



図形指導における論理構成活動の原理に関する研究 ：推論の“表現フレーム”を使って複数の論理の流れを同時に構成していく幾何の授業原理

柳本，成一

(Degree)

博士（学術）

(Date of Degree)

2005-12-21

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

乙2847

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2002847>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



【 2 4 3 】

氏 名・（本 籍） 柳本 成一 （ 福井県 ）

博士の専攻分野の名称 博士（学術）

学 位 記 番 号 博ろ第101号

学位授与の 要 件 学位規則第5条第1項該当

学位授与の 日 付 平成17年12月21日

【 学位論文題目 】

図形指導における論理構成活動の原理に関する研究
—推論の“表現フレーム”を使って複数の論理の流れを
同時に構成していく幾何の授業原理—

審 査 委 員

主 査	教 授	船越	俊介
	教 授	高橋	正
	教 授	小川	正賢
	教 授	稲垣	成哲
	助教授	宮田	任寿

論文内容の要旨

氏 名 柳 本 成 一
推薦教授氏名 船 越 俊 介

論文題目

図形指導における論理構成活動の原理に関する研究

—推論の“表現フレーム”を使って複数の論理の流れを同時に構成していく幾何の授業原理—

論文要旨

【序章】本研究の成立過程と先行研究

短大卒の年齢で大学卒と遜色のない技術者を育てることを目指して昭和37年に発足した高等専門学校（略称「高専」）では、これまで高等学校と理工系の教養課程の5年間で学習してきたことを、中学校卒業後4年間で学習させてしまう数学の授業が行われていた。学習期間を20%短縮された高専の学生が従来の理工系の学生達の学力と同等、あるいはそれ以上の学力を身につけるためには、普段の学習に理工系の学生達よりもより多くの時間を掛け、20%以上学習速度を上げる必要があった。しかし、入学してしまえば厳しい大学入試を受験することなく、「大学卒」と殆ど同じように（高度経済成長を続ける）大企業への就職が可能のために、要領よく進級することだけをかんがえる者が多くなり、普通高校から理工系の大学へ進学して行く者より多くの学習時間を掛けて学習速度を上げる努力をする者が少なくなっていた。また、学習に時間を掛けても学習速度を上げることが出来ない者達も少なくなかった。そのために、授業についていけない、いわゆる“遅れがちな学生”が次第に多くなっていった。しかし、「教員定数」「教室数」「授業時間数」や「カリキュラム」に余裕がないために、勤勉で優秀な、いわゆる“進んでいる学生”と“遅れがちな学生”とを分離する習熟度別学級編成の授業も出来なかった。“遅れがちな学生”がわかるように説明していると授業が進まず、“進んでいる学生”に照準を合わせて授業を進めていくと“遅れがちな学生”にはわからない。“遅れがちな学生”と“進んでいる学生”の一方が他方の学習の妨げになろうとする……これは、出来上がった数学的論理の流れを教師が説明していく形で展開していく「高専」の数学の授業につきまとう最も深刻且つ解決困難な問題であった。この問題を回避するために行われたのが、提示された映像情報と音声情報から、教師が教えたい数学的論理の流れを学生達につくり上げさせていく“Audio-VisualTest”による授業であった。“遅れがちな学生”と“進んでいる学生”が共に真剣にとり組む“Audio-VisualTest”の研究に高い関心を示したのは一高専と同じように算数・数学の授業における習熟度の差の拡大にどう対応したらよいのか、その対応の仕方に苦慮していた県下の小中学校の教師達であった。そのために、いつの間にか県下の小中学校の教師達と共に“Audio-VisualTest”の研究の成果を踏まえた「幅

広い習熟度の差を許容する算数・数学の授業研究」が行われるようになっていった。本研究はその一部をまとめたものであるが、それは、出来上がった数学的論理の「わかりやすい」説明の仕方を追求する授業研究ではなく、子ども達自身の手で数学的論理の流れを構成させることによって算数・数学を学ばせようとする授業の研究である。序章では、上に述べて来た本研究の成立過程に加えて、（子ども達自身の手で数学的論理の流れを構成させることによって算数・数学を学ばせようとする授業に関する）先行研究と本研究の関連についても言及している。

