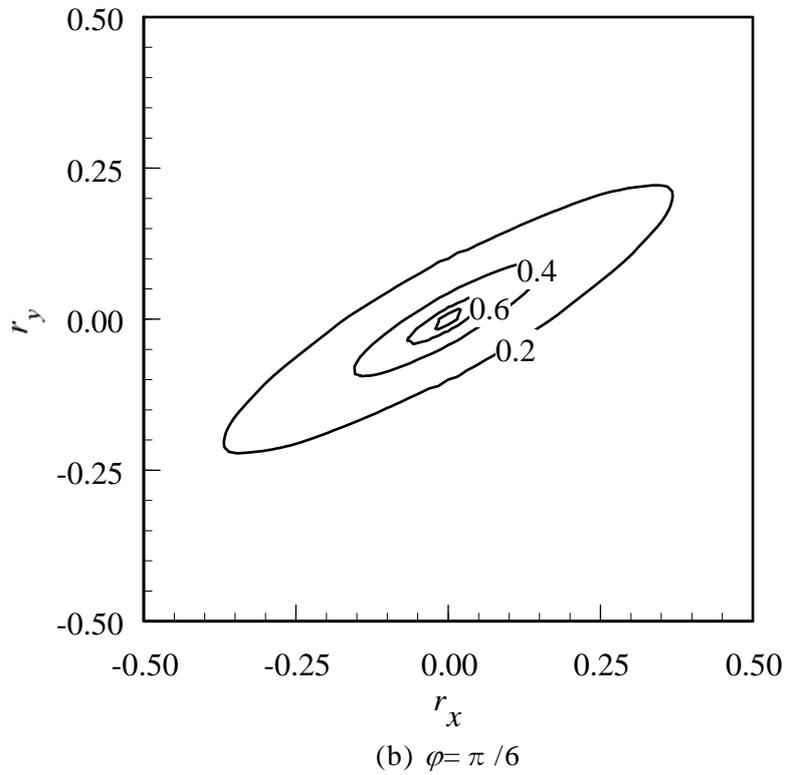
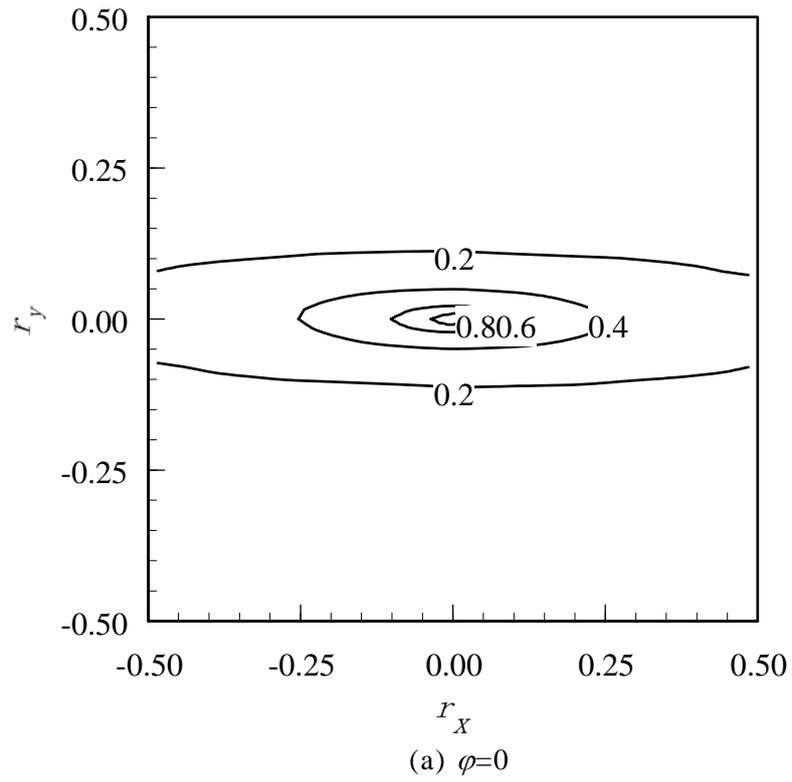


図-5.36 異方性の自己相関係数分布 ($\omega=0.2$)

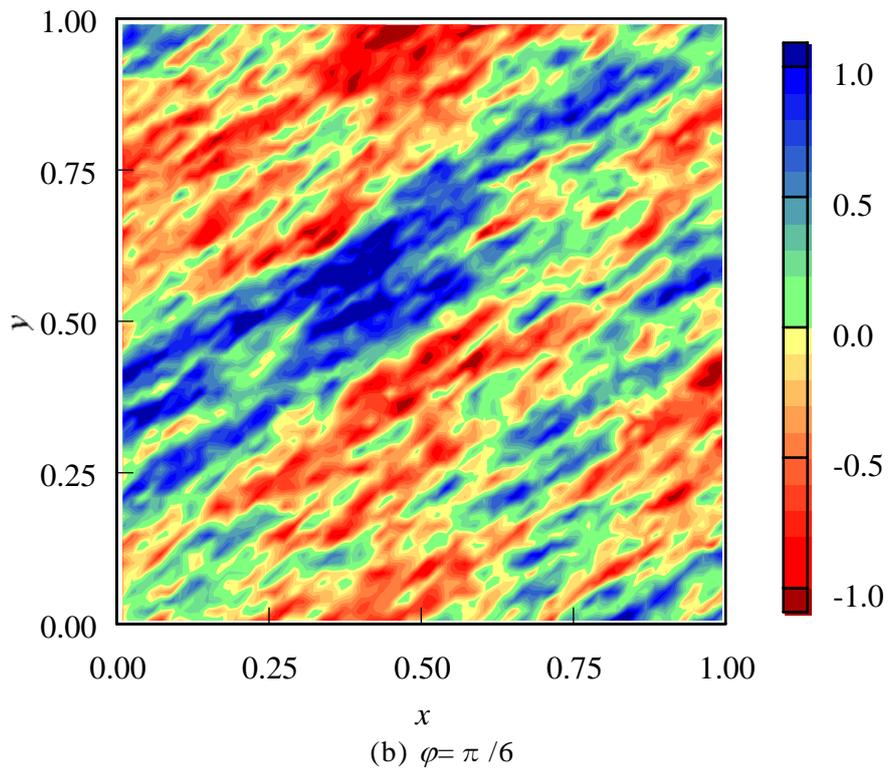
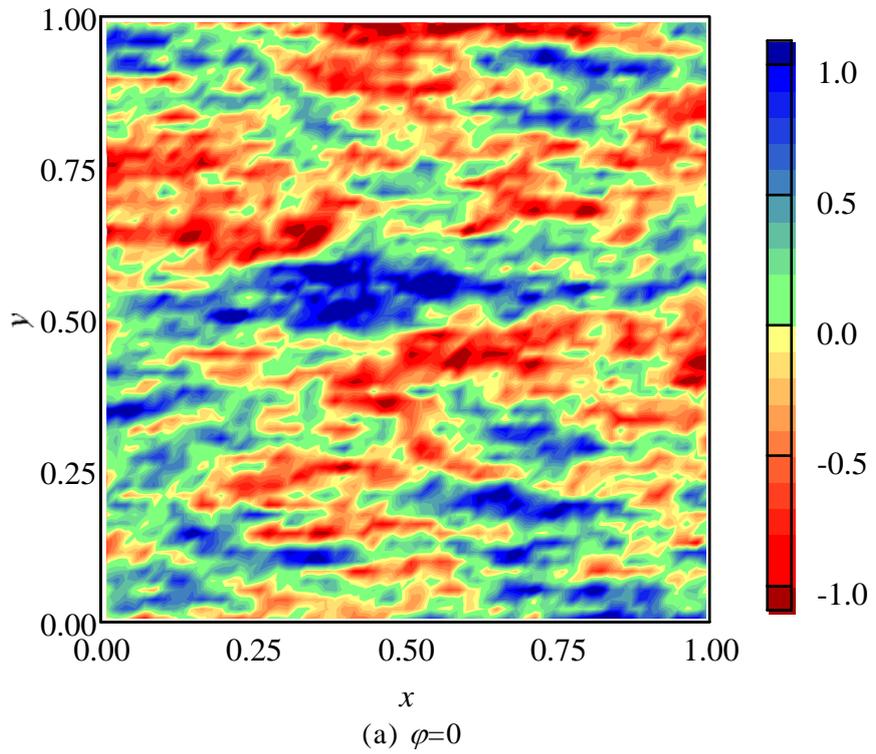


