秩序問題への公理主義的接近ー集団的選択、市場秩序、及び道徳規範に関する社会的選択理論からの考察ー

長久，領壱

(Degree)
博士（経済学）
(Date of Degree)
2010-03-07
(Date of Publication)
2010-05-27
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙3096
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2003096

博士論文

秩序問題への公理主義的接近

－集団的選択、市場秩序、及び道徳規範に関する社会的選択理論からの考察 －

長久領壱

関西大学経済学部

2010 年 2 月 24 日

目次

序文

本学位論文は幾つかの論文を基礎に執筆された次第である。以下各章ごとにその論文を列記する。

- 第 2 章
- Nagahisa R (1991a) Acyclic and continuous social choice in T_1-connected spaces: Including its application to economic environments. Soc Choice Welfare 8: 319-332
- Nagahisa R (1996) Identification of domain restrictions over which acyclic, continuous-valued, and positive responsive social choice rules to operate. Soc Choice Welfare 13: 383-395
- Nagahisa R (2006) Some further results on acyclic, continuous-valued, and positive responsive social choice rules. Mimeo
- 第 3 章
- Nagahisa R (1991b) A local independence condition for characterization of Walrasian allocations rule. J Econ Theory 54: 106-123
- Nagahisa R, Suh, SC (1995) A characterization of the Walras rule. Soc Choice Welfare 12: 335-352. Reprinted in Walker DE(ed) The Legacies of Leon Walras (2001) The series of Intellectual Legacies of Modern Economics Vol.2.Edward Elgar Publishing
- 第 4 章
- Nagahisa R (1994) A necessary and sufficient condition for Walrasian social choice. J Econ Theory 62:186-208
- Nagahisa R (1992) Walrasian social choice in a large economy. Math Soc Scie 24:73-78

- 第 5 章
- Miyagawa E, Nagahisa R, Suga K (2006) Universalizability of social codes: An economic approach. Mimeo.
- 第 6 章
- Nagahisa R (2006) Axiomatic analysis of social codes: A social choice approach. Mimeo.

なお、第 1 章は全体への導入部であり、本学位論文の主題と方法論の解説に充てられる。

3 章と 5 章は共同論文が基礎となっている。本学位論文への掲載を快諾してくださった Sang Chul Suh（Winsor 大学)、須賀晃一（早稲田大学)、宮川栄一（神戸大学）各氏には深い謝辞をささげたい。

本学位論文の執筆にあたり、著者は多くの方々に学恩を負っている。特に神戸大学大学院での指導教授であられた岸本哲也先生（神戸大学名誉教授）からは長年にわたり学問上の薫陶を受けた。先生の学恩の深さは計り知れないものがある。ここに深く謝辞を述べる次第である。このほか学会・セミナーその他の場で著者は多くの方々から学問上の深い啓示と刺激を受けた。その数は多すぎてここに全員を列記することはできないが、本学位論文との直接的関わりにおいては、Donald Campbell（William and Mary 大学) -以下敬称略-、William Thomson (Rochester 大学)、故 Louis Gevers (Namur 大学)、グレーヴァ香子 (慶応大学)、小西秀男（Boston College)、西條辰義（大阪大学)、坂井豊貴（横浜国立大学)、篠塚友一（筑波大学)、塩沢修平 (慶応大学)、下村研一（神戸大学)、鈴村興太郎（早稲田大学)、芹沢成弘（大阪大学)、田中誠（Michigan 州立大学)、戸田学（早稲田大学)、中村慎助（慶応大学)、中山幹夫（慶応大学)、廣川みどり（法政大学)、福田亘（神戸大学)、大和毅彦（東京工業大学)、吉原直毅（一橋大学）の諸氏に対し深く感謝したい。

また本研究は、平成２１年度関西大学研修員研究費によって行われた。研修員の機会及び財政援助くださった関西大学及び同大学経済学部教職員の方々に深く謝意を捧げたい。また筆者の研修の事務手続き一切を処理してくださった研究支援課の職員の方々にも深くお礼申し上げる次第である。

第 1 章

秩序問題と公理主義的分析

本章では本論文全体にわたる主題及び方法論に関して解説を行う。本論文で扱う主題はタイトルにあるとおり「秩序問題」である[*1]。まずこの言葉の意味を説明したい。

人々は社会において自らの欲求に基づいて行動している。しかし一方で、その行動は常にある種の社会的な制約を受ける。制約の受け方は様々である。立法府の制定した明確な制度・規則・ルールによって制約を受ける場合もあれば、道徳などの暗黙の社会規範によって主体自らが行動を自制・制御する場合もある。人々は自らの欲求を駆動原理として社会的行動を起こすものの、その行動様式にはある一定の秩序が存在する。

人々を一定の秩序だった行動に導くことは社会にとって重要な課題である。秩序形成をもたらす社会的要因は様々多岐にわたる。特権的地位にある為政者の意思、神仏その他の超越的存在、共産主義思想などのイデオロギー、さらには古からの因習など、様々である。しかし我々が考察するのは、自由で合理的な諸個人の間での合意である。すなわち、「ルールや制度を、私的な利益や目的を追求する個人間の合意のみで、どの程度まで説明できるか。人々の間での協力関係の形成を、共同体理念や利他的道徳観に訴えることなく、各人の私的な選好の充足のみによって規範的に正当化することは可能であるか」（小林 1995）がここでの主題である[*2]。

次に本論文での方法論に関して解説する。上の引用文の最後の方に「規範的に正当

[*1] 正確には「秩序形成問題」と呼ぶべきであろうが、本論文では簡潔に「秩序問題」と呼ぶことにする。

[*2] この引用文で「ルールや制度」を「社会秩序」と換えれば引用文はほぼ本稿での主題そのものを表すこととなる。ルールや制度とは言わず秩序という言葉を選んだ理由は、本稿の後半の章では道徳規範を考察したいがためである。道徳規範は必ずしもルールや制度とはいえない。その意味で「制度」よりも意味が広く動的なイメージのある「秩序」という言葉を選んだ。

化すること」とある。我々が本論文で行うのは規範的分析である。規範的分析は通常、分析対象とする経済社会のモデルを構成したうえで、このモデルが満たすべき幾つかの規範的要請を公理として掲げ、これらすべての公理を満たすよう社会を編成したとき、それはいかなる帰結をもたらすか、といった考察を行う[*3]。この言明の意味を具体的な例に即して考えてみよう。たとえば社会的選択におけるアロウの不可能性定理を例にとろう。この定理は「民主主義的観点から見て理想的な投票ルールは如何なるルールか」を考察する。考察の第 1 段階は投票手続きの厳密なモデル化である。選好プロファイル、投票ルールなどの概念が定式化され、これらの諸概念を組み合わせて投票手続きがモデル化される。これが先の言明での「分析対象とする経済社会のモデル」化にあたる作業である。次の作業が民主主義的な投票ルールならば満たすであろう性能基準をいくつか列記し、これらを投票ルールが満たすべき公理として掲げることである。たとえば全員一致判断の尊重（パレート原理）、決定に関する情報投入の節約（無関連対象からの独立性）など、がこれら公理の一つ一つである。この作業プロセスが先の言明での「このモデルが満たすべき幾つかの規範的要請を公理として掲げ」ることに該当する。言明の最後「それはいかなる帰結をもたらすか」はアロウの不可能性定理の証明であり、これらすべての公理を満たす投票ルールを探索することに他ならない。本稿でも我々はこの方法論をとる。我々は様々な秩序形成問題を考え、秩序が満たすべき幾つかの規範的要請を公理として掲げ、これらすべての公理を満たす理想的な秩序は形成可能であるか、可能であるとしたらそれはいかなるものになるのか、を探求する。秩序問題への公理主義的接近を図るのである[*4]。

さて秩序問題のうち本稿で扱うのはサブタイトルにあるとおり、集団的選択、市場秩序、及び道徳規範の三つである。順に解説していこう。

（1）集団的選択（第 2 章）

人々の多様な価値評価を集計して一つの社会的判断を導くことを集団的選択という。集団的選択の問題はアロウの不可能性定理（Arrow 1963）を嚆矢として社会的

---

*3 経済学における規範的分析の解説に関しては村上（1971）を参照。「・・・規範的分析とは、価値判断の形で書かれた（多くのばあい社会全体にとっての）目的と、事実判断の形で書かれた経済体制の描写からなる公理体系から出発し、その論理的含意を展開しようとする。」（村上 1971、p 95）

*4 したがって、ここで扱う秩序問題は規範分析でのそれであり、実証科学としての課題ではない。現実の社会秩序の成り立ちのメカニズムを解明し説明することは（重要な課題ではあるが）本稿の守備範囲外である。秩序問題の持つこの 2 面性に関しては盛山（1995）及び長久（2004）を参照。

選択理論の中で中心的主題として長きにわたり追及されてきた。本論文の第 2 章ではこの問題を経済環境の下で再考する。経済環境での集団的選択の例として複数の私的財の分配問題などが考えられる。誰にどの私的財をどれだけ分配するか、という問題を投票によって解決するとすれば、これは社会的選択理論の分析対象となる。このような問題群を総称して経済環境での集団的選択と呼ぶが、本論文ではそのうち特にアロウ型不可能性定理に関して再考したい。古典的研究に属するアロウ型不可能性定理の多くは選択肢集合とその上で定義される個人の選好に対してなんら位相的・代数的構造を付加せずに得られたものである。しかし経済環境の下では例えば消費者の選択肢集合は l 次元のユークリッド空間の非負象限であり、そのうえで定義される選好は連続・凸・全ての次元に関して単調増加などといった代数的・位相的性質が付加される。古典的定理をこのような経済環境の下で再構成可能であるかは 1980 年代以降活発に考察されてきた。本論文第 2 章ではアロウ型の社会的選択ルールが非循環・連続値をとり、正の感応性を満たす場合を考察する。この場合での古典的定理（Ms-Colell and Sonnenshein 1972, Fountain and Suzumura 1982）は経済環境の下ではよりシャープな形での不可能性定理に変貌することを示す。

（2）市場秩序（第 3，4 章）

市場メカニズムもまた人々の資源配分に対する評価（消費者の選好）を集計し、一つの解（競争均衡資源配分）を選択するルールとして定義できる。伝統的な完全競争での一般均衡モデル（Debreu 1959 など）を想定してみよう。例えば複数人の消費者の各々がある一定量の私的財をすでに保有している交換経済を考えよう。消費者の持つ選好のリストを選好プロファイルと呼ぶ。各選好プロファイル）に対して、その下での実行可能な資源配分の部分集合を対応させるルールを社会的選択ルール（資源配分ルール）と呼ぶ[*5]。このようなルールは論理的には無数のものが考えられる。たとえば独裁者がいて、どのプロファイルの下でも独裁者がすべての財を独占する独裁制ルール、各プロファイルの下で全員の効用関数の和を最大にする資源配分全てを選ぶ功利主義ルールなど。しかしここで主題となるのは市場による配分ルール、すなわちワルラスルールである。このルールは各プロファイルにおいて、そこでの競争均衡資源配分全てを選択するルールである。以上描写した交換経済モデルが 3 章のそれで

[*5] この経済では消費者を特徴づける三つの指標、消費集合、初期保有、及び選好、のうち選好のみが可変であると想定されている。

あり、ここでワルラスルールが資源配分ルールとしていかなる規範的公理によって特徴付けれるのかが、考察される。ワルラスルールは個人合理性、パレート最適性、そして局所独立性を満たす唯一つのルールであることを示す。最後の公理、局所独立性はアロウの無関連対象からの独立性と同じく社会的選択に関する情報節約の公理である。またこの公理がメカニズムデザインでの凸ナッシュ誘導可能性と同値であることを示す。続く 4 章では生産を含むより一般的な経済を考え、かつ人口が Debreu and Scarf (1963) のコアの極限定理と同じ流儀で増えていく経済でのワルラスルールの別の公理化を与える。また Aumann (1964) 流の経済主体の集合が連続体の場合での公理化も与える。

（3）道徳規範（第 5，6 章）

5，6 章ではヘア（1963,1981）の指令主義道徳哲学に着想を得たフェアプレイゲームを論ずる。ヘアによると道徳規範とは一つの指令であり、様々な状況に直面する人々に対し為すべき善い行為（為してはならない悪い行為）を指示することが役目であるという。そして道徳規範として彼が重視するのは判断の中身ではなく、判断の仕方の整合性であるという。たとえば 2 人の同じ大学の学生 A,B 君がいたとしよう。「A 君はこの教室で喫煙してはならない」と判断しつつ「B 君はこの教室で喫煙してよい」と判断することは（よほど特殊な事情でもない限り）判断に一貫性があるとはいえない。ヘアが道徳判断において重視するのはこのような形式的整合性である[*6]。

しかし、仮に人々がヘア流の道徳規範に従って行動したとすれば、それはどのような社会的帰結を生むであろうか。その帰結は社会的に見て望ましいといえるかどうかはこれだけからでは簡単にはわからない。5，6 章ではこの問題に対して一つの解答を与える。我々は道徳規範が支配し人々がそれに従って行動する様子を一つのゲーム、フェアプレイゲーム、として定式化し、分析する。このゲームではプレイヤーは社会コード（道徳規範）の制約に服しつつ、合理的選択を行う。社会コードは各プレイヤーに対し彼・彼女が直面する論理的な可能なあらゆる状況に対して、その状況で選択してよい行為（戦略）の集合を指定する写像として定義される。ここで状況とは、ほかのプレイヤーすべてがとっている行為（戦略）とプレイヤーすべての選好の組から構成される。プレイヤーは各状況で社会コードが許容する行為の中で自分の選

[*6] ヘアはこれを普遍化可能性 (universalizability) と呼んでいる。このような道徳判断の形式的整合性の重視はカント（1791）まで遡ることができる。

好上最も良いものを選択する。こうして帰結する均衡がフェアプレイ均衡である[*7]。何がフェアプレイ均衡になるかは社会コードに依存する。我々はヘア流の判断の形式的整合性に関する一連の公理群を社会コードに課す。このような社会コードが生み出すフェアプレイ均衡はナッシュ均衡と深い関連があることを示す。例えば 5 章での定理 5.1 の主張であるが、社会コードが匿名性、単調性、独立性、厚生無差別性、及び有効性を満たせば、その下でのフェアプレイ均衡はナッシュ均衡になる。匿名性以下の諸公理は社会的選択ルールの文脈でよく知られたそれら（Sen 1986）を社会コードの上で定義しなおしたものである。5 章は純粋戦略のみを扱い、6 章はそれを混合戦略にまで拡張する。

本論文は分野的には社会的選択理論 (Social Choice Theory) に類別される。2，3，4 章は 1980 年代以降での社会的選択理論での研究主題の一つであったし、また 5，6 章は道徳哲学から着想を得て、社会的選択理論の新たな分野、道徳規範の公理分析、を開拓しようとする試みである。分析の根底には社会的選択理論の発想と思考法が常に存在している。序文で記載している通り、2 章から 4 章までの基礎となった論文の殆どは定評ある国際専門雑誌（査読付）に掲載されている。5，6 章は最近の研究で、まだ未発表であるが、高い独創性と価値を有すると判断している。本論文はこれらピースミール的に執筆されたいくつかの論文を「秩序問題」という視点から統一的に纏めた次第である。

1.0.1 数学用語上の約束：

数学記号は標準に準じたが、いくつか注意を有する記号があるので、それらを一覧しておく。

まず論理記号として、

$:=$	定義式
$A \Longrightarrow B$	A ならば B
$A \Longleftrightarrow B$	A と B は同値

とする。

集合 X から集合 Y への写像 f は、X の任意の元 x を Y の元 $f(x)$ に対応させ

[*7] ちょうど市場取引における予算制約と同じ働きをフェアプレイゲームにおける社会コードが果たすと類推していただいて結構である。従ってフェアプレイ均衡と完全競争均衡との間には概念的なアナロジーが成立する。

る。集合 X から Y への多価写像 F は、X の任意の元 x を Y のある非空部分集合 $F(x) \subset Y$ に対応させる。

位相空間 X を所与とする。近傍は全て開近傍であるとする。X の部分集合 Y 上で位相を考えるとき、特に断らない限りは Y の相対位相であるとする。A を X における一つの集合とする。

$|A|$　　A の基数（濃度）

$cl.A$　　A の閉包

$int.A$　　A の開核

$co.A$　　A の凸包

なお、言うまでもないことであるが、$|A|$ と $co.A$ の定義では X に位相を導入する必要はない、更に $co.A$ が定義されるには X が線形空間化されていることが前提である。

x, y は同一の有限次元線形空間内のベクトルとする。

$x \geq y \Longleftrightarrow$ 全ての i に関して $x_i \geq y_i$.

$x > y \Longleftrightarrow x \geq y \& x \neq y$.

$x \gg y \Longleftrightarrow$ 全ての i に関して $x_i > y_i$.

$\leq, <, \ll$ も同様に定義される。

f は R^n のある部分集合 A から R への写像とする。f が単調増加であるとは、任意の $x, y \in A$ に関して $x > y$ ならば $f(x) \geq f(y)$ であることをいう。f が狭義単調増加であるとは、任意の $x, y \in A$ に関して $x > y$ ならば $f(x) > f(y)$ であることをいう。

第 2 章

経済環境のもとでのアロウ型不可能性定理

2.1 序論

本章ではアロウ型不可能性定理を経済環境にて拡張する試みを論じたい。1970 年代あたりまでのアロウ型不可能性定理（これを本節では古典理論と呼ぶことにする）は選択肢集合とその上で各個人が持つ選好になんら位相的・代数的な構造をいれない極めて抽象的なフレームワークの中で論じられていた。[*1]

これに対し 1980 年代以降では経済環境のもとでのアロウ型不可能性定理の研究が活発になされてきた。一般に、経済環境のもとでは、選択肢集合に位相的・代数的な構造を与え、その上で定義される各個人の選好もこの構造に照らしてある種の位相的・代数的性質が要求される。例えば、選択肢集合は有限次元のユークリッド空間の非負象限であり、各自の選好はこの上で連続・単調・準凹な効用関数にて代表できる、などという具合にである。本節ではまず経済環境のもとでのアロウ型不可能性定理の概略を古典理論との対比を通して論じたいと思う。また古典理論で得られた諸定理がどのような修正を受けるかを簡単に説明したい。

一つの例として n 人の消費者及び有限個の私的財から構成される経済を考えよう。資源配分集合上に人々は個人的選好を持ち、これから社会的選好を導くのがここでの社会的選択問題である。この場合で例えばアロウのかの有名な不可能性定理が成立するかどうかを考えてみよう。各個人の選好を一列に並べたリストをアロウに倣っ

[*1] 古典理論に関しては鈴村　(1982),Suzumura (1983)　に詳しい

て選好プロファイルと呼ぼう。これを $(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ と記法しよう。 ここで例えば $\succcurlyeq_1$ は個人 1 の選好を表している。社会的選択ルール F は選好プロファイルの集合を定義域にし、各選好プロファイル $(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ に対し資源配分集合上に一つの完全かつ推移的な社会的選好 $F(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ を対応させる写像として定義できる。社会的選択ルールに対してアロウが課した無関連対象からの独立性とパレート原理もまた定義できる。これらの概念はごく自然な形で経済環境での社会的選択問題に移し変えることができ、なんらの問題もない。問題は残る一つの公理、定義域の広範性、である。この公理は各個人の持つ完全かつ推移的な選好のあらゆる組合せ $(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ が起こりうる可能な選好プロファイルとして社会的選択ルールの定義域に含まなければならないことを意味している。しかし残念なことに定義域の広範性は経済環境のもとでは一般には成立しない。先に言及したように経済環境のもとでは財空間は例えば有限次元のユークリッド空間であるというようにある種の位相的・代数的な性質を課されることが多い。そして個人の持つ選好はこの位相的・代数的な性質に対して連続であるとか、単調であるとか、さらには凸であるとかいった性質が要求される。社会的選択ルールが定義域の広範性を満たすとすればこれら諸性質を満足しない選好プロファイルも定義域の中に含まれなければならない。例えば 2 人 2 財からなる経済を考えよう。個人 1 が二つの財を 2 単位ずつ持ち、個人 2 も同じく二つの財を 2 単位ずつ持つ配分を x とする。また個人 1 が二つの財を 1 単位ずつ持ち、個人 2 も同じく二つの財を 1 単位ずつ持つ配分を y とする。定義域の広範性は個人 1 は x を y より好んだり、x と y を無差別としたり、y を x より好んだりする選好を持つプロファイルが定義域内に含まれることを要求している。しかし選好の単調性を考えれば、個人 1 はどの選好プロファイルのもとでも常に x を y より好んでいる筈である。従って定義域の広範性は成立しない。同じ要領で選好の連続性や凸性もまた定義域の広範性の成立を妨げていることが容易に確認できる。

定義域の広範性が成立しない以上、我々はアロウの不可能性定理をそのまま経済環境に適用することはできない。経済環境のもとでは社会的選択ルールの定義域はアロウの古典的定理のそれよりもずっと狭いのである。経済環境のもとでのアロウ型定理の研究で最も重要な係争点はこの狭い定義域上で、アロウの不可能性定理をはじめとする古典的な諸定理をどう証明し直すかということにあった。これらは選択肢集合と個人的選好になんらの位相的・代数的性質を課さずに得られたものだったからで

ある。

問題の解決の糸口となったのが Kalai, Muller and Satterthwaite (1979) である。彼らはなるほど定義域の広範性は資源配分集合の全体では成立しないが、部分集合を適切にとればその上では成立していることを発見した。いわば定義域の広範性条件は「局所的には」成り立つのであり、この上ではアロウの不可能性定理を直接適用でき、その部分集合上で「局所的な」独裁者の存在が確認できると言うわけである。彼らのアイディア自体は極めて単純に理解できる。先の 2 人 2 財経済の例に戻って説明しよう。いま三つの資源配分 x, y, z を次のようにとろう。x では 2 人とも第 1 財を 3 単位、第 2 財を 1 単位消費し、y では 2 人とも二つの財を 1.5 単位ずつ消費している。z は x とは逆に 2 人が第 1 財を 1 単位、第 2 財を 3 単位消費しているとしよう。すると 2 人の選好が連続、単調、そして凸であったにしてもこの三つの資源配分集合上では定義域の広範性が成立している。たとえば個人 1 が x を y より好み、y を z より好む選好は $u_1(x) > u_1(y) > u_1(z)$ となる線形の効用関数をとればよい。また個人 2 が y を最も好み、x と z は無差別である選好は無差別曲線がレオンティエフ型に似た形になる効用関数をとればよい。$\{x, y, z\}$ 上での他の選好順序に関しても同様にそれを実現する連続、単調、そして凸な選好を見つけることができる。従ってこの三選択肢間ではアロウの不可能性定理を直接適用でき、その上での独裁者が存在することが直ちに分かるのである。勿論この独裁者は大域的な独裁者であるとはこれからだけではいえない。しかし他の選択肢 w を集合 $\{x, y, w\}$ 上で先と同様に定義域の広範性が成立するようにとればよい。この上でも独裁者がいることになる。定義よりこの独裁者は先の $\{x, y, z\}$ 上での独裁者と一致する。このような要領で我々は大域的な独裁者の存在を確立することができるのである。任意の三選択肢の間では定義域の広範性が成立する場合、その定義域は三項自由であるという。Kalai らはこの三項自由定義域のアイディアを巧みに利用し、公共財のみからなる経済でのアロウの不可能性定理を証明した。三項自由定義域のアイディアを用いることにより、我々は古典理論の財産を失うことなく、むしろそれを巧みに利用して経済環境でのアロウ型不可能性定理を研究することが可能となったのである。三項自由定義域の他にも様々な定義域のアイディアが提出されている。しかし、そのいずれもがまず定義域のある部分集合上で定理を確立し、それを定義域全体に広げるという論証手順を踏んでいる点では同じである。

さて本章では Nagahisa (1991a, 1996) を中心に論じる予定である。この二つは経済環境での社会的選択で課される選択肢集合とその上で定義される個人的選好の位相的性質の持つ（否定的）含意を明澄に把握している。経済環境の下では単にアロウ型不可能性定理が再構成されるだけでなく、それが更に否定的な方向にドラスティックに変化する場合がある。Nagahisa (1991a,1996) はそのことを我々に印象的に教示しており、経済環境での社会的選択問題を考える際に重要な含意を持っている。さて変化をもたらす要因は二つある。以下順に論じていこう。

我々は社会的選択に関する新しい公理－ここでは仮に社会的選択の連続性と呼んでおこう－を提出しその効果を分析する。社会的選択の連続性とは社会的選好が連続値を持つことに他ならない。今一つの選好プロファイルを所与とする。このとき選択肢 x が y よりも社会的に望ましいと判断されているならば、x に十分近似する選択肢 z もまた y よりも社会的に望ましいと判断されるべきであろう 。これが社会的選択の連続性である。選択肢集合にある種の適切な位相が課されているときには社会的選択の連続性の含意を考察するのは十分に意味がある。社会的選好の連続性は実は古典的結果に対し著しい変更を与える。

まず第一に社会的選択の連続性は古典理論におけるパレート原理とほぼ同じ役割を果たす。これは Campbell（1992b）の一連の研究によって明らかになったことである。アロウの不可能性定理においてパレート原理をはずした場合、大意域的な独裁者は存在しないが、選択肢集合に分割ができその分割内の各部分集合上では（いわば局所的な）独裁者が存在することが知られている (Wilson 1972, Binmore 1976, Fountain and Suzumura 1982)。これから分かるのはパレート原理がこの分散した決定力の集中化をもたらすことである。そして経済環境では社会的選択の連続性はこれと全く同じ現象を引き起こす。つまりこの場合連続性はパレート原理と同じ役割を果たすのである。

第二に社会的選択の連続性は古典理論で課されてきた一つの公理、正の感応性、と重大なコンフリクトを引き起こすことを示したい。これが本章での一つの目的である。正の感応性の意味は次の通りである。一つの選好プロファイルのもとである選択肢 x が他の選択肢 y より社会的に望ましいかあるいは無差別と判断されているとしよう。ここで選好プロファイルが次のように変化するとしよう。ある 1 人の人のみが前のプロファイルで x と y を無差別にしているとき、新しいプロファイルでは x

を y より厳密に選好し、また彼が前のプロファイルで y を x より好んでいたならば、新しいプロファイルでは x と y を無差別とするのである。他の人々の選好は変わらないとしよう。いわば x が y に対して前よりも高い評価を人々から受けるのである。このとき社会的選好もそれに応じて前よりも x を y に比べてより高く評価すべきである。これが正の感応性が言わんとすることである。つまり、社会的選好は前のプロファイルで x と y が無差別であれば新しいプロファイルにおいて x は y より厳密に良くなり、そして前のプロファイルで x が y より望ましければその判断は新しいプロファイルにおいて変わらないのである。

古典理論においては社会的選択の合理性条件を推移性から非循環性に緩め、そしてアロウの公理群に加えて正の感応性をつけ加えた場合、社会的選択ルールには拒否権者（厳密には準独裁者）が存在することが知られている (Mas-Colell and Sonnenshein 1972, Fountain and Suzumura 1982) 。拒否権者の存在それ自体は望ましいことではないが、ともかくも正の感応性は古典的な環境の下ではアロウ型社会的選択ルールの公理系と矛盾することはない。なぜなら我々は正の感応性を満たすアロウ型社会的選択ルールを容易に構成可能だからである。しかし経済環境の下では事情は一変する。我々は同じ問題を経済環境上で再考し、社会的選好が連続であることを要求すれば社会的選択ルールは殆どの場合存在しないことを示す。しかもこれはパレート原理を課さずに、そして社会的合理性条件を非循環性にまで弱めてもそうなのである。経済環境下では正の感応性はアロウ型の社会的選択ルールに対する要請としては不適格なのであると結論できよう。

本章の構成に関して簡潔に述べておこう。第 2.2 節では幾つかの概念と定義を述べる。第 2.3 節と第 2.5 節が主要結果である。2.3 節では定義域が三項自由である場合、2.5 節では古典的定義域の場合を考察する。主要結果の大部分は Nagahisa(1991a, 1996) と同じだが、一部はより一般化されている。また幾つかの新しい結果も加えた。これら一般化と新しい結果は Nagahisa（2006）にある。また 2.3 節を理解するにあたり背景的な知識が必要と考え、これを第 4 節で纏めることにした[*2]。第 2.6 節は結論である。証明の大半は付録に収録している。

[*2] なお、本章で扱う領域に関してのより体系的・包括的なサーヴェイとして Campbell and Kelly (2002) 及び LeBreton and Weymark (2003) がある。

2.2 記号と定義

選択肢の集合を X とおく。X は少なくとも 3 個以上の選択肢を含むとする。X はある位相空間 Ω の部分集合である、と想定する。X には相対位相が付与されている。$\succcurlyeq$ を X 上の順序（完全かつ推移的な X 上の二項関係）とする。二項関係 $\succcurlyeq$ が完全であるとは、任意の $x, y \in X$ に関して、$x \succcurlyeq y$ または $y \succcurlyeq x$ が成り立つことをいう。$\succcurlyeq$ が推移的であるとは、任意の $x, y, z \in X$ に関して、$x \succcurlyeq y$ かつ $y \succcurlyeq z$ ならば、$x \succcurlyeq z$ であることをいう。$\succcurlyeq$ が X 上の線形順序であるとは、それが順序であり、かつ $x, y \in X$ に関して、$x \succcurlyeq y$ かつ $y \succcurlyeq x$ ならば $x = y$ であるときをいう。$\sim$ と $\succ$ はそれぞれ $\succcurlyeq$ の対称成分、非対称成分である。任意の $x, y \in X$ に関して、各々 $x \sim y \iff x \succcurlyeq y \& y \succcurlyeq x$, $x \succ y \iff x \succcurlyeq y \& \neg y \succcurlyeq x$ である。便宜上 $x \preccurlyeq y$、$x \prec y$ などとの記法も適時活用する。各々 $y \succcurlyeq x$、$y \succ x$ のことである。$\succcurlyeq$ が準推移的であるとはその非対称成分 $\succ$ が推移的であることをいう。$\succcurlyeq$ が非循環的であるとは任意の選択肢 $x^1, x^2, ..., x^t \in X$ に関して $x^\tau \succ x^{\tau+1}$ $(\tau = 1, 2, ..., t-1)$ である時、$x^t \succ x^1$ とはならないことをいう。$\succcurlyeq$ が連続であるとは任意の $x \in X$ に対して集合 $\{y \in X : y \succ x\}$ と $\{y \in X : x \succ y\}$ が共に開集合であることをいう。X 上の連続な順序全ての集合を $T(X)$ とおく。X 上の順序全ての集合を $O(X)$ とおく。

個人の集合を N とおき、そのメンバーを $1, 2, ..., n$ と表す。N は 4 人以上であるとする。（選好）プロファイルとは N から $T(X)$ への写像である。全てのプロファイルの集合を U、その代表的な要素を $\succcurlyeq \in U$ と書く。$i \in N$ に対して $\succcurlyeq(i)$ はプロファイル $\succcurlyeq$ が個人 i に対して割り当てる X 上の選好である。便宜上 $\succcurlyeq(i)$ を $\succcurlyeq_i$ と記号する。またプロファイルは各個人に割り当てる選好のリストとも解釈できる。そこで $\succcurlyeq = (\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n)$ とも記号する。社会的選択ルール F、簡潔にルールと呼ぶ、とは U のある非空部分集合 D を定義域とし、各プロファイル $\succcurlyeq \in D$ に対して X 上の完全な二項関係 $F(\succcurlyeq)$ を対応させる写像であると定義する。便宜上 $F(\succcurlyeq)$ を $\succcurlyeq_F$ と記号する。$\succcurlyeq_F$ を（$\succcurlyeq$ のもとでの F が割り当てる）社会的選好という。一つのルール F を所与とする。ルール F が推移値をとるとは、任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関して $\succcurlyeq_F$ が推移的になることをいう。同じくルール F が準推移値をとるとは、任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関して $\succcurlyeq_F$ が準推移的になること、ルール F が非循環値をとると

は、任意のプロファイル $\succsim\in D$ に関して $\succsim_F$ が非循環的になることをいう。最後にルール F が連続値をとるとは任意のプロファイル $\succsim\in D$ に関して $\succsim_F$ が連続になることをいう。

定義域 D を所与とする。各 $i \in N$ に関して、$D_i := \{\succsim_i : \succsim_i$ はある $\succsim\in D$ の第 i 成分 $\}$ としよう。定義域 D が三項自由である、あるいは三項自由定義域であるとは以下の 2 条件が成立することをいう。

定義 2.1 (三項自由定義域)

$(D-0)$ $D := \prod_{i\in N} D_i$,(全ての $i \in N$ に関して $\emptyset \neq D_i \subset T(X)$);

$(D-1)$ 任意の $i \in N$、任意の相異なる三つの選択肢 $x, y, z \in X$ に関して、

この選択肢間での任意の順序 $R \in O(\{x, y, z\})$ に対して、ある $\succsim\in D$ が存在し、$R = \succsim_i \cap \{x, y, z\}^2$ となる。

三項自由定義域は経済環境の下でのアロウ型不可能性定理の研究において中心的役割を担ってきた (Campbell1992b)。この定義域は簡潔にいえば「任意の三選択肢上では定義域の広範性が成り立つ」ということである。定義域の広範性とは D が N から $O(X)$ への写像全てから構成されることをいう:$D = \overbrace{O(X) \times \cdots \times O(X)}^{n}$ の形をしているときをいう。定義域の広範性が成り立てば、明らかにそれは三項自由定義域である。しかし逆は成り立たない。Schmitz(1977) の反例を紹介しよう。

例 2.1 $X = \{x, y, z, w\}$ としよう。各 $i \in N$ に対して、D は z をベストにしないような選好全てから構成されているとする。このとき D では定義域の広範性は成立しないが、三項自由である。

ルール F を所与とする。ルール F が二項独立性 (BI) を満たすとは以下のことが成り立つことをいう:任意の二つのプロファイル $\succsim, \succsim'\in D$ と任意の選択肢 $x, y \in X$ に関して、全ての $i \in N$ に関して $\succsim_i \cap\{x, y\}^2 = \succsim'_i \cap\{x, y\}^2$ が成り立つならば、$\succsim_F \cap\{x, y\}^2 = \succsim'_F \cap\{x, y\}^2$ である。ルール F が正の感応性 (PR) を満たすとは以下のことが成り立つことをいう:任意の二つのプロファイル $\succsim, \succsim'\in D$ に関して、個人 $i \in N$ が存在し、全ての $j \neq i$ に関して $\succsim_j = \succsim'_j$ であり、$[y \succ_i x \& x \sim'_i y]$ または $[x \sim_i y \& x \succ'_i y]$ であるとしよう。このとき $x \succsim_F y \Longrightarrow x \succ'_F y$ が成り立つ。Y は X の任意の部分集合とする。Y に対してパレート原理が成り立つとは、任意の

$\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in Y$ に関して、全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \succ_F y$ が成り立つことをいう。Y に対してパレート決定性が成り立つとは、任意の $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in Y$ に関して、全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \succ_F y$ または $y \succ_F x$ が成り立つことをいう。X に関してパレート原理（パレート決定性）が成り立つとき、単にパレート原理（パレート決定性）が成り立つという。$x, y \in X$ を所与とする。x が y に対し（ルール F によって）賦課的であるとは、全ての $\succcurlyeq \in D$ に関して $x \succcurlyeq_F y$ であるときをいう。同様に $x, y \in X$ に関して、x が y に対し（ルール F によって）強く賦課的であるとは、全ての $\succcurlyeq \in D$ に関して $x \succ_F y$ であるときをいう。ルール F が賦課的であるとは、任意の二つの選択肢に関して片方がもう片方に対し賦課的になるときをいう。同じくルール F が強く賦課的であるとは、任意の二つの選択肢に関して片方がもう片方に対し強く賦課的になるときをいう。F が強く賦課的であれば、F は定値写像であることに留意されたい。ルール F が定値写像であり、その値が線形順序であるとき、ルールは線形定値である、と呼ぼう。つまり X 上のある線形順序 L が存在して全ての $\succcurlyeq \in D$ に関して $F(\succcurlyeq) = L$ となるとき、F は線形定値と呼ぶ。