【第1章～第3章】子ども達が複数の命題と証明を同時に“つくり上げていく”幾何の授業

—数学者集団の共同による論理構成活動に注目して—

◎数学学習の基本—数学的論理の構成能力の育成—

遺伝子に組み込まれて伝達されない人間の本質的な能力の典型である先人達の数学的論理の構成能力は、数学的な論理の構成活動（能力の対象化）によって、数学的な論理体系という誰にでもわかる形に対象化され「文化遺産」として残されて来た。新たに生まれて来る人間は、彼・彼女以前の人々が残してくれた文化遺産（数学的論理体系）より、対象化されている人間的な数学的論理の構成能力を引き出し、それを我がものに（＝内化）し、更に新たな数学的論理の構成活動によって、数学的論理の構成能力を発達させ、新たな能力の「対象化」を行って来た、……このようなサイクルを人類の長い歴史の中で展開しながら、人間の数学的論理の構成能力は発達して来たのである。このように、対象化された数学的論理の構成能力を我がものにする活動こそ、子ども達の数学“学習の基本”であり本質である。それ故に、数学者の残した厳格な数学的言語で表現された論理体系より、数学的論理を“つくり上げていく”能力を身につけていくためには（数学者の数学的論理の構成活動をそのまま繰り返すわけではないが）子ども達は数学者と似たような立場に置かれること—数学者と質的に同じような態度をとること—が求められる。そうしなければ、数学的論理の形式的な理解や応用はできても、自ら納得のいく数学的推論に基づいて数学的論理を“つくり上げていく”能力は身に付かないであろう。問題は、数学者の論理構成活動というものをどのように捉えて授業を考えるかである。

◎数学者の論理構成活動—推論の拠り所にする既知命題の提唱者との共同思考—

数学の論理体系を構成する一つ一つの論理の流れは、研究者が「既知命題」を拠り所にした推論によって一構成したものであるが、それぞれの「既知命題」には、必ずそれらを考え出した数学者がいるはずである。従って、如何なる数学者によって構成された論理の流れも、彼・彼女が引用した「既知命題」の提唱者達との「共同」による研究の産物として捉えるべきであろう。また、ある命題が複

数の研究者によって既知命題として引用されることがあるが、それは、その命題の提唱者が複数の論理構成活動に参加していることとして捉えられるであろう。それ故にクラスの子ども達一人一人が数学者と質的に同じ態度をとりながら、数学的論理を構築していく授業というのは、クラスの子ども達が一つの数学者集団として、複数の論理を同時に“つくり上げていく”ような授業になっていなければならないのである。

◎一斉授業が抱える難問題

子どもの立場から見れば幾何の「一斉授業」も、教師の指導の下に教師が教えたい（命題とその証明を含む）論理の流れを“つくり上げていく”ことが求められる活動の場として捉えることが出来る。明治以来、教室内のすべての子に、同一の学習内容を同一方法で教授する“一斉教授”（一斉授業）が広く行われて来たが、一斉授業は子どもの集団が同質であるという前提の上に立っているために、次のような2つの深刻且つ解決困難な問題を抱えている。

【問題1】教師が教えようとする（命題とその証明を含む）論理の流れを既に知っている“進んでいる子”は授業中“学習完成者”の状態に置かれ……その先のように論理構成活動を展開していって良いのかわからないために……授業中、新たな命題とその証明を含むような論理の流れは何も構成できない。

【問題2】教師の指示通り、論理構成活動を展開できない“遅れがちな子”は、教師が教えようとする（命題とその証明を含む）論理の流れを構成することが出来ないまま授業を終わらなければならない。

子ども達一人一人が自らの手で論理の流れを構成していく活動の原理を把握していないために起こる問題1及び問題2は、一斉授業に固有な問題ではなく、子ども達が主体的に個人・集団で行う論理構成活動の原理が明確になっていない授業が共通に抱えている難問題と言えよう。

【本研究の目的】本研究の主たる目的は、子ども達が数学者と質的に同じような態度をとりながら個人・共同で複数の論理の流れを同時に“つくり上げていく”、（前記の問題1,2の起こらない）幾何の授業原理を提唱することにある。