図-5.37 異方性の透水係数分布の生成例 ($\omega = 0.2$)

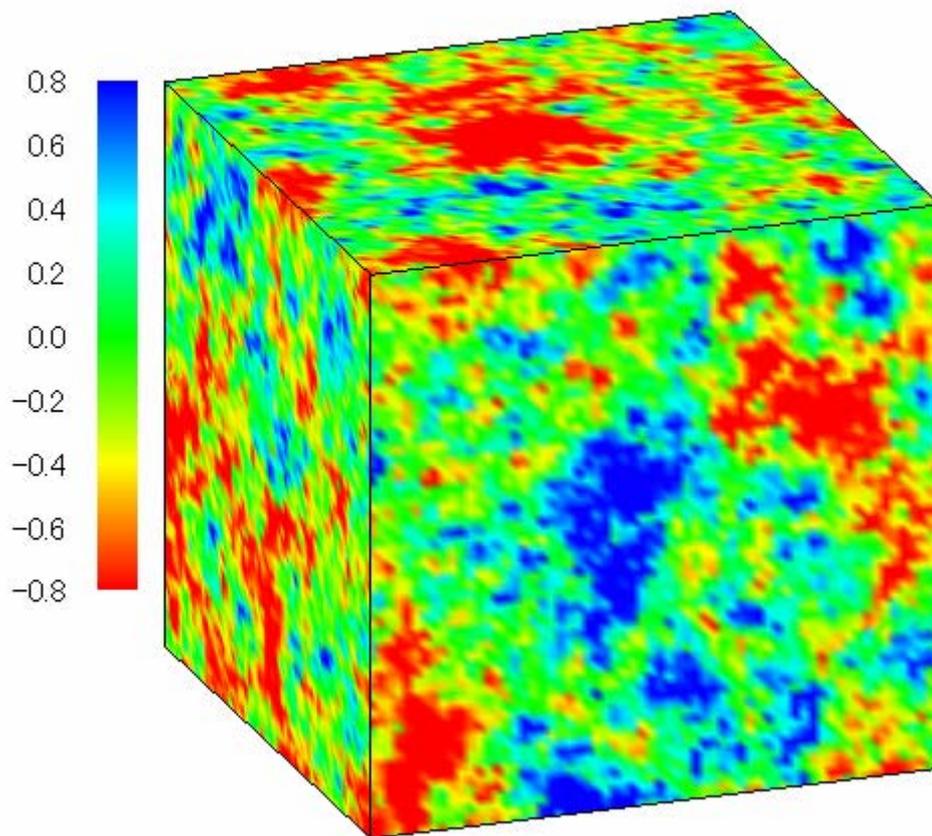


図-5.38 3次元等方性の透水係数分布の生成例

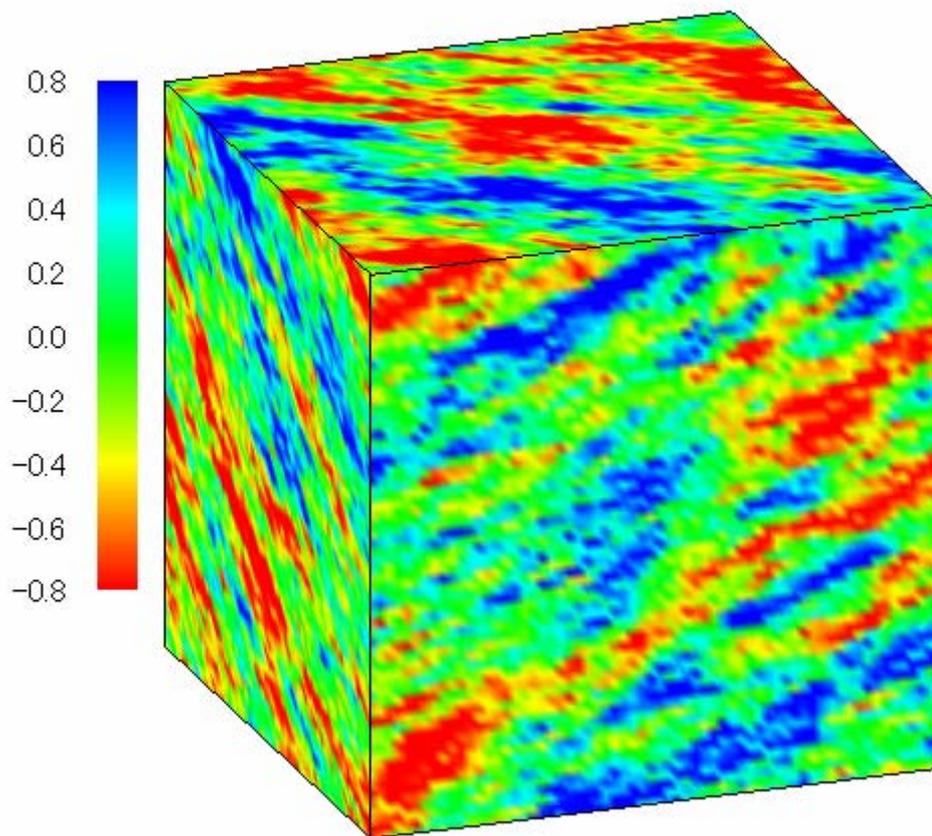


図-5.39 3次元異方性の透水係数分布の生成例
($\omega=0.2$, $\varphi_x=20^\circ$, $\varphi_y=30^\circ$)