$x, y \in X$ を任意にとる。x と y に関して一方が他方に対して（強く）賦課的になるとき、ペア $\{x, y\}$ は（強く）賦課的であるという。X のある非空部分集合 A と選択肢 $y \notin A$ をとる。A が y に対して（強く）賦課的であるとは、任意の $x \in A$ が y に対して（強く）賦課的となることをいう。y が A に対して（強く）賦課的であるもの同様に定義する。A と y に関して一方がもう一方に対して（強く）賦課的になるとき、ペア $\{A, y\}$ は（強く）賦課的であるという。X の非空部分集合 A, B を任意にとる。$A \cap B = \emptyset$ とする。A が B に対して（強く）賦課的であるとは、任意の $x \in A$ が任意の $y \in B$ に対して（強く）賦課的となることをいう。B が A に対して（強く）賦課的であることも同様に定義する。A と B に関して一方がもう一方に対して（強く）賦課的になるとき、ペア $\{A, B\}$ は（強く）賦課的であるという。

Y を X の部分集合とする。個人 i_0 がルール F に対する Y 上での準独裁者であるとは、任意の $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in Y$ に関して (i) $x \succ_{i_0} y \Longrightarrow x \succcurlyeq_F y$ かつ (ii)$x \succ_{i_0} y$ に加えて、ある $j \in N \backslash \{i_0\}$ に関して $x \succ_j y$ でもあれば、$x \succ_F y$ であることをいう。個人 i_0 がルール F に対する X 上での準独裁者であるときは単に「i_0 はルール F に対する準独裁者である」という。(i) のみが成り立つとき、i_0 を拒否権

者と呼ぶ。ルールが二項独立性と正の感応性を満たすならば、ある個人が準独裁者であることとその人が拒否権者であることは同値である (Bordes and Salles 1978)。

非空の提携 $S \subset N, S \neq N$ を所与とする。提携 S が Y 上で決定的であるとは、任意の $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in Y$ に関して、全ての $i \in S$ に関して、$x \succ_i y$ ならば、$x \succ_F y$ となることをいう。

2.3　ルールの特徴付け：三項自由定義域

まずルールの定義域が三項自由である場合を考察する。

ルール F を所与とする。F は非循環値をとり、二項独立性と正の感応性を満たすとしよう。次の性質を持つ X の部分集合 Q_λ の族 $\Theta = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を定義する：

定義 2.2 $\Theta = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の部分集合 Q_λ の族であり、以下の諸性質をもつ；

（Q-1）各 Q_λ は二つ以上の選択肢を持ち、その上での一意の準独裁者が存在する；

（Q-2）任意の $Q_\lambda, Q_{\lambda'} (\lambda \neq \lambda')$ に関して、$Q_\lambda \cap Q_{\lambda'} = \emptyset$ であり、$\{Q_\lambda, Q_{\lambda'}\}$ は賦課的となる；

（Q-3）任意の Q_λ と任意の $x \in X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ に関して、$\{Q_\lambda, x\}$ は賦課的となる；

（Q-4）任意の相異なる $x, y \in X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ に関して、ペア $\{x, y\}$ に対しては準独裁者は存在しない

（Q-5）任意の相異なる $x, y, z \in X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ に関して、
ペア $\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}$ のうち少なくともいずれか一つは賦課的となる。

この集合族 Θ は存在すれば一意である (付録 2.7.1 の定理 2.1 の証明を参照)。さて以下の定理が成り立つ。

定理 2.1 $|X| \geq 3$、$4 \leq n < +\infty$ としよう。定義域は三項自由とする。ルール F が非循環値をとり、二項独立性及び正の感応性を満たすならば、Θ の構造は次の四つのうちのいずれかである。

（1）$\Theta = \{X\}$；

（2）Θ は二つ以上の Q_λ から構成され、X の分割となる、すなわち $X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda = \emptyset$ である；

（3）Θ は二つ以上の Q_λ から構成され、X の分割でない、すなわち $X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \neq \emptyset$

である；

(4) $\Theta = \emptyset$

証明は付録にある。この定理は Nagahisa(2006) であり、後述する Fountain and Suzumura (1982) の一つの結果の一般化である。集合族 $\Theta = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が本定理での鍵概念である。各 Q_λ に対しては一意の準独裁者が存在する。いわば「局所的な」準独裁者である。$\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の形態は様々である。(1) がその一つの極である。ここでは X それ自身が一つの Q_λ となっており、X 上での一意の大域的な準独裁者が存在する。もう一つの極が (4) であり、X のどの部分集合上にも局所的な準独裁者は存在しない。また (Q-5) よりかなり多くのペアが賦課的となることがわかる。この二つの極の間に様々な中間形態がある。それら中間形態も二つのカテゴリーに分類できる。一つは X が複数 (ないし無数の) の Q_λ に分割され尽くす場合である。これが (2) である。もう一つは分割され尽くされない場合で、これが (3) である。いずれの場合でも準独裁者の決定力は Q_λ の外側には及ばない。これは (Q-2)、(Q-3)、(Q-4) によって保証されている。なお、この定理では X の位相は証明では使われていない[*3]。

さて定理 2.1 に関連する先行研究として次の二つの結果が知られている。

FS 定理　(Fountain and Suzumura 1982)

$|X| \geq 3$、$4 \leq n < +\infty$ としよう。定義域は三項自由であるとする。ルール F が非循環値をとり、二項独立性、正の感応性、及びパレート決定性を満たすならば、X の分割 $E = \{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ で以下の諸性質を満たすものが存在する。

(1) 任意の $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2} \in E(\lambda_1 \neq \lambda_2)$、任意の $x \in E_{\lambda_1},\ y \in E_{\lambda_2}$ に関して、ペア $\{x, y\}$ は強く賦課的である。

(2) E_λ が 3 個以上の要素を含むならば、E_λ 上の F に対する準独裁者が一意に存在する。

MS 定理　(Mas-Colell and Sonnenschein 1972)

$|X| \geq 3$、$4 \leq n < +\infty$ としよう。定義域は三項自由であるとする。ルール F が非循環値をとり、二項独立性、正の感応性、及びパレート原理を満たすならば、 F に

[*3] 従ってこの定理は X の位相構造には依存しない。位相的性質が必要となるのは次節以降であり、そこで導入してもよかったのが、記述の体裁上位相の導入を最初に持ってきた次第である。

対して準独裁者が存在する。

FS 定理はルールに対してパレート決定性を課した場合を考察している。MS 定理はこれを更にパレート原理にまで強めている。これら三つの結果は実は同値である。定理 2.1 の証明を見ればわかるのだが、この定理は MS 定理を援用して証明できる。また定理 2.1 にパレート原理を課せば MS 定理が導かれることも自明である。以上から定理 2.1 と MS 定理は実は同値である。この二つの中間に位置する FS 定理と定理 2.1 の同値性を導こう。まず FS 定理から MS 定理が導かれるのは自明であろう。故に MS 定理=定理 2.1 だったから、FS 定理が成り立てば、定理 2.1 も成り立つ。逆は次のようにして証明できる：

証明. 定理 2.1 における各 Q_λ を FS 定理における E_λ の一つとしてカウントする。次に X から Q_λ 全てを除いた残余 $X\setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ 上での二項関係 $\simeq$ を次のように定義する。任意の $x, y \in X\setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ に関して、$x \simeq y \Longleftrightarrow x = y$ または $[x \succ_F y, x \prec'_F y$ となるプロファイル $\succcurlyeq, \succcurlyeq' \in D$ が存在する $]$。この関係が同値関係であることを示そう。反射性と対称性は明らかである。推移性を示す。任意の $x, y, z \in X\setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ に関して、$x \simeq y$ かつ $y \simeq z$ としよう。この三つのうち二つ以上が同一ならば $x \simeq z$ は自明である。三つ共に異なるとしよう。二項独立性と正の感応性より、二つのペア $\{x, y\}$ と $\{y, z\}$ 上ではパレート原理が成り立つ。故にプロファイル $\succcurlyeq \in D$ として、全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i y \succ_i z$、とすると、$x \succ_F y \succ_F z$ であり、$\succcurlyeq_F$ の非循環性より、$x \succcurlyeq_F z$ である。パレート決定性により $x \succ_F z$ となる。二項独立性より、全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i z$ であるプロファイルでは 常に $x \succ_F z$ が成り立つことになる。同様にして全ての $i \in N$ に関して $z \succ_i x$ あるプロファイルでは 常に $z \succ_F x$ もいえる。以上から $\{x, z\}$ 上でパレート原理が成り立つ。すると MS 定理から（= 定理 2.1）$\{x, y, z\}$ 上で準独裁者が存在することになり、これは $x, y, z \in X\setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ に反する。故に x, y, z が互いに異なることはない。以上で $\simeq$ が同値関係であることがわかった。(また同時に $\simeq$ による同値類はどれも 2 個までしか要素として含まないことになる。）この同値類も全て E_λ としてカウントする。以上で FS 定理は (1) の「強く」の部分を除いて証明できた。(1) で強く賦課的であることは次のように証明できる。二つの選択肢 $x \in E_{\lambda_1,}\ y \in E_{\lambda_2}(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ を所与とする。ペア $\{x, y\}$ は賦課的になるのだから、これが強く賦課的でないとすると、二項独立性と正の感応性を考

慮すれば、一般性を失うことなく、全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i y$ のときに $x \sim_F y$、それ以外では $x \prec_F y$ とおける。しかしこれはパレート決定性に反している。以上で証明が完了した。■

ところで、ここでの MS、FS 両定理はオリジナルのそれらより一般化されている。これらのオリジナルでは定義域の広範性が仮定されていたが、三項自由に弱めても証明はそのまま通用する。両定理のオリジナルは拒否権者が一意に存在する、という主張にとどまっていたが、前節で述べたごとく、これは準独裁者にまで強めれる。この点は Bordes and Salles (1978) が指摘した。FS 定理のオリジナルでは (1) の「賦課する」という主張にとどまっていた。これは (a) の「強く賦課する」と強めることができる（Nagahisa 1991a Lemma1)。また仮に E_{λ_1} と E_{λ_2} が 3 個以上の選択肢を含むならば、$x, x' \in E_{\lambda_1},\ y, y' \in E_{\lambda_2}$ に関して x が y を強く賦課する一方で、y' が x' を強く賦課するなどという事態は起こらない (Nagahisa 1991a Lemma 3)。

更にオリジナルでは個人的選好の連続性は課されていない。X に位相が課されていないから、連続性は導入しようがないのである。両定理のオリジナルでは定義域の広範性を仮定し、プロファイルは $T(X)$ へではなく、$O(X)$ の写像と仮定している。従って定理 2.1 は両定理のオリジナルを一つの特殊ケースとして含みうる。すなわち「X に離散位相をかけ、定義域 D を $D = \overbrace{T(X) \times \cdots \times T(X)}^{n}$」としたケースとして扱えばよい。

先に述べたように定理 2.1 の証明では X の位相構造及び個人的・社会的選好の連続性は活用されていない。しかし X を T_1 連結集合とするとこれらを使って以下の定理が証明できる。

定理 2.2（Nagahisa 2006)

$|X| \geq 3$、$4 \leq n < +\infty$ としよう。X は非退化の連結 T_1 位相空間であり、定義域は三項自由であるとする。ルール F が連続・非循環値をとり、二項独立性、及び正の感応性を満たすならば、ルールは賦課的となる。

証明は付録にある。「X は非退化の連結 T_1 位相空間」という仮定を加えるだけで定理 2.1 が主張している Θ の様々な構造は唯一つ（4）のみに絞られるのである。証明を追えばわかるのだが、定理 2.2 の前提の下では、もし Θ が非空ならば、各 Q_λ は開集合であり、そして閉集合になる。X が連結集合だから、$Q_\lambda = X$ となるしかな

い。つまり考えられるのは定理 2.1 の (1) だけになる。故にルールには大域的な準独裁者が存在することになる。しかし、これは起こりえない。直感的にその理由を述べれば以下の通りである。準独裁者が存在すれば社会的選好は一種の辞書的順序付けに近くなる。よく知られているようにこれは多くの位相空間で連続にはなり得ない。以上が証明の概略でもある。

これは MS 定理とは対照的である。かの定理はパレート原理を課せば、Θ の構造は反対の極 (1) へ収斂することを示しているからである。この二つの結果から「X は非退化の連結 T_1 位相空間」と仮定とルールにパレート原理を課せば、ルールは存在しなくなることは容易に推察できる。

定理 2.2 は Nagahisa (1991a,1996) の結果の一般化である。当初この定理は選択肢集合に弱い位相的性質を課した下で証明されていた（Nagahisa 1996 Theorem 1)。その性質とは「任意の $x \in X$ とその任意近傍 $V(x)$ に関して、$V(x)$ は非退化な連結集合を少なくとも一つはその部分集合として含む」ということである。本章ではこの仮定なしに定理が成立することを示したのである。[*4]定理 2.2 より Nagahisa(1991a) での主要結果が系として導出できる。それは以下の通りである。

系 2.1（Nagahisa 1991a Theorem 3）

$|X| \geq 3$、$4 \leq n < +\infty$ としよう。X は非退化の連結 T_1 位相空間であり、定義域は三項自由であるとする。ルール F が連続・非循環値をとり、二項独立性、正の感応性及びパレート決定性を満たすならば、ルールは線形定置となる。

証明. $x, y \in X$ $(x \neq y)$ を任意にとる。$x \sim_F y$ となるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ が存在したとしよう。$x \sim_i y$ となる個人が存在すれば、ルールが二項独立性と正の感応性を満たすことを考慮し、ルールは賦課的でなくなり、定理 2.2 に矛盾する。$x \succ_j y, x \prec_k y$ なる 2 人の個人 j, k がいた場合も然りである。故に全ての $i \in N$ に関して、$x \succ_i y$ であるかまたは $x \prec_i y$ であるしかない。しかしこれはパレート決定性に矛盾する。以上から $x \sim_F y$ となるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ は存在しないことになる。これと定理 2.2 から所望の結果が帰結する。 ■

パレート決定性をルールが満たさない場合、系 2.1 はもはや成り立たない。次の例

[*4] 尤も、この仮定は多くの位相空間がこの性質を持ってはいる。局所連結集合や弧状連結集合などがそうである。

がこのことを示している。

例 2.2 $X = [0,1], D = T(X)^n$ とする。ルール F を以下のように定義する。

まず 0 と 1 に関しては特別な規則

$0 \sim_F 1 \Longleftrightarrow$ 全ての $i \in N$ に関して $0 \succ_i 1$

に従うものとする。これ以外での社会的選好は

$x \succcurlyeq_F y \Longleftrightarrow x \geq y$

で定めるとする。このルールは定理 2.2 の条件を全て満たす。賦課的ではあるが、線形定置ではない。

ルールの存在条件に関しては次の定理が証明できる。

定理 2.3 (Nagahisa 2006)

定理 2.2 の諸条件に加え、X は可分であるとする。定理 2.2 でのルールが存在するためには、 X が実数のある非退化な区間 I と位相同型であることが必要かつ十分である。

証明. 十分性：位相同型写像 $\pi : X \longrightarrow I$ をとる。

ルール F を、任意の $\succcurlyeq \in D$, 任意の $x, y \in X$ に関して、$x \succcurlyeq_F y \Leftrightarrow \pi(x) \geq \pi(y)$

と定義する。このルールは定理 2.2 の諸条件を全て満足する。

必要性：証明のポイントは X 上での連続な線形順序の存在を示すことである。

X 上での二項関係 $\geq_L$ を次のように定義する。任意の $x, y \in X$ に関して、

$x \geq_L y \Longleftrightarrow x = y \vee x$ は y に対して賦課的である

とする。定理 2.2 を考えると $\geq_L$ は定義できる。

$\geq_L$ は連続である：任意の $x, y \in X$ に関して $x >_L y$ とする。(ここで $x >_L y \Longleftrightarrow x \geq_L y \& \neg y \geq_L x$ である。)

すると x と y は互いに異なり、定理 2.2 を考慮すると、

全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i y$ かつ $x \succ_F y$

となるプロファイル $\succcurlyeq$ が存在する。$\succcurlyeq_i$ と $\geq_L$ 連続性により x の近傍 $V(x)$ が存在して、

任意の $z \in V(x)$ に関して、

全ての $i \in N$ に関して $z \succ_i y$ かつ $z \succ_F y$ となる。

これと定理 2.2 を考慮すれば、$z >_L y$ が成り立つ。

同様にして y のある近傍 $V(y)$ が存在して、$x >_L z$ が任意の $z \in V(y)$ に関して成り立つ。

以上で $\geq_L$ は連続であることがわかった。

$\geq_L$ は順序である：$\geq_L$ が完全であることは明らか。推移性を言えばよい。

任意の $x, y, z \in X$ に関して $x \geq_L y, y \geq_L z$ としよう。x, y, z のうち同じものがあれば、$x \geq_L z$ は明らかである。そこで三つとも相異なるとしよう。プロファイル $\succcurlyeq \in D$ を、

$x \succ_1 y \succ_1 z$, 任意の $j \neq 1$ に関して $x \sim_j y \sim_j z$ とおく。

$\geq_L$ の定義より $x \succ_F y \succ_F z$ である。$\geq_L$ の非循環性により $x \not\succcurlyeq_F z$ である。二項独立性と正の感応性より、x は z に対して賦課的となる。つまり $x \geq_L z$ である。

$\geq_L$ が線形であることは明らかなので、$\geq_L$ が求める連続な線形順序となる。

X が連結・可分より、$\geq_L$ の連続関数表現 $W : X \longrightarrow R$ が存在する (Eilenburg1941,Debreu1954)。

以下、区別して論じるべき四つのケースが存在する。

ケース 1：X 上で $\geq_L$ に関する最大元 x^* と最小元 y^* が共に存在する；つまり全ての $x \in X$ に関して $x^* \geq_L x \geq_L y^*$ である。

すると W は X から $[W(y^*), W(x^*)]$ への全単射の連続写像である。

この逆写像が連続であることもすぐに確認できる。求める区間 I を $I = [W(y^*), W(x^*)]$ とおけば所望の結果を得る。

ケース 2：X 上で $\geq_L$ に関する最大元のみが存在する。

ケース 1 と同様にして X が区間 $(-\infty, W(x^*)]$ と位相同型であることが示せる。

ケース 3：X 上で $\geq_L$ に関する最小元のみが存在する。

同じく同様。X は区間 $[W(y^*), \infty)$ と位相同型である。

ケース 4：X 上で $\geq_L$ に関する最大元も最小元も存在しない。

X は数直線 R と位相同型となる。 ■

定理 2.3 も本稿でのオリジナルである。次の結果も定理 2.2 の系として導出できる。

系 2.2（Nagahisa 1991a Theorem 5）系 2.1 での諸条件に加え、X は可分であるとする。系 2.1 でのルールが存在するためには、X が実数のある非退化な区間 I と位

相同型であることが必要かつ十分である。

証明. 必要性は定理 2.3 より明らか。十分性は定理 2.3 での証明がそのまま通用する。
■

定理 2.2 のような位相的構造を選択肢集合に与えないならば、賦課的でないルールは存在する。

例 2.3 X に離散位相を与えよう。するとどのようなルールのトリビアルに連続値となる。次のルールを定義しよう。任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ と任意の選択肢 x, y に関して、個人 1 が x を y より厳密に好めば、社会的選好は x を y より良いとする。個人 1 がこの二つの間で無差別のとき、決定は個人 2 に委ねられる。彼が x を y より厳密に好めば、社会的選好は x を y より良いとし、逆の場合は逆である。個人 2 はいわば条件付独裁者であり、上位の独裁者 1 が無差別であるときに限って決定力を行使しうる。個人 2 も x と y 間で無差別のとき、決定は個人 3 に委ねられる。以下個人 $4, ..., n$ が同様に決定力を振るう。x と y が社会的に無差別になるのは全員がこの二つを無差別とするとき、そしてそのときのみである。この位階的独裁制とも呼ぶべきルールは定理 2.2 の全ての公理を満足する。またパレート原理も満たしている。

存在するルールは決して望ましいものとは言えず（定理 2.2)、しかもその存在条件は極めて限定されている（定理 2.3)。これが二つの定理の放つメッセージである。関連研究と比較しても、この二つの定理の特異性は光っている。次の 2 点において関連研究とは際立った違いがある。

1. 多くのアロウ型定理と違い、ある一部の人々に決定権の大部分を委ねてしまうこと（独裁者定理など）は起こらない。しかし社会的決定が人々の判断に対して極めて不感応になってしまう。ルールは賦課的となるからである。
2. ルールの存在が極めて限られること。選択肢集合が線分と同一視できる場合に限られる。

以上の点を他の関連研究と対比させながら考察していこう。X に定理 2.2 と同じ位相構造を課しつつも、ルールに対しては正の感応性を条件として加えない場合は次の 2 定理が成り立つ。

まず幾つか概念を追加しよう。個人 $i \in N$ がルール F に対する完全独裁者である

とは任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in X$ に関して $x \succ_i y \Longleftrightarrow x \succ_F y$ となることをいう。同じく個人 $i \in N$ がルール F に対する完全迫害者であるとは任意ののプロファイル $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in X$ に関して $x \succ_i y \Longleftrightarrow x \prec_F y$ となることをいう。

定理 C1　(Campbell 1992a, c) $|X| \geq 3$、$2 \leq n < +\infty$ としよう。X は非退化の連結 T_1 位相空間であり、定義域は三項自由であるとする。ルール F が連続・推移値をとり、二項独立性を満たすのは、次の三つの場合のいずれかであるときそしてそのときのみである；

(1) F に対して完全独裁者が存在する；

(2) F に対して完全迫害者が存在する；

(3) F は定値である。

定理 C2　(Campbell 1992b) $|X| \geq 3$、$2 \leq n < +\infty$ としよう。X は非退化の連結 T_1 位相空間であり、定義域は三項自由かつ正規性条件（p 31 付録 2.7.2 の補題 2.2 の前を参照）を満たすとする。ルール F が連続・準推移値をとり、二項独立性を満たし、かつ賦課的ではない（すなわち任意の異なる選択肢 $x, y \in X$ に関して、$x \succ_F y, x \prec'_F y$ となるプロファイル $\succcurlyeq, \succcurlyeq' \in D$ が存在する）のは N の二つの互いに素な部分集合 $S, T, S \cup T \neq \emptyset$ が存在して

(1) 任意の $\succcurlyeq \in D$, 任意の $x, y \in X$ に関して、

$x \succ_F y \Longleftrightarrow$ 全ての $i \in S$ に関して $x \succ_i y$ かつ 全ての $j \in T$ に関して $x \prec_j y$

となるときそしてそのときのみである。

これらの定理では正の感応性は要請されていない。その代わり社会的選好の非循環性が推移性・準推移性に強められている。いずれの定理も可能となるルールは決定力の大部分をある特定グループに委ねてしまうという意味で好ましいものではない。しかしルールの存在自体は保証できる。一意の完全独裁者が存在するルール（完全独裁制ルール）などがその例である。このルールは選択肢集合 X の構造に依存せず常に定義できる。しかし正の感応性を要請したとたん、ルールは選択肢集合 X が実数のある区間と位相同型でない限りは存在しないことになってしまう。しかもこのことは社会的選好を非循環性にまで緩和したとしても、そうなのである。

ただし、二項独立性を破棄すれば、正の感応性と社会的選好の連続性を共に満たす

ルールは構成可能である。次のベンサム型ルールがその例になっている。

例 2.4 各プロファイル $\succcurlyeq = (\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n) \in D$ に対して、効用関数プロファイル $u = (u_1, ..., u_n)$ を

(1) 各 u_i は $\succcurlyeq_i$ の効用関数表現であり $(i = 1, ..., n)$;

(2) 任意の $\succcurlyeq, \succcurlyeq' \in D, i \in N$ に関して、$\succcurlyeq_i = \succcurlyeq'_i$ ならば $u_i = u'_i$

となるように構成する。ルール F を

任意の $\succcurlyeq \in D$、任意の $x, y \in X$ に関して、$x \succcurlyeq_F y \Longleftrightarrow \sum\limits_{i \in N} u_i(x) \geq \sum\limits_{i \in N} u_i(y)$

とする。このルールは連続・非循環値をとり、正の感応性とパレート原理を満たす。このルールは二項独立性を満たさない。

以上から三つの要請、ルールが（X の T_1 連結位相性に対して）連続値をとること、二項独立性、及び正の感応性は定理 2.2, 2.3 の成立にとって不可欠であることがわかった。連続値を欠けば位階的独裁制（例 2.3）が、二項独立性を欠けばベンサム型ルール（例 2.4）が、そして正の感応性を欠けば完全独裁制ルール（定理 C1,C2) が各々反例となる。

2.4　関連研究：補遺

以下の諸定理は古典理論で周知なものである。いずれも定義域の広範性を仮定しているが、実はその full implication は用いておらず三項自由定義域に弱めてもオリジナルな証明がそのまま通用する。これらの定理は位相構造にはなんら依存していない。まず社会的選択ルールがパレート原理を満たす場合、社会的選好の合理性を弱めるに応じて三つの定理が得られる。

ある提携 S がルール F に対する寡頭支配グループであるとは、任意の $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に関して、(i) 全ての $i \in S$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \succ_F y$;(ii) ある $i \in S$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \succcurlyeq_F y$ が成り立つことをいう。提携 S がルール F に対する寡頭迫害グループであるとは、任意の $\succcurlyeq \in D$ と任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に関して、(i) 全ての $i \in S$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \prec_F y$;(ii) ある $i \in S$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \preccurlyeq_F y$ が成り立つことをいう。

定理 A　(Arrow 1963)

$n \geq 2$, $|X| \geq 3$ とする。社会的選択ルールは三項自由定義域を持ち、二項独立性とパレート原理を満足するとしよう。このときルールが推移値を取れば、独裁者が存在する。

定理 G　(Gibbard 1969)

$n \geq 2$, $|X| \geq 3$ とする。社会的選択ルールは三項自由定義域を持ち、二項独立性とパレート原理を満足するとしよう。このときルールが準推移値を取れば、寡頭支配グループが存在する。

定理 A がかの有名なアロウの不可能性定理である。ルールが非循環値をとり、正の感応性を課せば前節の MS 定理 (Mas-Colell and Sonnenschein 1972) となる。

準推移性な社会的選好では選択肢 x, y, z に関して x と y が無差別、y と z が無差別であったとしても必ずしも x と z が無差別になる必要はない。（これに反して推移的な社会的選好の場合、必ず x と z は無差別にならなければならない。）準推移的選好の方が推移的選好よりも適切であると考えられるケースがある。今 x_0 を砂糖が 0 グラム入ったコーヒー,x_1 を砂糖が 1 グラム入ったコーヒー,...,x_k を砂糖が k グラム入ったコーヒーとしよう。すると x_k と $x_{k+1}(k = 0, 1, 2, ...)$ とは殆ど違いがないため社会的選好において両者を無差別とすることは十分あり得る。そこでもし社会的選好が推移的でなければならないとすれば、ブラックコーヒーと砂糖が 20 グラム入ったコーヒーが無差別となってしまう。一方準推移的もだけを要求するならばこのような不合理を避けることができる。これが準推移性を導入する有力な理由である。

: 準推移性より更に弱いのが非循環性である。推移性・準推移性はいずれも選択肢の間に社会的なランキングをつけることを意味する。例えば x が 1 番よく、y が 2 番目である、と言う具合にである。しかし例えばある会社が新規に社員を雇う場合必ずしも個々の候補者の間にランキングをつけて考える必要はない。合格者のグループとそうでないグループに分ければそれで十分である。一般にある選択肢 x がどの選択肢 y に比べても社会的選好においてそれと無差別かあるいはそれよりも好ましいと判断されるとき、x を社会的にベストな選択肢であるという。選択肢が有限で社会的選好が完全である場合、社会的選好の非循環性はベストな選択肢が存在する必要十分条件であることが知られている (Sen 1970)。選択肢の数が無限でもコンパクトである場合は、社会的選好の完全性、連続性、そして非循環性はベストな選択肢が存在する

ための一つの十分条件である (Bergstrom 1975,Walker 1977)。このような事情を考慮すれば非循環性は社会的選択の合理性条件として上の三つの中では最も適した要請であるといえよう。

上の二つの定理においてパレート原理を棄却した場合得られるのが以下の諸定理である。

定理 WBFS　(Wilson 1972, Binmore 1976, Fountain and Suzumura 1982)

$n \geq 2$, $|X| \geq 3$ とする。社会的選択ルールは三項自由定義域、二項独立性を満足するとしよう。このときルールが推移値をとれば、X の分割 $E = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で次の性質を満たすものが存在する。

(1) 任意の $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2} \in E$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に関して、任意の $x, y \in X$ に関して、もし $x \in E_{\lambda_1}, y \in E_{\lambda_2}$ であれば $\{x, y\}$ は強く賦課的である。

(2)3 個以上の選択肢を含む E_λ に関して、

(2-a)E_λ 上の独裁者が存在するか、

(2-b)E_λ 上の迫害者が存在するか、

(2-c) どのプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関しても $\succcurlyeq_F$ では E_λ 上の全ての選択肢 x, y を無差別とする。

定理 FS　(Fountain and Suzumura 1982)

$n \geq 2$, $|X| \geq 3$ とする。社会的選択ルールは三項自由定義域、及び二項独立性を満足するとしよう。このときルールが準推移値をとれば、X の分割 $E = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で次の性質を満たすものが存在する。

(1) 任意の $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2} \in E$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に関して、任意の $x, y \in X$ に関して、もし $x \in E_{\lambda_1}, y \in E_{\lambda_2}$ であれば $\{x, y\}$ は賦課的である。

(2)3 個以上の選択肢を含む E_λ に関して、

(2-a)E_λ 上の寡頭支配グループが存在するか、

(2-b)E_λ 上の寡頭迫害グループが存在するか、

(2-c) 二つの提携 V_1, V_2 で、任意の $\succcurlyeq \in D$、任意の $x, y \in E_\lambda$ に関して、

全ての $i \in V_1$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \succcurlyeq_F y$; 全ての $i \in V_2$ に関して $x \succ_i y$ ならば $x \preccurlyeq_F y$ となるものが存在する。

社会的選好を非循環性にまで弱めたのが定理 2.1、それにパレート決定性を加えた

のが定理 FS である。これらの定理から明らかなようにパレート原理を棄却もしくはそれを緩めた場合、大域的な独裁者などの決定力の過度な集中化は防げるが、局所的な決定力の存在し、また部分的な意味でルールが賦課的になる。

2.5　ルールの特徴づけ：古典的定義域

本節では定義域に関する仮定を緩め、その上で機能するルールの特徴づけに関する定理を幾つか提出する。

定義域に関する幾つかの概念を追加しよう。定義域 D、相異なる三選択肢 $x, y, z \in X$、及び個人 $i \in N$ を所与とする。ペア $\{x, y\}$ が i にとって自由であるとは、このペア上での任意の順序が、あるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ の $\succcurlyeq_i$ に含まれることをいう。すなわち集合 $\{\succcurlyeq_i \cap \{x, y\}^2 : \succcurlyeq_i$ はある $\succcurlyeq = (\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n) \in D$ の第 i 成分 $\} = O(X) \cap \{x, y\}^2$ が成り立つことをいう。ペア $\{x, y\}$ が i にとって固定しているとは、どのプロファイル $\succcurlyeq \in D$ の第 i 成分 $\succcurlyeq_i$ もこのペアの上では同じであることをいう。すなわち先の集合が $\{x, y\}$ 上でのある順序のみの集合に等しいことをいう。集合 $\{x, y, z\}$ が i にとって三項自由であるとは、この三選択肢上での任意の順序が、あるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ の $\succcurlyeq_i$ に含まれることをいう。Z は X の部分集合で、三つ以上の選択肢を含むとしよう。Z が i にとって自由であるとは、任意の相異なる選択肢 $x, y \in Z$ に関して、$\{x, y\}$ が i にとって自由であるときをいう。Z が i にとって三項自由であるとは、任意の三選択肢 $x, y, z \in Z$ に関して、$\{x, y, z\}$ が i にとって三項自由であるときをいう。Z が i にとって固定しているとは、任意の相異なる選択肢 $x, y \in Z$ に関して、$\{x, y\}$ が i にとって固定しているときをいう。特に X が i にとって三項自由であるとき、定義域 D が i にとって三項自由であるという。以上は個人 i に関しての定義であったが、任意の提携 (N の非空部分集合)S に関しても同様な概念が定義できる。ペア $\{x, y\}$ が S にとって自由であるとは $\{x, y\}$ が任意の $i \in S$ に関して自由であることをいう。他の概念も S に関して定義できる。以上の語法に従えば、X が全ての i にとって三項自由であるとき、定義域 D は三項自由である、あるいは三項自由定義域であることになる。

次の定義域制限に関する性質を考える。前節の $(D-0)$（定義域が直積の形をしている）、$(D-1)$ （D が三項自由である）に加え、次の四つの性質を考える。

定義 2.3（古典的定義域）

$(D-2)$ 任意の $x, y \in X$, 任意の $i \in N$ に関して、$\{x, y\}$ は i にとって自由であるか、固定しているかのどちらかである。

$(D-3)$ 任意の $x, y \in X$, 任意の $i \in N$ に関して、もし $\{x, y\}$ が i にとって自由であれば、x の近傍 $V(x)$ で次の性質を持つものが存在する：全ての $z \in V(x)$ に関して、ペア $\{y, z\}$ が i にとって自由である。

$(D-4)$ 任意の $x, y \in X$ と任意の提携 $S \subset N$ に関して、ペア $\{x, y\}$ が S に関して自由であり、$N \backslash S$ に関しては固定しているならば、x と y を含む連結集合 $Y \subset X$ で次の性質を満たすものが存在する：Y は S に関して三項自由であり、$N \backslash S$ に関して固定している。

$(D-5)$ 任意の $x \in int.X$, 任意の $y \in X$, 任意の x の近傍 $V(x)$, 任意の提携 $S \subset N$ に関して、ペア $\{x, y\}$ が S にとって自由であるならば、次のような $z \in V(x)$ と提携 T が存在する：T は 4 人以上であり、ペア $\{x, z\}$ は T にとって自由であり、$\{x, y, z\}$ は S にとって三項自由である。

$(D-0)$ の下では $(D-2)$ が $(D-3)$ を意味するのは簡単に確認できる。$(D-0)$ と $(D-1)$ を共に満たす定義域を三項自由定義域という。

$(D-0), (D-2), (D-4), (D-5)$ を満たす定義域をここでは古典的定義域と呼ぼう。この定義域は $(D-3)$ も満たしている。社会的選択理論や厚生経済学で問題となる多くの経済環境はこの古典的定義域の条件を全て満たしている。以下幾つか例を挙げよう。