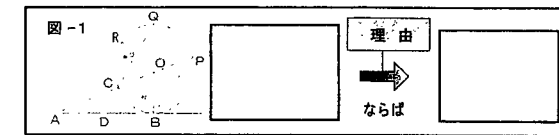
◎子ども達が幾何学的な複数の論理を同時に“つくり上げていく”ための基本活動の設定と演繹的推論の“表現フレーム”の導入

子どもの立場から見れば授業は、教師の指導の下に論理の流れを“つくり上げていく”活動の場であるが、問題は、どのような活動によって子ども達に「論理の流れ」を“つくり上げ”させていくか、その活動を具体的に示すことである。本研究では、子ども達が個人・共同で複数の論理の流れを同時に“つくり上げていく”ための、次のような5つの基本活動I～Vを考える。

基本活動I：「論理の流れ」を構成するために必要な一思考の対象となる図形を準備する。

基本活動II：思考の対象（図形）に適用したり、論理の流れをつくり上げていく過程に必要な既知の知識を準備する。

基本活動III：既知の知識を対象（図形）に当てはめて、対象に関する情報群を収集する。



基本活動IV：図-1のような「枠組み」—演繹的推論の“表現フレーム”と呼ぶ—を使って、活動IIIで得られた情報群を結合して、対象（図形）に関する小命題群を作成する。

基本活動V：基本活動IVで得られた小命題群を結合して—教師が子ども達に教えたい論理の流れを含む—複数の論理の流れから成る論理の“CHART”を作成する。

◎段階的な図形指導の根拠を与えるVan Hieleの提唱した図形学習の5段階

Van Hieleは数学的思考の特質は、考察の「方法」であったものを新たに考察の「対象」にしていくこと—“方法の対象化”—にあるとして、幾何の学習のレベルを5段階（第0水準～第4水準）に区分しているが、上記の基本活動I～Vとの間には次のような関係がある。

第0水準⇔基本活動I, II……（図形に関する情報群を得るまでの段階（第0水準）の活動として、本研究の基本活動I, IIが対応する。）

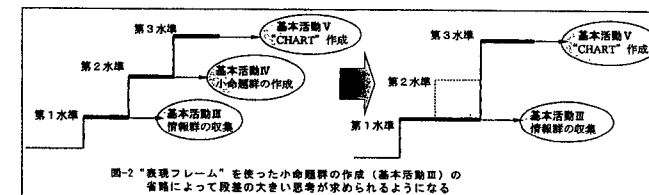
第1水準 ⇔ 基本活動III……（図形に関する情報（or性質）群の収集）

第2水準 ⇔ 基本活動IV……（図形に関する情報（or性質）同士の関係を示す命題の群の作成）

第3水準・第4水準 ⇔ 基本活動V……（基本活動Vでは、小命題同士を結合して、複数の論理の流れを含む“CHART”を作成するが、論理の流れの作成そのものはVan Hieleの第3水準に対応し、その“CHART”からいろいろな論理の流れ同士の関係に関するさまざまな「知見」を得ることは、Van Hieleの第4水準に対応する。）

◎論理の流れの叙述段階では姿を消す“表現フレーム”

基本活動IVにおける“表現フレーム”は論理の流れの表現には必要でないために、従来より、子ども達に、図形に関して気付いたことを発表させ、いきなりそれらを結合して論理の流れを構成していく授業が広く行われて来た。即ち、Van Hieleの第1水準から、第2水準を省略して、子ども達を第3水準へもっていこうとする授業が行われて来たのである。第3水準へ上がる踏み台としての第2水準を取り去ることに



より、第1水準と第3水準との段差が大きくなり（図-2参照）、子ども達が自力で上がることが非常に困難なる。多くの子ども達を「論証」の段階

にまで上昇させることが出来なかった主たる原因はここにあると考えられる。

演繹的推論の“表現フレーム”を使った前記の基本活動I～Vで構成される（大きな段差のない）具体的な論理構成活動の行われる授業として、本研究が第1章～第3章で実践事例を示しながら詳しく論述して