5. 7 解析スケールの変化と分散の関係

一般に，解析対象となる領域は有限であるが，問題に応じてそのスケールは大きく異なる．たとえば，広域地下水の挙動を解析する場合などは，一辺が数km～数十km程度の領域が解析の対象となるのに対し，建設工事に伴う地下水処理問題などでは，数十m～数百m程度の解析領域を扱うことが多い．また，解析対象領域に対して調査地点が常に領域全体に渡って均等に配置されているとは限らず，一部の調査範囲のデータをもとに全体のモデルパラメータを設定しなければならないことも少なくない．

前節では，解析スケールと各モデルにおけるモデルパラメータの関係について若干触れたが，本章では，解析スケールと分散の関係について考察する．

(1) 指数関数モデルおよび自己回帰モデル

指数関数モデルおよび自己回帰モデルは，スケールを拡大していけば分散は一定値に収束する．

しかし，有限な解析領域の内部にも，それ以下のスケールの領域を無数に含んでおり，これらの部分領域の分散は，当然のことながら全体領域の分散とは異なる．このため，分散を設定する際に，調査範囲が解析対象領域と一致していない場合などでは，観測結果を直接用いることはできない．

以下では， 1×1 および 0.5×0.5 の全体領域をそれぞれ 64×64 個および 32×32 個の要素に分割し，透水係数分布を発生させ，その内部から $m \times m$ 個の部分領域を抽出し分散の平均値 $\sigma^2(m)$ を求め，スケール m に対する $\sigma^2(m)$ の変化について調べる．

図-5.40および図-5.41の実線は，全体領域を 1×1 とした場合の指数関数モデルおよび自己回帰モデルにおける m に対する $\sigma^2(m)$ の変化を示している．各モデルのパラメータは，それぞれ $L=0.1$ および $1/\kappa=0.065$ であり，領域全体の分散は， $\sigma_r^2=0.25$ である．また，横軸は対数目盛で表示している．

これより， m が大きくなるにしたがって一定値に漸近すること，および解析領域が小さくなるほど分散は減少することがわかる．これに従うならば，要素サイズが同じであれば，解析領域を拡大する場合は $\sigma(m)=\sigma_r$ とし，縮小する場合は，図から直接求めることになる．たとえば， 0.5×0.5 の部分領域の分散は $m=32$ に相当し， σ_r^2

≒0.23となる。

図-5.40および図-5.41の破線は、 0.5×0.5 の領域に対して 32×32 個の要素に分割し、 $\sigma_r^2=0.23$ として、同様に $\sigma^2(m)$ の変化を求めたものである。このとき、指数関数モデルおよび自己回帰モデルのパラメータ ($L, 1/\kappa$) は、距離の次元を持ち、これらはほぼ解析スケールに比例すると考えられることから、それぞれ $L=0.05$ および $1/\kappa=0.0325$ とした。

実線と破線を比較すると、両者は異なった曲線を示していることがわかる。また、これとは逆の場合、すなわち先に破線が得られていたとしても、分散は0.23程度に収束するため、これを基に実線を得ることはできない。

このことは、モデルパラメータを解析スケールに応じて設定したとしても、分散に関しては一意性がなく、領域を拡大または縮小した場合には、統計的性質が変化してしまうことを示している。

すなわち、指数関数モデルおよび自己回帰モデルでは、解析スケールに関するパラメータによって統計的性質が規定されてしまうため、スケールを変化させると、透水係数分布の性質も変化し、特に分散を適切に設定することが困難であることがわかる。

(2) べき乗モデル

べき乗モデルのパラメータは、解析スケールとは無関係であり、スケールが変化したとしても、常に同一の値を用いる。

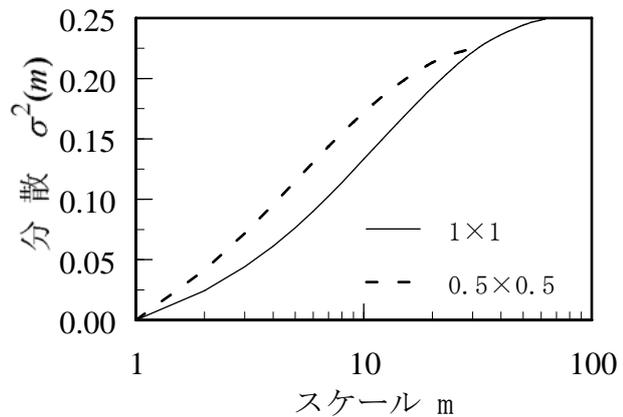


図-5.40 解析スケールと分散の関係 (指数関数モデル)

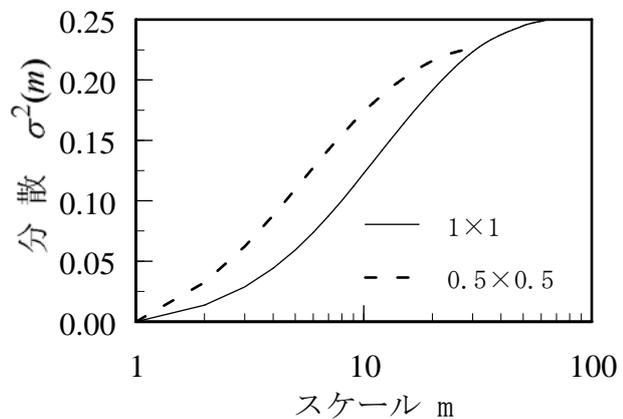


図-5.41 解析スケールと分散の関係 (自己回帰モデル)

図-5.42は、図-5.40および図-5.41と同様に、 m に対する $\sigma^2(m)$ の変化を示している。ここで用いたパラメータは、それぞれ $a=0.34$ および $H=0.25$ である。

これより、べき乗モデルにおいては、解析スケールに応じて分散は一意的に定まり、統計的性質は変化しないことがわかる。すなわち、ある解析スケールにおいてパラメータ a および H が定まれば、どのようなスケールにおいて

もその性質は保たれるため、スケールの変化に対しては、べき乗モデルは指数関数モデルあるいは自己回帰モデルと比較して有利である。

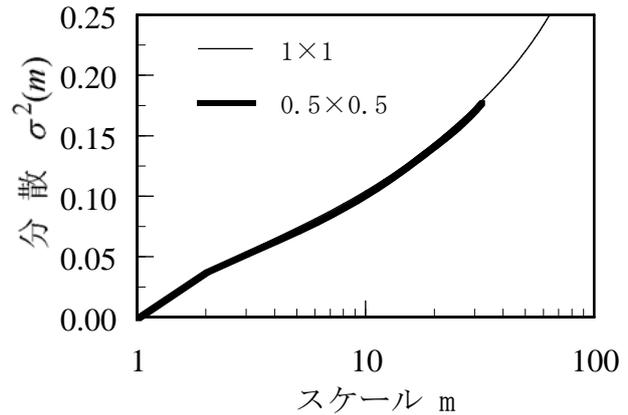


図-5.42 解析スケールと分散の関係 (べき乗モデル)

(3) 1/f型モデル

1/f型モデルで用いられるパラメータは、式(5.66)における ζ および比例定数である。ここで比例定数は、 Y の分散に関わるが、任意の正数を用いて透水係数分布を生成したとしても、確率分布は正規分布となるため、生成後に平均値および分散を操作することは容易である。また、 ζ に関しては、 $\zeta \approx 2.0$ であることから実質的に必要となるパラメータは分散 σ_r^2 のみである。