例 2.5 三項自由定義域は全て古典的定義域である。一つのプロファイルのみから構成される定義域も古典的定義域である。

例 2.6（私的財経済：Nagahisa 1991a,1996,Campbell 1990）

二つの私的財のみがある場合を考えよう。資源配分全体の集合は $(R_+^2)^n$ としよう。消費者は全て同一の消費集合 R_+^2 を持つことになる。W はプロファイルの集合で、これは各消費者に対し $(R_+^2)^n$ 上で利己的 (自己の消費のみに選好は依存)、単調増加かつ凸であり、連続微分可能な効用関数にて表現できるような選好を割り当てるプロファイル全てからなるとしよう。W が古典的定義域であることは簡単に確認できる：任意の $x, y \in (R_+^2)^n$ をとる。各 $i \in N$ に関して、消費ベクトル $x_i, y_i \in R_+^2$ に

関して、$x_i > y_i, x_i = y_i, x_i < y_i$ の三つのうちのいずれかであれば、i は選好が利己的であることと単調であることから $\{x, y\}$ は i に対して固定となる。三つのいずれでもないときは x_i と y_i の R^2_+ 内での位置は片方がもう片方の左上方にあることになり、明らかに自由となる。以上で $(D-2)$ がいえた。$(D-4)$ は次のようにして確認できる。$\{x, y\}$ に対して自由となる個人 i には $x_i, y_i \in R^2_+$ を結ぶ原点からみて凸で右下がりの曲線 C_i をとる。(ここで R^2_+ 内で x_i は y_i の左上方に位置しているとする。) この曲線上の任意の 3 点は i にとって三項自由である。$[0,1]$ から C_i への連続写像 $C_i(t), C_i(0) = x_i, C_i(1) = y_i$ をとろう。$\{x, y\}$ に対して固定となる個人 i には $x_i, y_i \in R^2_+$ を結ぶ線分 C_i をとる。この線分上の任意の 2 点は i にとって固定である。先と同様 $[0,1]$ から C_i への連続写像 $C_i(t), C_i(0) = x_i, C_i(1) = y_i$ をとろう。$C(t) = \prod_{i \in N} C_i(t)$ とおき、求める Y を $Y = C([0,1])$ とすればよい。最後に $(D-5)$ も $(D-4)$ 同様にして確認できる。この例は私的財の数を任意数にしても成り立つ。

例 2.7（公共財経済：Campbell 1992c)

二つの公共財のみがある場合を考えよう。資源配分全体の集合は R^2_+ としよう。消費者は全て同一の消費集合 R^2_+ を持つことになる。W^* はプロファイルの集合で、これは各消費者に対し R^2_+ 上で狭義単調増加かつ凸であり、連続微分可能な効用関数にて表現できるような選好を割り当てるプロファイル全てからなるとしよう。W^* が古典的定義域であることは例 2.6 と同様簡単に確認できる。この例も公共財の数を任意数にしても成り立つ。

古典的定義域は Bordes and LeBreton(1989) の hypersaturating な定義域とは論理的には無関係である。例 2.5 は hypersaturating な定義域でなく、古典的定義域である例の存在を示している。逆に、hypersaturating な定義域で、古典的定義域でない例もある。選択肢集合が連結でないときにそのような例を見つけることができる。hypersaturating な定義域は選択肢集合の連結性を要求しないが、古典的定義域はそうではないからである。

さて定理 2.2 は古典的定義域にまで拡張できる。

定理 2.4 X は非退化の連結 T_1 位相空間であるとしよう。$int.X \neq \emptyset$ としよう。ルール F は非循環かつ連続値をとり、2 項独立性と正の感応性を満たし、その定義域は古典的であるとする。このとき F は賦課的である。

証明. F は連続値をとるから、$int.X$ 上で F が賦課的になることを示せば十分である。そうでないとしよう（背理法)。すると、ある $x, y \in int.X$ とあるプロファイル $\succcurlyeq, \succcurlyeq' \in D$ にて

（1）$x \succ_F y, x \prec'_F y$

が成り立つ。F が連続値をとることから、y の近傍 $V(y)$ で、

（2）任意の $z \in V(y)$ に関して、$x \succ_F z, x \prec'_F z$

となる。（1）と（D-2）より、少なくとも一人の個人に対してペア $\{x, y\}$ は自由である。S をそういう個人の集合としよう。仮に S が 4 人以上の個人からなる場合、($D-2), (D-4)$, 及び定理 2.2 より $\{x, y\}$ は F によって賦課的となり矛盾する。(詳しい証明：まず $(D-2)$ より、ペア $\{x, y\}$ は S に関して自由、$N \backslash S$ に関して固定となる。そこで $(D-4)$ より、x と y を含む連結集合 $Y \subset X$ で Y は S に関して三項自由、$N \backslash S$ に関して固定であるものが存在する。S を個人の集合、Y を選択肢集合として定理 2.2 を適用すれば矛盾を導ける。同様な技法はこの証明で後 2 回出てくる。）故に S は 3 人以下の個人からなる。

$(D-3)$ より、y の近傍 $W(y)$ で、

（3）全ての $z \in W(y)$ に関して、ペア $\{x, z\}$ は S に関して自由となるものが存在する。

（2）と（3）を結合して、y の近傍 $G(y)$ で、

（4-i）任意の $z \in G(y)$ に関して、$x \succ_F z, x \prec'_F z$;

(4-ii) 任意の $z \in G(y)$ に関して、ペア $\{x, z\}$ は S に関して自由となるものが存在する。

(D-5) より、ある $z \in G(y)$ で、

(4-iii) ペア $\{y, z\}$ は T に関して自由、$\{x, y, z\}$ は S に関して三項自由、T は 4 人以上からなる、が存在する。

（4-i）,(4-ii),（4-iii) 全てを満たす z を一つとり、以下証明の終わりまで固定しておく。$(D-2), (D-4)$, 定理 2.2, 及び（4-iii) から

（5）$\{y, z\}$ は F によって賦課される

ことになる。

他方 $(D-2)$, $(D-4)$, 定理 2.2 と（4-i）を考え合わせると、ペア $\{x, z\}$ に対して自由となる個人は 3 人以下でなければならない。この個人の集合を R としよう。S

はペア $\{x, y\}$ に関して自由である個人の集合であったことを想起されたい。(4-ii) から $S \subset R$ である。$n \geq 4$ と $\#T \geq 4$ を考え合わせると、ある個人 $j \in N \backslash R$ が存在し、この個人に対してペア $\{x, y\}, \{x, z\}$ は固定であり、ペア $\{y, z\}$ は自由であることになる。

プロファイル $\succcurlyeq'' \in D$ を、

$\succcurlyeq''_i \cap \{x, y\}^2 = \succcurlyeq_i \cap \{x, y\}^2$ (全ての $i \in N$ に関して)

$\succcurlyeq''_i \cap \{x, z\}^2 = \succcurlyeq'_i \cap \{x, z\}^2$ (全ての $i \in N$ に関して)

$z \sim''_j y$

ととる。このようなプロファイルは存在する。なぜなら $\{x, y, z\}$ は S に関して三項自由であり (∵4-iii)、$\{x, y\}$ と $\{x, z\}$ は $N \backslash S$ に関して固定しているからである。($S \subset R$ であったことを想起せよ。また $\{x, y\}$ が $N \backslash S$ に関して固定であることは (2) の少し後に記述がある。)

$\{x, y\}$ 上でプロファイル $\succcurlyeq''$ と $\succcurlyeq$ を比較して、2 項独立性を適用すると、(1) より $x \succ''_F y$ を得る。$\{x, z\}$ 上でプロファイル $\succcurlyeq''$ と $\succcurlyeq'$ を比較して、2 項独立性を適用すると、(4-i) より $z \succ''_F x$ を得る。$\succcurlyeq''_F$ が非循環的より、$z \succcurlyeq''_F y$ となる。ペア $\{y, z\}$ は先にとった $j \in N \backslash R$ に関して自由であったから、二項独立性と正の感応性より、$z \succ'''_F y$ とするプロファイル $\succcurlyeq'''$ をとることができる。同様な手順で $z \prec''''_F y$ とするプロファイル $\succcurlyeq''''$ の存在も示せる。これは (5) に矛盾する。 ■

次に少なくとも一つのルールが存在するための古典的定義域に関する条件を求める。つまり連続・非循環値を取り、二項独立性と正の感応性を満たすルールが存在するための条件である。X は $R^m (m \geq 3)$ での非空・連結・開集合であるとする。 X が開であるという条件は後で外す。定義域制限に関して二つの条件を追加する。

定義 2.4（定義域制限に関する追加条件）

$(D-6)$ 任意の $i \in N$ と任意の $x, y \in X$ に関して、ペア $\{x, y\}$ が i に関して自由であれば、あるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ で、x と y を通る i の無差別曲線で $m-1$ 次元の連結な位相多様体となるものが存在する。

$(D-7)$ 任意の $i \in N$ と任意の $x, y, z \in int.X$ に関して、もしあるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ で、$x \sim_i y \sim_i z$ となるものがあり、かつペア $\{x, y\}$ と $\{y, z\}$ が i に関して自由であれば、$\{x, z\}$ も i に関して自由である。

条件 $(D-6)$ は多くの経済環境で成り立つ。代表的なものは、任意の $\succcurlyeq \in D$、任意の $i \in N$ に関して $\succcurlyeq_i$ が C^r 級であるという定義域である（Proposition 2.3.10.Mas-Colell 1985,p66)。ここで開集合 Y 上で二項関係 $\succcurlyeq$ が $C^r(r \geq 1)$ 級であるとは、それが局所非飽和であり、かつ $\sim$ が $Y \times Y$ での C^r 級多様体であることをいう。もう一つの代表例は $X = R^m_+$ 上で定義された弱単調・凸・連続な選好全ての集合からなる定義域である Proposition 2.3.15.Mas-Colell 1985, p68)。ここで弱単調とは任意の $x, y \in X$ に関して $x \gg y$ ならば $x \succ y$ であることである。

条件 $(D-7)$ は一見したところ制約的に見える。しかし $(D-2)$ の下では以下の条件よりも弱い：任意の $i \in N$ と任意の $x, y \in X$ に関して、ペア $\{x, y\}$ が i に関して固定していれば、i はこの二つの間で無差別であることはない。例 2.4 はこの条件を満たしている。例 2.3 はそうではない。一方どちらの例でも $(D-7)$ は成り立っている。この条件の意味するところは明白であろう。

定理 2.5 $4 \leq n < +\infty$ としよう。X は $R^m(m \geq 3)$ での非空・連結・開集合であるとする。定義域 D は古典的定義域であり、$(D-6), (D-7)$ を満たすとする。連続・非循環値をとり、二項独立性と正の感応性を満たすルールが存在するための必要十分条件は、定義域が唯一のプロファイルから構成される場合である。

証明. 十分性は自明である。全ての選択肢を社会的に無差別とするルールがこの定義域上で定義できるからである。プロファイルは一個しかないから正の感応性を含め全ての条件がトリビアルに成り立つ。

必要性を示す。そうでないとしよう (背理法)。$(D-2)$ よりあるペア $\{x^*, y^*\}$ がある個人 $i \in N$ に関して自由となる。そこで $(D-6)$ を適用してプロファイル $\succcurlyeq \in D$ で x^* と y^* を通る i の（$\succcurlyeq_i$ に関する）無差別曲線 I が $m-1$ 次元の連結位相多様体となるようにできる。個人選好の連続性により、x^* の近傍 $V(x^*)$ で、全ての $x \in V(x^*)$ に関してペア $\{x, y^*\}$ が i に関して自由であるものが存在する。故に $(D-7)$ により $I \cap V(x^*)$ は i に関して自由である。I は $m-1$ 次元の連結位相多様体であったから、$I \cap V(x^*)$ の連結・開部分集合 U で R^{m-1} でのある部分集合と位相同型となる（ここで U は I の相対位相に意味で開であるということである)。仮に $x, y \in U$ で、$x \sim_F y$ となれば定理 2.4 に矛盾する。$x \sim_i y$ であり、ペア $\{x, y\}$ が i に関して自由だからである。故に $\succcurlyeq_F$ は U 上で連続な線形順序となるが、これは $m-1 \geq 2$ であ

ることに矛盾する。 ■

次の定理が本章の頂点である。$(D-4)$ を若干強める。$(D-4)$ での Y は $Y \subset int.X$ となるよう取れるとする。この条件を $(D-4')$ とおこう。

定理 2.6 $4 \leq n < +\infty$ としよう。$X \subset R^m (m \geq 3)$ は次の条件を満たすとする。$(D-4')$ を仮定する。更に

(i) $int.X$ は非空で連結；

(ii) $X \subset cl.(int.X)$

とする。このとき定理 2.5 は依然成立する。

証明. そうでないとしよう（背理法)。すると $(D-2)$ より、あるペア $\{x,y\}$ がある個人 i に関して自由となる。x と y が共に $int.X$ に属しているケースをまず考える。ルール F を $int.X$ 上で定義すると考えれば、定理 2.5 の証明に帰着し、矛盾が帰結する（$(D-4')$ はここでのみ使われている。この条件がなければルール F を $int.X$ 上で考えたとき、$(D-4)$ が成立せず、定理 5 が使えない)。次に x と y のいずれかが $int.X$ に属していないケースを考える。すると個人選好の連続性と (ii) より $int.X$ に属する x', y' でペア $\{x', y'\}$ が i に関して自由となるものが存在し、先のケースに帰着する。 ■

この定理の直接の帰結として例 2.3, 2.4 の経済環境上ではルールは存在しないことになる。

命題 2.1 $4 \leq n < +\infty$ としよう。例 2.3 ないし 2.4 の定義域上で定義されたルールで、非循環・連続値をとり、二項独立性と正の感応性を満足するものは存在しない。

次の例は $(D-7)$ を欠いた場合での定理 2.6 に対する反例である。

例 2.8 $X := \{x \in R^m : ||x|| \leq 1\} (m \geq 1)$ としよう。U は $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数全てからなる集合とする。定義域 D は次のようなプロファイル全ての集合とする：プロファイル $\succcurlyeq$ は各 $i \in N$ に関して、ある $u_i \in U$ が存在して、全ての $x, y \in X$ に関して、$x \succcurlyeq_i y \Longleftrightarrow u_i(||x||) \geq u_i(||y||)$ となるような選好 $\succcurlyeq_i$ を対応させる。ルール F を 任意の $\succcurlyeq \in D$, 任意の $x, y \in X$ に関して、$x \succcurlyeq_F y \Longleftrightarrow ||x|| \leq ||y||$ と定義する。

$m=2$ ならば定義域が $(D-6), (D-7)$ を満たしても定理 2.6 は成立しない。

例 2.9 $X := R^2_+, D := \prod_{i \in N} D_i, D_i$ は X 上の連続かつ単調な順序全ての集合、とする。

ルール F は、任意の $\succcurlyeq \in D$, 任意の $x, y \in X$ に関して $x \succcurlyeq_F y \Longleftrightarrow x_2 - x_1 \geq y_2 - y_1$, と定義する。

正の感応性の成立は次のようにして確認できる。このルールでは $x \sim_F y$ となるのは、$x_2 - x_1 = y_2 - y_1$ のとき、つまり $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$ であるとき、そしてそのときのみである。x と y が同一の傾き 45 度の右上がりの直線上にあるときに限って $x \sim_F y$ となるのである。この場合、選好の単調性故に x と y は N にとって固定している。故に正の感応性はトリビアルに成り立っている。

定理 2.6 によって不可能性の極みは達せられたといえよう。連続値をとり、二項独立性と正の感応性を満たすルールが存在するための条件は事実上なきに等しいのである。

社会的選好を推移性・準推移性に強め、代わりに正の感応性を要求しない場合、命題 2.1 に対応する定理は Campbell(1992b) にある。第 2.3 節の定理 C1,C2 はほぼ同じ形で経済環境の下でも成り立つのである。この点に関する詳細な解説は長久（1996）にもある。定理 2.6 と違って、正の感応性を要求さえしなければ定義域が広くともルールの存在は保証されるのである。古典的定義域の下で定理 C1,C2 が成り立つかどうかは未解決問題である。

2.6　結論

本章と関連する幾つかの研究を簡潔に述べよう。Bordes and LeBreton (1989, 1990) は本稿で取り扱った私的財経済と同じ枠組みの下で社会的選好の連続性を課さない場合を考察した。彼らはこのとき古典理論のそれと同じ結論が成り立つことを証明した。つまり社会的選好が推移的であれば独裁者定理、準推移的なら寡頭制定理、そして非循環的であれば準独裁者定理をである。彼らはパレート原理を課している。本稿での結果と比較してこのことからも社会的選好の連続性が大きな意味を持つことが分かる。 Blau (1957) は各個人の消費集合が原点を含まなければ経済環境の下ではアロウの不可能性定理が成立しないことを示した。ただし彼がこのために提出した社会的選択ルールは連続ではない。

:Redekop (1991, 1993a, 1993b) は本稿とは異なった観点からアロウ型社会的選択ルールが存在するための定義域の特徴付けを研究している。彼は選好の空間に Kannai 位相 (Kannai 1970) をかけ、アロウの公理系を満足する社会的選択ルールが存在するためにはその定義域がこの位相に関して「痩せて (nowhere dense)」なければいけないことを示した。彼は社会的選好が推移的である場合を扱っている。

: 本稿では社会的選択ルールは全ての資源配分間に社会的選好関係を指定する写像として定義されている。しかし今私的財の初期賦存が予め決まっている世界での社会的選択を考えるとすれば、社会的選好関係をつけねばならないのはその経済での実行可能な資源配分の間のみであり、実行不可能な資源配分上（及び実行可能資源配分とそうでない配分の間）には必ずしも必要はないと言うべきだろう。2 人で 2 財のケースでこの考えを分かりやすくいえば、我々が必要とするのはエジワースボックス上での社会的選好関係であり、資源配分集合全体上全てでのそれではないと言うわけだ。勿論我々の社会的選択ルールは資源配分集合全体上の全ての選択肢間での社会的選好関係を指定しているのだから、これをエジワースボックスに当てはめ、その上での社会的選好関係にすればよいと言う反論もある。しかし異なった初期賦存を持つ二つの交換経済は各々が閉じたコスモを形成しており、社会的選択問題はそれら個々の経済上のみで完結していればよいのであって、その経済間での規則性はなんら必要ないという考えもまた成り立つ。この観点からすれば我々はルールに対し必要以上に多くのことを要求しすぎている。それは全ての初期賦存の異なる経済での社会的選択が同一の尺度から測らねばならないことを含意しているからである。しかし初期賦存を予め指定した社会的選択を研究する場合は本稿での三項自由定義域や古典的定義域のアイディアはもはや通用しなくなり、全く違う発想が必要となる。この方向での貢献は現在のところ Bordes, Campbell, and LeBreton (1995) があるのみである。彼らは選択肢集合がエジワースボックスの場合でのアロウの不可能性定理を証明している。

: 伝統的に社会的選択ルールの定義に関しては二つの流儀がある。一つは二項型社会的選択ルールと呼ばれ、各選好プロファイルに対し選択肢集合上の二項関係を対応させるもので、本章で採用されているのがこれである。もう一つは各選好プロファイルに対し選択肢集合のある非空部分集合を対応させるものである。これはその数学的構造に着目してしばしば社会的選択対応と呼ばれる。この社会的選択対応に関してもアロウの公理系を定義することは可能であり、古典理論の中では二項型

社会的選択ルールの場合と同じく様々な可能性定理・不可能性定理が確立されている。しかし経済環境でのアロウ型社会的選択対応の性質に関しては二項型のそれに比べてあまり明らかではない。数少ない貢献として Border (1983) 及び Donaldson and Weymark(1988) がある。研究が遅れている理由は次の一点に起因していると考えられる。社会的選択対応に関する古典理論の設定では選択肢集合 X は当該社会にとって論理的に生起可能な社会状態の集合として解釈され、必ずしもこの上で社会的選択が行われるわけではない。社会の技術的・制度的・歴史的制約からその中のある非空部分集合 S が実行可能な社会状態の集合となり、社会的選択はこの中で行われるのである。形式的には、社会的選択対応は X 上での選好プロファイル $\succcurlyeq = (\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ と実行可能社会状態集合 S の組 $(\succcurlyeq, S)$ に対して S の非空部分集合 $F(R, S)$ を対応させる写像として定義される。このように想定せざるを得ない理由はアロウの社会的選好の合理性条件が対応型社会的選択ルールでは異なった実行可能社会状態集合間での選択の規則性に関する条件 となるからである。そこでこの条件を使うためには S にある程度の自由度を与えねばならず、特に古典理論では多くの場合 S が X の非空部分集合全体にせざるを得ないのである。しかし経済環境では S を X の非空部分集合全体をとるには無理がある。例えば 2 人 2 財の私的財経済を考えよう。この場合 X は資源配分集合 R^4_+ である。このとき実行可能な社会状態の集合 S の自然な規定は経済全体の初期賦存、R^4_+ 内の一点、を任意に決めたときのエジワースボックスの集合と定義することだろう。するとこのエジワースボックスの集合は X の非空部分集合全体にはならない。

アロウの公理系の中で最も疑問視されてきたのが二項独立性である。経済環境の場合に則して二項独立性の含意を例解しよう。2 人 2 財の交換経済を考えよう。エジワースボックス内の二つの配分 x, y をとる。ボックス内で x は y の左上方に位置するように取ろう。プロファイル a は 2 人に線形効用関数で代表される選好を指定し、一方プロファイル b は 2 人にレオンティエフ型効用関数で代表される選好を指定するとしよう。ただし 2 人はともに a, b いずれのプロファイルにおいても x と y を無差別にしているようにとる。エジワースボックス全体で見れば二つのプロファイルが指定する個人選好は全く異なるが、$\{x, y\}$ 上で見る限り二つのプロファイルが指定する選好には違いがない。したがって二項独立性は x と y に関する個人的選好が同一である以上 x と y に関する社会的選好も二つのプロファイルでは同一になるべきで

あると主張しているわけだ。いわば二項独立性は「局所的な」選好の情報のみを用いて社会的選好を決定しているのである。しかし先の例のように二つのプロファイルが指定する個人選好が大域的には全く異なっている場合には、その違いを $\{x, y\}$ 上での社会的選好の決定にも影響させるべきであるという主張も一理あるといえよう。そこでもし我々が二項独立性を社会的選択の公理として不適切であると判断するならば、$\{x, y\}$ 上での社会的選好の決定に関してこのペア以外での選好に関する「大域的な情報」をも用いざるを得ないことになる。二項独立性の含意を尊重しつつそれを緩めるとすると、それは連続性の公理に自然に至るであろう。「似た選好プロファイルは似た社会的選好を生み出さねばならない」と言うのがその直感的意味である。形式的には U を選好の集合とし、この上に位相をかけ社会的選択ルール $F : U^n \longrightarrow U$ が連続写像になることがここでの連続性に最もふさわしい定式化であるといえよう。Chichilnisky and Heal(1979) は連続性、匿名性、全員一判断の尊重を満たすルールが存在するための定義域の位相構造を代数的位相幾何学の観点から確定した。しかし通常の経済環境での定義域が彼らの条件を満たしているかどうかにはなお係争中であり、未解決な疑問も多い（Allen 1996)。

ここで我々は経済学やゲーム理論で登場する多くの均衡概念は二項的とはいわないまでもそれに近い形で定義されていることに注目したい。例えばある配分 x がパレート最適であるか否かを判断するため必要な情報は x と他の任意の選択肢 y との間の個人的選好プロファイルであり、それ以外の選択肢のペアに関する個人選好に関する情報は全く必要としない。このことはコアやナッシュ均衡にも該当する事実である。こうしてみるとアロウの独立性も Chichilnisky and Heal の連続性も社会的選択における情報節約の条件としては互いに両極に位置していることがわかる。前者は必要な情報を過度に削りすぎ、後者は過度に多くの情報を投入しすぎているのである。経済学での多くの均衡概念はその中間に位置しており、これらに妥当する独立性公理を定式化し分析することが次の主題であろう。このような試みの一つとして Nagahisa (1991b) の局所独立性条件がある。

この条件はワルラス資源配分ルールを社会的選択理論の立場から公理化するための一つの公理であり、簡単にいえば二つの選好プロファイルが選択肢 x の周りで近似的に等しいならば、両者は x の周りで同一であるとみなし、x とその周りの選択肢間での社会的選択も同じべきだと主張するのである。この公理はメカニズムデザインでの

Nash implementation の議論とも実は密接な関わりがある。これが次章での主題である。

経済環境での社会的選択のもう一つの流れは従来の伝統的に研究されてきた資源配分メカニズムを社会的選択理論の立場から公理化するアプローチである。本稿で取り上げた議論の主題が全て社会的選択の古典的定理の経済環境での含意を調べることであったのに対し、このアプローチは逆の方向、つまり経済環境での資源配分方式を社会的選択理論の観点から分析するのである。先の Nagahisa(1991b) はこの流れに属している[*5]。現在のところ二つのアプローチは相互に交渉なく行われているが、先に触れた局所独立性とアロウタイプの独立性との関連などが解明されれば、両者の間で新しい知見が得られることになるかもしれない。経済環境のもとでの社会的選択は新たな研究の段階へ進むはずである。

2.7 付録

2.7.1 定理 2.1 の証明

証明. ルール F は定理 2.1 の諸条件全てを満たすとしよう。なお証明には MS 定理を補題として用いる。個人 $1 \in N$ をとる。

X 上での二項関係 $\simeq_1$ を、任意の $x, y \in X$ に関して

$x \simeq_1 y \Longleftrightarrow x = y$ または個人 1 が $\{x, y\}$ に対する一意の準独裁者である

と定義する。この二項関係は明らかに反射的・対称的である。推移的であることを示そう。任意の $x, y, z \in X$ に関して、$x \simeq_1 y, y \simeq_1 z$ としよう。

x, y, z のなかで同一のものがあれば、明らかに $x \simeq_1 z$ である。そこで x, y, z が互いに異なるとしよう。

1 以外の 2 個人 j, k をとり、プロファイル $\succcurlyeq \in D$ を以下の表のようにとる。

$1:$	$x\ y\ z$
$j:$	$z\ [x\ y]$
$k:$	$[y\ z]\ x$
$N\backslash\{1, j, k\}:$	$z\ y\ x$

表の読み方：第 1 段目から順に個人 $1, j, k$ 及びそれ以外の人々の選好である。より

[*5] この方面の研究書として Thomson (1985)，Moulin (1988) などがある。

左に位置する選択肢ほど好ましいとする。例えば個人 1 は xyz の順に選好している。角括弧内の選択肢は互いに無差別であることを示す。例えば j は x と y を無差別にしている。

x, y, z 以外の選択肢に関する選好は特定化しなくてよい。定義域 D は三項自由より、このようなプロファイルは存在する。(x, y, z に関して先の表のような順位付けを各個人に与えるプロファイル $\succcurlyeq$ が定義域 D の中に属している、ということである。この論法を以下では再三にわたり使うことになる。)

1 は $\{x, y\}, \{y, z\}$ に対する準独裁者であったから、$x \succ_F y, y \succ_F z$ である。$\succcurlyeq_F$ が非循環的であるから、$x \succcurlyeq_F z$ である。二項独立性と正の感応性を考慮すると、$x \succ_1 z \Longrightarrow x \succcurlyeq_F z$ が任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関して成り立つ。x と z を入れ替えて同じ議論をすると、$z \succ_1 x \Longrightarrow z \succcurlyeq_F x$ も任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関して成り立つ。以上から 1 は $\{x, z\}$ に対して準独裁者となり、$x \simeq_1 z$ が成り立つ(ルールが二項独立性と正の感応性を満たせば、拒否権者は準独裁者である。2.2 節を参照)。

以上から $\simeq_1$ は X 上での同値関係となり、$\simeq_1$ による X の分割が存在する。この分割の同値類の中で二つ以上の選択肢を含むものは、その定義により、その上で 1 が準独裁者となる。このような同値類は全て定理 2.1 での Q_λ の一つとしてカウントする。その集合族を $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1}$ としよう。かような Q_λ が一つのない場合もありうる。個人 1 がどのペア上でも準独裁者とはなりえない場合である。

次に $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} Q_\lambda$ を除いた選択肢集合上で個人 2 に対しても同様な操作を行なう。まず集合 $X \backslash \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} Q_\lambda$ 上での二項関係 $\simeq_2$ を次のように定義する:任意の $x, y \in X \backslash \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} Q_\lambda$ に関して

$x \simeq_2 y \Longleftrightarrow x = y$ または個人 2 が $\{x, y\}$ に対する一意の準独裁者である

$X \backslash \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} Q_\lambda$ が先と同様にして $\simeq_2$ が同値関係であることが言える($X \backslash \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} Q_\lambda$ が三つ以上の選択肢を含む場合とそうでない場合に分けて証明する必要はある)。最終的に集合族 $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ が構成できる。$Q_\lambda (\lambda \in \Lambda_2)$ は二点以上を含み、その上で 2 が準独裁者となる集合である。$\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ は X の二点以上を含む集合でその上で個人 1 ないし 2 が準独裁者であるもの全てからなる集合である。

以下同様な手続きを個人 $3, \ldots, n$ にまで行なうと、X の部分集合族 $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_n}$ が構成できる。これを求める $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とおけることを

以下段階を追って証明しよう。

まず次の事実を証明しよう。

ステップ 1. 任意の $x \in X \backslash Q_\lambda$, 任意の $y \in Q_\lambda$ に関して、ペア $\{x, y\}$ は賦課的である。

そうでないとする。二項独立性と正の感応性を考慮すると、このペア上でパレート原理が成り立つ。(あるペアが賦課的でなく、二項独立性と正の感応性が成り立てば、そのペア上でパレート原理が成り立つ。このテクニックは証明でしばしば利用される。) $z \in Q_\lambda, z \neq y$ を任意にとる。定義より $\{y, z\}$ 上でもパレート原理が成立する。いま $\{x, z\}$ 上でパレート原理が成り立てば、$\{x, y, z\}$ 上で MS 定理が適用できて、矛盾する。故に $\{x, z\}$ は賦課的となる。

区別して論じるべき二つのケースが存在する。

ケース 1：$\{x, z\}$ は強く賦課的ではない。

二項独立性と正の感応性を考慮すると、

(1) 全ての $i \in N$ に関して $x \succ_i z$ ならば $x \sim_F z$、そうでなければ $x \prec_F z$;

であるかまたは

(2) 全ての $i \in N$ に関して $x \prec_i z$ ならば $x \sim_F z$、そうでなければ $x \succ_F z$

のいずれかである。

一般性を失うことなく前者であったとしよう。Q_λ 上での準独裁者を i としよう。$j \neq i$ を一人選ぶ。

$i:$	$x\ y\ z$
$j:$	$x\ y\ z$
$N \backslash \{i, j\}:$	$[x, z]\ y$

とプロファイルを選ぶ。$\{x, y\}$ 上でパレート原理が成り立つので、$x \succ_F y$ となる。また $y, z \in Q_\lambda$ と i がこの上での準独裁者であることから、$y \succ_F z$ である。$\succcurlyeq_F$ が非循環的より、$x \succcurlyeq_F z$ となる。そこで i, j 以外の一人 k が選好を $x \succ'_k z$ と変化させ、他の人々は選好を変えないとすると、二項独立性と正の感応性を考慮して新しいプロファイル $\succcurlyeq'$ では $x \succ'_F z$ となって (1) に矛盾する。

ケース 2：$\{x, z\}$ は強く賦課的である

全ての $\succcurlyeq \in D$ に関して $x \succ_F z$l かまたは全ての $\succcurlyeq \in D$ に関して $x \prec_F z$ となる。一般性を失うことなく、前者であったとしよう。Q_λ 上での準独裁者を i としよう。

$j \neq i$ を一人選ぶ。

$i:\quad z\ y\ x$

$j:\quad z\ y\ x$

$N\backslash\{i,j\}:\quad y\ z\ x$

とプロファイルを選ぶ。$\{x,y\}$ 上でパレート原理が成り立つので、$y \succ_F x$ である。$y, z \in Q_\lambda$ と i がこの上での準独裁者であることから、$z \succ_F y$ である。$\succcurlyeq_F$ が非循環的より、$z \succcurlyeq_F x$ となり、矛盾に逢着する。以上でステップ 1 が証明できた。

次に以下の事実も証明できる。

ステップ 2. 任意の $x \in X\backslash Q_\lambda$ に関して、ペア $\{x, Q_\lambda\}$ は賦課的である。

$y \in Q_\lambda$ を任意にとる。ステップ 1 より $\{x,y\}$ は賦課的である。故に次の二つを証明すればよい。

(1) 任意の $y' \in Q_\lambda$ に関して、x が y に対して賦課的ならば、x が y' に対して賦課的である；

(2) 任意の $y' \in Q_\lambda$ に関して、y が x に対して賦課的ならば、y' が x に対して賦課的である

(1):i を Q_λ 上での準独裁者とする。i 以外の j を一人選ぶ。

$i:\quad y\ y'\ x$

$j:\quad [y,y']\ x$

$N\backslash\{i,j\}:\quad y'\ x\ y$

$y, y' \in Q_\lambda$ と i が Q_λ 上での準独裁者であることから、$y \succ_F y'$ である。x が y に対して賦課的であることから $x \succcurlyeq_F y$ である。ここで $x \sim_F y$ となると、二項独立性と正の感応性より $x \prec'_F y$ となるプロファイルが存在することになり矛盾する。故に $x \succ_F y$ である。よって $\succcurlyeq_F$ の非循環性により、$x \succcurlyeq_F y'$ である。よって二項独立性と正の感応性より x は y' に対して賦課的になる。以上で (1) の証明が完了した。

(2):i を Q_λ 上での準独裁者とする。i 以外の j,k を選ぶ。

$i:\quad x\ y'\ y$

$j:\quad x\ [y,y']$

$k:\quad [x,y]\ y'$

$N\backslash\{i,j,k\}:\quad x\ y'$

$y, y' \in Q_\lambda$ と i が Q_λ 上での準独裁者であることから、$y' \succ_F y$ である。y が x に対して賦課的であることから $y \succcurlyeq_F x$ である。ここで $y \sim_F x$ となると、二項独立性

と正の感応性より $x \succ'_F y$ となるプロファイルが存在することになり矛盾する。故に $y \succ_F x$ である。$\succcurlyeq_F$ の非循環性により $y' \succcurlyeq_F x$ となり、二項独立性と正の感応性より y' は x に対して賦課的となる。以上でステップ 2 の証明が完了した。

ステップ 1、2 より、(Q-2),(Q-3) は明らかである。(Q-1),(Q-4) は Θ の構成から明らかである。（Q-5）は仮にこれが成り立たなければ、$\{x, y, z\}$ 上で MS 定理が適用できて、この上で準独裁者が存在することになり、x, y, z がどの Q_λ にも属さないという前提に矛盾する。この Θ の構造に応じて四つの場合はあることは明らかである。以上で定理 2.1 の証明は完了した。 ■

2.7.2　定理 2.2 の証明

定理 2.2 の証明. 以下ルール F は定理 2.2 の諸仮定全てを満たすとしよう。出発点は定理 2.1 である。定理 2.1 での Θ を所与とする。証明は三つの補題を経由して行なわれる。

補題 2.1 以下の二つのうちいずれか一方が成り立つ。

（1）ルール F には一意の準独裁者が存在する；

（2）ルール F は賦課的になる。

証明. 以下 Q_λ の数学的構造を考察していく。まず以下の事実が示せる。

（3）Q_λ は閉集合である。

その証明：Q_λ が一点集合のときは X が T_1 位相であることから明らかである。Q_λ が二点以上を含むとしよう。仮に Q_λ が閉でないとしよう。すると $x \in cl.Q_\lambda \backslash Q_\lambda$ が存在する。$y \in Q_\lambda$ を一つとる。定義より i_0(Q_λ 上での準独裁者) は $\{x, y\}$ に対する準独裁者にはなりえない。すると

$i_0:$　　$x\ y$

$N \backslash \{i_0\}:$　　$y\ x$

かつ $y \succ_F x$ となるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ が存在するか、または