いるのは、次の①②③の3タイプの授業である。

①演繹的推論の“表現フレーム”を使って言語の世界で子ども達が複数の命題と証明を同時に“つくり上げていく”幾何の授業（第1章）

②数学的言語に依存しない論理構成活動によって一図形の世界で一幾何学的論理の流れを構成していく授業（第2章）

①の授業では基本活動Ⅰ～Ⅴで構成される論理構成活動を個人・共同で推進出来ない子ども達らのために考えられたのが②の授業である。

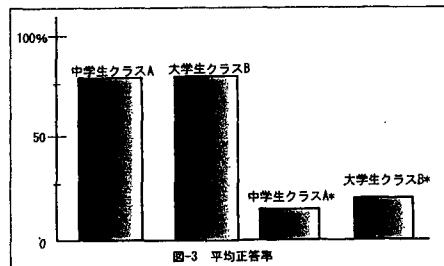
③触覚情報に基づいて構成された図形のイメージを基にして、複数の論理の流れを同時に“つくり上げていく”授業—②の授業のベースとなる授業で、複数の論理を“つくり上げていく”活動の「枠組み」を身につけるための授業—について（第3章で）実践事例を示しながら詳しく論述している。

※注目すべきことは、上記の①②③の順に、前記の問題1,2の起こりにくい授業になっていくということである。

【第4章】“表現フレーム”の導入による学習指導法改善の展望と課題

◎学習指導の対象となってきた論理構成活動の原理

本研究における基本活動Ⅰ～Ⅴ（or それに準ずる論理構成活動）の原理が、従来の授業でも、学習指導の対象とされて来ているのなら、本研究で述べた授業も従来より行われてきた授業も本質的に変わらないであろう。図-3は、上記の①②の授業の復習・まとめのテストとして（中3の



クラスAで）行われたものを、上記の①②の授業を全く受けていない中3のクラスA*及び筆者の担当する算数教材研究を受講する教員志望の2クラスB,B*の学生（但し、Bの学生は、90分授業の2時間分をかけて、上記の①②の授業における論理構成活動について筆者から丁寧な解説を聞き、実体験をしている）に、制限時間50分で解答して

もらい（どのクラスも35名分のスコアを抽選で抽出して）、その平均正答率を対比したものである。

そのテストは、複数の論理の流れを含む論理の“CHART”に設けられた多くの空欄を、与えられた情報群の中から適当な情報を選び埋めていくテストである。

空欄はその数が多いために、それらを正しく埋めていくためには、子ども達が共同で複数の論理の流れを含む“CHART”を“つくり上げていく”のと同じような手法で論理の“CHART”を作成してみて、それと同じような「枠組み」（構造）になっている所を探し、その部分に作成した“CHART”（に含まれている情報）を組み込んでいくような手法を採らなければならない。このような問題は、従来の受験問題のどの解答パターンも当てはまらない問題である。そのために、個人・共同で複数の論理の流れを含む“CHART”作成の経験のないA*の中学生やB*の大学生は、“

CHART”に設けられた多くの空欄をいきなり埋めようとするのである。空欄が多いためにどこをどう埋めていったらよいのかわからなくなり（実際には、そのような方法では正しく空欄を埋めることが出来ないように多くの空欄を設定してあるために）、図-3のような低い正答率になってしまうのである。

これは、上記の①②の授業における論理構成活動の原理が、従来の授業において学習指導の対象となってきたことを意味するものであろう。

◎論理構成過程の途中で消える“表現フレーム”

基本活動Ⅰ～Ⅴに基づいて論理の流れを構成していくとき、基本活動Ⅳにおける小命題群作成において“表現フレーム”は必要不可欠なものである。それにも拘わらず、小命題群を結合して得られた論理の流れを言語で叙述する段階になると不要になる。そのために、出来上がった数学の論理の叙述体系を子ども達に説明・納得させる形で展開された従来の授業では、そのような“表現フレーム”そのものの存在に殆ど目が向けられることがなかったのである。そのために、共通の“表現フレーム”を使っていろいろな論理の流れを構成したり、いろいろな論理を同じ“表現フレーム”を使って表現して比較したり、結合する学習活動は授業の中に採り入れられることが殆どなかったのである。第4章では、こうした“表現フレーム”を使った論理構成活動の授業の行われる授業と、教師が出来上がった論理の流れを解説していく従来の授業とは決して異質なものではなく相互乗り入れが可能なものであるということを指摘し、更に、本研究と先行研究との関連を示しながら、“表現フレーム”の導入による学習指導法改善の展望と課題についても言及している。