図-5.43は、図-5.42と同様に解析スケールと分散の関係を示している ($\zeta=2.1$ の場合)。

べき乗モデルと同様に、分散は解析スケールに応じて一意的に定まり、統計的性質はスケールの変化に対して不

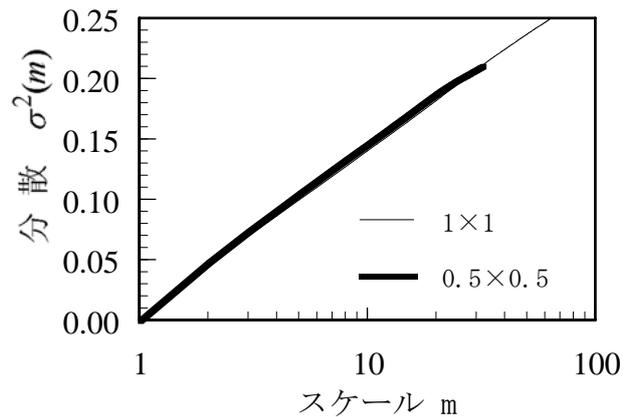


図-5.43 解析スケールと分散の関係 (1/f型モデル)

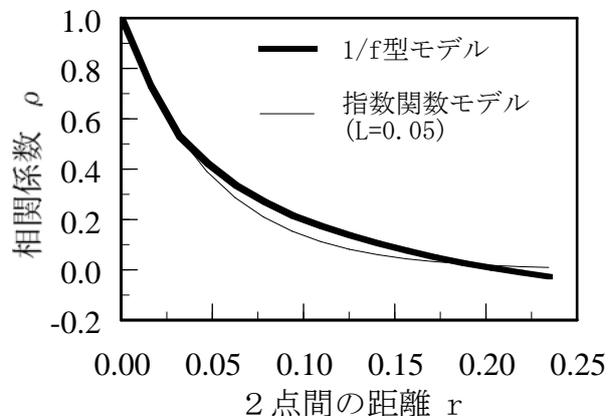


図-5.44 部分領域の自己相関係数 ($m=32$)

変であることがわかる。それに加えて、 $1/f$ 型モデルでは、スケールと分散の関係が、片対数紙上でほぼ比例関係にあること、すなわち両者の関係は対数関数で表現し得ることがわかる。これにより、ある解析スケール μ における確率場の分散 $\sigma^2(\mu)$ が既知であれば、スケールと分散の関係が式(5.70)のような簡単な関数の形で求められ、任意のスケール m に対する分散 $\sigma^2(m)$ を得ることができる。

$$\sigma^2(m) = \frac{\sigma^2(\mu)}{\log(\mu)} \log(m) \quad (5.70)$$

また、**図-5.44**は 1×1 の全体領域から 0.5×0.5 の部分領域を抽出した場合（すなわち $m=32$ ）の自己相関係数である。これより、 $1/f$ 型モデルの自己相関係数は、 $L=0.05$ とした指数関数モデルの自己相関係数と類似しており、スケールに応じた自己相関となっていることが確認できる。

図-5.45は全体領域および部分領域のバリオグラムを示しているが、片対数上で直線的に増加しており、全体領域のバリオグラムは部分領域のバリオグラムを延長することによって得られることがわかる。

このように、 $1/f$ 型モデルも、べき乗モデルと同様にスケールの変化に対して容易に対応することが可能である。

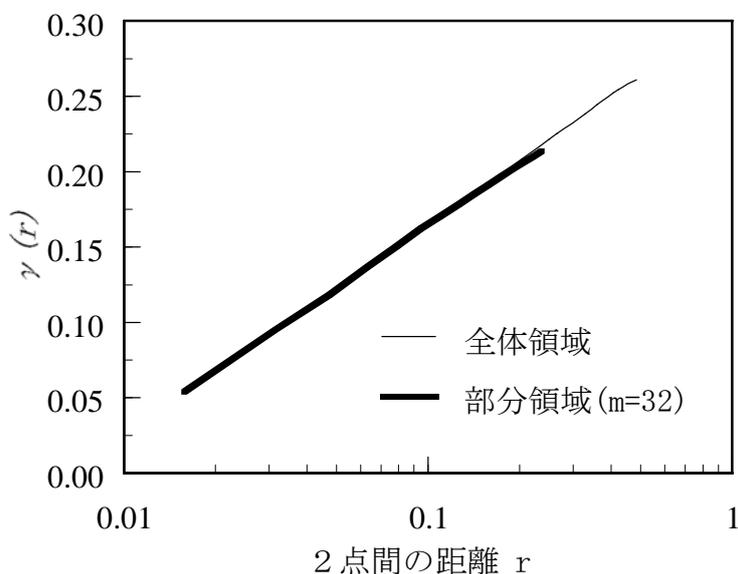


図-5.45 $1/f$ 型モデルのバリオグラム

5. 8 解像度の変化と分散の関係

有限要素法や差分法などの数値解析を実行する場合、メッシュサイズやグリッドサイズは対象とする問題に応じて設定される。不均質場のシミュレーションの際には、各要素内の透水係数の平均値を要素ごとに与える。このとき、平均化する大きさについては、下限値としてBear⁴⁾が示したREV (Representative Elementary Volume) 以外に明確な基準は存在しない。

一方で、ある解析領域に対して、平均化する要素の大きさが異なれば分散も変化する。定性的には分割数を多くする (=解像度を上げる) と、分散は大きくなり、粗くすると分散は小さくなる。極端な例として、解析領域内の透水係数を一つの値で代表させるならば、分散は0となる。

また、分散を実測値から求める場合、サンプルのサイズによって分散が変化することも知られている¹⁵⁾。一般的にはサンプルのサイズを大きくすることは、解像度を下げることの意味し、分散は小さくなる。つまり、分散の実測値を直接数値解析に用いるためには、サンプリングの解像度と数値解析の解像度を等しくする、すなわち要素サイズと等しいサンプルを採取しなければならないが、現実的には不可能であり、サンプルの大きさと数値解析の解像度の違いを考慮した上で分散を設定する必要がある。

本節では、以上のような解像度と分散の関係に着目し、各空間分布モデルにおけるこれらの関係について考察する。

(1) 指数関数モデルおよび自己回帰モデル

ある正方形領域を、 $n \times n$ 個の小領域に分割した場合の解像度を n で表し、透水係数の対数値 Y^n の分散を $\sigma^2(n)$ とする。はじめに、 $\sigma^2(2^N)$ を既知として領域を $2^N \times 2^N$ 個の要素に分割し、透水係数分布を発生させる。つぎに解像度を 2^{N-1} に低下させた場合、要素の面積は4倍となるが、このとき各要素の透水係数の対数値は解像度 2^N の場において隣接する 2×2 個の要素の平均値とする。このような平均化操作を N 回繰り返した場合の分散 $\sigma^2(n)$ の変化について調べる。

図-5.46および図-5.47の実線は、 $N=6$ として指数関数モデルおよび自己回帰モデルについて分散 $\sigma^2(n)$ の変化を求めたものである(領域: 1×1 , $L=0.1$, $1/\kappa=0.065$)。