$i_0:$　　$y\ x$

$N \backslash \{i_0\}:$　　$x\ y$

かつ $x \succ_F y$ となるプロファイル $\succcurlyeq \in D$ が存在するか、のどちらかである。

（そうでなければ二項独立性と正の感応性を考慮して i_0 は $\{x, y\}$ に対する準独裁者となって矛盾する）

一般性を失うことなく、前者であったとする。個人的・社会的選好の連続性により、x の近傍 $V(x)$ で、

$i_0:$ $V(x)\ y$

$N\backslash\{i_0\}:$ $y\ V(x)$

かつ $y \succ_F V(x)$ となる。

（読み方：第 1 段目は「i_0 が $V(x)$ 内のどの選択肢も y より好んでいる」ことを示す。2 段目も同じように読む。$y \succ_F V(x)$ は「ルール F はプロファイル $\succcurlyeq$ において y を $V(x)$ 内のどの選択肢よりも社会的により望ましいとしている」ことを示す。）

$x \in cl.Q_\lambda \backslash Q_\lambda$ であったから、$V(x)$ の中で $x' \in Q_\lambda$ なるものが存在する。すると，先の表から

$i_0:$ $x'\ y$

$N\backslash\{i_0\}:$ $y\ x'$

かつ $y \succ_F x'$ となることがわかる。i_0 は $\{x', y\}$ に対して準独裁者となりえず、矛盾する（$\because x', y \in Q_\lambda$）。この矛盾の指摘でもって（3）の証明は完了する。

一方で次の事実も成立する。

（4）Q_λ が二点以上を含むならば、Q_λ は開集合である。

その証明：二点 $x, y \in Q_\lambda$ をとる。準独裁者 i_0 と異なる個人 j をとる。いま $\succcurlyeq \in D$ を、

$i_0, j:$ $x\ y$

$N\backslash\{i_0, j\}:$ $y\ x$

とすると、$x \succ_F y$ である。個人的・社会的選好の連続性により、

（5）x の近傍 $V(x)$ で、

$i_0, j:$ $V(x)\ y$

$N\backslash\{i_0, j\}:$ $y\ V(x)$

かつ $V(x) \succ_F y$ となるものが存在する。

同様にして、i_0, j と異なる第 3 の個人 k をとり、

（6）プロファイル $\succcurlyeq'$ と x の近傍 $V'(x)$ で、

$i_0, k:$ $y\ V'(x)$

$N\backslash\{i_0, k\}:$ $V'(x)\ y$

かつ $y \succ'_F V(x)$ となるものが存在する。

$z \in V(x) \cap V'(x), z \neq x$ を任意にとる。（かような z がとれないと、$V(x) \cap V'(x) = \{x\}$ となり、X の T_1 連結性に矛盾する）

プロファイル $\succcurlyeq'' \in D$ を、

i_0 :	$x\ y\ z$
j :	$z\ x\ y$
k :	$y\ z\ x$
$N\backslash\{i_0, j, k\}$:	$z\ y\ x$

二項独立性と (5) , (6) より、$x \succ''_F y, y \succ''_F z$ である。$\succ''_F$ の非循環性より、$x \succcurlyeq''_F z$ である。

つまり、$x \succ_{i_0} z \Longrightarrow x \succcurlyeq_F z$ が任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関していえたことになる。同様にして、$z \succ_{i_0} x \Longrightarrow z \succcurlyeq_F x$ も任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関していえる。故に i_0 は $\{x, z\}$ に対しても準独裁者となるから、$z \simeq_{i_0} x$ つまり $z \in Q_\lambda$ となる。これが任意の $z \in V(x) \cap V'(x)$ に関していえるので、$V(x) \cap V'(x) \subset Q_\lambda$ となる。$x \in Q_\lambda$ は任意にとったので、このことから Q_λ は開集合となる。

以上から Q_λ がもし二点以上を含めば、それは開かつ閉となる。そこで X が連結であることを考えれば、次の二つのうちいずれかが起こることになる。

一つは補題 2.1 の（1）で述べられたこと「ルール F には一意の準独裁者が存在する」である。二点以上を含む Q_λ が存在すれば、$Q_\lambda = X$ である他ない。これがそのケースである。もう一つはそうでないとき、すなわち各 Q_λ が一点集合であるときである。言い換えれば

（7）どのペア $\{x, y\}$ に対しても準独裁者は存在しない

ケースである。この場合にルールが賦課的であることを示せば証明は完結する。

仮にそうでないとしよう（背理法）。するとある $x, y \in X (x \neq y)$ に関して、$x \succ_F y, x \prec'_F y$ となるプロファイル $\succcurlyeq, \succcurlyeq' \in D$ が存在することになる。二項独立性と正の感応性を考慮すると、

（8）$\{x, y\}$ に対してパレート原理が成り立つことになる。

いま、

（9）$x \succ_1 y$ かつ任意の $j \neq 1$ に関して $x \prec_j y$ ならば $x \succcurlyeq_F y$

としよう。このとき

（10）$x \prec_1 y$ かつ任意の $j \neq 1$ に関して $x \succ_j y$ ならば $x \succ_F y$

である。（そうでないと、$\{x, y\}$ 上で 1 が準独裁者となり矛盾する）

（10）と個人的・社会的選好の連続性により、x の近傍 $V(x)$ で、

（11）$V(x) \prec_1 y$、任意の $j \neq 1$ に関して $V(x) \succ_j y$、かつ $V(x) \succ_F y$;

（12）$V(x)$ の各要素と y の間でパレート原理が成り立つ

ようにできる。$z_1, z_2 \in V(x)$ を任意に選ぶ。プロファイル $\succcurlyeq \in D$ を

$1:$	$y\ [z_1, z_2]$
$N\backslash\{1\}:$	$z_2\ y\ z_1$

とする。（12）より $y \succ_F z_1$ である。（11）と二項独立性より $z_2 \succ_F y$ である。

故に $\succcurlyeq_F$ の非循環性により、$z_2 \succcurlyeq_F z_1$ である。これより

任意の $j \in N$ に関して $z_2 \succ_j z_1$ ならば $z_2 \succ_F z_1$

が成り立つことになる。z_1 と z_2 を入れ替えて同様な議論を行なうと、

任意の $j \in N$ に関して $z_1 \succ_j z_2$ ならば $z_1 \succ_F z_2$

が成り立つ。つまり $\{y, z_1, z_2\}$ 上でパレート原理が成り立ち、MS 定理よりこの上で準独裁者が存在し、矛盾する。(z_1 として x を選べば、(7) に反するためである。)

以上で補題 2.1 の証明が完了した。 ■

補題 2.1 よりルールは賦課的となるか、大域的な準独裁者が存在するか、いずれかになる。このうち後者はありえないことを証明すればよい。

プロファイル $\succcurlyeq \in D$ が個人 $i \in N$ に関して弱正規性条件を満たすとは以下の性質を満たす選択肢 $x^* \in X$ が存在することをいう：$cl.\{x \in X : x \succ_i x^*\}$ かまたは $cl.\{x \in X : x \prec_i x^*\}$ のいずれか一方が $\{x \in X : x \sim_i x^*\}$ の要素を二つ以上は含む。この条件は Campbell(1992b) の regularity condition よりも弱い。（Campbell の条件は、任意の $x, y \in X$、任意の x の近傍 $V(x)$、任意のプロファイル $\succcurlyeq \in D$ に関して、ある $z \in V(x)$ で全ての個人が y と z を選好上無差別とはしない、というものである。この条件が弱正規性条件を満たすことは容易に確認できる。）

補題 2.2 ルール F に対して一意の準独裁者 $i_0 \in N$ が存在するとしよう。このとき弱正規性条件を満たすプロファイルは存在しない。

証明. そうでないとしてみる（背理法)。プロファイル $\succcurlyeq \in D$ を次のように構成する：ある $x^*, y^* \in X$ に対して、$x^* \sim_{i_0} y^*$ であり、この 2 点が共に集合 $\{x \in X : x \succ_{i_0} x^*\}$ の触点であるか、または共に $\{x \in X : x \prec_{i_0} x^*\}$ の触点となる。一般性を失うことなく x^* と y^* は前者の触点であったとする。社会的選好の連続性と i_0 が準独裁者であることから、$x^* \sim_F y^*$ である。しかし $\succcurlyeq$ は i_0 以外の個人の選好をなんら特定していないことを考えれば、これは正の感応性に反する結果である。 ■

選択肢 $x \in X$ が X の結節点であるとは、$X\backslash\{x\}$ の分割 $\{H,K\}$ が存在して $cl.H = H \cup \{x\}, cl.K = K \cup \{x\}$ となることをいう。

補題 2.3 ルール F に対して一意の準独裁者 $i_0 \in N$ が存在するとしよう。このとき X は少なくとも一つの結節点を持つ。

証明. 三つの選択肢 $x^*, y^*, z^* \in X$ をとる。プロファイル $\succcurlyeq \in D$ を $x^* \succ_{i_0} y^* \succ_{i_0} z^*$ ととろう。三つの集合 K, I, L を次のように定義する。

$K := \{y \in X : y \succ_{i_0} y^*\}, I := \{y \in X : y \sim_{i_0} y^*\}, L := \{y \in X : y \prec_{i_0} y^*\}$

$\{K, I, L\}$ が X の分割であることは明らかである。もし $cl.K = K$ ならば X の連結性に反する（$I \cup L$ が閉集合であるから)。故に $cl.K \neq K$、同じく $cl.L \neq L$ である。閉包の定義により $cl.K \subset K \cup I, cl.L \subset L \cup I$ である（$K \cup I$ は K を含む閉集合であることに留意)。故に二つの選択肢 $x, y \in X$ で $x \in (cl.K) \cap I, x \notin K, y \in (cl.L) \cap I, y \notin L$ となるものが存在する。(仮に存在しないとする。$x \in (cl.K) \cap I, x \notin K$ なる x がなければ、$(cl.K) \cap I \subset K$。I に属しつつ K に属すことは不可能だから $(cl.K) \cap I = \phi$。すると X は二つの非空の閉集合 $cl.K$ と $L \cup I$ に分割され矛盾する。同じ要領で $y \in (cl.L) \cap I, y \notin L$ も確認できる。) もし $(cl.K) \cap I$ が二つ以上の選択肢を含んでいれば、$\succcurlyeq$ が i_0 に関して弱正規性条件を満たしてしまうので、補題 2.2 に矛盾する。それ故、

(1) $\{x\} = (cl.K) \cap I$, $\{y\} = (cl.L) \cap I$

となる。次に $x = y$ であることを示そう。そうでないとしてみる。$x \in (cl.K) \cap I$ より、x の任意近傍 $V(x)$ に関して、ある $z \in V(x)$ で $z \succ_{i_0} y^*$ となるものが取れる。$y \in I$ つまり $y^* \sim_{i_0} y$ であるから、$z \succ_{i_0} y$ となる。よって i_0 が準独裁者であることと社会的選好の連続性により、$x \succcurlyeq_F y$ を得る。同様にして $y \succcurlyeq_F x$ を得る。つまり $x \sim_F y$ となる。しかしプロファイル $\succcurlyeq$ が i_0 以外の個人の選好を特定化していないことを考慮すれば、これは正の感応性に矛盾する帰結である。以上で $x = y$ がいえた。

$x^0 = x = y$ と記号しよう。x^0 が結節点であることを証明する。$H := (I \cup L)\backslash\{x^0\}$ としよう。$\{K, H\}$ が $X\backslash\{x^0\}$ の分割であることは明らかである。$cl.K = K \cup \{x^0\}$ と $cl.H = H \cup \{x^0\}$ を証明すれば十分である。

$cl.K = K \cup \{x^0\}$ の証明：(1) より、$K \cup \{x^0\} \subset cl.K$ は明らかだから、逆向きの包含関係を証明すればよい。$x \in cl.K \backslash K$ を任意にとる。$cl.K \subset K \cup I$ だったから $x \in I$ である。仮に $x \neq x^0$ ならば、これは (1) に矛盾する。故に $x = x^0$ となり、所望の結果を得る。

$cl.H = H \cup \{x^0\}$ の証明：$cl.H \subset H \cup \{x^0\}$ は明らかである。なぜなら $H \cup \{x^0\}$ は H を部分集合として含む閉集合だからである。故に逆向きの包含関係を示せばよい。$x^0 \in cl.H$ をいえば十分である。(1) より、$x^0 \in (cl.L) \cap I$ である。故に x^0 の任意近傍 $V(x^0)$ に対して、ある $z \in V(x^0) \cap L, z \neq x^0$ となるものが存在する。故に $z \in (I \cup L) \backslash \{x^0\}$ となり、これより $x^0 \in cl.H$ が従う。■

以上から定理 2.2 の証明に入る段階に来た。

ルール F には準独裁者 $i_0 \in N$ が存在する、として矛盾を導く。こうすれば補題 2.1 より定理の証明は完了する。補題 2.3 より、結節点 $x^0 \in X$ が存在し、$X \backslash \{x^0\}$ の分割 $\{H, K\}$ で $cl.H = H \cup \{x^0\}, cl.K = K \cup \{x^0\}$ となる。

$y^0 \in H, z^0 \in K$ をとる。プロファイル $\succcurlyeq \in D$ を次のようにとる：$x^0 \succ_{i_0} y^0 \sim_{i_0} z^0$。集合 $T := \{x \in X : x \preccurlyeq_{i_0} z^0\}$ を定義する。最初に次の事実を証明する。

(1) $\{T \cap cl.H, T \cap cl.K\}$ は T の分割である。

$y^0 \in T \cap cl.H$ と $z^0 \in T \cap cl.K$ より、この二つの集合は非空である。$x \in T \cap cl.H \cap cl.K$ としてみよう。すると $x = x^0$ に他ならず、これは矛盾である。なぜなら $x^0 \in T$ つまり $x^0 \preccurlyeq_{i_0} z^0$ となり、i_0 の選好のとり方に反するからである。$T \cap cl.H$ と $T \cap cl.K$ の和が T であることは明らかである。以上で (1) が示せた。

$T \cap cl.H$ の境界点 x^* をとる。$x^* \in T \cap cl.H$ である。以下の事実を証明する。

(2) x^* の近傍 $W(x^*)$ で、全ての $x \in W(x^*) \backslash \{x^*\}$ に関して $x \notin T \cap cl.K$ となるものが存在する：

(X が T_1 連結より、$W(x^*) \backslash \{x^*\} \neq \emptyset$ は明らかである。)

そうでないとしよう。すると x^* のどの近傍 $W(x^*)$ にもある $x \in W(x^*) \backslash \{x^*\}$ に関して $x \in T \cap cl.K$ となる。これは $x^* \in T \cap cl.K$ を意味し、$x^* \in T \cap cl.H$ であったことと考え合わせると、$x^* = x^0$ が帰結し、これは矛盾である（なぜなら $x^0 \in T$ つまり $x^0 \preccurlyeq_{i_0} z^0$ となり i_0 の選好のとり方に反する。）以上で (2) が示せた。

次の事実も証明できる。

(3)x^* の任意近傍内の点 x で $x \notin T \cap cl.H$ かつ $x \notin T \cap cl.K$ となるものが存在する。

証明：x^* の任意近傍を $V(x^*)$ としよう。これと（2）でとった近傍 $W(x^*)$ との共通部分を $U(x^*)$ とすると

（2）より、全ての $x \in U(x^*) \backslash \{x^*\}$ に関して $x \notin T \cap cl.K$。一方 x^* が $T \cap cl.H$ の境界点であるから、この $U(x^*)$ 内に $x \notin T \cap cl.H$ となる点がある。以上から（3）は明らかである。

（1）を考慮すると（3）でとった x に関し、$x \notin T$ となる。かような x が x^* の任意近傍内に取れるから、x^* は集合 $\{x \in X : x \succ_{i_0} z^0\}$ の触点となる。故に個人選好の連続性と $x^* \in T$ により、$x^* \sim_{i_0} z^0$ が帰結する。

同様にして $T \cap cl.K$ の境界点 y^* をとり、同じ議論を繰り返し、y^* も集合 $\{x \in X : x \succ_{i_0} z^0\}$ の触点となる ($cl.H$ と $cl.K$ は他の諸概念と取り結ぶ関係が全く同一ゆえ、同じ議論が成立する)。故に個人選好の連続性と $y^* \in T$ により、$y^* \sim_{i_0} z^0$ が帰結する。故に $x^* \sim_{i_0} y^*$ となる。それ故、$x^* \neq y^*$ であれば、プロファイル $\succcurlyeq \in D$ は i_0 に関して弱正規性条件が成り立ち、補題 2.2 に矛盾する。$x^* = y^*$ であれば、（1）より直ちに $x^* \in T \cap cl.K \cap T \cap cl.H = \emptyset$ となって矛盾する。以上で定理 2.2 の証明が完了した。■

第 3 章

市場の公理系 （その 1）

3.1　序論

幾人かの経済主体が当初幾らかずつの財を持っている交換経済を考えよう。財の種類は有限である。全ての主体は同一の消費集合を持ち、その上で彼らの選好が定義される。彼らの初期資産は固定されているものとする。この世界では各主体の選好のみが変化しうるものとする。ただし選好は効用関数で表現され、その関数は連続微分可能・準凹・全ての財に関して狭義単調増加、そしてある種の境界条件を満たすものとする。各主体はこのような選好ならば、どのようなものでもとりうるとする。

社会的選択ルール、以下簡潔にルールと呼ぶ、とは、各主体の選好のリスト（プロファイル）に対して実行可能な資源配分のある非空部分集合を対応させる写像である。各主体がとる選好が異なればルールは異なった資源配分集合を対応させうる。このようなルールの中で本節で中心となるのはワルラスルールである。ワルラスルールは各プロファイルに対しその下でのワルラス配分全ての集合を対応させる写像である。

本章では三つの主題を扱う。第 1 の主題はワルラスルールの規範的公理化である。我々はワルラスルールが、パレート最適性、個人合理性、そして局所独立性の三つの規範的公理を満たす唯一つのルールであることを示す（定理 3.1）。

パレート最適性とは各プロファイルに対しルールが選択する資源配分はパレート最適でなければならないことを意味する。個人合理性は各プロファイルに対しルールが選択する資源配分は個人合理的でなければならない、つまり各主体が受け取る効用が彼の初期資産のそれを下回ることはあってはならないことを意味する。これら二つの

公理は資源配分ルールの公理的分析ではよく知られている。

これに対して局所独立性は Nagahisa(1991b) で初めて導入された。ワルラスルールの公理化のためにである。ルールが局所独立性を満たすとは以下のことである：ルールがあるプロファイル u の下である資源配分 z を選んでいるとしよう。いま各主体の選好が変化し、新しいプロファイル u' になったとする。しかしこの二つのプロファイルが「z の周りで局所的に同一」と見做せるならば、先の資源配分は新しいプロファイルの下でルールによって選ばれる。「z の周りで局所的に同一」と見做せるか否かの判定は各主体の限界代替率で行なう。一人の主体 i を選ぼう。二つのプロファイル u, u' のもとでのこの主体の効用関数を u_i, u'_i とする。いま主体 i の任意の 2 財間での限界代替率がこの二つの効用関数の間で同一であるとき、主体 i の選好は「z の周りで局所的に同一」であると見做すことができる。このことが全ての主体に関して成り立つ時に、二つのプロファイルは z の周りで局所的には同一であると見做すのである。局所独立性は社会的選択に関する情報節約の公理である。資源配分 z を選択するか否かの判断には z のごく近傍での人々の選好に関する情報のみが必要であり、選好全てに関する大域的な情報は必ずしも必要ではない。これが局所独立性の言わんとすることである。情報節約という意味では局所独立性はアロウの無関連対象からの独立性と同類の公理である。

定理 3.1 は Nagahisa and Suh(1995) の結果である。Nagahisa(1991b) では類似のモデルでワルラスルールの別の公理化定理が出されている。そこでは上の三つの公理に加えて効用無差別性という公理が必要である。両者はルールの定義域が異なる。Nagahisa and Suh(1995) の方が定義域は経済学的にみてより自然である。

次に我々は全ての主体の初期資産が等しいときのワルラスルール、平等資産のもとでのワルラスルール、の公理化を行う。ワルラスルールの衡平性に対する含意を考察する。これが第 2 の主題である。このルールはパレート最適性、羨望衡平性（No envy)、及び局所独立性を満たす唯一つのルールであることを示す (定理 3.2)。羨望衡平性は Foley(1967) での羨望概念を用いて定義される。ある資源配分 z において主体 i が主体 j に対して羨望を抱くとは、主体 i が z での主体 j の消費ベクトル z_j の方を自分の z_i よりも好むときをいう。そして資源配分 z において羨望を抱く主体が一人もいないとき、z を羨望なき資源配分と呼ぶ。ルールが羨望衡平性を満たすとは、どのプロファイルにおいてもルールが選ぶ資源配分は羨望なき資源配分である、

ということである。

初期資産の分布を特定しない場合（つまり定理 3.1 と同じ設定）でもワルラスルールは羨望概念を使って公理化できる。この場合、定理 3.1 での個人合理性は Schmeidler and Vind (1972) の純取引に関する羨望衡平性を強めたヴァージョンに置き換え可能であることを示す（定理 3.3）*1。

第 3 の、そして最後の主題はナッシュ誘導可能性問題（Nash Implementation）における局所独立性の意味するところの考察である。ゲーム形式とは各主体の戦略集合と帰結関数の組のことである。ここで帰結関数とは各主体が選択した戦略の組（戦略プロファイル）に対して、一つの実行可能な資源配分を対応させる写像である。選好プロファイルとゲーム形式を所与として、ゲームが定義できる。それは以下のごとくである：各主体は自らの戦略集合の中から一つの戦略を選択する。すると一つの戦略プロファイルが定まり、帰結関数を通して実行可能な資源配分が一つ決まる。各主体はそれを自らの効用関数で評価するのである。あるゲーム形式があるルールをナッシュ誘導できる（あるルールがあるゲーム形式によってナッシュ誘導される）とは、任意の選好プロファイルに関して、そのゲーム形式でのナッシュ均衡集合がそのプロファイルでルールが選ぶ資源配分集合と一致することをいう。

さてゲーム形式が凸であるとは以下のことをいう：戦略プロファイル s とある主体 i を所与とする。帰結関数 g が s に対して指定する資源配分を z としよう。つまり $z = g(s)$ である。いま主体 i のみが戦略を s_i から s_i' へ変えたとする。そのとき帰結関数が指定する資源配分は z' とする。記号で書けば $z' = g(s_i', s_{-i})$ である。すると z と z' の任意の凸結合 z^t に対しても、主体 i の戦略 s_i^t で $z^t = g(s_i^t, s_{-i})$ となるものが存在する。以上のことが任意の戦略プロファイルと主体に関して成り立つとき、ゲーム形式は凸であるという。ルールが凸なゲーム形式によってナッシュ誘導されるとき、凸ナッシュ誘導可能であるという。我々は、個人合理性とパレート最適性を満たす任意のルールに関して、そのルールが局所独立性を満たすのはそれが凸ナッシュ誘導可能であること、そしてそのときのみであることを示す（定理 3.4）。この前提の下では局所独立性と凸ナッシュ誘導可能性は同値なのである。この結果は

*1 Thomson（1988）は平等資産のもとでのワルラスルールの別の公理化定理を示した。ただし、この論文は主体の数が可変の場合を扱っている。その他、このルールに関した関連する研究としては Thomson（1979、1985）がある。

Nagahisa(1995) に依拠している。

ワルラスルールが凸ナッシュ誘導可能であるかどうかを最初に考察したのは Hurwicz(1979) である。そこでは「ルールが凸ナッシュ誘導可能であり、その他幾つかの規範的公理（パレート最適性や個人合理性など）を満たすルールは、存在するとすれば、それはワルラスルールのみである」という定理がある。しかしこの定理の主張は与えられたルールがワルラスルールであるための十分条件ではあっても、必要条件ではない。「存在するとすれば」という言明からわかるように、ワルラスルールが凸ナッシュ誘導可能であることの証明はなかったのである。我々は定理 4 において Mckelvey(1989) での Mechanism III がワルラスルールをナッシュ誘導可能な凸なゲーム形式であることを示す[*2]。

Nagahisa(1991b) では、凸ナッシュ誘導可能性より少し弱い公理、星状ナッシュ誘導可能性を定義し、この公理が局所独立性と同値であることを示している。ただし社会的選択ルールの定義域は本稿のものとは若干異なっている。星状ナッシュ誘導可能性を満たすゲーム形式としてやはり Mckelvey(1989) での Mechanism III が使われている。凸ナッシュ誘導可能性のほうがより明澄・簡潔であり、経済学的解釈も容易である。

本章の構成について簡単に述べる。第 3.2 節は定義と記号である。第 3.3 節の（1）では二つの公理系が与えられる。各々ワルラスルールと平等資産下でのワルラスルールのための公理系である。二つのルールの公理化定理（定理 3.1, 3.2）を述べる。第 3.3 節の（1）ではワルラスルールの公理化での個人合理性が羨望衡平性に関する一つの公理に置き換え可能であることを示す。第 3.4 節は局所独立性のナッシュ誘導可能性問題における意味を考察する。第 3.5 節は結論である。証明は全て付録にて与えている。関連文献等のサーヴェイは 3,3, 3.4, 3.5 節にて適時行なう。

本章の内容は大部分 Nagahisa and Suh(1995) であり、補題その他で一部 Nagahisa(1991b) を使っている。

[*2] この結果を使えば Hurwicz の定理を必要条件にまで高めることは可能かもしれない。ただしルールの定義域が若干異なるので、より詳細な検討が必要ではある。

3.2　記号と定義

交換経済を考える。$L=\{1,2,...,l\}$ は私的財の集合、$N=\{1,2,...,n\}$ は経済主体、簡潔に主体と呼ぶ、の集合とする。各主体 i は彼の持つ消費集合 R^l_+、初期資産 $\omega_i \in R^l_{++}$、及び消費集合 R^l_+ 上で定義される彼の選好で特徴づけられる。$\Omega=\sum\limits_{i\in N}\omega_i$ と記法する。主体 i の選好は効用関数 $u_i : R^l_+ \longrightarrow R$ で代表できるとする。u_i は連続・準凹 (quasi-concave)、R^l_{++} 上で連続微分可能かつ全ての財に関して狭義単調増加であり、次の境界条件を満たす：任意の $z_i \in R^l_{++}, z'_i \in R^l_+ \backslash R^l_{++}$ に関して、$u_i(z_i) > u_i(z'_i)$ が成り立つ。U はかような条件を全て満たす効用関数の集合とする。$U^n = \overbrace{U\times U\times\cdots\times U}^{n}$ と記法する。選好を効用関数表示するのは単に便宜上の理由である。効用関数表記も選好と呼ぶことにしたい。

初期資産のプロファイル $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)\in R^{nl}_{++}$ は固定される。従って一つの経済は (効用) プロファイル $u\in U^n$ と同一視してよい。実行可能配分とは各主体の消費のリスト $z=(z_1,...,z_n)\in R^{nl}_+$ の中で $\sum\limits_{i\in N} z_i=\Omega$ を満たすものをいう。実行可能配分全ての集合を Z とおく。

社会的選択ルールとは各プロファイル $u\in U^n$ に対して Z の非空部分集合を対応させる多価写像である。U^n が定義域である。ワルラスルール W とは一つの社会的選択ルールであり、各プロファイル $u\in U^n$ に対して、そこでのワルラス配分集合 $W(u)$ を対応させるルールである。$z\in W(u)$ であるのは、ある価格ヴェクトル $p\in int.\Delta^l$ が存在して、全ての主体 i に関し、$z_i \in \arg\max\{u_i(z'_i) : pz'_i \leq p\omega_i\}$ が成り立つとき、そしてそのときのみである。各 $u\in U^n$ に関して、$W(u)$ は非空であるので、ワルラスルールは定義できる。平等資産の下でのワルラスルール W_{ed} とは全ての主体の初期資産が等しい、すなわち $\omega_i=\frac{\Omega}{n}$ (全ての $i\in N$ に関して)、であるときのワルラスルールである。

3.3　公理系

3.3.1　二つの公理化定理

社会的選択ルールが満たすべき規範的公理を三つ挙げる。パレート最適性、個人合理性、及び局所独立性である。プロファイル $u\in U^n$ を所与とする。実行可能配分

$z \in Z$ が u におけるパレート最適配分であるとは、他の実行可能配分 $z' \in Z$ で、全ての主体 i に関して $u_i(z'_i) \geq u_i(z_i)$ であり、少なくとも一人の i に関してはこの不等式が厳密な不等号で成り立つようなものが存在しないときをいう。u におけるパレート最適配分全ての集合を $PO(u)$ と記法する。社会的選択ルール φ がパレート最適性を満たすとは、任意の $u \in U^n$ に関して、$\varphi(u) \subset PO(u)$ となることをいう。

プロファイル $u \in U^n$ を所与とする。実行可能配分 $z \in Z$ が u における個人合理的配分であるとは、任意の主体 i に関して $u_i(z_i) \geq u_i(\omega_i)$ が成り立つことをいう。u における個人合理的配分全ての集合を $IR(u)$ と記法する。社会的選択ルール φ が個人合理性を満たすとは、任意の $u \in U^n$ に関して、$\varphi(u) \subset IR(u)$ となることをいう。

プロファイル $u \in U^n$ を所与とする。実行可能配分 $z \in Z$ が u における羨望なき配分であるとは、任意の主体 i, j に関して $u_i(z_i) \geq u_i(z_j)$ が成り立つときをいう。u における羨望なき配分全ての集合を $EF(u)$ と記法する。羨望なき配分」の概念は Foley(1967) によって導入された。簡潔にいえば、どの主体も自分の消費よりも他の主体の消費を好ましいと思うことがない配分のことである。社会的選択ルール φ が羨望衡平性を満たすとは、任意の $u \in U^n$ に関して、$\varphi(u) \subset EF(u)$ となることをいう。ルールが衡平性を満たすかどうかの判定に際しては、初期資産プロファイルを知る必要はない。一方、個人合理性はこれを知る必要があった。この意味で、羨望衡平性は資源が共同所有されている経済での規範的要請として適している。

主体 i を所与とする。彼は効用関数 $u_i \in U$ を持つものとする。点 $z_i \in R^l_{++}$ での主体 i の持つ第 a 財に対する第 b 財の限界代替率とは式

$M_{ab}(z_i, u_i) := \frac{\partial u_i(z_i)/\partial z_{ia}}{\partial u_i(z_i)/\partial z_{ib}}$

で定義される。仮定により、M_{ab} は $R^l_{++} \times U$ 上にて定義可能であり、その値は正である。社会的選択ルール φ が局所独立性を満たすとは以下の条件が成立することをいう：任意の $u, u' \in U^n$ と任意の $z \in Z \cap R^{nl}_{++}$ に関して、$M_{ab}(z_i, u_i) = M_{ab}(z_i, u'_i)$ が全ての $i \in N$ と全ての $a, b \in L$ に関して成り立つならば、$z \in \varphi(u) \Longleftrightarrow z \in \varphi(u')$ である。

局所独立性のアイディアは Inada (1964) にまで遡及できる。この論文ではこの条件を使って経済環境のものでのアロウの不可能性定理を証明している。

二つのプロファイル u と u' は z の周囲では同一と見做せる。主体 i の z_i での任意 2 財間での限界代替率が u_i と u'_i で等しいということは、z_i の近傍では u_i と u'_i

から導かれる序数的選好関係が同一であることを示している。その序数的選好は線形の効用関数 $v_i(x_i) = p_i x_i$ (全ての $x_i \in R^l_+$ に関して）が導くそれに等しい。ここで $p_i = (\frac{\partial u_i(z_i)}{\partial z_{i1}}, ..., \frac{\partial u_i(z_i)}{\partial z_{il}}) \in R^l_{++}$ である。無論、近似的に等しいだけであり、誤差はある。しかしその誤差は z_i の近傍を小さく取ればとるほど小さくなっていく。局所独立性は z を選択するか否かの社会的選択問題に関して、必要とされる選好は局所的なもの、z のごく近傍での選好、だけでいいことを意味している。なるほど二つのプロファイルは大域的には全く違っているかもしれない。しかし z の周囲で見れば両者は同一と見做せる。社会的選択のために投入される情報素材（$=z$ のごく近傍での選好）に違いがない以上、社会的選択ルールが両プロファイルで下す判断には違いがあってはならない。

局所独立性はアロウの無関連対象からの独立性と類似した含意を持っている。それは z から遠く離れた資源配分上での選好は z に関する社会的選択問題には影響しないことを意味している。この意味で「z から遠く離れた資源配分上での選好」は z に関する社会的選択問題にとって無関連対象なのである。

局所独立性は次の局所不変性と同値である。ルールが局所不変性を満たすとは、任意の $u, u' \in U^n$ と任意の $z \in Z \cap R^{nl}_{++}$ に関して、各 i に対して定数 $\alpha_i, \beta_i, (\alpha_i > 0)$ が存在して、u'_i が次のように表現されるとしよう：

(1) $u'_i(x_i) = \alpha_i u_i(x_i) + \beta_i + \varepsilon_i(x_i)$;

(2) $\frac{\varepsilon_i(x_i)}{||x_i - z_i||} \longrightarrow 0$ as $||x_i - z_i|| \longrightarrow 0$,where $x_i \in R^l_{++}, x_i \neq z_i$;

(3) $\varepsilon_i(z_i) = 0$

このとき $z \in \varphi(u) \Longleftrightarrow z \in \varphi(u')$ である。

両公理の同値性は解析学の一つの演習問題である。条件 (1)-(3) は二つのプロファイルが z の近傍では「同一である」と見做せることを主張している。つまり一つのアフィン変換を介在して片方のプロファイルを他方へ変換することができるのである。勿論、この変換には誤差はある。(1) の右辺の最終項 $\varepsilon_i(x_i)$ が誤差項である。しかしこの誤差は z の近傍を小さく取ればとるほど、それ近傍の収束速度以上の速さで小さくなる。これが (2) の示していることである。無論 z 上では誤差はない。これは (3) で示されている。以上の意味で z の周囲で「局所的に同一」と見做せる二つのプロファイルのもとでの z に関する社会的選択には違いがあってはならない。これが局所不変性の言わんとするところである。

定理 3.1 ワルラスルールはパレート最適性、個人合理性、局所独立性を満たす。この 3 条件を満たす社会的選択ルールは他には存在しない。

定理 3.2 平等資産の下でのワルラスルールはパレート最適性、羨望衡平性、局所独立性を満たす。この 3 条件を満たす社会的選択ルールは他には存在しない。

証明は付録を参照されたい。幾つか留意点がある。

留意点 3.1 u_i が R^l_+ 上で連続かつ R^l_{++} 上で全ての財に関して狭義単調増加を仮定すれば、境界条件は次の二つの条件が共に成り立つことと同値である：(1) 全ての $x, y \in R^l_+ \backslash R^l_{++}$ に関して、$u(x) = u(y)$ (2) 内点を通る無差別曲線は決して境界とは交わらない。一方定理 3.2 はこの定義域では成立しない。定理 3.2 での三つの公理を満たすルールに対しては、この定義域は内点解を保障するとは限らないならである。定理 3.2 の証明を参照すれば、この点は納得できよう。(u_i が狭義準凹としてみよう。すると選好が R^l_{++} 上でのみ連続であるとすると (R^l_+ 上ででではなく)、考察対象となる選好のクラスは Barton and Böhm (1982) のそれと同じになる。彼らは比較静学と双対性の解説のためにこのクラスの選好を取り上げている。いうまでもないが、このクラスの選好は消費者理論においては全く標準的である。Barton and Böhm 流に選好のクラスを制限しても我々の諸定理は一切の変更を受けない。境界条件を仮定する限りにおいて、である。この点は簡単に確認できる。)