【終章】本研究に基づく算数・数学教育の現状への提言

◎求められる“つくり上げていく”数学観

教科書に記載されたことがらを教師が子ども達に、子ども達との対話・問答を交えながら解説していく形で展開していく算数・数学の伝統的な一斉授業に長年馴染んできた子ども達や教師たちの多くは、『子どもが数学（数学的な命題や証明）を“つくり上げていく”なんて、本当に出来るのだろうか?』と思い込んでいる。子ども達が自らの手で「数学」を“つくり上げていく”ことによって「数学」を学ぶ、そのような授業を行うためには、教師はもちろん、子ども達にもにもわかるような平易な“つくり上げていく数学”観を提示する必要がある。

そこで、「数学づくり」を“お話づくり”として捉える、次のような“つくり上げていく数学”観を子ども達向けに提示することを提言している。

《人間には、対象との対話を通して、心に感じたこと、想像したこと、気付いたこと、考えたことを言語で必要ならば映像や具体物などの助けを借りて一表現しようとする人間本来の「営み」としての“お話づくり”がある。数学的な命題やその証明を“つくり上げていく”活動もその例外ではない。数学では“お話づくり”の世界を、数字や数式、記号などを使って表現できる世界に限定しているだけである。》

◎学校における算数・数学の授業に求められる上下関係を意識しない個人・共同による論理構成活動—“表現フレーム”の活用—

クラスの誰もが同じ推論の“表現フレーム”を使って、個人・共同で数学的論理の流れを“つくり

上げていく”授業では、教師や“進んでいる子”の頭の中にある大きな論理の「枠組み」の中に、他の子ども達の考えたことが組み込まれていく、教師や“進んでいる子”の「独裁」に支配される論理構成活動にはならないために、子ども達同士が上下関係を意識するようなこともない。それ故に、そのような論理構成活動を普段の算数・数学の授業の中に採り入れることが望まれる。

◎他人と自分が活かし合うような共同思考能力を育てることの重要性

第1章～3章に亘って述べている3つのタイプの授業（上記の①②③の授業）における子ども達の言動に共通した最も顕著な特色は、次の(1)及び(2)である。

- (1) 他人の言うことを真剣に聞く。
- (2) 誰もが他人の言ったことを踏まえ、よく考えてからものを言う。

共同思考の場では、他人の意図を正確に汲み取ることが求められる。相手を無視したり、拒絶しては共同思考は出来ない。学校現場がその対応に苦慮している「登校拒否」「閉じこもり」「自己中心的な子」「切れる子」「いじめ」「暴力・傷害・殺人」などなど、これらの問題を解決するためにも、問題が起こらないようにするためにも、あらゆる機会を捉えて、自分と他者とが互いに他を活かし合うような共同思考能力を高めていく必要がある。そのような共同思考能力を高めていくために、第1章～3章に述べた個人・共同による論理構成活動は役立つであろう。

◎習熟度別学習の授業から幅広い習熟度の差を許容する授業へ

習熟度別学習による算数・数学の授業が増えているが、その対応に最も苦慮するのは、習熟度の最下位のクラスの子ども達に対する指導である。近年、上位のクラスの子ども達と同じ入学試験やそれに向けての模擬試験が受験できるように、子ども達の親から次のような教師に対する要求が出てくるからである。

- (1) 習熟度に応じたよくわかる授業をすること。
- (2) 期末考査や模擬テストや学習の「進度」を習熟度によって変えないこと。

しかし、実際問題として、授業の原理そのものを変えない限り、最も下位のクラスで上記の(1)(2)を満たすような授業は出来ないのである。そのような授業が出来ないから習熟度別に分けているのである。

実際、そのような授業が出来るとすると、そのような授業は、それより上位のクラスの子ども達にもわかる授業であり、上位のクラスと「進度」も変わらない授業である。従って、それはすべての子ども達に合う授業となり、習熟度別クラスを編成する理由がなくなってしまうからである。

上記のことからも分かるように、“出来上がった数学”を教師が解説していく形で展開していく従来の授業では、幅広い習熟度の差に対応することが原理的に無理なのである。従来の授業から幅広い習熟度の差を許容する授業への転換を図るためには、どうしても、子ども達が自己活動として数学を“つくり上げていく”学習活動を採り入れる必要があるのである。そうした幅広い習熟度の差を許容する授業への具体的な転換方法を考えるに当たって、本研究の第1～3章で示されている授業（上記の①②③の授業）の展開原理は非常に役立つであろう。