任意の解像度 n ($n < 2^N$)における分散は、このようにして得られた曲線を適当な関数で補間することによって得られる。破線は、 $n=32$ における分散を実線から求め、 $N=5$ として同様に $\sigma^2(n)$ の変化を求めたものである。図-5.46および図-5.47より、解像度を低下させる場合は、内挿により分散は一意的に定まることがわかる。これは、解像度を変化させても、スケールに関するモデルパラメータは変わらず、統計的性質は変化しないためである。ただし、解像度を上げる場合、すなわち $n > 2^N$ の分散を求めるためには、外挿関数を用いなければならない、その妥当性をその都度確認しておく必要があると思われる。

しかしながら、一例として $100\text{m} \times 100\text{m}$ の領域から直径 0.1m のサンプルを無作為に採取した場合を考えると、得られた標本分散は解像度 1000 の確率場に対応するものであり、図-22あるいは図-23の関係を求めるためには $N=10$ の場を基準にする必要がある。つまり実際には解析対象領域が大きくなると、これらの関係を得ることは計算上困難と考えられる。

(2) べき乗モデル

指数関数モデルおよび自己回帰モデルと同様に、 $N=6$ として平均化操作によって分散の変化を求め、 $n=32$ における分散から同様に $N=5$ の場合の分散の変化を求めた(図-5.48)。ここで、 $N=6$ としたときのパラメータは、それぞれ $a=0.34$, $H=0.25$ で

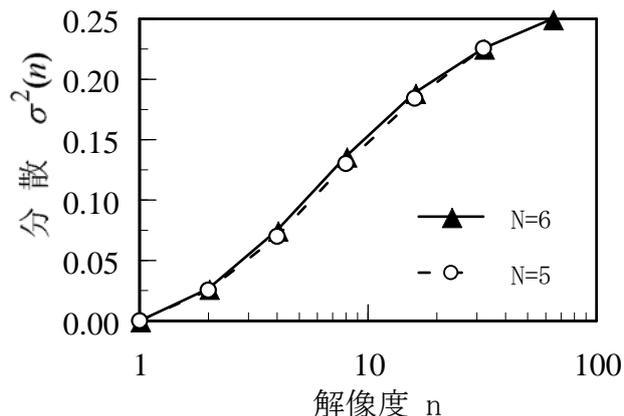


図-5.46 解像度と分散の関係
(指数関数モデル)

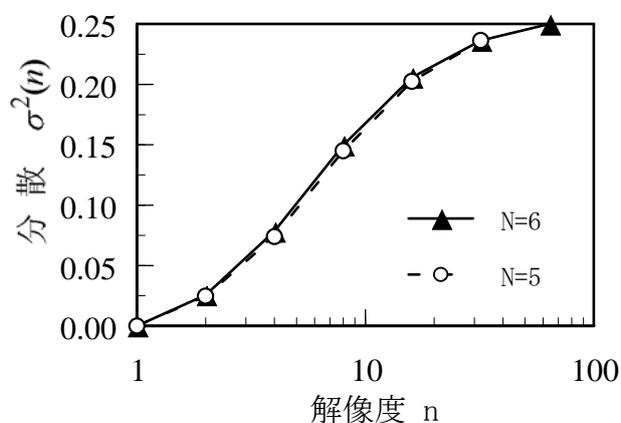


図-5.47 解像度と分散の関係
(自己回帰モデル)

ある。

べき乗モデルの場合、分散はパラメータとして陽に表れないが、 a によって変化させることができる。 $N=6$ のとき、 $n=32$ の分散は $n=64$ の分散の約0.85倍であることから、 $N=5$ では、 $a = 0.34 \times 0.85 = 0.29$ とした。

図-5.48より、 $N=6$ と、 $N=5$ の場合では分散の変化が異なっており、一意性が無いことがわかる。また、図-5.49は $N=6$ における解像度 $n=64$ および $n=32$ の場合の自己相関係数（100回の試行の平均値）を示しており、平均化の前後で自己相関係数を比較したものである。これより、平均化後の自己相関係数は、もとの自己相関係数と異なっていることがわかる。つまり、平均化することによって統計的性質が変化するため、分散が一意的に定まらないものと考えられる。

(3) 1/f型モデル

これまでと同様に、平均化操作による分散の変化について検討する。図-5.46は、 $N=6$ および $N=5$ の場合の分散の変化を示している。ここで用いたパラメータは、 $\zeta=2.1$ 、 $\sigma^2(64) = 0.25$ 、 $\sigma^2(32) = 0.205$ である。

図-5.50は、2章においてスケール

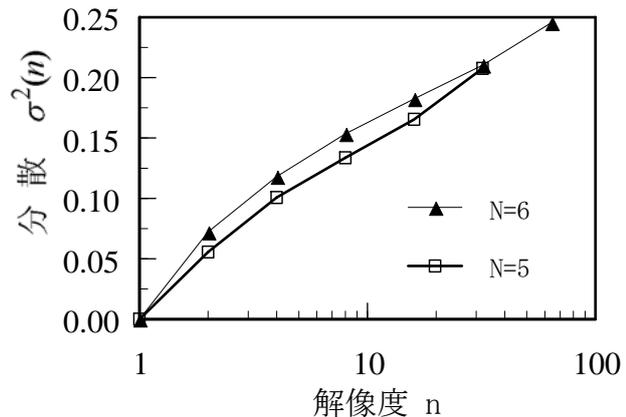


図-5.48 解像度と分散の関係 (べき乗モデル)

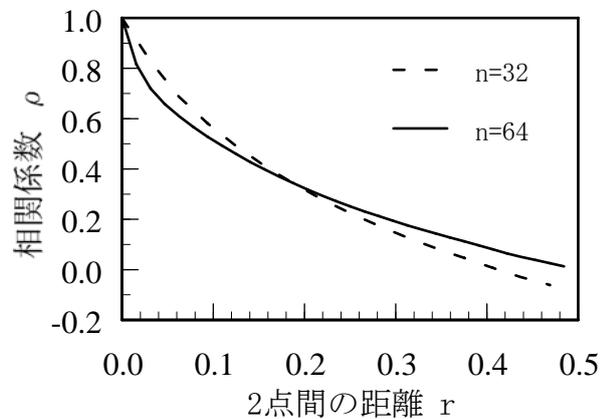


図-5.49 平均化による自己相関係数の変化 (べき乗モデル)

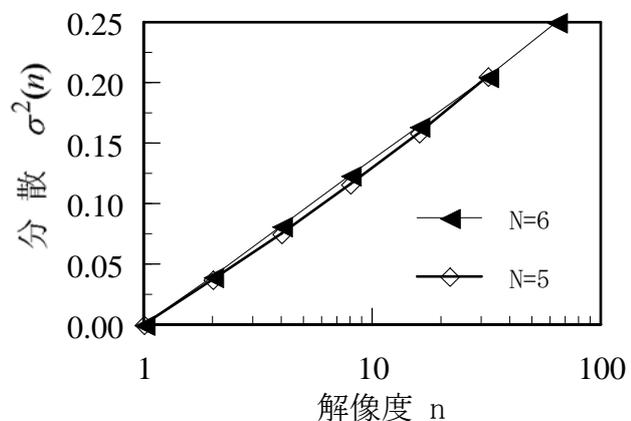


図-5.50 解像度と分散の関係 (1/f型モデル)