留意点 3.2 Nagahisa (1991b) の定義域 R は二つのプロファイルの集合の和となっている。一つは全ての主体が同一の線形の効用関数を持つようなプロファイル全ての集合 R^* である。形式的には $R^* := \{u = (u_1, ..., u_n) :$ ある $p \in int.\Delta^l$ が存在して、全ての $i \in N,$ 全ての $z_i \in R^l_+$ に関して $u_i(z_i) = pz_i\}$ となる。残り $R \backslash R^*$ は R^l_+ 上で連続、単調増加、凹であり、R^l_{++} 上では連続微分可能な効用関数で代表され、かつ境界条件を満たす選好から構成されるプロファイルの任意部分集合である。$R \backslash R^* = \emptyset$ であってもよい。ここでの定義域 U^n と R の間にはいかなる論理的包含関係も成立しない。ルール φ が効用無差別性を満たすとは、任意の $u \in R$、任意の $z.z' \in Z$、任意の $i \in N$ に関して、$u_i(z_i) = u_i(z'_i)$ であれば、$z \in \varphi(u) \Longleftrightarrow z' \in \varphi(u')$ が成り立つことをいう。Nagahisa(1991b) では R 上で定義された社会的選択ルールの中で、パレート最適性、個人合理性、局所独立性、及び効用無差別性を満たす唯一つ

のルールがワルラスルールであることを証明している。この結果では効用無差別性は不可欠である。次の例を見れば、これは明らかである。ルール $\varphi : R^* \longrightarrow Z$ を $\varphi(u) := \{\omega\}$ (全ての $u \in R^*$ に関して) と定義する。このルールは効用無差別性を除く 3 条件を全て満たしている。

留意点 3.3 三つの公理のうちいずれか一つでも欠けると定理 3.1 は成り立たない。まずルール φ_1 を、全てのプロファイル $u \in U^n$ に対して $\varphi_1(u) := \{\omega\}$ と定義する。このルールは個人合理性と局所独立性を満たすが、パレート最適性は満たさない。次にルール φ_2 はある特定の主体に資産全てをどのプロファイルでも与える、とする。このルールはパレート最適性と局所独立性を満たすが、個人合理性は満たさない。最後にルール φ_3 は各プロファイルに対して、その元でのコア配分集合を対応させるとしよう。このルールは個人合理性とパレート最適性は満たすが、局所独立性は満たさない。

同じことは定理 3.2 に関してもいえる。ルール φ_1 は羨望衡平性と局所独立性は満たすが、パレート最適性は満たさない。ルール φ_2 はパレート最適性と局所独立性を満たすが、羨望衡平性は満たさない。最後に各プロファイルに対して、その元でのパレート最適かつ羨望なき配分全ての集合を対応させるルールを考える。(このルールが定義できることは、W_{ed} が定義できることから明らかである。) このルールは羨望公平性とパレート最適性を満たし、局所独立性を満たさない。

留意点 3.4 定義域 U^n での U における境界条件と効用関数の連続微分可能性はワルラスルールの公理化定理にとって必要不可欠である。いずれか一方でも欠けると、定理 3.1, 3.2 は共に成り立たない。以下の二つの例はこの事情を例解している。最初の例は境界条件が、そして次の例は連続微分可能性が必要不可欠であることを示している。

例 3.1 W は U における境界条件を除く全ての条件を満たす効用プロファイルの集合とする。$W^n = \overbrace{W \times W \times \cdots \times W}^{n}$ と記法する。社会的選択ルールは W^n 上で定義されるとしよう。すなわちルールは各 $u \in W^n$ に対し、Z の非空部分集合を対応させる。各 $u \in W^n$ に対し、$CW(u)$ は制約つきワルラス配分 (Hurwicz et al. 1980) の集合とする。$CW(u)$ の定義は以下の通り：$z^* \in CW(u) \Longleftrightarrow$ ある $p \in int.\Delta^l$ が存在して、全ての $i \in N$ に関して、z_i^* は集合 $\{z_i \in R_+^l : pz_i \leq p\omega_i,\, z_i \in pr_i(Z)\}$ 上で

$u_i(\cdot)$ を最大にしている。 ここで $pr_i(Z) := \{z_i \in R^l : z_i = pr_i(z)$ (ある $z \in Z$ に関して$)\}$ である。$pr_i(\cdot)$ の定義は留意点 3.2 を参照されたい。各プロファイル $u \in W^n$ に対して、制約つきワルラス配分集合 $CW(u)$ を対応させるルールを制約付きワルラスルールと呼ぶ。このルールは定理 3.1 の全ての公理を満たすが、ワルラスルールとは同値ではない。なぜなら境界条件なしでは個人合理性はもはや制約つきワルラス配分が内点解であることを保証しえず、境界での制約つきワルラス配分でワルラス配分とはならない例を容易に作ることができるからである (Hurwicz et al. 1980)。

例 3.2 関数 $v : R^l_+ \longrightarrow R$ を $v(x) := \min_{1\leq h\leq l} x_h$ とおき、$\widetilde{W} := U \cup \{v\}$ としよう。社会的選択ルールは $\widetilde{W}^n$ 上で定義されるものとする。ルール φ として次のものを考える。プロファイル $u \in \widetilde{W}^n$ の全ての構成要素 u_i が v に等しいときは、$\varphi(u)$ はコアに等しく、そうでないときはワルラス配分集合 $W(u)$ に等しいとおく。このルールは定理 3.1 の全ての公理を満たすが、明らかにワルラスルールではない。

定理 3.2 に関しても同様な議論が成り立つ。例 3.1 は定理 3.2 にとっても境界条件が必要不可欠であることを示している。連続微分可能性が必要不可欠であることは、例 3.2 での定義域を使って示せる。この定義域上でルール φ をプロファイル $u \in W^n$ の全ての構成要素 u_i が v に等しいときは、$\varphi(u)$ はパレート最適かつ羨望なき配分全ての集合に等しく、そうでないときはワルラス配分集合 $W(u)$ に等しいとおけばよい[*3]。

3.3.2 その他の公理化定理

定理 3.1 での個人合理性を別の公理に置き換える。社会的選択ルール φ が λ 比例的純取引での羨望衡平性を満たすとは以下の条件が成り立つことをいう：任意の $u \in U^n$、任意の $i, j \in N$、及び任意の $z \in \varphi(u)$ に関して、任意の $\lambda \in (0, 1]$ で $u_i(z_i) \geq u_i(\lambda(z_j - \omega_j) + \omega_i)$ となる。ただし $\lambda(z_j - \omega_j) + \omega_i \in R^l_{++}$ である。この公理によると、どのような資源配分 $z \in \varphi(u)$ に対しても、そしてどのような正数 $\lambda \in (0, 1]$ を選んでも、他の主体 j の純取引額の λ 割、$\lambda(z_j - \omega_j)$、の方を自分の純取引額 $z_i - \omega_i$ よりも好む主体 i はいないことになる。($z_i = (z_i - \omega_i) + \omega_i$ に注意。)

[*3] Maniquet(1993) では局所独立性の幾つかのヴァージョンが提出されている。これらの公理も境界条件が成立しなければ、平等資産の下でのワルラスルールの公理化は失敗することが示されている。

次の定理が成り立つ。

定理 3.3 ワルラスルールはパレート最適性、λ 比例的純取引での羨望衡平性、局所独立性を満たす。この 3 条件を満たす社会的選択ルールは他には存在しない。

社会的選択ルール φ が純取引での羨望衡平性 (Schmeidler and Vind 1972) を満たすとは、任意の $u \in U^n$、任意の $i, j \in N$、及び任意の $z \in \varphi(u)$ に関して、$u_i(z_i) \geq u_i((z_j - \omega_j) + \omega_i)$ となることをいう。ただし $(z_j - \omega_j) + \omega_i \in R^l_+$ である。この公理は λ 比例的純取引での羨望衡平性よりも弱い。彼らはワルラスルールがこの弱い公理を満たすことを証明したが、ワルラスルールの公理化にとっては十分ではない。次の例 3.3 はワルラスルールとは別のルールで、パレート最適性、局所独立性、及び純取引での羨望衡平性を満たすものの存在を示している。

例 3.3 二人の主体 A、B から構成される経済を考える。私的財も二つのみとする。初期資産を $\omega_A = (2,1), \omega_B = (1,2)$ とする。一つの資源配分 $y = (y_A, y_B)$ を、$y_A = (0.5, 2.5), y_B = (2.5, 0.5)$ としよう。ルール φ を次のように定義する：もし y がパレート最適ならば $\varphi(u) := W(u) \cup \{y\}$、そうでないならば $\varphi(u) := W(u)$ とおく。純取引での羨望衡平性はこのルールではトリビアルに成り立つことに留意されたい：なぜなら $(y_B - \omega_B) + \omega_A = (3.5, -0.5) \notin R^2_+, (y_A - \omega_A) + \omega_B = (-0.5, 3.5) \notin R^2_+$ だからである。

一方、平等資産の下でのワルラスルールはパレート最適性、局所独立性、及び平等資産合理性 (Moulin 1990):任意の $u \in U^n, i \in N$、$z \in \varphi(u)$ に関して $u_i(z_i) \geq u_i(\frac{\Omega}{n})$ を満たす唯一のルールであることは明らかである。この公理は共有資産下での私的財経済での衡平性基準である。各主体は自分自身の選好と経済の規模だけしか知らない世界を考えよう。各主体は互いに相手の選好は知らないのである。このような情報に関する条件、無知のヴェール (Rawls 1972) にやや似た条件だが、のもとでは各主体は他の全ての主体は自分と同じ選好を持つものと期待することは十分に想定可能である。そして仮にパレート最適性と全ての主体を平等に取り扱うべきとするならば、各主体の受け取る効用は資産を平等に分配した状態よりも悪くなってはならない。これが平等資産合理性の言わんとするところである[*4]。

[*4] Moulin のオリジナルな定義では平等資産合理性は、より一般的な形である。それは社会的選択の抽象的な問題にも適用可能なようになっている。しかしここで扱っている交換経済の世界では、こ

Maniquat(1993) は羨望衡平性を水平的平等に関する弱い公理に置き換えて定理 2 を強めている。その公理は全員が同じ選好を持つときには、ルールは全員に等しい効用を保証せねばならないことを要求している。

3.4　局所独立性とナッシュ誘導可能性

本節では局所独立性とナッシュ誘導可能性（Nash Implementation）との関係に関して論じたい。

ゲーム形式 G とは各主体 i の戦略集合 S_i の直積 $S = \prod_{i \in N} S_i$ と帰結関数 $g : S \longrightarrow Z$ との組 (S, g) のことである。ここで g は一価である。S の要素 $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ を戦略プロファイルと呼ぶ。ここで $s_i \in S_i$ は主体 i の戦略である。$g(s)$ は戦略プロファイル s の帰結と呼ぶ。記法の便宜上、$s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ 及び $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$ と定める。

あるプロファイル $u \in U^n$ とゲーム形式 $G := (S, g)$ を所与とする。G と u によって導かれるゲーム (G, u) とは戦略集合の直積 S とペイオフ関数のベクトル $u \circ g : S \longrightarrow R^n$ で定義されるゲームである。戦略プロファイル s での第 i 主体のペイオフは $u_i(g(s))$ となる。

ゲーム (G, u) を所与とする。戦略プロファイル $s \in S$ がこのゲームでのナッシュ均衡であるとは、全ての $i \in N$ と全ての $s'_i \in S_i$ に関して、$u_i(g(s)) \geq u_i(g(s'_i, s_{-i}))$ が成り立つことをいう。ゲーム (G, u) でのナッシュ均衡全ての集合を $NE(G, u)$ と記す。ゲーム (G, u) を所与とし、ナッシュ均衡 s での帰結 $g(s)$ をナッシュ均衡配分と呼び、その配分全ての集合を $Z_{NA}(G, u)$ と記す。

社会的選択ルール φ がナッシュ誘導可能であるとは、あるゲーム形式 $G := (S, g)$ が存在して、任意のプロファイル $u \in U^n$ に関して、$\varphi(u) = Z_{NE}(G, u)$ が成り立つことをいう。

ゲーム形式 $G = (S, g)$ がナッシュ均衡周辺で強く星状であるとは、任意のプロファイル $u \in U^n$,

任意の $i \in N$、任意の $s_{-i} \in S_{-i}$、及び任意の $s_i, s'_i \in S_i$ に関して、もし $(s_i, s_{-i}) \in NE(G, u)$ ならば、任意の $t \in [0, 1]$ に関して、ある $s^t_i \in S_i$ で $g(s^t_i, s_{-i}) =$

の定義は平等資産合理性と同じになる。

$tg(s_i, s_{-i}) + (1-t)g(s'_i, s_{-i})$ となるものが存在することをいう。

ゲーム形式 $G = (S, g)$ が凸であるとは、任意のプロファイル $u \in U^n$、任意の $i \in N$、任意の $s_{-i} \in S_{-i}$、及び任意の $s_i, s'_i \in S_i$、任意の $t \in [0,1]$ に関して、ある $s_i^t \in S_i$ で $g(s_i^t, s_{-i}) = tg(s_i, s_{-i}) + (1-t)g(s'_i, s_{-i})$ となるものが存在することをいう。簡単に言えば、帰結関数がここで言う意味の凸性を満たすということである。

社会的選択ルールが凸ナッシュ誘導可能 (星状ナッシュ誘導可能) であるとは、凸な (強く星状な) ゲーム形式 $G = (S, g)$ にてナッシュ誘導可能なときをいう。明らかに凸ナッシュ誘導可能であれば、星状ナッシュ誘導可能である。

与えられた社会的選択ルールがナッシュ誘導可能であるための必要十分条件は今日ではよく知られている。Maskin (1999) の先駆的業績を嚆矢として、Williams(1986),Repullo(1987),Saijo(1988), 及び Mckelvey(1989) らがその条件を与えた[*5]。とりわけ Mckelvey の貢献が本節にとって重要である。彼らは主体の数が 3 人以上いるとき、拒否権が存在しない社会的選択ルールがナッシュ誘導可能であるのは、ルールがマスキンの単調性を満たすとき、そしてそのときのみであることを示した[*6]。ルールに拒否権が存在しないとは、$n-1$ 人までがある選択肢 x を彼らの選好上トップにしているとき、残り一人の選好如何に関らず、ルールは必ずその選択肢を選ばねばならないという要請である。マスキンの単調性とは主体の選好が変化したときの社会的選択の規則性に関する要請である。あるプロファイルのもとで選択肢 x をルールが選んでいたとする。ここで各主体の選好が変化したとする。しかしその変化は各主体の x のランキングが決して以前より悪くならないような変化であったとする。このとき新しいプロファイルにてもルールは x を選択しなければならない。これがマスキンの単調性である。これら二つの要請の正確な定義は付録を参照されたい。

我々のモデルでは、$n \geq 3$ である限りは全てのルールが拒否権を持たない。選好が利己的で狭義の単調増加である以上、拒否権の非存在で要請される前提 $n-1$ 人までがある選択肢 x を彼らの選好上トップにしている」ことは起こりえないからである。個人合理性と局所独立性を満たす任意のルールはマスキンの単調性も満たす。定義域 U^n における境界条件と各主体 i の初期資産の仮定 $\omega_i \in R^l_{++}$ により、個人合

[*5] この中では Maskin の論文が最も早い時期、1977 年、にワーキングペパーとして発表された。諸般の事情により公刊が一番後になったのである。

[*6] 拒否権と主体の数に依存しない場合での、ナッシュ誘導可能性に関する必要十分条件は Moore and Repullo (1990) 及び Dutta and Sen (1991) がそれぞれ独立に与えた。

理性を満たす任意の社会的選択ルール φ に関して、任意の $z \in \varphi(u)$ は内点、つまり $z \in R^{nl}_{++}$, に位置する。このことから z に関して選好プロファイルが u からマスキンの単調性を満たすように u' に変化しても、z における各主体の限界代替率は変化しない。局所独立性により $z \in \varphi(u')$ となり、マスキンの単調性が満たされることになる（付録での留意点 3.5 も参照)。

以上の考察から $n \geq 3$ であれば、我々の交換経済モデルでは個人合理性を満たす任意のルールに関して、それが局所独立性を満たせばナッシュ誘導可能であることがわかる。しかし逆は真ではない。例えば任意のプロファイルにおいてコア配分全てを対応させるルールはナッシュ誘導可能だが局所独立性は満たさない。ナッシュ誘導可能性はルールが局所独立性を満たすための必要条件だが、十分条件ではないのである。必要十分条件を与えるのが次の定理である。

定理 3.4（1）個人合理性を満たす任意の社会的選択ルールに関して、それが凸ナッシュ誘導可能性を満たせば局所独立性を満たす。

（2）$n \geq 3$ と仮定する。パレート最適性と個人合理性を満たす任意の社会的選択ルールに関して、それが局所独立性を満たせば凸ナッシュ誘導可能性を満たす。

（1）,（2）をあわせると、（2）の前提の下では局所独立性は凸ナッシュ誘導可能性と同値である。また定理より、ワルラスルールはパレート最適性、個人合理性、及び凸ナッシュ誘導可能性を満たす唯一つの社会的選択ルールとなる。この定理の証明は付録にて与える。（1）のパートの証明は短くて済む（補題 3.4）が、（2）はかなり込み入っている。

定理 3.4 の系として局所独立性は星状ナッシュ誘導可能性と同値である。(Nagahisa 1991 はこのことを最初に証明した。尤もルールの定義域は前節で述べたごとく U^n とは異なる。) また定理 4 は前節の留意点 3.1 にて述べた定義域 V においても成立する。証明を一切変更することなしにである。

定理 3.4 の（2）では Mckelvey(1989) で提出されている三つのゲーム形式の内の一つ、Mechanism III、が使われる。この Mckelvey のゲーム形式が凸であることの証明が全体の証明のかなりの部分を占めている。定理 3.1 より局所独立性を満たすルールは定理 3.4 の（2）の前提の下ではワルラスルールに他ならず、Mechanism III によってワルラスルールが凸ナッシュ誘導可能であることが示されるのである。

これが局所独立性 $\Longrightarrow$ 凸ナッシュ誘導可能性のパートの証明のシナリオである。Naghisa(1991) では、この Mechanism III が星状ナッシュ誘導可能であり、局所独立性と同値であることを示している。この結果を改善したのが定理 3.4 である。ワルラスルールをナッシュ誘導できるゲーム形式は数多く知られている (例えば、Hurwicz 1979;Schmeidler 1980,;Saijo 1988;Williams 1986 など)。しかし我々が知る限り凸なゲーム形式は Mechanism III のみである。

Schmeidler (1982) は帰結関数の性質として、我々の星状性とよく似たものを提出している。しかし、両者の間には論理的包含関係は成立しない。その性質は以下のごとくである：R^l 内でのある集合 A が $x \in R^l$ に関して殆ど星状であるとは、ある正数 ε が存在し、全ての $y \in A$ に関して $tx + (1-t)y \in A$ が $(0, \varepsilon)$ 内の全ての t に関して成り立つことをいう。ゲーム形式が Schmeidler の星状性を満たすとは、任意の $i \in N$ と任意の s_{-i} に関して、集合 $T = \{z \in R^{nl}_{+} : z \leq g(s_i, s_{-i})$ (ある $s_i \in S_i$ に関して)$\}$ が原点に関して殆ど星状であるときをいう。Schmeidler (1982) は、この性質を持つゲーム形式でのパレート最適なナッシュ均衡配分は全てワルラス配分であることを示した。加えて Schmeidler (1980) でのゲーム形式はこの星状性を持つことをも指摘している。Schmeidler の星状性と我々の諸公理とも論理的関係を明らかにすることは一つの残された主題である。

主体の数が 3 人以上という条件も Mechanism III を応用することに起因している。局所独立性 $\Longrightarrow$ 凸ナッシュ誘導可能性のパートの証明では、先に言及したとおりワルラスルールを凸ナッシュ誘導可能にするゲーム形式を見つけねばならない。我々は Mckelvey の Mechanism III がそれであることを示すが、この Mckelvey の定理自体が主体の数が 3 人以上という条件に依存しているのである。

凸ナッシュ誘導可能性は局所独立性の含意、情報節約、をゲームの用語で表現している。ゲーム (G, u) を所与とする。ある戦略プロファイル $s = (s_i)_{i \in N}$ がこのゲームでのナッシュ均衡であるには、それが局所的なナッシュ均衡であるのが必要十分であることを示している。$s = (s_i)_{i \in N}$ が局所的なナッシュ均衡であるとは、十分小さな正数 ε があり、各プレイヤー i に関して、戦略 s_i の ε 近傍 $B(s_i, \varepsilon) = \{s'_i \in S_i : d_i(s_i, s'_i) < \varepsilon\}$ を i の新しい戦略集合としたゲームでのナッシュ均衡であるということである。このような正数 ε が取れるとき、$s = (s_i)_{i \in N}$ は局所的なナッシュ均衡であると呼ぶ。（ここで d_i は S_i 上での距離関数であり、S_i は

距離化可能であることが前提にされていることはいうまでもない。）効用関数の準凹性を考慮すれば、凸ナッシュ誘導可能性は「ナッシュ均衡=局所ナッシュ均衡」を意味することは容易に確認できる。

ある資源配分 z と選好プロファイル u を所与とする。いま $z \in \varphi(u)$ であったとする。ルール φ が局所独立性を満たすとは、z の選択を決める際に必要な情報は z のごく周辺での各主体 i の選好関係（正確には z での任意 2 財間での i の限界代替率）だけで十分であった。 $z = g(s_i, s_{-i})$ としよう。ルール φ が凸ナッシュ誘導可能であるとは、各主体 i は自らの戦略 s_i をプレイするかどうかの決定に際して、s_i のごく周辺での自分の戦略に対する評価のみで決めてよいのである。

定理 3.4 に後続した一般化の試みを二つ紹介する。帰結関数が凸性を満たすという条件を更に緩めた貢献として Dutta et al.(1993) 及び Saijo et.al(1993) がある。Dutta et al は価格・数量メカニズム、価格・配分メカニズムのあるサブクラス (初等的メカニズム) を考察している。価格・数量メカニズムとは主体の戦略が価格と数量の組であるようなゲーム形式である。同じく価格・配分メカニズムは主体の戦略が価格と資源配分の組であるようなゲーム形式である。初等的メカニズムとは、これらのゲーム形式のなかでナッシュ均衡での各主体の達成可能資源配分の集合がある閉半空間のなかに属するようなクラスをいう。彼らはパレート最適性と内点解性（個人合理性の弱いヴァージョン）を満たすルールが初等的メカニズムによってナッシュ誘導可能であるための必要十分条件はルールが局所独立性を満たすことであることを示した。凸なゲーム形式は初等的メカニズムの一つであるから、彼らの結果は定理 3.4 の一般化である。Saijo et.al(1993) は初等的メカニズムという制約を外し、ルールが価格・配分メカニズムによってナッシュ誘導される必要十分条件を求めた。その条件は局所独立性を弱くした条件である。（彼らは価格・数量メカニズムに関しても必要十分条件を与えている。この場合は均衡からの逸脱を図る主体に対しての懲罰ルールに関する条件が新しく加わることになる。）

3.5　結論

本章の議論に関連した最近の研究に関して簡潔に触れておきたい。Sakai(2009) も交換経済でのワルラス均衡配分集合の公理化を考察している。但し、ここではルール

は social orderings と命名されている通り、各プロファイルを資源配分集合上での完備かつ推移的な二項関係に対応させる写像として定義されている。Sakai はパレート最適性、個人合理性、及び局所独立性をこの設定で定義し直し、これら三公理を満たす social ordering は、その最大元の集合（social ordering で実行可能な資源配分を序列し、トップに位置する資源配分の集合）はワルラス配分集合をその部分集合として含むことを示した。ただそれ以外の配分も含まれることになり、本稿でのワルラスルールとの対応関係は完全には解明できていない。Fleurbaey,M.,K.Suzumura, and K.Tadenuma (2005 a,b) でも局所独立性とその改訂ヴァージョンの幾つかが提案されている。

本章の公理化では内点解と効用関数の微分可能性が決定的に重要である。これらが保証されないと局所独立性が定義不能となったり、仮に定義できてもうまく機能しないことになる。Yoshihara (2000) は局所独立性を緩めた Supporting price independence を考え、ワルラスルールの公理化を考えている。この条件は二つのプロファイルに関して、ある資源配分の支持価格が等しいとき、片方のプロファイルでその資源配分が社会的選択ルールにて選ばれるならば、もう片方のプロファイルでもそうならねばならないことを要求する。ワルラスルールは明らかにこの公理を満たす。ただしこの公理は均衡の性質そのものといってよく、社会的選択の公理としてふさわしいかどうかは疑問が残る。公理はあくまで人々の選好と初期資産のみをタームとして定義されるべきと考えるからだ。しかし、こういう趣旨での公理によって内点解と選好の微分可能性の仮定を外したときでのワルラスルールの公理化はいまだ提出されていない。

3.6　付録

補題 3.1 $pz < pz'$ となる任意の $z, z' \in R^l_{++}$ と $p \in int.\Delta^l$ に関して、ある効用関数 $u \in U$ で、全ての $j = 1, ..., l-1$ に関して、$M_{jl}(z, u) = \frac{p_j}{p_l}$ であり、かつ $u(z) < u(z')$ となるものが存在する。

証明. まずコブダグラス型効用関数 u^{CD} の係数 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ を以下のように定める。

$\alpha_1 = \frac{p_1 z_1}{pz}, \alpha_2 = \frac{p_2 z_2}{pz}, ..., \alpha_l = \frac{p_l z_l}{pz}$

ここで $z \in R^l_{++}$ と $p \in int.\Delta^l$ は補題 3.1 の主張で述べられているそれらである。

明らかにこの効用関数は点 z にて超平面 $H(p,z) := \{x \in R^l : px = pz\}$ に接している。

さて求める効用関数はこのコブダグラス型効用関数 u^{CD} を基準にして以下のように構成する。

$t \in [0,1]$ を所与とする。効用関数 u^t を、

$$u^t(x) := \begin{cases} \frac{1}{\frac{t\lambda u^{CD}(x)}{px}+1-t}u^{CD}(x) & if\ x \in R^l_{++}, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

ただし、$\lambda = \frac{pz}{u^{CD}(z)}$ である。

係数 t の大きさに応じて u^t の形状は変化する。$t=0$ のときは u^{CD} であり、$t=1$ のときは、線型の関数 $\frac{px}{\lambda}$ となる。またどの t に関しても、$u^t(z) = u^{CD}(z)$ である。u^t は一次同次でもあることに留意しよう。

$u^t \in U($ ただし $t \neq 1)$ の確認は後回しにする。まず補題の限界代替率に関する条件は上に示した $u^t(z) = u^{CD}(z)$ から明らかである。t を十分 1 に近づけ、$u^t(z') > u^t(z)$ が成り立つことを示そう。仮にそうでないとする (背理法)。すると、1 に近づくいかなる t に関しても、

$u^t(z') := \frac{1}{\frac{t\lambda u^{CD}(z')}{pz'}+1-t}u^{CD}(z') \leq u^t(z) = u^{CD}(z)$ となる。$t \longrightarrow 1$ として、

$\frac{1}{\frac{\lambda u^{CD}(z')}{pz'}}u^{CD}(z') \leq u^{CD}(z)$、すなわち

$\frac{pz'}{\lambda} \leq u^{CD}(z)$ となる。

$\lambda = \frac{pz}{u^{CD}(z)}$ を代入すると、$pz' \leq pz$ となり、補題の前提に矛盾する。

以上から十分 1 に近い t での u^t が求める効用関数である。

$u^t \in U$ の証明：R^l_{++} 上で連続微分可能であること、及び境界条件が成立することは u^t の定義から明らかである。

R^l_+ 上で連続であること：R^l_+ の境界上で連続であることを示せば十分である。

点列 $x^\nu \longrightarrow x^0 \in R^l_+ \backslash R^l_{++}$ をとる。ある番号 ν^* から先の全ての ν に関して、$x^\nu \in R^l_+ \backslash R^l_{++}$ ならば、これら全ての x^ν に関して $u^t(x^\nu) = 0$ であるから、連続であることは明らか。次に x^ν の部分列でその全ての項が R^l_{++} に属する場合を考える。一般性を失うことなく、x^ν 自身がその部分列であったとする。仮に $u^t(x^\nu) \longrightarrow 0$ でないとする (背理法)。すると、ある $\varepsilon > 0$ に関して、x^ν の部分列 $x^{\nu'}$ が存在して、$u^t(x^{\nu'}) \geq \varepsilon$ となる。すなわち、$\frac{1}{\frac{t\lambda u^{CD}(x^{\nu'})}{px^{\nu'}}+1-t}u^{CD}(x^{\nu'}) \geq \varepsilon$ である。これより、各 $x^{\nu'}$ に関して $\frac{1}{1-t}u^{CD}(x^{\nu'}) \geq \varepsilon$ となる。しかし $u^{CD}(x^{\nu'}) \longrightarrow 0$ を考慮するとこれは

矛盾である。以上で連続であることが証明できた。

全ての財に関して R^l_{++} において狭義単調増加であること：関数 $\frac{1}{u^t}$ を考える。これは

$\frac{1}{u^t}(x) := \frac{1}{u^t(x)}$ で定義される。ただし定義域は R^l_{++} である。簡単な計算により、

$\frac{1}{u^t}(x) = \frac{t\lambda}{px} + \frac{1-t}{u^{CD}(x)}$ となる。

この関数を x_i で偏微分すると、

$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{u^t}(x)) = -\frac{t\lambda p_i}{(px)^2} - \frac{(1-t)\frac{\alpha_i}{x_i}u^{CD}(x)}{(u^{CD}(x))^2} < 0$

一方、商の微分公式より、

$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{u^t}(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{u^t(x)}) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(u^t(x))}{(u^t(x))^2}$

先の計算式によると、この値が負であるから、$-\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(u^t(x))}{(u^t(x))^2} < 0$、故に $\frac{\partial}{\partial x_i}(u^t(x)) > 0$ となって所望の結果を得る。

準凹であること：幾つかのステップに分けて証明する。

ステップ 1：z を通る u^t の無差別曲線を求める。

$pq = pz$ となる $q \in R^l_{++}$ を任意にとる。点 $\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$ をとる。$u^{CD}\left(\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q\right) = u^{CD}(z)$ であり、この点は z を通る u^{CD} の無差別曲線にある。

q と $\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$ の凸結合 $x = tq + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$ をとる。この x が z を通る u^t の無差別曲線上にあることを示そう。

$u^t(x) = u^t\left(tq + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q\right)$
$= \left(t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}\right)u^t(q)$（$\longleftarrow u^t(q)$ の一次同次性）
$= \left(t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}\right)\frac{1}{\frac{t\lambda u^{CD}(q)}{pq}+1-t}u^{CD}(q)$
$= \left(t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}\right)\frac{1}{\frac{tu^{CD}(q)}{u^{CD}(z)}+1-t}u^{CD}(q)$ $(\longleftarrow \lambda = \frac{pz}{u^{CD}(z)}, pq = pz)$
$= \left(\frac{tu^{CD}(q)+(1-t)u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}\right)\left(\frac{u^{CD}(z)}{tu^{CD}(q)+(1-t)u^{CD}(z)}\right)u^{CD}(q) = u^{CD}(z)$

以上で x が z を通る u^t の無差別曲線上にあることがいえた。

z を通る u^t の無差別曲線はこのような点 x のみから構成される。これ以外の点 x' が無差別曲線上にあったとする (背理法)。原点を始点とし x' を通る半直線を引く。この半直線上には先の要領で x、つまり u^t の無差別曲線上にある点が存在する。これは x の構成の仕方より明らかである。さて背理法の想定により、$x' \gg x$ または $x' \ll x$ であるしかないが、これは先に証明した u^t の狭義単調増加性に矛盾する。

以上を纏めると、z を通る u^t の無差別曲線は以下のような点 x 全ての集合である；$pq = pz$ となるある $q \in R^l_{++}$ に関して、x は q と $\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$ の凸結合 $tq+(1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$

である。

幾何学的には原点からの半直線を引き、その直線と z での u^{CD} に接する接平面 $\{q \in R^l_{++} : pq = pz\}$ との交点を q とする。またその直線と u^{CD} の z を通る無差別曲線との交点は $\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$ と表現できる。この 2 点を $1-t, t$ の比率で凸結合させた点が x であり、これら全てを集めたものが求める無差別曲線となる。

ステップ 2：$kz(k>0)$ を通る u^t の無差別曲線はステップ 1 での x に k を掛けた kx 全てからなる集合である。

u^t が一次同次であることに留意すれば、$u^t(kz) = ku^t(z) = ku^t(x) = u^t(kx)$

となり、kx は kz を通る u^t の無差別曲線上にある。これ以外の点を無差別曲線は含まないことはステップ 1 と同じように証明できる。

以上で u^t の無差別曲線が全て求まったことになる。

ステップ 3 u^t に関する無差別曲線は厳密に凸である。すなわち曲線上の異なる 2 点 x, x' をとり、その任意の凸結合 $\delta x + (1-\delta)x', \delta \in (0,1)$ に関して、$u^t(\delta x + (1-\delta)x') > u^t(x)$ となる。

証明：z を通る無差別曲線で考えてみる。他の無差別曲線は $kz(k>0)$ で考えればよいから、u^t の一次同次性から簡単に導ける。無差別曲線上の 2 点 x, x' をとる。ステップ 2 より、$pq = pz$ 上の 2 点 q, q' が存在して、各々

$x = tq + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q,\ x' = tq' + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q')}q'$

と表現できる。記号の簡略化のため

$A := t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}, B = t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q')}$

としよう。すると $x = Aq, x' = Bq'$ と表記できる。また

$\delta x + (1-\delta)x' = \delta Aq + (1-\delta)Bq'$ となる。

さて原点を始点とし、$\delta x + (1-\delta)x'$ を通る半直線を l としよう。l は線分 $[q, q']$ と交わる。実際 l 上の各点は実数 $k \geq 0$ を使って $k(\delta Aq + (1-\delta)Bq')$ と置ける。そこで k を、

$0 \leq k\delta A \leq 1, 0 \leq k(1-\delta)B \leq 1, k(\delta A + (1-\delta)B) = 1$

と置けばよい。正確には $k = \frac{1}{\delta A + (1-\delta)B}$ と置けばよい。

l と線分 $[q, q']$ の交点を q^δ と記法すると、

$q^\delta = \frac{\delta A}{\delta A + (1-\delta)B}q + \frac{(1-\delta)B}{\delta A + (1-\delta)B}q'$ である。

l 上で u^t に関して z と無差別な点を z^* としよう。z^* と $\delta x + (1-\delta)x'$ は同じ l 上

にある。

双方を q^δ で表現しよう。まず z^* であるが、z^* と q^δ も l 上にあるので、ある係数 a に関して

$z^* = aq^\delta$ と表現できる。係数 a を求めればよい。

$u^t(z^*) = u^t(z) = u^{CD}(z)$ 及び $u^t(aq^\delta) = au^t(q^\delta)$

であるから、$a = \frac{u^{CD}(z)}{u^t(q^\delta)}$。故に

$$z^* = \frac{u^{CD}(z)}{u^t(q^\delta)}q^\delta = \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{t\lambda u^{CD}(q^\delta)}{pq^\delta}+1-t}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta = \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{t\frac{pz}{u^{CD}(z)}u^{CD}(q^\delta)}{pq^\delta}+1-t}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta$$

$$= \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{t\frac{pq^\delta}{u^{CD}(z)}u^{CD}(q^\delta)}{pq^\delta}+1-t}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta$$