論文審査の結果の要旨

氏 名	柳 本 成 一		
論文題目	図形指導における論理構成活動の原理に関する研究 —推論の“表現フレーム”を使って複数の論理の流れを同時に構成していく幾何の授業原理—		
判 定	合 格 ・ 不 合 格		
審 査 委 員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教 授	船越 俊介
	副 査	教 授	高橋 正
	副 査	教 授	小川 正賢
	副 査	教 授	稲垣 成哲
	副 査	助教授	宮田 任寿
要 旨			
本論文の契機は、次の2点である。1つは、柳本氏の高等専門学校での数学教育実践を通して開発した「提示された映像情報と音声情報から、学ばせたい数学的論理の流れを遅れがちな生徒と進んでいる生徒が共に創り上げていく『Audio— Visual Test』による授業」である。もう1つは、柳本氏の数学教育についての基本的理念である「人類の文化遺産（数学的論理体系）より、対象化されている人間的な数学的論理の構成能力を引き出し、それを我がもの（内化）し、更に新たな数学的論理の構成活動を行っていくことこそ数学学習の基本であり本質である。それ故に、数学的論理を創りあげていく能力を身に付けるには数学者と質的に同じような態度をとることが求められる」という視座である。 これらのことに基づいて、本論文の主たる目的はつぎのようである。 【本論文の目的】 生徒達が数学者と質的に同じような態度をとりながら、個人・共同で複数の論理の流れを同時に創り上げていく「幾何の授業原理」を提唱する。			

【本論文の構成】

本論文はつぎの6章で構成されている。

序章 本研究の成立過程と先行研究、第1章 演繹的推論の“表現フレーム”を使って言語の世界で子ども達が複数の命題と証明を同時に創り上げていく幾何の授業、第2章 数学言語に依存しない論理構成、第3章 触覚情報に基づいて構成される図形のイメージを基にして複数の論理の流れを同時に創り上げていく図形学習、第4章 “表現フレーム”の導入による学習指導法改善の展望と課題、終章 本研究に基づく算数・数学教育の現状への提言。

【本論文の主たる内容】

生徒達が個人・共同で複数の論理の流れを同時に創り上げていくために、つぎのような5つの基本活動Ⅰ－Ⅴを提示している。基本活動Ⅰ：論理の流れを構成するために必要な思考の対象となる図形を準備する。基本活動Ⅱ：思考の対象（図形）に適用したり、論理の流れを創り上げていく過程で必要な既知の知識を準備する。基本活動Ⅲ：既知の知識を対象（図形）に当てはめて、対象に関する情報群を収集する。基本活動Ⅳ：演繹的推論の「表現フレーム（ならばカード）」を使って、活動Ⅲで得られた情報群を結合して、対象（図形）に関する小命題群を作成する。基本活動Ⅴ：基本活動Ⅳで得られた小命題群を結合して、教師が生徒達に教えたい論理の流れを含む、複数の論理の流れから成る論理の「CHART」を作成する。

そして、この基本活動Ⅰ－Ⅴと Van Hiele の提唱する「図形学習の5段階（水準）」との関連を考察している。ここでの最も重要な指摘は、基本活動Ⅳにおける「表現フレーム」が Van Hiele の第2水準の学習活動（教材）であると位置づけていることである。柳本氏は「表現フレーム」を用いない通常の幾何の授業では第2水準が省略されていることが、多くの生徒達を「論証の段階」まで上昇させることが出来なかった主たる原因であろうと主張している。

さらに、演繹的推論の「表現フレーム」を使った基本活動Ⅰ－Ⅴで構成される、具体的な論理構成活動の行われる授業として、第1章、第2章、第3章で3タイプの授業を実践事例を示しながら詳しく論述している。

第4章では、「表現フレーム」を用いた論理的思考力の育成（教育効果）の評価とコンピュータ利用について言及している。

以上の審査結果から、本論文の審査委員会は、学位申請者柳本成一氏が博士（学術）の学位を授与される資格を有するものと判断する。