変化と分散の関係を示した図-5.43とほぼ同一の関係を示している。すなわち、 $1/f$ 型モデルでは、スケールが変化する場合と同様に、片対数紙上で直線分布となり、分散の変化は対数関数となることがわかる。また、解像度を変化させたとしても、分散は一意的に定めることができ、任意の解像度に対する分散を容易に計算することが可能である。

たとえば、解像度 ν の確率場に対する標本分散 $S^2(\nu)$ が得られている場合、任意の解像度 n ($n \geq 1$) における分散 $\sigma^2(n)$ は、次式より推定することができる。

$$\sigma^2(n) = \frac{S^2(\nu)}{\log(\nu)} \log(n) \quad (5.71)$$

このように、 $1/f$ 型モデルの場合、式(5.70)および式(5.71)を用いれば、解析スケールと調査範囲の相違、およびサンプルサイズと数値解析上の分割サイズの相違を考慮した分散を容易に設定することができる。

ここで、解像度変化と分散の関係が、スケール変化と分散の関係と等しくなる理由は、 $1/f$ 型モデルにおけるサンプル場の生成方法から説明することができる。

正方形領域の分割によって $1/f$ 型モデルのサンプル場を生成する場合、必要となるパラメータは、 θ^1 および ε である。ここで、 $\varepsilon \doteq 1$ とすると実質的に必要なパラメータは変動の大きさを決める θ^1 のみである。また、分割のプロセスは、解析スケールを一定として解像度を上げていくことを前提に構成されているが、常に相対的な関係のみを用いており、絶対的な長さは無関係である。

つまり、この生成プロセスでは、スケールが一定の場において解像度を上げるプロセスと、解像度が一定の場においてスケールを拡大していくプロセスの区別は無い。したがって両者は統計的に同じ性質を示すのである。

5. 9 実測値との比較

広域的な透水係数分布について、これまでにいくつかの調査事例が報告されている。ここでは、Desbaratsら¹⁶⁾によって報告されたカナダ・アルバータ州内の約70,000km²での透水量係数分布の調査結果を取り上げ、1/f型モデルによる透水量係数分布と比較し、モデルの妥当性を検証する。

(1) 解析領域および解析方法

調査対象領域は概ね200km×350kmであり、地質は砂岩層である。なお、その他調査内容の詳細については、参考文献を参照されたい。

図-5.51は、透水量係数の自然対数変換値のバリオグラムを両対数紙に表示したものである。このようにバリオグラムが一定値に収束しない場合、指数関数モデルや自己回帰モデルは適用し難いと考えられる。

ここで、調査地点間の最小距離は400mとなっており、解析スケールは短辺でも200kmであるから、この領域をモデル化するためには、500×500個の要素が必要となる。これは計算する際に大きな負荷となる。しかしながら、1/f型モデルのバリオグラムは、対数関数で近似し得るので外挿が可能である。この性質を利用して、まず51.2km四方の領域をとりあげ、128×128個の領域に分割し、バリオグラムを求める。つぎにこれを100kmに延長し、図-5.51と比較する。

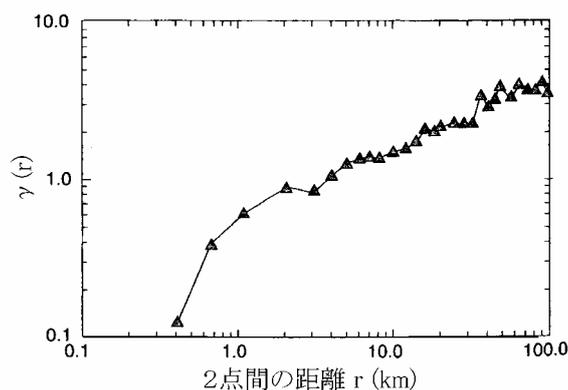


図-5.51 砂岩層における透水量係数のバリオグラムの実測例¹⁶⁾

(2) 解析結果

図-5.52は、 $\zeta=2.0, 2.1, 2.2$ として1/f型モデルにより透水量係数分布を30回発生さ

せ, それらのバリオグラムの平均値から片対数紙上で回帰直線を求めたものである. ここで分散 σ_r^2 は, 図-5.51における $r=25\text{km}$ 付近の $\gamma(r)$ のおよその値から, $\sigma_r^2=2.2$ ($\sigma_r=1.48$) とする. これより, $\zeta=2.2$ とした場合に最も再現性が高いと判断した.

図-5.53は, $\zeta=2.2$ の場合の回帰直線を両対数紙上に表示し, 実測例と比較したものである.

$\zeta=2.2$ として求めたバリオグラムは図-5.51の実測値の特徴を広範囲にわたって良好に再現していることがわかる.

以上のように, $1/f$ 型モデルは実地盤を模擬するモデルとして妥当性が高いことが確認される.

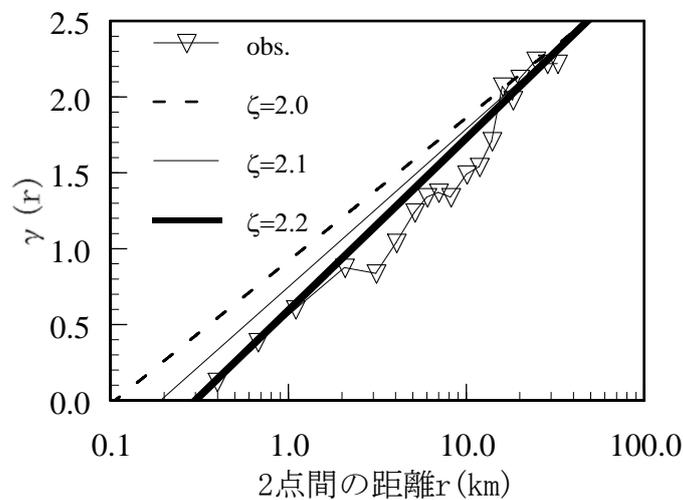


図-5.52 $1/f$ 型モデルによるバリオグラムの回帰直線

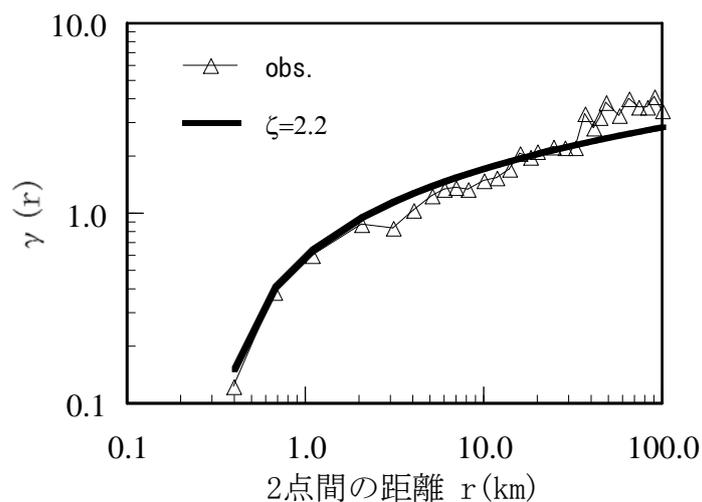


図-5.53 実測バリオグラムとの比較

5. 10 第5章のまとめ

本章では，透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い，これに基づく数値模擬地盤の作成方法を提案した．さらに，この数値模擬地盤に対して統計的性質，周期的性質，水頭分布および流速分布に関する性質等について検討した．また，透水係数の空間分布モデルについて，指数関数モデル，自己回帰モデル，べき乗モデル，および $1/f$ 型モデルをとりあげ，それらの統計的性質等について整理した上で，モデルの適用性について考察した．以下に得られた結果をまとめる．