($\longleftarrow q^\delta \in [q, q']$ であり、$pq = pq' = pz$ であったので、$pz = pq^\delta$.)

$$= \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{t\frac{pq^\delta}{u^{CD}(z)}u^{CD}(q^\delta)+(1-t)pq^\delta}{pq^\delta}}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta = \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{\frac{tpq^\delta u^{CD}(q^\delta)+(1-t)pq^\delta u^{CD}(z)}{u^{CD}(z)}}{pq^\delta}}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta$$

$$= \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{tpq^\delta u^{CD}(q^\delta)+(1-t)pq^\delta u^{CD}(z)}{pq^\delta u^{CD}(z)}}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta$$

$$= \frac{u^{CD}(z)}{\frac{1}{\frac{tu^{CD}(q^\delta)+(1-t)u^{CD}(z)}{u^{CD}(z)}}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta = \frac{u^{CD}(z)}{\frac{u^{CD}(z)}{tu^{CD}(q^\delta)+(1-t)u^{CD}(z)}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta = \frac{1}{\frac{1}{tu^{CD}(q^\delta)+(1-t)u^{CD}(z)}u^{CD}(q^\delta)}q^\delta$$

$$= \frac{tu^{CD}(q^\delta)+(1-t)u^{CD}(z)}{u^{CD}(q^\delta)}q^\delta = \left\{t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q^\delta)}\right\}q^\delta$$

故に

$$z^* = \left\{t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q^\delta)}\right\}q^\delta$$

一方

$$\delta x + (1-\delta)x' = \delta Aq + (1-\delta)Bq'$$

$$= \{\delta A + (1-\delta)B\}\left\{\frac{\delta A}{\delta A+(1-\delta)B}q + \frac{(1-\delta)B}{\delta A+(1-\delta)B}q'\right\}$$

$$= \{\delta A + (1-\delta)B\}\, q^\delta$$

$$= \left\{t + (1-t)\left\{\delta\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)} + (1-\delta)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q')}\right\}\right\}q^\delta$$

さて両者の係数を比較しよう。

$\frac{1}{u^{CD}(q^\delta)} < \frac{\delta}{u^{CD}(q)} + \frac{1-\delta}{u^{CD}(q')}$ を証明すれば、ステップ 2 の証明は完了したことになる。更に

$u^{CD}(q^\delta) = u^{CD}(\frac{\delta A}{\delta A+(1-\delta)B}q + \frac{(1-\delta)B}{\delta A+(1-\delta)B}q') > \frac{\delta A}{\delta A+(1-\delta)B}u^{CD}(q) + \frac{(1-\delta)B}{\delta A+(1-\delta)B}u^{CD}(q')$ であるから、

$$\frac{1}{\frac{\delta A}{\delta A+(1-\delta)B}u^{CD}(q)+\frac{(1-\delta)B}{\delta A+(1-\delta)B}u^{CD}(q')} \leq \frac{\delta}{u^{CD}(q)} + \frac{1-\delta}{u^{CD}(q')}$$

を示せば十分である (u^t が全ての財に関して狭義単調増加であったことにも留意)。

この式を整理して、

$\frac{\delta A+(1-\delta)B}{\delta Au^{CD}(q)+(1-\delta)Bu^{CD}(q')} \leq \frac{\delta}{u^{CD}(q)} + \frac{1-\delta}{u^{CD}(q')}$ となる。

δ に関する関数

$F(\delta) := \frac{\delta A+(1-\delta)B}{\delta Au^{CD}(q)+(1-\delta)Bu^{CD}(q')} - \left(\frac{\delta}{u^{CD}(q)} + \frac{1-\delta}{u^{CD}(q')}\right)$

を定義する。$F(0) = 0 = F(1)$ である。

記号の簡略化のため、

$G(\delta) := \delta A + (1-\delta)B$

$H(\delta) := \delta Au^{CD}(q) + (1-\delta)Bu^{CD}(q')$

とおくと、

$F(\delta) := \frac{G(\delta)}{H(\delta)} - \left(\frac{\delta}{u^{CD}(q)} + \frac{1-\delta}{u^{CD}(q')}\right)$ と書ける。この関数が $\delta \in (0,1)$ で負であることを示せば、ステップ 2 の証明は完了する。そのために F の導関数を求めてみよう。

$F'(\delta) = \frac{G'(\delta)H(\delta)-G(\delta)H'(\delta)}{H(\delta)^2} - \left(\frac{1}{u^{CD}(q)} - \frac{1}{u^{CD}(q')}\right)$,

ただし、

$G'(\delta) = A - B$

$H'(\delta) = Au^{CD}(q) - Bu^{CD}(q')$ である。故に、

$G'(\delta)H(\delta) - G(\delta)H'(\delta)$

$= (A-B)\left\{\delta Au^{CD}(q) + (1-\delta)Bu^{CD}(q')\right\} - \{\delta A + (1-\delta)B\}\{Au^{CD}(q) - Bu^{CD}(q')\}$

$= [\delta(A-B) - \{\delta A + (1-\delta)B\}]Au^{CD}(q) + [(1-\delta)(A-B) + \{\delta A + (1-\delta)B\}]Bu^{CD}(q')$

$= AB\{u^{CD}(q') - u^{CD}(q)\}$

となる。

以上から

$F'(\delta) = \frac{AB(u^{CD}(q')-u^{CD}(q))}{H(\delta)^2} - \left(\frac{1}{u^{CD}(q)} - \frac{1}{u^{CD}(q')}\right)$ となる。

この関数を更に微分して

$F''(\delta) = \frac{-2AB(u^{CD}(q')-u^{CD}(q))H(\delta)H'(\delta)}{H(\delta)^4}$

$= \frac{-2AB(u^{CD}(q')-u^{CD}(q))H'(\delta)}{H(\delta)^3} = \frac{-2AB(u^{CD}(q')-u^{CD}(q))\{Au^{CD}(q)-Bu^{CD}(q')\}}{H(\delta)^3}$

ここで項 $Au^{CD}(q) - Bu^{CD}(q')$ は A と B を戻して計算すると

$Au^{CD}(q) - Bu^{CD}(q') = \left\{t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}\right\}u^{CD}(q) - \left\{t + (1-t)\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q')}\right\}u^{CD}(q')$

$= -t\{u^{CD}(q') - u^{CD}(q)\}$.

これを代入して、

$F''(\delta) = \frac{2ABt(u^{CD}(q')-u^{CD}(q))^2}{H(\delta)^3} > 0$ を得る。故に $F'(\delta)$ は増加関数である。

また $F'(\delta), F''(\delta)$ は連続関数でもある。この事実と先に確認した $F(0) = 0 = F(1)$ の二つから、所望の結果 $F(\cdot)$ が $\delta \in (0,1)$ で常に負である」ことが導ける。仮にある $\delta \in (0,1)$ で $F(\delta) \geq 0$ であるとしよう（背理法)。$F'(\delta) \geq 0$ とすると、$F'(\cdot)$ は増加関数より $F(1) > 0$ となって矛盾する。そこで $F'(\delta) < 0$ である。しかし $F(\delta) \geq 0$ であったから、ある $\delta' < \delta$ で $F(\delta') > 0$ でなければならない。これは $F'(\cdot)$ が増加関数であることに矛盾する。以上でステップ 3 の証明は完了した。

ステップ 4：u^t は準凹である。

$u^t(x) > u^t(x')$ とし、$z = \alpha x + (1-\alpha)x', \alpha \in (0,1)$ を任意にとる。

$u^t(z) > u^t(x')$ をいえばよい。

係数 $0 < k < 1$ をとり、$u^t(kx) = u^t(x')$ とできる。kx と x' の凸結合

$z' = \beta kx + (1-\beta)x'$ をとる。ここで $\beta = \frac{\alpha}{\alpha+k-\alpha k}$ とおく。

定数 $\frac{k}{\alpha+k-\alpha k}$ をとる。$\frac{k}{\alpha+k-\alpha k} \in (0,1)$ である。z をこの定数で縮小すると、

$\frac{k}{\alpha+k-\alpha k}z = \frac{k}{\alpha+k-\alpha k}(\alpha x+(1-\alpha)x') = \frac{\alpha k}{\alpha+k-\alpha k}x+\frac{(1-\alpha)k}{\alpha+k-\alpha k}x' = k\beta x+(1-\beta)x' = z'$

すなわち z と z' は 0 を始点とする同一の半直線上にあり、u^t の単調性より $u^t(z) > u^t(z')$ となる。一方、z' は kx と x' の凸結合より、ステップ 3 より $u^t(z') > u^t(x')$ である。この二つの関係から $u^t(z) > u^t(x')$ となり、所望の結果を得る。 ■

Nagahisa and Suh (1995) でのこの補題の証明は誤りである。そこでは CES 型効用関数が求める効用関数とされている。そこでは u^t の代わりに

$$u(z) := \begin{cases} [\alpha_1 z_1^{-\rho} + \alpha_2 z_2^{-\rho} + \cdots + \alpha_l z_l^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} & if\ z \in R^l_{++}, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

がとられている。ベクトル $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l) \in int.\Delta^l$ は補題 3.1 での限界代替率条件が成立するように設定されている。ここで $u(z)$ が線型の関数 $u(z) = pz$ に近似するように係数 $\rho \neq 0$ を選ぶわけだが、この場合 CES 型効用関数は軸に接することが起こりえて、境界条件を満たさなくなる。幸い、補題 3.1 では主張内容を変えることなく、証明を正すことができた。

ただしルールの定義域に関する仮定を強くすれば Nagahisa and Suh (1995) の補題の証明はそのまま通用し、全ての結果も生き残る。主体のとる効用関数 u_i に対し

て、境界での連続性を諦めればよいのである。正確には次のように仮定を強くすればよい。u_i は R^l_{++} 上で連続微分可能・準凹かつ全ての財に関して狭義単調増加であり、次の境界条件を満たす：任意の $z_i \in R^l_{++}, z'_i \in R^l_+ \backslash R^l_{++}$ に関して、$u_i(z_i) > u_i(z'_i)$ が成り立つ。この方が証明は簡潔になる。ただ本稿ではより仮定を緩めて定理を証明することに敢えてこだわった次第である。

証明中にも説明があるが、u^t の形はその無差別曲線を引いて幾何学的には考えるとわかりやすい。例えば z を通る無差別曲線を描いてみよう。原点を始点とし、R^l_{++} 上での半直線 l を引く。この l 上で u^t に関し z と無差別な点を求めてみよう。半直線 l と z での u^{CD} に接する接平面 $\{q \in R^l_{++} : pq = pz\}$ との交点を q とする。またその半直線と u^{CD} の z を通る無差別曲線との交点は $\frac{u^{CD}(z)}{u^{CD}(q)}q$ と表現できる。この 2 点を $1-t, t$ の比率で凸結合させた点が求める点であり、これら全てを集めたものが z を通る無差別曲線となる。t を 0 に近づければ R^l_{++} 上では線型関数 $u(x) = \frac{px}{\lambda}$ に近似し、1 に近づければ u^{CD} に近似する。また簡単に確認できるが、係数 $\lambda = \frac{pz}{u^{CD}(z)}$ は条件付最小化問題 $u^{CD}(x) = u^{CD}(z)$ の制約下で px を最小にする、でのラグランジェ乗数である。

証明. ラグランジェ乗数を μ とおく。ラグランジェ関数は

$L(x,\mu) := px + \mu\left\{u^{CD}(z) - u^{CD}(x)\right\}$

である。定義により z がこの問題の解だから、1 階条件より

$p_i - \mu\alpha_i\frac{u^{CD}(z)}{z_i} = 0 \ (i = 1, ..., l)$ である。つまり、

$p_i z_i = \mu\alpha_i u^{CD}(z) \ (i = 1, ..., l)$

この式全てを合計して $pz = \mu u^{CD}(z)$ となり、所望の結果を得る。 ■

補題 3.2 任意の $u \in U^n$ と任意の $z \in W(u)$ に関して、ある $u' \in U$ で以下の条件を満たすものが存在する：$W(u') = \{z\}$; かつ任意の $i \in N$ と任意の $j = 1, ..., l-1$ に関して

$MRS_{jl}(z_i, u_i) = MRS_{jl}(z_i, u'_i) = \frac{p_j}{p_l}.$

ここで $p \in int.\Delta^l$ は $z \in W(u)$ に対応する価格ベクトルである。

証明. 任意の $i \in N$ に関して、$\alpha^i = (\alpha^i_1, \alpha^i_2, ..., \alpha^i_l) \in int.\Delta^l$ で

$\frac{\alpha^i_1 z_{il}}{\alpha^i_l z_{i1}} = \frac{p_1}{p_l}, \frac{\alpha^i_2 z_{il}}{\alpha^i_l z_{i2}} = \frac{p_2}{p_l}, ..., \frac{\alpha^i_{l-1} z_{il}}{\alpha^i_l z_{il-1}} = \frac{p_{l-1}}{p_l}$

となるものが存在する。($\alpha^i_1 = \frac{p_1 z_{i1}}{pz_i}, ..., \alpha^i_l = \frac{p_l z_{il}}{pz_i}$ とおけばよい。)

そこでコブダグラス型効用関数 u_i' を $u_i'(z_i) = z_{i1}^{\alpha_1^i} z_{i2}^{\alpha_2^i} \cdots z_{il}^{\alpha_l^i}$ と定義する (R_+^l 上で定義されている)。主体 i の持つ第 j 財に対する第 l 財の限界代替率は

$\frac{\partial u_i'(z_i)/\partial z_{ij}}{\partial u_i'(z_i)/\partial z_{il}} = \frac{\alpha_j^i z_{il}}{\alpha_l^i z_{ij}} = \frac{p_j}{p_l}$ $(j = 1, ..., l-1)$

となる。故に $z \in W(u')$ である。プロファイル u' では粗代替性が成り立つから、均衡価格は一意であり、故に $\{z\} = W(u')$ を得る。粗代替性の詳細に関しては Varian (1984,p242) または Arrow and Hahn (1971, p225) 等を参照されたい。 ■

以下は定理 3.1 の証明である。

証明. ワルラスルールがこれら 3 公理を満たすことは明らかである。ルールの一意性の証明のみを行なえばいい。φ は 3 公理を満たすルールとする。次の二つのステップを証明すればよい。

ステップ 1：$\varphi \subset W$

$u \in U^n$ と $z \in \varphi(u)$ を所与とする。パレート最適性と個人合理性、及び選好に関する諸仮定から z を支持する価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ が存在する。ある主体 i に関して $pz_i \neq p\omega_i$ であったとする。これが矛盾を導くことを証明しよう。z が実行可能配分であることから、ある主体 k に関して $pz_k < p\omega_k$ が成り立つ。個人合理性と $\omega_k \in R_{++}^l$ 及び境界条件より、$z_k \in R_{++}^l$ となる。そこで補題 3.1 より、ある $u_k' \in U$ で $MRS_{ab}(z_i, u_k') = \frac{p_a}{p_b}$ (任意の $a, b \in L$ に関して) であり、かつ $u_k'(z_k) < u_k'(\omega_k)$ となるものが存在する。局所独立性により、k のみが選好を u_k から u_k' へ変化させたとき、$z \in \varphi(u_k', u_{-k})$ である。個人合理性から $u_k'(\omega_k) \leq u_k'(z_k)$ となるが、これは u_k' の構成に矛盾する。以上から、全ての主体 i に関して $pz_i = p\omega_i$ となり、$z \in W(u)$ が従う。

ステップ 2：$\varphi \supset W$

$u \in U^n$ と $z \in W(u)$ を所与とする。補題 3.2 より、$u' \in U^n$ で $\{z\} = W(u')$ かつ、全ての主体 $i \in N$ と全ての財 $a, b \in L$ に関して、$MRS_{ab}(z_i, u_k) = MRS_{ab}(z_i, u_k')$ となるものが存在する。ステップ 1 と $\varphi(u')$ の非空性により、$z \in \varphi(u')$ となる。局所独立性により $z \in \varphi(u)$ を得る。 ■

定理 3.1 に関して選好の仮定に関する留意事項がある。我々の選好の仮定 (U に関する仮定) の下では、よく知られているように、ワルラス配分では各主体に関して任意の 2 財間での限界代替率がその価格比率に等しい。この条件に加え、全ての主体の予算制約が等号で成り立つことが実行可能資源配分がワルラス配分であるための必

要十分条件である。しかし、選好の仮定のいずれか一つでも欠けると、この必要十分条件は成り立たず、従ってワルラスルールは局所独立性を満たさない。例えば境界条件が成り立たなければワルラス配分は境界値をとってしまう。若干微妙なのは (効用関数の) 連続微分可能性である。これを微分可能性にまで緩めることは可能かもしれない。しかし、その場合ミクロ経済学の多くの道具が使えず、証明は苦労するであろう。例えば先のワルラス配分のための必要十分条件はラグランジェ乗数法から導かれるが、この手法は使えないことになる。ラグランジェ乗数法では目的関数の連続微分可能性が仮定されているためである。

以下は定理 3.2 の証明である。

証明. 平等資産の下でワルラスルールはこれら 3 公理を満たすのは明らかである。ルールの一意性を証明しよう。φ はこれら 3 公理を満たすルールとする。次の二つのステップを証明すればよい。

ステップ 1：$\varphi \subset W_{ed}$

$u \in U^n$ と $z \in \varphi(u)$ を所与とする。仮に $z \notin W_{ed}(u)$ であったとする (背理法)。最初に $z \in R^{nl}_{++}$ を示す。(U^n における境界条件はここで使われている。定義域を留意点 3.1 での V にまで広げるとこれが証明できない。) 仮にそうでないとする (背理法)。もし仮に $z_j \in R^l_{++}, z_k \notin R^l_{++}$ なる主体 j, k が存在すれば k が j を羨望するので、φ が羨望衡平性を満たすことに矛盾する。次に全ての主体 i に関して $z_i \notin R^l_{++}$ であったとする。すると境界条件から、全ての主体 i に関して $u_i(\omega_i) > u_i(z_i)$ となるので、これはパレート最適性に矛盾する。以上から $z \in R^{nl}_{++}$ が示せた。パレート最適性により、z を支持する価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ が存在する。$z \notin W_{ed}(u)$ と想定したことより、ある主体 i, j の間で $pz_i < pz_j$ が成り立つ。補題 3.1 を適用して、ある $u'_i \in U$ で $MRS_{ab}(z_i, u'_i) = \frac{p_a}{p_b}$ (任意の $a, b \in L$ に関して) であり、かつ $u'_i(z_j) > u'_i(z_i)$ となるものが存在する。局所独立性より i のみが選好を u_i から u'_i へ変化させた場合も $z \in \varphi(u'_i, u_{-i})$ である。しかし一方で $u'_i(z_j) > u'_i(z_i)$ であるから、i は j を羨望し、矛盾に帰着する。以上から $z \in W_{ed}(u)$ が示せた。

ステップ 2：$\varphi \supset W_{ed}$

証明は定理 3.1 のステップ 2 と同じである。演習問題としたい。■

以下は定理 3.3 の証明である。

証明. ワルラスルールが λ 比例的純取引での羨望衡平性を満たすことは容易に確認で

きる。ここでも 3 公理を満たすルールの一意性を証明する。φ は 3 公理を満たすルールとする。このルールがワルラスルールに他ならないことを証明しよう。次の二つのステップを示せばよい。

ステップ 1：$\varphi \subset W$

$u \in U^n$ と $z \in \varphi(u)$ を所与とする。仮に全ての $i \in N$ に関して、$z_i \notin R^l_{++}$ であれば定理 3.2 のステップ 1 での証明で示されたように z はパレート最適でなくなり矛盾する。次に $z_i \in R^l_{++}, z_j \notin R^l_{++}$ なる主体 i, j が存在したとしよう。$\lambda(z_i - \omega_i) + \omega_j \in R^l_{++}$ を満たす任意の $\lambda \in (0, 1]$ に関して、境界条件は $u_j(\lambda(z_i - \omega_i) + \omega_j) > u_j(z_j)$ を意味する。つまり j は i の純取引 $(z_i - \omega_i)$ の λ 割に対して羨望を抱くことになる。これは矛盾である。故に $z \in R^{nl}_{++}$ が示せた。(境界条件はここで使っている。定義域を留意点 3.1 での V にまで広げるとこの証明は通らなくなる。) z はプロファイル u でのパレート最適配分であるから z を支持する価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ で、以下の条件を満たすものが存在する：各 $i \in N$ に関して、z_i は i の効用を集合 $H_i := \{x_i \in R^l_+ : px_i \leq pz_i\}$ 上で最大にする。各 $i \in N$ に関して $p(z_i - \omega_i) = 0$ であることを示そう。仮にそうでないとする (背理法)。$\sum_{i \in N} p(z_i - \omega_i) = 0$ であるから、ある 2 人の主体 i, j の間で $p(z_i - \omega_i) < 0 < p(z_j - \omega_j)$ なる不等式が成立している。定義より、$p\omega_i > p\omega_i + \lambda p(z_i - \omega_i) \geq p\omega_i + p(z_i - \omega_i) = pz_i$ が全ての $\lambda \in (0, 1]$ で成り立つ。故に補題 3.1 と局所独立性より、ある $u^* \in U^n$ で $z \in \varphi(u^*)$ かつ $u^*_i(\omega_i) > u^*_i(z_i)$ となる。すると効用関数の連続性より、正数 $\lambda \in (0, 1]$ を十分小さくとって $u^*_i(\lambda(z_j - \omega_j) + \omega_i) > u^*_i(z_i)$ となる。これは φ が λ 比例的純取引での羨望衡平性を満たすことに矛盾する。故に各 $i \in N$ に関して $p(z_i - \omega_i) = 0$ であることがわかった。これは $\omega_i \in H_i$ であることを意味し、所望の結果を得る。

ステップ 2：$\varphi \supset W$

これは定理 3.1 の証明と同じである。演習問題としたい。 ■

定理 3.4 の証明：

証明に入る前に幾つかの概念を定義する。

全ての主体 i に対して、ある同一の線形の効用関数 $u_i(z_i) = pz, p \in int.\Delta^l$ を割り充てる効用プロファイル u を考える。$p \in int.\Delta^l$ のとり方に応じてこのようなプロファイル u は無数にあるが、その全てを集め L としよう。$D = U^n \cup L$ とおく。

我々は証明の必要上、社会的選択ルール φ を D 上に拡張することになる。社会的選択ルール ς は $U^n \cup L$ 内の各プロファイル u に対して Z の非空部分集合 $\varsigma(u)$ を対応させる多価写像とする。

Maskin (1999) はナッシュ誘導可能な社会的選択ルールの族の確定のために以下の二つの条件を出した。これらの条件を我々のモデルの中で定義すると以下のようになる。

定義 3.1 マスキンの単調性：任意の $u, u' \in D$, 任意の $z, z' \in Z$, 任意の $i \in N$ に関して $u_i(z_i) \geq u_i(z'_i)$ ならば $u'_i(z_i) \geq u'_i(z'_i)$ であるとする。このとき $z \in \varsigma(u)$ ならば $z \in \varsigma(u')$ である。

拒否権の非存在：任意の $u \in D$, 任意の $z \in Z$ に関して、$\#\{i \in N : u_i(z_i) \geq u_i(z'_i)$ (全ての $z' \in Z$ に関して)$\} \geq n-1$ ならば、$z \in \varsigma(u)$ である。

定義 3.2 任意の $u \in D$, 任意の $z^* \in Z$, 任意の $i \in N$ に関して、$L(z^*, u_i) = \{z \in Z : u_i(z^*_i) \geq u_i(z_i)\}$ とおく。D 上で定義されたルール ς を所与とする。任意の $z^* \in Z$ と任意の $u^* \in D$ に関して、u^* が z^* に関する臨界プロファイルであるとは、$z^* \in \varsigma(u^*)$ であり、かつ [全ての i に関して $L(z^*, u'_i) \subset L(z^*, u^*_i)$ かつある i に関しては $L(z^*, u'_i) \neq L(z^*, u^*_i)$ であるような任意の $u' \in D$ に関して、$z^* \notin \varsigma(u')$] となることをいう。ルール ς が閉であるとは、$z^* \in \varsigma(u)$ であるような任意の任意の $z^* \in Z$ と任意の $u \in D$ に関して、ある $u^* \in D$ で全ての i に関して $L(z^*, u^*_i) \subset L(z^*, u_i)$ であり、しかも u^* が z^* に関して臨界プロファイルでとなるものが存在するときをいう。

補題 3.3 (Nagahisa 1991 Lemma 8)D 上で定義された社会的選択ルール ς がパレート最適性、個人合理性、及び局所独立性を満たすとする。するとこのルールは閉である。(ここでの各公理は第 3.2 節で与えた定義をそのまま D 上で定義しなおしたものである。)

証明. $z^* \in \varsigma(u)$ としよう。$u \in L$ であれば、L の定義より u 自身が z^* に関する臨界プロファイルになる。次に $u \in U^n$ としよう。ルール ς が個人合理的であること、境界条件及び初期資産が内点であることから $z^* \in R^{nl}_{++}$ である。更にパレート最適性により、ある $p \in int.\Delta^l$ が存在して、全ての $i \in N$ と全ての $z_i \in R^l_+$ に関して、

$u_i(z_i) \geq u_i(z_i^*) \longrightarrow pz_i \geq pz_i^*$ となる。そこで z^* に関する臨界プロファイル u^* を、全ての $i \in N$ と全ての $z_i \in R_+^l$ に関して $u_i^*(z_i) = pz_i$ とおけば、局所独立性により $z^* \in \varsigma(u^*)$ となる。以上からルールは閉であることがわかった。■

最後に Mckelvey(1989) の Mechanism III を定義する。このゲーム形式を $G_M = (S, g)$ と記法する。$n \geq 3$ と仮定しよう。

定義 3.3 各主体 i の戦略集合は

$S_i := Z \times 2^Z \times 2^Z \times N$

である。ここで 2^Z は Z の部分集合全てからなる集合である。主体 i の戦略 $s_i \in S_i$ を $s_i = (x_i, A_i, B_i, n_i)$ と記法する。$S = S_1 \times \cdots \times S_n$ であり、戦略プロファイルは $s \in S$ である。任意の $s \in S$ に関して、$k(s) = \sum n_i (\bmod n)$ と記法する。D 上のルール ς を所与とする。任意の $s \in S$ と任意の $j \in N$ に関して、s_{-j} が ς 整合的であるとは、以下の 3 条件を満たす $z^* \in Z$ と $u^* \in D$ が存在することをいう。

(1) u^* は z^* に関する臨界プロファイルである；

(2) 任意の $i \in N \backslash \{j\}$ に関して、$x_i = z^*$;

(3) 任意の $i \in N \backslash \{j\}$ に関して、$A_i = L(z^*, u_i^*), B_i = L(z^*, u_{i+1}^*)$, ただし $u_{n+1}^* = u_1^*$

帰結関数 $g : S \longrightarrow Z$ は次の二つのルールに従うものとする。

ルール 1： $x_j \neq x_{j-1}$ なる $j \in N$ が存在し、かつ s_{-j} が ς 整合的であるとする。このとき

$x_j \in B_{j-1}$ ならば $g(s) = x_j$, そうでないならば $g(s) = x_{j-1}$

ルール 2：それ以外のとき：$g(s) = x_{k(s)}$

Mckelvey の定理　(Mckelvey 1989)

$n \geq 3$ とする。社会的選択ルール ς が閉であり、マスキン単調性と拒否権の非存在を満たすならば、ゲーム形式 G_M はこのルールをナッシュ誘導できる。

さて準備は整った。まず定理 3.4 の（1）の証明を行なう。

証明. 二つのプロファイル $u, u' \in U^n$ と $z \in \varphi(u)$ を任意にとる。これらの間で局所独立性の前提が成り立っているものとする。$z \in \varphi(u')$ を示せばよい。φ は凸ナッシュ誘導可能であるから、あるゲーム形式 $G = (S, g)$ が存在して、$z = g(s), s \in NE(G, u)$ である。仮に $z \notin \varphi(u')$ であったとする (背理法)。するとある主体 j と彼

の戦略 s'_j で $u'_j(y_j) > u'_j(z_j), y = g(s'_j, s_{-j})$ となるものが存在する。

次のような二つの凸集合を定義する：

$U_j = \{z'_j \in Z_j : u_j(z'_j) > u_j(z_j)\}, U'_j = \{z'_j \in Z_j : u'_j(z'_j) > u'_j(z_j)\}$

ただし Z_j は Z から j の消費集合 R^l_+ への射影である。するとある一意の価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ が存在して、

(1) $pz'_j \geq pz_j$ (任意の $z'_j \in U_j$ に関して)

(2) $pz'_j \geq pz_j$ (任意の $z'_j \in U'_j$ に関して)

が成り立つ。個人合理性、境界条件、初期資産に関する仮定 $\omega \in R^{nl}_{++}$ より $z \in R^{nl}_{++}$ である。これと局所独立性の前提の成立から、このような価格ベクトルの存在は保証される。

さて、次の事実を証明しよう。

(3) $py_j > pz_j$

仮に成り立たないとする (背理法)。$u'_j(y_j) > u'_j(z_j)$ であったこと、$z \in R^{nl}_{++}$、及び境界条件を考え合わせると $y_j \in R^l_{++}$ である。そこで y_j から全ての財をごく僅か減らした消費計画を y'_j とし、これを $y'_j \in R^l_{++}$ かつ $u'_j(y'_j) > u'_j(z_j)$ とすることができる。故に $y'_j \in U'_j$ である。しかも背理法の仮定より、$py'_j < pz_j$ となる。これは $y'_j \in U'_j$ に矛盾する。以上で (3) が示せた。

x_j を y_j の十分近くに取り、その各成分が z_j のそれとは違うように取る。

(4) $px_j > pz_j$

が成り立つように取れる。x_j と z_j を通る R^l_+ 上での直線を L とする。そして $U_j \cup L$ の凸包 $co.(U_j \cup L)$ を考える。この集合も先と同じ価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ によって z_j で分離される (ミンコフスキーの分離定理より、かような価格ベクトルは必ず存在する。$co.(L \cup U_j)$ を z_j で分離しうるということは U_j を z_j で分離しているわけである。そのような価格ベクトルは、先に示したとおり一つしかない。すなわち $p \in int.\Delta^l$ のみである)。

故に (4) より、

(5) $pz'_j \geq pz_j$ （全ての $z'_j \in L$ に関して）

である他ない。これが不可能であることを示せば証明は完了する。

任意の $z'_j \in L$ は、式

$\frac{z'_{j1} - x_{j1}}{z_{j1} - x_{j1}} = \frac{z'_{j2} - x_{j2}}{z_{j2} - x_{j2}} = \cdots = \frac{z'_{jl} - x_{jl}}{z_{jl} - x_{jl}}$ を満たす。(x_j の取り方により、分母が 0 にな

ることはない。このために x_j を取ったのである。)

この式を $=\delta(z'_j)$ とおいて z'_j に関して解くと

$z'_{j1}=\delta(z'_j)(z_{j1}-x_{j1})+x_{j1}$

$z'_{j2}=\delta(z'_j)(z_{j2}-x_{j2})+x_{j2}$

$\cdots$

$z'_{jl}=\delta(z'_j)(z_{jl}-x_{jl})+x_{jl}$

$(\delta(z'_j)$ の値は z'_j に応じて変化する。従ってこの記法をしている。)

これより

$pz'_j=\delta(z'_j)pz_j+(1-\delta(z'_j))px_j$ となる。さて (5) より、

$\delta(z'_j)pz_j+(1-\delta(z'_j))px_j\geq pz_j$

であるので、$(1-\delta(z'_j))px_j\geq(1-\delta(z'_j))pz_j$ となる。

$\delta(z'_j)$ の大きさは任意にとれる。

故に $1-\delta(z'_j)<0$ とおくと、$px_j\leq pz_j$ となって (4) に矛盾する。

(正確には $\delta(z'_j)$ を十分 1 に近くとる条件も必要である。すると z_j の十分近くとなり、消費可能となる。$z_j\in R^l_{++}$ にも留意されたい。こうしないと $(1-\delta(z'_j))x_j$ が消費不可能となる。) ■

さて定理 3.4 の（2）を証明しよう。局所独立性が凸ナッシュ誘導可能性を含意することの証明である。これはかなり込み入っている。まずルール φ がパレート最適性、個人合理性、そして局所独立性を満たせば、定理 3.1 よりルールはワルラスルール W に他ならない。故にワルラスルール W が凸ナッシュ誘導可能であることを証明すればよい。

ワルラスルールの定義域を $D=U^n\cup L$ に拡大しよう。そのワルラスルールを ς_W とする。明らかに ς_W はパレート効率性、個人合理性、局所独立性を満たしている。故に補題 3.3 より ς_W は閉となる。拒否権の非存在は $n\geq 3$ である以上トリビアルに成り立っている。マスキンの単調性の成立は以下のように証明できる：

証明. $z\in\varsigma_W(u)$ としよう。u' は z に関してマスキンの単調性の前提が満たされるようなプロファイルとする。$z\in\varsigma_W(u')$ を証明すればよい。二つのケースに区別して証明する

ケース 1：$u\in U^n$

$z\in R^{nl}_{++}$ であり、$u'\in U^n$ である。z は新しいプロファイル u' でもワルラス配分

であるので、所望の結果を得る。

ケース 2：$u \in L$

$z \in R^{nl}_{++}$ であれば、$u' = u$ であるか、$u' \in U^n$ である他ない。前者のケースは自明であり、後者のケースは u を定義する $p \in int.\Delta^l$ が価格ベクトルとなり、依然 z は新しいプロファイル u' のもとでワルラス配分であり続ける。次に $z \notin R^{nl}_{++}$ であったとする。境界条件とワルラス配分の定義より $u' \in L$ である他ない。u, u' を定義するベクトルを各々 $p, q \in int.\Delta^l$ としよう。すると

$\varsigma_W(u) = \{x \in Z : px_i = p\omega_i(\text{全ての } i \text{ に関して})\}$

$\varsigma_W(u') = \{x \in Z : qx_i = q\omega_i(\text{全ての } i \text{ に関して})\}$

となる。$z \in \varsigma_W(u)$ だから、$pz_i = p\omega_i$ が全ての i に関して成立する。故にマスキン単調性の選好変化の前提により、$qz_i \geq q\omega_i$ が全ての i に関して成立する。故に全ての i に関して $qz_i = q\omega_i$ となり、$z \in \varsigma_W(u')$ が上の $\varsigma_W(u')$ の構成から従う。以上でマスキン単調性の成立が確認できた。 ■

留意点 3.5　ケース 1 の証明に関して：Nagahisa (1991b) ではより一般化された補題（Lemma 3）が提出されている：U^n 上で定義され, 個人合理性を満たす任意の社会的選択ルールに関して、それが局所独立性を満たすならばマスキンの単調性も満たす。

以上から Mckelvey の定理が適用できて、ゲーム形式 G_M は ς_W をナッシュ誘導できることになる。従って G_M はワルラスルール W をナッシュ誘導できることになる。残るは G_M が凸であることの証明である。

証明.　主体 $i \in N$ と相異なる $z, z' \in Z$ をとり、$z = g(s_i, s_{-i}), z' = g(s'_i, s_{-i})$ としよう。任意の $t \in (0,1)$ に関して、$z^t = tz + (1-t)z'$ とおく。また $s = (s_i, s_{-i}), s' = (s'_i, s_{-i})$ とする。以下出てくる記号の約束として、任意の $j \in N$ に関して、$s_j = (x_j, A_j, B_j, n_j), s'_j = (x'_j, A'_j, B'_j, n'_j)$ としよう。主体 i の戦略 $s^t_i \in S_i$ で、$z^t = g(s^t_i, s_{-i})$ なるものの存在を示せばよい。区別して論じるべき二つのケースが存在する。

ケース 1：s に対してルール 1 が適用される。

すると、ある $j \in N$ で $x_j \neq x_{j-1}$ かつ s_{-j} が ς_W 整合的であることになる。ここで更に二つのサブケースに分けて議論する。

ケース 1-a：$j \neq i$

$s_i^t = (x_i^t, A_i^t, B_i^t, n_i^t)$ を次のように定義する：$x_i^t = z^t, A_i^t \neq B_{i-1}, B_i^t \neq A_{i+1}, \mathrm{mod}(n_i^t + \sum_{k \neq i} n_k) = i.$

証明すべきは以下の関係である。

(1) 戦略プロファイル (s_i^t, s_{-i}) において、どの $k \in N$ に関しても s_{-k} は ς_W 整合的ではない。

(1) がいえればルール 2 が適用されて $z^t = g(s_i^t, s_{-i})$ となり、このケースの証明は完了する。

(1) の証明：仮に

(2) ある $k \in N$ に関して s_{-k} は ς_W 整合的である

とする (背理法)。すると $B_1 = A_2, ..., B_{k-2} = A_{k-1}, B_{k+1} = A_{k+2}, ..., B_n = A_1$ となる。

これより

(3) 任意の $k \neq i$ に関して s_{-k} は ς_W 整合的ではない

ことがわかる。なぜなら s_i^t の定義より $B_i^t \neq A_{i+1}$ だからである。

(2),(3) より

(4) i のみに関して s_{-k} は ς_W 整合的である

ことになる。しかし一方でケース 1 及び 1-a の想定より

(5) $j \neq i$ で s_{-j} が ς_W 整合的であるものが存在する

ことになり、(4) と (5) は矛盾する。以上から (2) は否定され (1) がいえ、このケースの証明が完了した。

ケース 1-b：$j = i$

すなわち s に対してルール 1 が適用され、$x_i \neq x_{i-1}$ かつ s_{-i} が ς_W 整合的であるケースである。。

これは更に二つのサブケースに区別できる。

ケース 1-b-i：ルール 2 が s' に適用される。

ルール 1 が s に適用されているので、$x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n \neq x_i$ である。仮に $x_i' \neq x_1$ であれば、ルール 1 が s' に適用されることになり矛盾する。故に

(6) $x_i' = x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n$ である。

s_{-i} が ς_W 整合的であったから、ある $z^* \in Z$ とある $u^* \in D$ で u^* が z^* に関して

臨界プロファイルとなっており、

かつ (6) より

(7)$z^* = x'_i$ となる。

(6) を考えて $x'_i = g(s')$, また $g(s') = z'$ であり、

この二つと (7) より $z^* = x'_i = g(s') = z'$, すなわち

(8)$z^* = z'$ である。

$z \neq z'$ より、

(9)$x_i = g(s) = z$ かつ

(10)$x_i \in B_{i-1} = L(z^*, u^*_i)$ である。

さて $s^t_i = (x^t_i, A^t_i, B^t_i, n^t_i)$ を次のように与える：$x^t_i = z^t$, 残りは 1-a でのそれと同じとする。s_{-i} が ς_W 整合的であり、かつ $x^t_i = z^t \neq z' = z^* = x_{i-1}$ であるから、ルール 1 が (s^t_i, s_{-i}) に適用される。$B_{i-1} = L(z^*, u^*_i)$ 及び $u^*_i(z) = pz$(ある $p \in int.\Delta^l$ に関して）であるから、B_{i-1} は凸である。$z^t = tz + (1-t)z'$ であり、(9),(10) より $z \in B_{i-1}$、及び (8) と（10）$B_{i-1} = L(z^*, u^*_i)$ より $z' = z^* \in L(z^*, u^*_i) = B_{i-1}$, すなわち $z' \in B_{i-1}$ である。故に $z^t \in B_{i-1}$ である。以上からルール 1 の適用により $z^t = g(s^t_i, s_{-i})$ となり、ケース 1-b-i の証明は完了する。

ケース 1-b-ii：ルール 1 が s' に適用される。

これは更に四つのサブケースに分類される。

ケース 1-b-ii-α:$x_i, x'_i \in B_{i-1}$

ルール 1 の適用により、$z = x_i, z' = x'_i$ である。既に示したように B_{i-1} は凸であるから、$z^t \in B_{i-1}$ である。

$s^t_i = (x^t_i, A^t_i, B^t_i, n^t_i)$ を次のように与える：$x^t_i = z^t$, 残りは任意。仮に $z^t \neq x_{i-1}$ であれば、ルール 1 の適用を受け、$z^t = g(s^t_i, s_{-i})$ である。$z^t = x_{i-1}$ ならば、全ての k に関して $x_k = z^t$ となる。故に $z^t = g(s^t_i, s_{-i})$ である。これより、このケースの証明は完了する。

ケース 1-b-ii-β:$x_i \in B_{i-1}, x'_i \notin B_{i-1}$

ルール 1 より、$z = x_i$ である。s_{-i} が ς_W 整合的であることより、ある $z^* \in Z$ とある $u^* \in D$ で u^* が z^* に関して臨界プロファイルとなっており、$A_k = L(z^*, u^*_k), B_k = L(z^*, u^*_{k+1})$ が全ての $k \neq i$ に関して成り立つ。$x'_i \notin B_{i-1}$ より、ルール 1 から $z' = x_{i-1}$ である。またケース 1 の想定「ルール 1 が s に適用される、

特に s_{-i} が ς_W 整合的であった」ことから $x_{i-1} = z^*$ である。故に $z' = z^*$ となる。これは $B_{i-1} = L(z^*, u_i^*)$ に留意すれば、$z' \in B_{i-1}$ を含意する。$s_i^t = (x_i^t, A_i^t, B_i^t, n_i^t)$ を次のように与える：$x_i^t = z^t$、残りは任意。$z^t \neq z^*$ より、(s_i^t, s_{-i}) にはルール 1 が適用される。$z, z' \in B_{i-1}$ と B_{i-1} が凸より、$z^t = g(s_i^t, s_{-i})$ を得る。以上でこのケースの証明は完了する。

ケース 1-b-ii-γ:$x_i \notin B_{i-1}, x_i' \in B_{i-1}$

証明は先のケースと同様である。

ケース 1-b-ii-δ:$x_i, x_i' \notin B_{j-1}$

ルール 1 より、$z = g(s) = x_{i-1} = g(s') = z'$ となり、これは $z \neq z'$ に矛盾する。

以上でケース 1 の証明が完了した。

ケース 2 s に対してルール 2 が適用される。

s' に対してルール 1 が適用される場合は既に証明したどれかのケースになる。よって s' に対してルール 2 が適用される場合のみを考えればよい。区別して論じるべき二つのサブケースが存在する。

ケース 2-i：ある主体 j に関して、s_{-j} が ς_W 整合的である

まず最初に s において $x_k = z$ が全ての $k \in N$ に関して成り立つことを示そう。s_{-j} が ς_W 整合的であることから、$x_1 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots = x_n$ である。仮に $x_j \neq x_1$ ならば、ルール 1 が s に適用され、矛盾する。故に x_1 から x_n までは全て等しくなり、所望の結果を得る。故に $z = g(s)$ である。

次に $j \neq i$（ここで i は凸性の証明の当初に取った $z' = g(s_i', s_{-i})$ での i のことである）で、s_{-i} も ς_W 整合的であるとしよう。$x_i' = x_{i-1}$ ならば $x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n$ は全て z より、$z = g(s')$ となる。これは矛盾である。$x_i' \neq x_{i-1}$ の場合はルール 1 が s' に適用され、矛盾する。それ故に、$i = j$ または $i \neq j$ で s_{-i} は ς_W 整合的でない、のいずれかとなる。前者が正しければ、ルール 1 が s' に適用され、矛盾する。後者が正しければ、$s_i^t = (z_i^t, A_i^t, B_i^t, n_i^t)$ を次のように与える：$z_i^t = z^t, A_{i+1} \neq B_i^t, \mathrm{mod}(n_i^t + \sum_{k \neq i} n_k) = i$, これ以外は任意。するとルール 2 の適用により $z^t = g(s_i^t, s_{-i})$ となり、所望の結果を得る。

ケース 2-ii：どの主体 j に関しても、s_{-j} が ς_W 整合的でない

$s_i^t = (z_i^t, A_i^t, B_i^t, n_i^t)$ を次のように与える：$z_i^t = z^t, A_{i+1} \neq B_i^t, \mathrm{mod}(n_i^t + \sum_{k \neq i} n_k) = i$, これ以外は任意。すると (s_i^t, s_{-i}) はルール 2 の適用を受け、$z^t = g(s_i^t, s_{-i})$ とな

り、所望の結果を得る。以上で全ての証明が完了した。■

第 4 章

市場の公理系（その 2）

4.1　序論

本章ではワルラスルールのもう一つの公理化を行なう。本章の内容は三つのパートに分けられる。第 1 のパートは 4.2，4.3，4.4 節、第 2 のパートは 4.5，4.6 節、そして 4.7 節が第 3 のパートである。第 1 のパートでは前章までのモデルを以下のように変更する。

（1）仮定の緩和

アロウデブリュー経済 (Debrue 1959) とほぼ同じ仮定を採用する。まず生産を導入する。前節では交換経済を扱い、生産は取り扱わなかった。また消費者の選好（及び消費集合）に関する仮定を緩める。選好の微分可能性や境界条件などは取り払われる。

（2）定義域の変更

前節まではルールの変数は主体の持つ選好プロファイルのみであった。ここでは選好だけではなく、主体の持つ消費集合も可変である、とする。

ここでは n 人の主体（消費者）が存在する。彼らは l 種類の私的財の分配に関して関心を抱き、それは彼らの選好に表現されている。彼らはまたこれら l 種類の私的財を当初いくらかずつ持っている。これが彼らの初期資産である。経済の生産技術は生産集合で与えられる。各主体はこの生産集合を分割保有しているものと想定する。各主体ごとに保有率は予め決められている。以上がここでの経済モデルである。選好、消費集合、生産集合等は Debrue 1959 にて均衡存在証明に使われた仮定を満たすとする。ここでは主体の消費集合とその上で定義される選好のみが変化するものと

する。

社会的選択ルール、簡潔にルールと呼ぶ、は任意の経済に対してその経済での実行可能資源配分の非空部分集合を対応させる写像として定義する。経済は各主体の持つ消費集合、その上で定義される選好、初期資産、生産集合と各主体のその保有率からなるリストのことである。ルールの定義域として 2 種類を考える。一つの定義域は、生産集合が収穫逓減であるが、消費集合は様々は形をとる経済が属さねばならない定義域である。もう一つは消費集合の形はどの経済でも同じに固定してよいが、生産集合は収穫一定しか認められない定義域である。我々は第 1 の定義域の場合、弱個人合理性、効用無差別性、一般化された単調性、及び完全個人合理性またはパレート最適性を満たす任意のルールは必ずワルラス配分全てをその像に含むことを示す。弱個人合理性と完全個人合理性は前章での個人合理性を生産を含む場合に定式化したバージョンである。効用無差別性とは二つの資源配分が各主体の受け取る効用のレベル（どの主体がどれくらいの効用を受け取るか）で評価する限り違いがないとき、片方をルールが選択する（選択しない）ならば、もう片方も選択する（選択しない）という要請である。一般化された単調性とは選好変化に対するルールの選択の規則性に関する要請である。ある資源配分 z をルールが選択していたとする。今主体の選好が変化したとする。しかしどの主体の z に対する序数的な意味での他の資源配分に対するランキングが劣化していないとき、その新しい選好の下でもルールは z を選択すべきである。これが一般化された単調性の概要である。ただしこの場合、主体の消費集合も変化することになる。これが「一般化された」という言葉の意味である。さてワルラスルールはこれらの公理を全て満足するので（定理 4.1)、以上からワルラスルールはこれら二つの公理系を満たすルールの中で最も「細かい」ルールであることになる（定理 4.2)。また第 2 の定義域では以上二つの命題が一般化された単調性を単調性にまで強めて成り立つことが示せる（定理 4.3)。ここで単調性とは消費集合の変化を認めない場合でのバージョンである。これは前章でのマスキン単調性よりも弱い。

さて二つの定義域であるが、最初の定義域で各経済での消費集合を全て同一にする（あるいは同じことであるが、第 2 の定義域で生産集合の収穫逓減を認める）という前提では定理 4.2 及び 4.3 は成り立たない。その反例を第 4.4 節にて提出する。この反例は Gevers(1986) の主要結果に対する反例でもある。先の二つの公理系を満足するルールで、ワルラスルールがそのルールよりも細かくはなりえないものが存在する

のである。彼の結果を訂正したのが先の定理 4.2，4.3 である。

論文の第 2 のパート、第 4.5，4.6 節、の概要を述べる。ここではワルラスルールの公理系を与える。いままでに紹介した公理だけではワルラスルールを特徴付けることは無理である。例えば任意の経済に対してコア配分全ての集合を対応させるルールを考えよう。このルール、コアルールと呼ぶ、は先の二つの公理系を満たすが、ワルラスルールではない。

我々の着想はコアの極限定理 (Debrue and Scarf 1963) を適用してワルラスルールを公理化しようとするものである。我々は先の二つの定義域を更に拡張する。オリジナルな経済に加え、Debrue and Scarf 流のレプリカ経済も全てその定義域に含めるのである。この定義域上でルールに先の効用無差別性と（一般化された）単調性に加え、新たに二つの公理を加える。（先の定義域は 2 種類あったから、その各々の拡張ということで、ここでも定義域は 2 種類である。）一つはコア特性である。これはルールが選ぶ資源配分は常にコアに入らなければならないことを要求する。もう一つは局所決定性である。これは異なった人口規模を持つ経済の間での選択の整合性に関する要求である。レプリカされた経済においてルールが選ぶ資源配分はオリジナルな経済の情報のみに基づいて決めるべきである、というのがその主張内容である。例えばオリジナル経済でルールが選ぶ資源配分をレプリカした資源配分をルールはレプリカした経済にて選択しなければならない。また逆にレプリカした経済にてルールが選んでいる資源配分と効用から見て同一な（どのタイプの主体がどの効用を受け取っているかの観点から見て同一な）資源配分をオリジナルな経済にてルールは選択すべきである。以上が局所決定性のおおよその趣旨である。この公理の他にレプリカに対する安定性 (Thomson 1988) 及び優加法性という二つの公理を考える。三つの公理は全て同値となることも証明する。レプリカに対する安定性は局所決定性を簡略化した形を持った公理であり、オリジナル経済でルールがある資源配分を選ぶとき、ルールはそのレプリカした資源配分がレプリカ経済にて選ばなければならないことを主張する。優加法性はレプリカして新しい主体が経済に参入したとき、以前から要る主体の厚生水準が劣化しないようにルールは資源配分の選択を行なうべきであることを要求している。我々はワルラスルールがコア特性、効用無差別性、（一般化された）単調性、及び局所決定性（またはレプリカに対する安定性か優加法性）を満たす唯一つのルールであることを証明する（定理 4.5)。これら公理の独立性は第 4.6 節にて与える。

定理 4.5 の証明ではコアの極限定理が利用される。この定理では全てのレプリカ経済におけるコアがワルラス配分集合であることを主張しているのだが、このワルラス配分集合の性質を公理化したのが局所決定性の他三つの公理なのである。

最後のパート、第 4.7 節、では主体の集合が連続体であるときのワルラスルールの公理化を述べる。ただしモデルは再び交換経済に戻る。ここではコアとワルラス配分集合の同値性定理 (Aumann 1964, Hildenbrand 1974) を援用して、コア特性、効用無差別性、単調性の三つを満たすルールはワルラスルール唯一つであることを証明する（定理 4.7)。局所決定性以下の公理は必要ないのである。

なお本章の内容は Nagahisa(1992,1994) に拠っている。

4.2　記号と定義

$L = \{1, 2, ..., l\}$ は私的財の集合、$N = \{1, 2, ..., n\}$ は消費者の集合である。ここでは消費者と呼ばず経済主体、簡潔に主体と呼ぶことにする。この経済には生産技術があり、生産活動も行なわれている。一つの生産計画と主体 $i (i = 1, ..., n)$ の消費計画を $y \in R^l, x_i \in R^l$ と記法する。(経済全体での) 生産集合と主体 i の消費集合は各々 Y と X_i で記法する。各主体 i は X_i 上の効用関数 u_i と初期資産 $\omega_i \in R^l$ 及び生産集合 $\theta_i Y$ を持っている。ここで全ての i に関して、$0 \leq \theta_i \leq 1, \sum_{i \in N} \theta_i = 1$ である。つまり、各主体 i は生産集合 Y の θ_i 分を保有していると想定する。後でわかるが、我々は収穫一定ないし逓減の生産技術を仮定する。従ってこのような想定は全く問題ない。明らかに $\sum_{i \in N} \theta_i Y = Y$ である。

$X = (X_i)_{i \in N}, u = (u_i)_{i \in N}, \omega = (\omega_i)_{i \in N}, \theta = (\theta_i)_{i \in N}$ と記法しよう。経済 e とはリスト $e := (X, u, \omega, \theta)$ のことである。$x = (x_i)_{i \in N}$ としよう。e における資源配分 z とはリスト $z = (x, y)$ のことである。ここで x は各主体の消費計画のリスト、y は生産計画である。資源配分 $z = (x, y)$ が e において実行可能であるとは、$x_i \in X_i$(全ての $i \in N$ に関して $), y \in Y, \sum_{i \in N} x_i \leq y + \sum_{i \in N} \omega_i$ であることをいう。e における実行可能資源配分全ての集合を Z^e とおく。文脈から e が明らかなときは、Z と記法する。経済 e が標準的であるとは、以下の諸条件が成り立つことをいう。

定義 4.1 任意の $i \in N$ に関して、

(1) X_i は閉、凸、及び下に有界である；

(2) u_i は連続・準凹である；

(3) u_i は飽和点を持たない；

(4) $\omega_i \in int.X_i$；

(5) Y は閉凸集合、$Y \cap (-Y) = \{0\}$, 及び $Y \cap R^l_+ = \{0\}$.

これらの仮定の説明は例えば Debreu(1959) などを参照にされたい。

経済 e は線形であるとは、それが標準的であり、かつ全ての主体が同一の線形の効用関数を持つときをいう：すなわちある $p \in \Delta^l$ が存在して、全ての $i \in N$ と $x_i \in X_i$ に関して、$u_i(x_i) = px_i$ である。E^S と E^L をそれぞれ標準的な経済全ての集合、線形な経済全ての集合と呼ぶ。条件 (4) は 4.5 節でのコアの極限定理を使う際にのみ必要である。補題 4.5 と定理 4.5 を除き、より弱い条件：全ての i に関し $\omega_i \in X_i$、で十分である。経済の非空な集合 E を定義域という。この上で社会的選択ルールが機能するわけである。二つのタイプの定義域、$(D-1), (D-2)$, をここでは扱う。$e = (X, u, \omega, \theta), e^* = (X^*, u^*, \omega^*, \theta^*)$ を任意の経済とする。

定義 4.2 (二つの定義域)

(D-1)

(1) E は標準的な経済からなる族である；

(2) 任意の $e \in E$ と $e^* \in E^L$ に関して、もし全ての i に関して $X_i \subset X_i^*, \omega = \omega^*, \theta = \theta^*, Y = Y^*$ であれば、$e^* \in E$ である。

(D-2)

(1) E は標準的な経済からなる族である；

(2) 任意の $e, e^* \in E$ に関して、$X = X^*, \omega = \omega^*, \theta = \theta^*, Y = Y^*$；

(3) 任意の $e \in E$ と $e^* \in E^L$ に関して、$X = X^*, \omega = \omega^*, \theta = \theta^*, Y = Y^*$ ならば $e^* \in E$;

(4) 任意の $e \in E$ に関して、Y は収穫一定である。

どちらの定義域もアロウ・デブリュ-経済からなる族である。(D-1) の (2) 及び (D-2) の (3) は線形経済のある部分集合が定義域に含まれることを要求している。この仮定は補題 4.1、4.2 及び定理 4.2, 4.3 で重要な役割を果たす。社会的選択ルール f は定義域内の各経済 $e \in E$ に対して、その経済での実行可能な資源配分のある非空部分集合 $f(e) \subset Z^e$ を対応させる写像である。

定義域 (D-1) では規模に関する収穫逓減を扱うことができる。しかし、この定義域は少し広すぎる印象を与えるだろう。(D-1) の (2) がその理由である。これによると各主体は閉・凸・下に有界でありさえすればいかなる消費集合をも持ちうることになるからである。定義域 (D-2) はそのような欠陥はない。各主体の消費集合 (そして初期資産と生産集合も) はどの経済でも同じである。個人的選好のみが社会的選択ルールの変数である。その意味で、この定義域は社会的選択理論では標準的といえる。しかし、今度は規模に関して厳密に収穫逓減のケースを扱えなくなる。(D-2) から規模に関する収穫一定の仮定を外すことができればベストではある。しかし後で示すとおり、これは不可能なのである。

定義 4.3 経済 e におけるワルラス配分は以下の条件を満たす実行可能配分 $z^* = (x^*, y^*) \in Z$ である：

ある価格ベクトル $p \in \Delta^l$ が存在して、

(1)y^* は py を Y 上にて最大にし、

(2) 全ての $i \in N$ に関して x_i^* は $u_i(x_i^*)$ を制約 $px_i \leq p\omega_i + \theta_i py^*, x_i \in X_i$ の下で最大にしており、かつ

(3)$p(\sum_{i \in N}(x_i^* - \omega_i) - y) = 0.$

ワルラスルール f_W とは任意の経済 $e \in E$ に対して e でのワルラス配分全ての集合を対応させる写像である。(D-1),(D-2) どちらの定義域でもワルラスルールは定義できる。

留意点 4.1　ワルラスルールでは主体 i の生産集合の保有率 θ_i は利潤分配率と見做される。ワルラスルールの公理化はこのような解釈の下で与えることになる。

さてワルラスルールの公理化のための公理系を与えよう。経済 e でのパレート最適な資源配分全ての集合を $PO(e)$ とおく。$z \in PO(e)$ であるのは、ある資源配分 $z' \in Z$ で、全ての主体 i に関して $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ であり、かつ少なくとも一人の主体に関してはこの不等式が厳密な不等号で成り立つような z' が存在しないときをいう。明らかに定義域 (D-1),(D-2) のもとではどの e でも $PO(e) \neq \emptyset$ である。

ルール f がパレート最適を満たすとは、任意の $e \in E$ に対して、$f(e) \subset PO(e)$ が成り立つことをいう。

経済 e を所与とする。e における配分 $z \in Z$ が個人合理的 (配分) であるとは全ての主体 $i \in N$ に関して $u_i(x_i) \geq u_i(\omega_i)$ が成り立つときをいう。経済 e における個人合理的配分全ての集合を $IR(e)$ とする。ルール f が個人合理性を満たすとは、任意の $e \in E$ に関して $f(e) \subset IR(e)$ であることをいう。ここで $z = (x, y)$ である。以下も同じである。

e における配分 z が弱個人合理的 (配分) であるとは全ての主体 $i \in N$ に関して $u_i(x_i) \geq u_i(\omega_i + \theta_i y)$ if $\omega_i + \theta_i y \in X_i$ が成り立つときをいう。経済 e における弱個人合理的配分全ての集合を $WIR(e)$ とする。ルール f が弱個人合理性を満たすとは、任意の $e \in E$ に関して $f(e) \subset WIR(e)$ であることをいう。

e における配分 z が完全個人合理的 (配分) であるとは全ての主体 $i \in N$ に関して $u_i(x_i) \geq \max\{u_i(\omega_i + \theta_i y) : \omega_i + \theta_i y \in X_i, y \in Y\}$ が成り立つときをいう。経済 e における完全個人合理的配分全ての集合を $FIR(e)$ とする。ルール f が完全個人合理性を満たすとは、任意の $e \in E$ に関して $f(e) \subset FIR(e)$ であることをいう。

各 e に関して $FIR(e)$ が非空であることは簡単に確認できる：

集合 $C_i := \{x_i \in X_i : x_i \leq \omega_i + \theta_i y, y \in Y\}$ を考えよう。C_i は実行可能資源配分全ての集合 Z から i の消費集合への射影である。Debrue(1959 5.4(2)) より、この集合はコンパクトとなる。これより所望の結果を得る。

これら三つの個人合理性に関する公理は各主体に社会的選択ルールの受け入れの誘因付けを与えている。仮に弱個人合理性が侵犯されれば、少なくとも一人の主体が $z \in f(e)$ に対して $\omega_i + \theta_i y$ の方がよいと抗議していることになる。仮に完全個人合理性が侵犯されれば、少なくとも一人の主体はこの社会を去り、一人で自給自足するほうがよいことになる。

ルール f が効用無差別性を満たすとは、任意の $e \in E$ と任意の $z^1, z^2 \in Z$ に関して、もし $u_i(x_i^1) = u_i(x_i^2)$ が全ての主体に関して成り立つならば、$z^1 \in f(e) \Longleftrightarrow z^2 \in f(e)$ であることをいう。ここで $z^1 = (x^1, y^1), z^2 = (x^2, y^2)$ である。効用無差別性は社会的選択に関するある種の情報節約公理である。社会的選択に必要な情報は各主体の受け取る効用水準のみであり、それ以外の情報は必要ないことを意味している。

三種類の単調性に関する公理を導入する。

二つの経済 $e^1 = (X^1, u^1, \omega^1, \theta^1), e^2 = (X^2, u^2, \omega^2, \theta^2)$ を所与とする。$Z^j(j =$

$1, 2)$ は各々の経済での実行可能資源配分全ての集合とする。

ルール f が一般化された単調性を満たすとは、任意の経済 $e^1, e^2 \in E$ に関して、

$X_i^1 \supset X_i^2$(全ての $i \in N$ に関して $), \theta^1 = \theta^2, \omega^1 = \omega^2, Y^1 = Y^2$ かつ [全ての $i \in N$ と $x_i \in X_i^2$ に関して、$u_i^1(x_i^1) \geq u_i^1(x_i) \Longrightarrow u_i^2(x_i^1) \geq u_i^2(x_i)$] ならば、$z^1 \in f(e^1) \cap Z^2 \Longrightarrow z^1 \in f(e^2)$ が成り立つことをいう。

ルール f が単調性を満たすとは、任意の経済 $e^1, e^2 \in E$ に関して、

$X^1 = X^2, \theta^1 = \theta^2, \omega^1 = \omega^2, Y^1 = Y^2$ かつ [全ての $i \in N$ と $x_i \in X_i^2$ に関して、$u_i^1(x_i^1) \geq u_i^1(x_i) \Longrightarrow u_i^2(x_i^1) \geq u_i^2(x_i)$] ならば、$z^1 \in f(e^1) \Longrightarrow z^1 \in f(e^2)$ が成り立つことをいう。

一般化された単調性は単調性よりも弱い公理である。単調性は Gevers(1986) によって用いられた。一般化された単調性は Nagahisa(1994) で提出された。この公理の意味は次のような二つの極端なケースを考えるとわかりやすい。第 1 のケースは、各主体の消費集合が二つの経済 e^1 と e^2 にの間で全く同一である場合である。このケースではこの公理は単調性と同じになる。もう一つの極端なケースは各主体の効用関数 u_i^1, u_i^2 が X_i^2 上で等しい場合である。このケースでは一般化された単調性はナッシュの無関連対象からの独立性 (Kalai and Smolodinsky 1975, Nash 1950, Thomson 1981) と同様な考えに基づいて定式化できる。それは以下のようになろう：任意の $e^1, e^2 \in E$ に関して、$Z^1 \supset Z^2, z^1 \in f(e^1)$ ならば、$z^1 \in f(e^2)$。ここで包含関係 $Z^1 \supset Z^2$ は各主体の消費集合の変化を通じてのみ起こることに留意されたい[*1]。

この二つの単調性公理と Maskin (1999) の単調性の関係を論じよう。各主体 $i \in N$ に関して、$\widehat{X_i^j}$ は Z^j の X_i^j への射影とする。我々の単調性の定義で X_i^2 を $\widehat{X_i^2}$ に置き換えれば、マスキンの単調性の定義が得られる。明らかにマスキンの単調性は我々の単調性を意味する。Hurwicz, Maskin and Postlewaite (1982) で示されているように、ワルラスルールは端点解でマスキンの単調性を満たさなくなる。しかし、任意の定義域 $E \subset E^S$ 上にてワルラスルールは一般化された単調性を満たす：任意の経済 $e^1, e^2 \in E$ と資源配分 $z^1 \in Z^1$ をとる。この 3 者の間で一般化された単調性の前提が成り立っているとしよう。p は $z^1 \in f_W(e^1)$ に対応する価格ベクトルとする。いま仮

[*1] 尤もナッシュ交渉問題との関係は十分に明らかとはいえない。というのも社会的選択ルールは資源配分の選択問題であるのに対し、ナッシュ交渉問題は効用ヴェクトルの選択問題だからである。資源配分問題としてナッシュ交渉問題を考察したものとして Binmore (1986c),Roemer (1988) などがある。

に $z^1 \notin f_W(e^2)$ としよう。経済 e^1, e^2 の構成及び $z^1 \in Z^2$ より、ある主体 $i \in N$ とある $x_i \in X_i^2$ が存在して、$u_i^2(x_i) > u_i^2(x_i^1)$ かつ $px_i \leq p\omega_i + \theta_i py^1$ が成り立つ。しかし $x_i \in X_i^1$ であることを考えると、これは $z^1 \in f_W(e^1)$ に反する結果である。(最後のステップの証明がマスキンの単調性では成り立たないことに留意されたい。)

定義域 E が $E \subset E^S$ を満たし、主体の数が 3 以上であれば、マスキンの単調性はナッシュ誘導可能性と同値である。ナッシュ誘導可能性とは社会的選択ルールがあるゲーム形式でのナッシュ均衡として達成される可能性のことである。より詳しくは前章第 3. 4 節を参照されたい。また同値性に関しては例えば Saijo(1988), Williams (1986) などを参照されたい。以上のことから、我々の単調性はマスキンの単調性よりも弱い。ただし両者は社会的選択ルールの値が常に内点解であるような定義域上では同値である[*2]。

一般化された単調性とマスキンの単調性の間には論理的包含関係は成立しない。本節の公理は一般化された単調性を除き Gevers(1986) にあるのと同じである。

4.3　ワルラスルールの諸性質

定理 4.1 定義域 $E \subset E^S$ を持つワルラスルールはパレート最適性、完全個人合理性、効用無差別性、及び一般化された単調性を満足する。

証明. 一般化された単調性に関しては前節にて証明済みである。パレート最適性の成立もよく知られた事実である。

完全個人合理性：$z \in f_w(e)$ を任意にとる。$p \in \Delta^l$ を z に対応する価格ベクトルとしよう。仮にある主体 i に関して、ある $y' \in Y$ で $u_i(\omega_i + \theta_i y') > u_i(x_i)$ であったとしよう (背理法)。ここで x_i は z での i の消費ベクトルである。するとワルラス配分の定義より、$p\omega_i + \theta_i py' > px_i = p\omega_i + \theta_i py$ である。ここで y は z での生産ベクトルである。$\theta_i = 0$ ではこの不等式は成り立たないから、$\theta_i > 0$ である。よって $py' > py$ が帰結するが、これは y が p での利潤を最大化していることに矛盾する。

効用無差別性：$z^1, z^2 \in f_w(e)$ を効用無差別性の前提が成り立つようにとる。$z^1 = ((x_i^1)_{i \in N}, y^1), z^2 = ((x_i^2)_{i \in N}, y^2)$ と記法する。$p \in \Delta^l$ は z^1 に対応する価格

[*2] これについては Nagahisa 1991 を参照。また Schmeidler (1980,1983) ではマスキンの単調性と我々の単調性が同値になる定義域上でワルラスルールをナッシュ誘導可能にするゲームを考察している。

ベクトルとしよう。このとき p は z^2 に対する均衡市場価格でもあることを示せばよい。いま主体 i に対して、$px_i^2 < p\omega_i + \theta_i py^2$ であったとしよう。すると選好の局所非飽和性を考えると、x_i で $px_i < p\omega_i + \theta_i py^2$ かつ $u_i(x_i) > u_i(x_i^2) = u_i(x_i^1)$ となるものが存在して、$z^1 \in f_w(e)$ に矛盾してしまう。そこで全ての i に関して、$px_i^2 \geq p\omega_i + \theta_i py^2$ である。ここである i に関しては不等号が $>$ で成り立つとすると、$p\sum_{i\in N}\left(x_i^2 - \omega_i\right) > py^2$ となる。しかしこれは $z^2 \in Z$ であることに矛盾する。以上で全ての i に関して $px_i^2 = p\omega_i + \theta_i py^2$ であることがわかった。これより p が z^2 に対する均衡市場価格であることになる。■

この定理は定義域に関する仮定 (2) と (3) にて達成されたことに留意されたい。また選好に関する仮定で使われたのは僅かに局所非飽和性のみである。

次の補題は線形経済に関するルールの性質を述べている。

補題 4.1 (D-1) を仮定する。ルール f は弱個人合理性、効用無差別性、一般化された単調性を満たし、かつ完全個人合理性またはパレート最適性のいずれかを満たすとしよう。任意の $p \in \Delta^l$ に関して、集合 $Z_p = \{z' \in Z : px'_i = p\omega_i + \theta_i py'$ (全ての i に関して)、ここで y' は Y 上で py を最大にしている $\}$ を定義する。このとき、任意の $e \in E \cap E^L$ に関して、e にて全ての i に関して効用関数が $u_i(x_i) = px_i$ の形をしているならば、$Z_p \subset f(e)$ である。

証明. $\widehat{Y}$ を Z から Y を含む R^l 上への射影とする。すなわち $\widehat{Y} := \{y \in Y :$ ある $z = (x, y)$ が存在して $z \in Z\}$ である。各 i に関して集合 $\{\omega_i + \theta_i y : y \in \widehat{Y}\}$ はコンパクトより、ある $\lambda \in R^l$ で、全ての i に関し、$X_i \cup \{\omega_i + \theta_i y : y \in \widehat{Y}\} \subset \{x \in R^l : x_k \geq \lambda_k$ (全ての $k \in L$ に関して)$\}$ が成り立つ。そこで $e^* \in E \cap E^L$ を次のように構成する：

全ての i に関して、

$X_i^* = \{x \in R^l : x_k \geq \lambda_k$ (全ての $k \in L$ に関して)$\}$;

$u_i^*(x_i) = px_i$ (全ての $x_i \in X_i^*$ に関して);

$\omega_i^* = \omega_i, \theta_i^* = \theta_i, Y^* = Y.$

一般化された単調性より、$f(e^*) = Z_p$ を証明すればよい。効用無差別性と Z_p の定義から、$f(e^*) \subset Z_p$ を示せば十分である。

区別して論じるべき二つのケースが存在する。

ケース 1：f が完全個人合理性を満たす場合

任意の $z^* \in f(e^*)$ を取る。完全個人合理性より、全ての i に関して、$px_i^* \geq p\omega_i + \theta_i py'$ が成り立つ。

ここで $\omega_i + \theta_i y' \in X_i^*$ を使っていることに留意。$z^* \in Z$ と $py' \geq py^*$ より、全ての i に関して

$px_i^* = p\omega_i + \theta_i py^*$ 及び $py' = py^*$ を得る。これらより、$z^* \in Z_p$ である。