- 1) 本手法により作成された模擬地盤において，計算された透水係数の確率分布は，対数正規分布で近似的に表現できる．これは，これまでに自然地盤から得られた知見と合致する．
- 2) 模擬地盤における透水係数の空間変動のパワースペクトルは，概ね $1/f$ 型を示す．これは，透水係数の空間分布が自己相似性を有することを示すものであるが，不同沈下の空間分布が $1/f^\beta$ 型であることから，自然地盤が自己相似性を有することが推察される．
- 3) 不均質地盤における地下水面は，なめらかな曲面ではなく，フラクタル曲面と考えられる．
- 4) 地質学的に同一と判断される地層内における水頭分布は，透水係数の空間的ゆらぎに支配され，統計的性質が同じ地盤においても様々な水頭分布を生じる可能性がある．
- 5) 本研究にて作成した模擬地盤上にも，局所的な水みちが発生する．これも，自然地盤から得られている知見と合致する．
- 6) 地盤の不均質性の影響は，流速分布においてより顕著にあらわれる．
- 7) 2次元等方性地盤に対する $1/f$ 型モデルのパワースペクトルは，ほぼ $1/\lambda^2$ に比例する．
- 8) $1/f$ 型モデルの自己相関係数は，対数関数となる．また，解析スケールに応じて変化し，これを指数関数モデルで近似した場合の積分特性距離 L は，解析スケールの0.1倍程度となる．これは，実地盤より得られている知見と一致する．
- 9) 指数関数モデルおよび自己回帰モデルは，解析スケールの変化に対して分散が一意的に定まらない．

- 10) ベキ乗モデルは、解像度が変化すると自己相関係数が変化し、分散も一意的に定まらない。
- 11) $1/f$ 型モデルでは、スケールの変化および解像度の変化に対して、分散は同様に変化し、対数関数で近似し得る。このためいずれの変化に対しても一意的に分散が定まるとともに、容易に内挿・外挿することができる。
- 12) 実測によって求められたバリオグラムに対して、 $1/f$ 型モデルは良好な再現性を有することが確認された。

これらの結果は、理論的考察に基づいて作成された模擬地盤より得られたものであるが、いくつかの仮定を導入しており、これらの妥当性は今後の検討課題と認識している。

しかしながら、ここで得られた模擬地盤は、自然地盤の特徴を、容易に再現し得る可能性を有しており、その不均質性に由来する様々な現象を解明する上できわめて有効であると考えられる。

また、透水係数の空間分布について、調査・試験によって得られる情報は一般に局所的なもの、あるいは平均値・標準偏差等に限られる。本手法はこれらの情報から、自然地盤の特徴を失わずに、空間的に異なる透水係数の分布パターンを無数に発生させることが可能であり、この模擬地盤を用いて解析することによって、注目する物理量（例えば水位・水頭、濃度、流量など）が存在する範囲を確率的に予測し得る。さらに、この予測に基づいて水位・水頭等の追加的な観測を行えば、その観測結果の再現性を検証することによって、現場の地盤条件により近い模擬地盤を抽出し、流況の予測精度を向上させられると考える。

なお、ここでは透水係数の空間分布を対象としたが、これに限らず、不均質地盤における各種の土質定数の空間分布を考える上でも、本手法を適用することは可能であると思われる。

参考文献

- 1) Freeze, R. A. : A stochastic-conceptual analysis of onedimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, *Water Resources Research*, Vol.11, No.5, pp.725-741, 1975.
- 2) 原田守博, 内田浩一, 高木不折 : 地下水流動モデルのパラメータ評価に関する一考察, 第39回土木学会年次学術講演会概要集第2部, pp.5-6, 1984.
- 3) Delhomme, J. P. : Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters : a geostatistical approach, *Water Resources Research*, Vol.15, No.2, pp.269-280, 1979.
- 4) Bear, J. : Dynamics of fluids in porous media, 764 pp., Elsevier, New York, 1972.
- 5) 武者利光 : ゆらぎの世界－自然界の $1/f$ ゆらぎの不思議, pp.106-134, 講談社, 1980.
- 6) 脇田栄治, 松尾 稔 : 不同沈下のフラクタル的性質とそれを応用した沈下推定, 土木学会論文集, No.529 / III-33, pp.69-81, 1995.
- 7) Gelher, L. W. : *Stochastic Subsurface Hydrology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- 8) Di Federico, V., and Neuman, S. P. : Scaling of random fields by means of truncated power variograms and associated spectra, *Water Resources Research*, Vol.33, No.5, pp.1075-1085, 1997.
- 9) 小倉久直 : 確率過程入門, 163-168p., 森北出版, 1998.
- 10) 前川恵輔, 尾方伸久, 柳澤孝一, 高瀬博康 : フラクタル理論による堆積岩中の透水係数分布の推定, 動燃技報, No.98, pp.71-76, 1996.
- 11) Chang, Ching-Min and Kemblowski, M. W., : Infiltration in soils with fractal permeability distribution, *GROUND WATER*, Vol.31, No.2, pp.187-192, 1993.
- 12) Neuman, S. P. : Generalized scaling of permeabilities: validation and effect of support scale, *Geophys. Res. Lett.*, Vol.21, pp.349-352, 1994.
- 13) Mandelbrot, B. B. and Van Ness, J. W. : Fractional brownian motions, *SIAM Review*, Vol.10, pp.422-437, 1968.
- 14) Bellin, A. and Rubin, Y. : HYDRO_GEN: A new random number generator for correlated properties, *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Vol.10, No.4, pp.253-278, 1996.
- 15) 太田猛彦, 片桐真 : 大型透水試験機による森林土壌の透水係数の測定 (I), 日

本林学会誌, Vol.74, pp.373-382, 1992.

- 16) Desbarats, A. J. and Bachu, S. : Geostatistical analysis of aquifer Heterogeneity from the core scale to the basin scale: A case study, *Water Resources Research*, Vol.30, No.3, pp.673-684, 1994.

第6章 結論

本研究では、地下水・浸透流に関するいくつかの問題をとりあげ、これらを解析するための数値解析コードを開発し、数値シミュレーションを応用して地盤内の流れと物質輸送に関する考察を行なった。また、地盤の不均質性に関する理論的考察を行い、これに基づく透水係数の空間分布モデルを提案するとともに、その適用性について検討した。各章で得られた結果は、それぞれの章末にまとめているが、以下に要約を記し結論とする。

第1章では、研究の背景として、水資源の確保および地下空間開発の観点から地下水解析の必要性、およびこれに対する数値解析の有効性について述べ、従来の研究と課題について整理するとともに、本研究の目的を示した。

第2章では、地下水汚染の問題をとりあげ、有限要素法による飽和・不飽和浸透流解析と、SUPG法による移流分散解析を連立させることにより、断面2次元および3次元空間内の密度変化を考慮した数値シミュレーションを行った。これにより、汚染源が飽和領域内に存在する場合、水との密度差が大きくなると鉛直方向の流れが無視できなくなることを、また、汚染源が不飽和領域内に存在する場合は、汚染源付近は長期にわたって高い濃度が維持されること、および密度差の影響は時間の経過とともに小さくなることを確認した。加えて、密度差が大きく、鉛直流が無視できない場合は、汚染物質は3次的に広がるため、拡散防止対策について検討する場合は3次的な挙動に注意する必要があることを示した。

第3章では、高圧空気の飽和岩盤内への侵入過程を把握するため基礎方程式を無次元化し、これに基づく数値解析を実施した。これにより、解析スケールが異なると、空気の圧縮性と飽和度分布の違いによって、相対的な漏気量も異なること、すなわち、漏気量は解析スケールに比例しないことを示した。この飽和度分布の違いについては、無次元化された水分特性曲線によって説明することができる。また、空気圧が周期的に変動する場合は、空気圧の平均値が水圧を下回っていれば、ピーク時に水圧を上回ったとしても漏気量が急激に増加しないこと、および空気圧の平均値が水圧と等しく、かつ変動周期が十分短ければ、漏気量は平均値に相当する一定の空気圧を作用させた場合とほぼ同等であることを示した。

第4章では、大規模掘削工事における地下水低下工法の影響を評価するため、逆解析により難透水層である加圧層を含めた透水係数の推定を試みた。また、平面準3次元有限要素解析により、隣接する帯水層間の透水性の違いや土留壁等の地中構造物の有無が揚水効果に及ぼす影響について検討した。その結果、比較的短時間の定常揚水試験から得られる水頭低下曲線にも加圧層からの漏水の影響は反映されており、逆解析によって加圧層の透水係数を推定することは可能であること、ただし、多くの帯水層定数を一度に推定する場合は、観測値の再現精度や推定値のばらつきについて十分吟味する必要があることを示した。また、施工中の現場にて観測された被圧水頭から逆解析によって透水係数を推定し、観測結果を良好に再現することに成功した。これは、逆解析による推定結果によって漏水性地盤における地下水低下工法の影響を適切に評価することが可能であることを意味する。さらに、漏水性被圧帯水層において揚水を行う場合は、揚水対象地盤のみならず、加圧層とそれに隣接する帯水層の透水性、および地中構造物の存在も無視できないことを明らかにした。

第5章では、透水係数の空間分布に関する理論的考察を行い、これに基づく数値模擬地盤の生成方法を提案するとともに、その統計的性質、周期的性質、および水頭分布・流速分布に関する性質等について検討した。また、従来提案されている透水係数のいくつかの空間分布モデルと本研究で提案したモデル(1/f型モデル)に関する諸性質を整理した上で、各モデルの適用性について考察した。その結果、1/f型モデルによって生成された透水係数分布の確率分布は対数正規分布に従い、従来自然地盤から得られた知見と一致した。また、1次元空間における変動のパワースペクトルは概ね1/f型であること、および2次元等方性地盤ではパワースペクトルは $1/\lambda^2$ に比例することを示した。水頭分布に関しては、滑らかな曲面ではなくフラクタル曲面と考えられること、および地質学的に同一と考えられる地層内においても、透水係数の空間的ゆらぎによって多様な水位・水頭分布を生じる可能性があることを確認した。流速分布については、水位・水頭分布と比較して不均質性の影響を受けやすく、本手法によって生成された模擬地盤においても、自然地盤においてしばしば観察される局所的な水みちが発生した。

自己相関係数は、ほぼ対数関数となり解析スケールに応じて変化することを示した。これを指数関数モデルで近似した場合の積分特性距離は、解析スケールの0.1

倍程度となった。これも自然地盤における観測結果から得られている知見と一致する。さらに、従来用いられている指数関数モデルや自己回帰モデルでは、解析スケールの変化に対して分散が一意的に定まらず、べき乗モデルでは、解像度の変化に対して分散が一意的に定まらないのに対し、 $1/f$ モデルではスケールおよび解像度の変化に対して分散は同様に変化し、ほぼ対数関数に従うことを明らかにした。このため解析スケールや解像度の変化に対して分散は一意的に定まり、容易に内外挿することができる。加えて実測によって求められたバリオグラムに対しても、 $1/f$ 型モデルは良好な再現性を有していることを確認した。

以上、本研究は数値解析によって地盤内の流れと物質移動について検討するとともに、地盤の不均質性、とくに透水係数の空間分布について考察した。

謝 辞

本研究を行うにあたり，適切なる御指導と御助言を賜りますとともに，本論文をまとめる機会を提供して下さいました神戸大学都市安全研究センター教授・川谷健先生に心より感謝の意を表します．学生時代に先生の御指導の下，目に見えない地下水の世界の不思議，またそれを解き明かす数値解析の面白さに触れたことが本研究の原点です．

神戸大学名誉教授・広島工業大学長・櫻井春輔先生，神戸大学工学部助教授・芥川真一先生には，本研究を行う上で多大なる御配慮を賜りました．厚く御礼申し上げます．

神戸大学工学部教授・森山正和先生，神戸大学都市安全研究センター教授・田中泰雄先生には，本論文をまとめるにあたり，多くの貴重な御助言を賜りました．ここに深く感謝致します．

神戸大学自然科学研究科教授・中山昭彦先生，神戸大学都市安全研究センター助教授・藤田一郎先生には，適切かつ有益な御助言を賜りました．深く感謝致します．

神戸大学工学部技術専門職員・市成準一氏には，特に計算機システムに関して全面的に御支援を戴きましたほか，研究上の様々な局面においても常に惜しめない御協力と御配慮を賜りました．ここに厚く御礼申し上げます．

修士課程修了後6年5ヶ月に渡って勤務致しました住友金属工業株式会社建設技術部では，数々の貴重な経験と出会いに恵まれました．なかでも東京本社在籍当時の建設技術部・井出隆也部長，加藤敏室長，小山清一課長には，職務を通じて地盤工学に関する最前線の技術を学ぶ機会を与えて頂きました．また，退職時には当時の飯田毅部長，中里卓三次長をはじめ，多くの先輩・後輩，そして同僚や，仕事を通じて知り合った方々から温かい励ましと応援の言葉を頂戴致しました．心より感謝の意を表します．

最後に，今日まで身勝手な息子を許し，常に温かく見守って下さった両親と，いつも傍らで支えてくれた妻 博美に心から感謝致します．