ケース 2：f がパレート最適性を満たす場合

任意の $z^* \in f(e^*)$ を取る。弱個人合理性より、全ての i に関して、$px_i^* \geq p\omega_i + \theta_i py^*$ が成り立つ。

ここで $\omega_i + \theta_i y^* \in X_i^*$ を使っていることに留意。これと $z^* \in Z$ より、全ての i に関して、$px_i^* = p\omega_i + \theta_i py^*$ が成り立つ。仮に $py' > py^*$ であれば、パレート最適性より $z^* \notin f(e^*)$ となって矛盾する。故に $z^* \in Z_p$ が従う。■

定理 4.2 (D-1) を仮定する。ルール f は弱個人合理性、効用無差別性、一般化された単調性を満たし、かつ完全個人合理性またはパレート最適性のいずれかを満たすとしよう。このとき

$f_W(e) \subset f(e)$ (全ての $e \in E$ に関して)

が成り立つ。すなわちワルラスルールはこれら二つのルールの族の中で最も細かいルールである。

証明. 任意の $z^* \in f_W(e)$ を取る。ここで $e = (X, u, \omega, \theta, Y)$ とする。ワルラス配分の定義より、各 i に関して、$px_i^* = p\omega_i + \theta_i py^*$ が成り立つ。ここで $p \in \Delta^l$ は z^* に対応する均衡市場価格であり、y^* は z^* での生産ベクトルである。ここで経済 $e^* \in E$ を補題 4.1 での証明でのと同じように構成する。すると補題 4.1 より、$z^* \in f(e^*)$ である。またワルラス配分の定義より、全ての i と全ての $x_i \in X_i$ に関して、$px_i^* \geq px_i \Longrightarrow u_i(x_i^*) \geq u_i(x_i)$ が成り立つ。故に一般化された単調性より $z^* \in f(e)$ となり、定理の証明は完了する。■

生産技術が規模に関して収穫一定の場合、定義域をより狭くすることができる。つまり定義域制限を (D-1) から (D-2) へ変えることができる。その際に一般化された単調性は単調性までに収縮する。次の補題は補題 4.1 に対応している。

補題 4.2 (D-2) を仮定する。社会的選択ルール f は個人合理性と効用無差別性を満

たすとする。任意の $e \in E^L$ に関して、もしある $y^* \in Y$ で py^* が py を Y 上で最大にしているならば、$f(e) = Z_p$ である。ただしここで Z_p は補題 1 でのそれと同じである。よって $p \in \Delta^l$ は線形経済 e の効用関数を定義するベクトルである：つまり $u_i(x_i) = px_i$ の p のことである。

証明. $py^* = 0$ であることに留意しよう。故に Z_p は非空となる。なぜなら $(0, (\omega_i)_{i \in N}) \in Z_p$ となるからである。効用無差別性を考慮すれば $f(e) \subset Z_p$ を示せば十分である。

$z \in f(e)$ を任意にとる。$z = (x, y)$ としよう。個人合理性より、全ての i に関して、

（1）$px_i \geq p\omega_i$ となる。

更に $py^* = 0$ であったことから、$py \leq 0$ である。$z \in Z$ であるから、

（2）　$p \sum_{i \in N} x_i \leq p \sum_{i \in N} \omega_i + py \leq p \sum_{i \in N} \omega_i + py^* \leq p \sum_{i \in N} \omega_i$

をうる。(1)、(2) より、全ての i に関して $px_i = p\omega_i$ である。ここで $py < 0$ であったとすると、$p \sum_{i \in N} x_i > p \sum_{i \in N} \omega_i + py$ を得るが、これは $z \in Z$ に矛盾する。よって $py = 0$ となる。以上から $z \in Z_p$ が従う。■

定理 4.3 (D-2) を仮定する。ルール f は個人合理性、効用無差別性、単調性を満たすとしよう。このとき $f_W(e) \subset f(e)$ (全ての $e \in E$ に関して) が成り立つ。

すなわちワルラスルールはこのルールの族の中で最も細かいルールである。

証明. 証明は定理 4.2 と類似の方法で証明できる。読者に任せる。■

Hurwicz(1979) は類似の結果を証明した。(D-2) に類似した定義域を持つルールがパレート最適性、弱個人合理性、ある種の弱い連続性公理、及びナッシュ誘導可能性を満たせば、ワルラス配分は常にそのルールの像の中に入る。Thomson(1985) ではこの結果はより弱い公理系でも成り立つことを示している。Hurwicz の公理系の中でナッシュ誘導可能性をマスキンの単調性へ、そして連続性公理も更に弱い公理 (property β) に置き換えて証明したのである。これらの証明は定理 4.2 のそれと極めて類似している。実際個人合理性を満たし、定義域は (D-1) であるような任意のルールに関して、Thomson の property β は効用無差別性と同値であることが容易に示せる。(我々の) 単調性はナッシュ誘導可能性 (及びマスキンの単調性) と証明において同じ役割を担っている。

4.4　一つの反例

本節では定理 4.3 での収穫一定の仮定を外すことはできないことを示そう。正確には (D-2) における定義域制限の (4) を外すことは不可能であることを示そう。その理由は、端的にいえば完全個人合理性が各主体に保証する効用水準はワルラス配分にて保証されるそれより一般には低い、という事実に基づいている。（従ってこの事実は弱個人合理性にも当てはまる。）いまある経済 e でのワルラス配分を一つとり、$z^* = (x^*, y^*)$ としよう。対応する価格ヴェクトルを p とし、効用関数は全員 $u_i(x_i) = px_i$ (全ての $x_i \in X_i$ に関して) としよう。また消費集合も全員等しく、R^l_+ としよう。

さてこのワルラス配分では各主体の効用レベルは以下の関係を満たす。

$u_i(x_i^*) = px_i^* = p\omega_i + \theta_i py^* = max\{p\omega_i + \theta_i py : y \in Y\}$

一方、完全個人合理性を満たすだけならば $max\{p\omega_i + \theta_i py : \omega_i + \theta_i y \in Y\}$

以上の効用さえ保証すればよい。

明らかに

$max\{p\omega_i + \theta_i py : y \in Y\} \geq max\{p\omega_i + \theta_i py : \omega_i + \theta_i y \in Y\}$

であり、これが不等号が $>$ で成り立つ場合もありうることは容易に想像がつく。等号で成立さすためには py を Y 上で最大にしている y の中で $\omega_i + \theta_i y \in Y$ となるものがなければならないが、これは常に成り立つとはいえないからである。

完全個人合理性が要求する各主体の受け取る最低効用がワルラスルールが保証するそれよりも（場合によっては）低くてよいならば、ワルラスルール以外に定理 4.3 の諸公理を満たすルールはありそうである。例えば利潤分配率を少し変更し、そこでのワルラス配分を対応させるルールなどが候補に挙がる。これを正確に表現したのが次の反例である。

反例　$N = \{1, 2\}, L = \{1, 2\}$ とする。定義域 E は次のような経済 $e = (X, u, \omega, \theta, Y)$ の集合とする。

$X_i = R^2_+ \ (i = 1, 2);$

$\exists p \in \Delta^2, \forall i = 1, 2, \forall x_i \in X_i, u_i(x_i) = px_i;$

$Y = \{y = (y_1, y_2) : (y_1)^2 + y_2 \leq 0, y_1 \geq 0, y_2 \leq 0\} \cup R^2_-;$

$\omega_1 = \omega_2 = (1,1), \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}$

定義域 E は (D-2) での (1),(2),(3) を満たしている。保有率を $\pi = (\pi_1, \pi_2) \neq (\theta_1, \theta_2)$ としてみよう。経済 e_π を次のように定義する。効用関数と生産集合保有率を除き、他の要素は全て e のそれと等しいとする。効用関数は $u_i(x_i) = \frac{3}{4}x_{i1} + \frac{1}{4}x_{i2}(i = 1,2)$ とし、保有率は π のそれであるとしよう。社会的選択ルール f は次のように定義する。

任意の $e \in E$ に関して、

もしそこでの効用関数が経済 e_π のそれと同じならば、

$f(e) = f_w(e_\pi)$;

それ以外では

$f(e) = f_w(e)$.

このルールが効用無差別性、パレート最適性、単調性を満たすことは明らかである。単調性はトリビアルに成立している。明らかにこのルールはワルラスルールではない。π をうまく設定して完全個人合理性を満たし、かつある $e \in E$ に関しては $f_W(e) \subset f(e)$ が成り立たないようにできることを示そう。

効用関数が経済 e_π のそれと同じである経済 $e \in E$ を考える。完全個人合理性によって $i = 1,2$ に保証される効用水準を求めると、2 人共に $\frac{24+12\sqrt{2}}{32}$ となる。一方、各 $\pi = (\pi_1, \pi_2) \neq (\theta_1, \theta_2)$ に関して $f_w(e_\pi)$ が主体 $i = 1,2$ に保証する効用水準は $1 + \frac{9}{16}\pi_i$ である。

そこで $\pi = (\pi_1.\pi_2) \neq (\theta_1.\theta_2)$ を、$1 + \frac{9}{16}\pi_i \geq \frac{24+12\sqrt{2}}{32}(i = 1,2)$ と設定すればよいことになる。

この反例では次の仮定が成り立たっていない。

(G) 任意の $z^* \in Z$ と $i \in N$ に関して、$\omega_i + \theta_i y^* \in X_i$

仮にこの仮定が成り立てば、完全個人合理性が保証する効用水準とワルラスルールが保証するそれとの間の差は消滅する。仮定 (G) をおけば、定理 4.3 を収穫逓減の場合を含む形に拡張することは可能である。しかしこの仮定はかなり制約的に見える。なぜなら反例での経済環境は標準的経済理論の立場から見て極めて自然であるからである。仮定 (G) はこのような経済環境を排除してしまう。

この例は Gevers (1986 Theorem1-1,1-2) に対する反例でもある：これらの定理は

(D-2) の (1),(2),(3) を満たす定義域上でのルールは、それが弱個人合理性、効用無差別性、単調性を満たし、かつパレート最適性ないし完全個人合理性を満たすならば、任意の $e \in E$ に対して $f_W(e) \subset f(e)$ が成り立つことを主張している。しかし反例でみたとおり、これは正しくない。彼も証明において仮定（G) を無自覚的に仮定しているのである。Gevers の証明の検討の詳細は Nagahisa(1994) を参考にしていただきたい。

幸いにも我々は Gevers の定理をうまく再構成することに成功した。その方法は二つである。一つは補題 4.1、もう一つは補題 4.2 である。どちらも本節の最初で見た効用ギャップ、つまり完全個人合理性が要求する効用水準とワルラスルールが要求する効用水準の差、を消滅させる技法を用いている。補題 4.1 による方法は、ルールの定義域を広げるアイディアであった。正確には各主体の持つ消費集合が変わりうるという設定を用いた。この広げた定義域上で単調性がうまく機能するように改訂したのである。その改訂版が一般化された単調性である。完全合理性にまつわる問題点はオリジナルな経済 e が仮定 (G) を満たしていない点である。これに対して補題 4.1 の証明ではこの仮定を満たす新しい経済 e^* を巧妙に構成するところが要諦である。この経済に対して完全個人合理性またはパレート最適性プラス弱個人合理性を適用して $f(e^*) = Z_p$ を導き出し、二つの経済 e と e^* を比較して一般化された単調性を適用し、$f(e) \subset Z_p$ を得るのである。

第 2 の修正案は定義域を狭めることである。つまり、生産技術が規模に関して収穫一定の経済のみからなる定義域を考えることである。この修正が補題 4.2 である。任意の線形経済において、各主体の効用関数は $u_i(x_i) = px_i + \theta_i py$ となるが、右辺の第 2 項目は無視できる。なぜなら p での利潤最大化を達成する y に関しては $py = 0$ だからである。ここでは本節の最初で見た効用ギャップ、つまり完全個人合理性が要求する効用水準とワルラスルールが要求する効用水準の差は存在しない。

4.5　ワルラスルールの公理化：主体の数が可変の場合

定義 4.4 資源配分 $z = (x, y)$ が主体の提携 S によってブロックされるとは、彼らの消費ベクトルからなるリスト $(x_i^*)_{i \in S}$ で以下の条件を満たすものが存在することをいう：

(1) 任意の主体 i に関して $x_i^* \in X_i$,

(2) ある $y_S^* \in \sum_{i\in S}\theta_i Y$ が存在して $\sum_{i\in S} x_i^* \leq y_S^* + \sum_{i\in S}\omega_i$,

(3) 全ての $i \in S$ に関して $u_i(x_i^*) \geq u_i(x_i)$ であり、

かつ少なくとも一人の $i \in S$ に関しては厳密な不等号で成り立つ。

資源配分 z がコアに入るとは、それがいかなる提携によってもブロックされないときをいう[*3]。

経済 $e \in E$ におけるコアに入る配分全ての集合を $CO(e)$ と記法する。ルール f がコア特性を持つとは、任意の $e \in E$ に関して $f(e) \subset CO(e)$ であるときをいう。コアルール f_{CO} は任意の $e \in E$ に関して、$f_{CO}(e) := CO(e)$ と定義される。コア特性はパレート最適性と完全個人合理性を合わせたよりも強い公理である。しかしこれでもワルラスルールの公理化にはほど遠い。次の定理がこのことを示している。

定理 4.4 (D-1)(または (D-2)) を仮定する。コアルールはコア特性、効用無差別性、一般化された単調性 (または単調性) を満足する。コアルールはこれら三つを満たすルールの中で最も粗いルールであり、一方ワルラスルールは逆に最も細かいルールである。

証明. 定理の 2 番目の言明は第 1 の言明及び定理 4.2, 4.3 から直ちに従う。故に第 1 の言明を証明すればよい。コアルールが効用無差別性とコア特性を満たすことは自明である。一般化された単調性の成立を証明しよう (単調性も同様に示せる)。仮にそうでないとする (背理法)。二つの経済 $e^1, e^2 \in E$ があって、この二つが一般化された単調性の前提を満たすとしよう。特に $X_i^2 \subset X_i^1$(全ての i に関して) としておく。背理法の想定により、ある $z^1 \in f_{CO}(e^1)$ が存在して、

任意の $i \in N$ と $x_i \in X_i^2$ に関して、$u_i^1(x_i^1) \geq u_i^1(x_i) \Longrightarrow u_i^2(x_i^1) \geq u_i^2(x_i)$、

かつ $z^1 \notin f_{CO}(e^2)$ となる。

コアの定義より、$z^1 \notin f_{CO}(e^2)$ はある提携 S が存在して、彼らの消費ベクトルからなるリスト $(x_i^*)_{i\in S}$ で以下の条件を満たすものが存在することを意味する：

(1) 任意の主体 i に関して $x_i^* \in X_i$,

(2) ある $y_S^* \in \sum_{i\in S}\theta_i Y$ が存在して $\sum_{i\in S} x_i^* \leq y_S^* + \sum_{i\in S}\omega_i$,

(3) 全ての $i \in S$ に関して $u_i^2(x_i^*) \geq u_i^2(x_i^1)$ であり、かつ少なくとも一人の $i \in S$

[*3] ここでのコアの定義は Nikaido (1968) と同じである。

に関しては厳密な不等号で成り立つ。

この三つの最後の関係から

(4) 少なくとも一人の $i \in S$ に関して、$u_i^1(x_i^*) > u_i^1(x_i^1)$ かつ $u_i^2(x_i^*) > u_i^2(x_i^1)$

が成り立つ。

次に $u_i^1(x_i^*) < u_i^1(x_i^1)$ かつ $u_i^2(x_i^*) = u_i^2(x_i^1)$ となる $i \in S$ が存在したとしよう。すると効用関数が準凹・非飽和より、x_i^* の任意近傍内に $u_i^2(x_i^0) > u_i^2(x_i^1)$ となる x_i^0 を見つけることができる。他方 u_i^1 の連続性により、$u_i^1(x_i^0) < u_i^1(x_i^1)$ とすることができる。この二つの効用変化は一般化された単調性の前提に矛盾する。以上から次の事実が証明できたことになる。

(5) 任意の $i \in S$ に関して、$u_i^2(x_i^*) = u_i^2(x_i^1) \Longrightarrow u_i^1(x_i^*) \geq u_i^1(x_i^1)$

また (3) と一般化された単調性の前提より、

(6) 任意の $i \in S$ に関して、$u_i^2(x_i^*) > u_i^2(x_i^1) \Longrightarrow u_i^1(x_i^*) > u_i^1(x_i^1)$

(4)- (6) より提携 S は経済 e^1 において z^1 をブロックすることになり、矛盾である。 ■

ここで Nikaido(1968) に従ってレプリカ経済を定義する。この操作は Debreu and Scarf (1963) でのコアの極限定理を生産を伴う経済に拡張するために用いる。

定義 4.5 経済 e の r-レプリカ (経済)e^r とは r 個の部分経済 $e_q(q \in R = \{1, ..., r\})$ から構成される経済のことであり、各部分経済はオリジナルな経済 e と同一である。

$X_q = (X_{iq})_{i \in N}, u_q = (u_{iq})_{i \in N}, \omega_q = (\omega_{iq})_{i \in N}, \theta_q = (\theta_{iq})_{i \in N}$ と記法する。

部分経済とはリスト $(X_q, u_q, \omega_q, \theta_q, Y_q)$ で、各要素は $X_q = X, u_q = u, \omega_q = \omega, \theta_q = \theta, Y_q = Y$ を満たしている。

経済 e の r-レプリカ e^r は $e^r = \{e_q\}_{q \in R}$ と記法する。

各部分経済 $e_q(q \in R)$ での資源配分は $z_q = (x_q, y_q)$ と記法し、

r-レプリカでのそれは各部分経済での資源配分の列として

$z^r := \{z_q\}_{q \in R} = \{(x_1, y_1), ..., (x_r, y_r)\}$ と記法する。

資源配分 z^r が r-レプリカ e^r で実行可能であるとは、それが以下のような 3 条件を満足するときをいう：

各 $q \in R$ と各 $i \in N$ に関して、

(1) $y_q \in Y,$

(2) $x_{iq} \in X_i$,

(3) $\sum_{i \in N} \sum_{q \in R} x_{iq} \leq \sum_{q \in R} y_q + r \sum_{i \in N} \omega_i$.

r-レプリカでの実行可能資源配分全ての集合を Z^r とおく。

これから後 n 人の主体からなる経済をオリジナル経済と及ぶことにする。要するに前節の定義域 E に属する経済全てをそう呼ぶのである。オリジナル経済自身もレプリカと見做す。さてオリジナル経済の族 E を所与とする。社会的選択ルールの定義域 E^∞ とは集合 $\{e^r : e \in E, r \in \mathbb{N}\}$ のことである。ここで $\mathbb{N}$ は自然数の集合である。ここでは二つのタイプの定義域 E^∞ を考察する。

定義 4.6（拡張された二つの定義域 E^∞）

(D-1') E^∞ を定義するオリジナル経済の族 E は (D-1) を満たす。

(D-2') E^∞ を定義するオリジナル経済の族 E は (D-2) を満たす。

社会的選択ルールは各レプリカ e^r に対してそこでの実行可能資源配分集合 Z^r の非空部分集合を対応させる写像である。ワルラスルールも同様に再定義できる。前節での公理は全て新しい定義域上で再定義できる。ただし単調性とその一般化されたバージョンは注意が必要である。これらは同一回レプリカされた経済の間でのみ適用可能である。より正確には e^r と $e^{r'}$ で (一般化された) 単調性が適用可能となるには $r = r'$ であることが必要である。定理 4.1，4.2，4.3 は全て新しい定義域上でも成り立つ。これは自明である。

次の補題は Nikaido(1968 Lemma 17-3, p.290) である。ただしオリジナル経済で全ての主体が異なった消費をしているという条件を外した形にしている。証明は省略する。

補題 4.3 e は標準的であるとする。$e^r (r \geq 2)$ での資源配分として $z^r = \{z_q\}_{q \in R}, z_q = (x_q, y_q)$ をとる。いま $z^r \in CO(e^r)$ ならば、任意の $i \in N$ と任意の $q, q' \in R$ に関して $u_{iq}(x_{iq}) = u_{iq'}(x_{iq'})$ である。

つまりコアに入る配分では同じタイプの主体は同じ効用を受け取る。

この補題はコア特性を満たす任意のルールは対称性公理をも満たすことを意味する：つまり、少なくとも 2 回以上レプリカした経済では、同一な主体を同一に取り扱うのである。

次の定理がコアの極限定理である。証明は Nikaido(1968) を参照されたい。

コアの極限定理　経済 e は標準的であるとする。資源配分の無限列 $z^r = \{z_q\}_{q \in R}, z_q = (x_q, y_q) \in e_q (q = 1, 2, ...)$ をとる。各 $r = 1, 2, ...$ に関して、z^r がレプリカ e^r でのコアに入るならば、全ての z_q はオリジナル e でのワルラス配分である。

さて社会的選択ルールに関する三つの公理を導入する。いずれも経済での人口変化に対してルールがどう反応すべきかを記述した公理である。

ルール f がレプリカに対する安定性を満たすとは以下の条件が成り立つときをいう：$z \in f(e)$ としよう。このとき、任意の $e^r \in E^\infty$ に関して、資源配分 $z^r = \{z_q\}_{q \in R}; z_q = z$ (全ての $q \in R$ に関して) に対して、$z^r \in f(e^r)$ が成り立つ。

ルール f が局所決定的であるとは以下の 2 条件が成り立つときをいう：任意の $e, e^r \in E^\infty$ に関して

(1) 任意の $z^r \in f(e^r) : z^r = \{z_q\}_{q \in R} : z_q = (x_q, y_q)$ に関して、ある $z^* \in f(e)$, $z^* = (x^*, y^*)$ で任意の $i \in N$ と任意の $q \in R$ に関して $u_i(x_i^*) = u_i(x_{iq})$ となるものが存在する；

(2) 任意の $z^* \in f(e) : z^* = (x^*, y^*)$ に関して、ある $z^r \in f(e^r) : z^r = \{z_q\}_{q \in R} : z_q = (x_q, y_q)$

で、任意の $i \in N$ と任意の $q \in R$ に関して $u_i(x_i^*) = u_i(x_{iq})$ となるものが存在する。

ルール f が優加法性を満たすとは以下の 2 条件が成り立つときをいう：任意の $e^r, e^{r+1} \in E^\infty (r = 1, 2, ...)$ に関して、

(1) 任意の $z^{r+1} \in f(e^{r+1})$ に関して、ある $z^r \in f(e^r)$ で、任意の $i \in N$ と任意の $q \in R$ に関して $u_{iq}(x_{iq}^{r+1}) \geq u_{iq}(x_{iq}^r)$ となるものが存在する；

(2) 任意の $z^r \in f(e^r)$ に関して、ある $z^{r+1} \in f(e^{r+1})$ で、任意の $i \in N$ と任意の $q \in R$ に関して $u_{iq}(x_i^{r+1}) \geq u_{iq}(x_{iq}^r)$ となるものが存在する。

レプリカに対する安定性は Thomson(1988) にある。残る二つは Nagahisa(1994) で提出された。局所決定性が優加法性を満たすことは明らかである。これら 3 公理は社会的選択における情報効率性と人口可変な場合での集団的選択の安定性に関する要求である。局所決定性は前者に関する要請である。これは $r-$ レプリカでの社会的選択に関し、用いられる情報はオリジナル経済に関するものだけで十分であり、これ以

外の規模の経済に関する情報は必要ないことを意味している。

優加法性は後者に関する要求である。この公理は e^r に属する全ての主体が集合 $f(e^{r+1})$ を集合 $f(e^r)$ より以下述べる意味で選好していることを意味する：(1) 各資源配分 $z^{r+1} \in f(e^{r+1})$ に対して、ある資源配分 $z^r \in f(e^r)$ で、e^r に属するどの主体も z^r を z^{r+1} よりも厳密に好むことはない、そういう z^r が必ず一つは対応している；(2) 各資源配分 $z^r \in f(e^r)$ に対して、ある資源配分 $z^{r+1} \in f(e^{r+1})$ で、e^r に属するどの主体も z^r を z^{r+1} よりも厳密に好むことはない、そういう z^{r+1} が必ず一つは対応している。優加法性は自分達と同じタイプの主体が各タイプ一人ずつ経済に加わるとき、当初からこの経済に住んでいる主体の厚生が劣化することはあってはならないことを要求している。仮にこの公理が成立しないと、必ず新規参入者によって厚生を阻害される先住民が少なくとも一人は存在することになる。そのようなルールがこの社会にて全員一致で採択されることはないだろう。以上から、優加法性は主体の人口が可変である経済での集団的選択の安定性に関する公理として解釈できるのである。

この三つの中ではレプリカに対する安定性が最も簡潔な定義を持っている。しかしその経済学的意味となるとやや不鮮明である。人口が増えた場合での安定性であって、減った場合どうなるのかに関する記述がないからである。

以下で我々は三つの補題を証明したい。補題 4.4 はワルラスルールが局所決定性を持たす（故に優加法性も満たす）ことを証明する。補題 4.5 はルールがワルラスルールよりも細かくなるための（そのルールが満たす）公理系を与える。補題 4.6 は三つの公理の論理的包含関係である。補題 4.5 のみがコアの極限定理を使っていることに留意されたい。これら三つの補題の証明を通じ、定義域 E^∞ におけるオリジナル経済 E の集合は全て $E \subset E^S$ であり、これらのレプリカ全てから E^∞ は構成されているとする。

補題 4.4 ワルラスルールは局所決定性を満たす。

証明. ワルラスルールが局所決定性の (2) を満たしているのは自明である。(1) を証明しよう。任意の $z^r \in f_W(e^r)$ をとる。ここで $z^r = \{z_q\}_{q \in R} : z_q = (x_q, y_q)$ と記法する。さてオリジナル経済での資源配分 $z = (x, y)$ として、$x_i = \frac{1}{r}\sum_{q \in R} x_{iq}$ (全ての $i \in N$ に関して), $y = \frac{1}{r}\sum_{q \in R} y_q$ ととろう。ここで $p \in \Delta^l$ は z^r に対応する価格ベクトルとする。この p に関して y は py を最大にしていることは明らかで

ある。次に各タイプ $i \in N$ に関して、そのタイプの主体は z^r において同じ効用を享受している、つまり $u_i(x_{i1}) = \cdots = u_i(x_{ir})$ であることに留意すれば、効用関数の準凹性により $u_i(x_i) \geq u_i(x_{iq})$ である。ここで iq は $i1$ から ir までの誰でもよい。更に $px_i = \frac{1}{r}\sum_{q \in R} x_{iq} = \frac{1}{r}\sum_{q \in R}(p\omega_i + \theta_i p y_q) = p\omega_i + \theta_i p y = p\omega_i + \theta_i p y_q$ であるから、全ての i に関して $u_i(x_i) = u_i(x_{iq})$ である。すなわち x_i は制約条件 $x_i \in X_i, px_i \leq p\omega_i + \theta_i p y$ で効用関数 u_i を最大化している。最後に $z^r \in Z^r$ より、$\sum_{i \in N}\sum_{q \in R} x_{iq} \leq \sum_{q \in R} y_q + r\sum_{i \in N}\omega_i$ である。$rx_i = \sum_{q \in R} x_{iq}$(全ての $i \in N$ に関して), $ry = \sum_{q \in R} y_q$ を代入して整理すると、$\sum_{i \in N} x_i \leq y + \sum_{i \in N}\omega_i$ となり、$z \in Z$ を得る。更に各財 $h \in L$ に関しては、$\sum_{i \in N} x_{ih} < \sum_{i \in N}\omega_{ih} + y_h$ ならば $p_h = 0$ であることも容易に確認できる。以上から $z \in f_W(e)$ となり、所望の結果を得る。 ■

補題 4.5 ルール f はコア特性とレプリカに対する安定性を満たすとする。このとき任意の $e^r \in E^\infty$ に関して、$f(e^r) \subset f_W(e^r)$ である。

証明. Thomson(1988) の定理 1 と類似した方法で証明できる。

$z^r \in f(e^r)$ としよう。仮に $z^r \notin f_W(e^r)$ としてみよう（背理法)。するとコアの極限定理により、ある自然数 q があって、z^{rq} はレプリカ e^{rq} でのコアには入らない。(ここでは経済 e^r を q 回レプリカしている。これが e^{rq} である。これが我々の定義域 E^∞ に属していることは自明である。）従ってコア特性より $z^{rq} \notin f(e^{rq})$ である。レプリカからの安定性を考えると $z^r \in f(e^r)$ であってはならない。これは帰納法の前提に矛盾する。 ■

補題 4.6（1）ルール f はコア特性を満たすとする。このとき f が優加法性を満たすのは局所決定性を満たすとき、そしてそのときに限られる。

（2）ルール f はコア特性と効用無差別性を満たすとする。このとき f がレプリカに対する安定性を満たすのは局所決定性を満たすとき、そしてそのときに限られる。

証明. （1） 優加法性を満たすときに局所決定性を満たすことを示せば十分である。まず局所決定性の (1) を証明しよう。$r = 1$ は自明なので、$r \geq 2$ とする。任意の $z^r \in f(e^r)$ をとる。ここで $z^r = \{z_q\}_{q \in R}; z_q = (x_q, y_q)$ としよう。優加法性により、ある $z \in f(e)$ で、全ての $i \in N$ と全ての $q \in R$ に関して $u_i(x_{iq}) \geq u_i(x_i)$ となる。(正確にはここで優加法性を $r-1$ 回繰り返し適用している。）仮にある iq に

関しては $u_i(x_{iq}) > u_i(x_i)$ であったとしてみよう。新しい資源配分 $z^* = (x^*, y^*)$ を $x_i^* = \frac{1}{r}\sum_{q\in R} x_{iq}^*$ (任意の $i \in N$ に関して), $y^* = \frac{1}{r}\sum_{q\in R} y_q$ とおく。すると

$u_i(x_{iq}^r) \geq u_i(x_i)$ (任意の $i \in N$ に関して)、かつこれが少なくとも一人の i に関しては厳密な不等号で成り立ち；

$\sum_{i\in N} x_i^* \leq y^* + \sum_{i\in N} \omega_i$

が成り立つ。（これは補題 4.3、4.4 の証明で使った技法で証明できる。繰り返しは避けたい。）

すると z は e におけるコアに入らず、$z \in f(e)$ に矛盾する。以上から局所決定性の (i) が成り立つことがわかった。

次に局所決定性の (2) を示そう。$r = 1$ の場合は自明なので、$r > 1$ としよう。任意の $z \in f(e)$ をとる。優加法性より、ある $z^r \in f(e^r)$ が存在して、全ての主体 $i \in N$ に関して、$u_i(x_i^r) \geq u_i(x_i)$ が成り立つ。更に補題 4.3 より、$u_{iq}(x_{iq}^r) \geq u_{iq}(x_{iq})$ が全ての $i \in N$ と全ての $q \in R$ に関して成り立つ。ここである $i \in N$ に関して $u_{iq}(x_{iq}^r) > u_{iq}(x_{iq})$ であったとしよう（これは全ての $q \in R$ に関して成り立つ)。資源配分 $z^* = (x^*, y^*)$ を先と同じにとる。すると先の証明で示したごとく、この配分は e におけるコアに入らず、$z \in f(e)$ に矛盾する。この矛盾でもって (2) の証明は完了する。

（2）効用無差別性と局所決定性がレプリカに対する安定性を意味するのは自明である。レプリカに対する安定性が局所決定性を意味することを証明しよう。局所決定性の (2) は自明である。(1) を示そう。$z^r \in f(e^r)$ を任意にとる。補題 4.5 より z^r は e^r でのワルラス配分である。そこで補題 4.4 での証明で使ったのと同じ技法で、この $z^r \in f(e^r)$ に対して、ある $z \in f(e)$ を、それが局所決定性の (1) の諸前提を満たすように取れる。これをもって証明は完了する。 ■

さてワルラスルールの公理化定理を述べる段階に来た。証明は定理 4.1，4.2、及び補題 4.4，4.5，4.6 より直ちに従う。

定理 4.5 (D-1')(または (D-2')）を仮定する。ワルラスルールはコア特性、効用無差別性、一般化された単調性（または単調性）及び次に三つのうちいずれか一つを満足する唯一つのルールである。三つとはレプリカに対する安定性、局所決定性、優加法性のことである。

コアの極限定理を前提にすれば、定理 4.5 の公理系はそれほど驚くには値しない。まず極限定理により、レプリカを繰り返すとワルラス配分以外の配分はいつかはコアに入らなくなる。ルールが選択する資源配分が何回レプリカした経済でもコアに入らなければならないという要求（コア特性とレプリカに対する安定性）が、結局所定のルールをワルラスルールよりも細かくしてしまうのである。（一般化された）単調性、効用無差別性、そしてコア特性より定理 4.2 が適用でき、このルールはワルラスルールに他ならないことがいえるのである。

前章で扱ったように全員の資産を等しいとする場合、ワルラスルールの別の公理化も可能であることが Maniquet (1996) で示されている。本章での設定と類似した形式で人口が可変の状況では、平等資産の下でのワルラスルールは人口の減少及び増加に関する 2 つの安定性、パレート最適性、及び羨望公平性を満たす唯一つのルールであることが証明されている。ただしこのモデルでは人口の増減はレプリカによるものではない。

レプリカに対する安定性以下の三つの公理は異なった人口規模を持つ経済の間でのルールの選択の整合性に関する要求である。一方パレートなど、他の公理は同じ人口規模と人口構成を持つ経済の間での選択の整合性に関する要求である。この違いは明確に認識すべきである。ただしレプリカという手法が物語るように、人口規模の変化の仕方には制約がある。例えば全く違うタイプの主体が経済に参入してくることは許されない。このような制約を取り払うことができれば定理 4.5 はより価値あるものとなるだろう。この方面での貢献の一つに Thomson (1988) がある。人口規模ならず人口構成も変化も変化うるという想定下で、彼は平等資産下でのワルラスルール及びワルラスルールをこのような人口変化に対する選択の整合性公理とパレートなどの幾つかの伝統的な公理によって公理化した。ただし彼の場合、純粋交換経済を扱っている。

前章での Nagahisa and Suh (1995) の公理系とはどのような関係になるのかはいまのところ不明である。焦点となるのは Nagahisa and Suh での局所独立性とコアの極限定理の関係である。コアの極限定理は次のようにも解釈できる。「ワルラス配分以外資源配分でオリジナル経済ではどの提携によってもブロックされないものは勿論ある。しかしレプリカを繰り返し、主体の数を増やせば、必ずその配分をブロックする提携が出現する」という具合にである。これを裏返していえば、「任意提携に

よる物々交換経済でワルラスルールと同じ目標を達成しようとすれば、そのような大規模な提携による取引を行なわなければならない」ということでもある。これと Nagahisa and Suh の公理化定理の含意「ワルラスルールは限界代替率のみを知れば社会的選択を行なえる」は同じことを表と裏から言っているようにも見える。前者は取引の規模といった面でのワルラスルールの優位性、後者は情報節約面でのワルラスルールの優位性である。両者の関係を考察すれば、取引費用と情報の関係について価値ある考察ができるかもしれない。

コア特性は更に幾つかの公理に分解できる可能性もある。参考になるのは Peleg(1985) のコアの公理化定理である。彼はここで reduced game property（今日では consistency とも呼ばれる）を提唱し、この公理と他の伝統的な幾つかの公理、パレートなどによってコア（ルール）は公理化できることを示した。

4.6 公理の独立性

4 公理のうち一つでも欠けると定理 4.5 は成立しない。以下そのようなルールの例を提出する。なお以下ではルールの定義域は (D-1') または (D-2') を仮定する。

まず定理 4.4 よりコアルールがレプリカに対する安定性以外の公理を満たすは明らかである。

このルールがレプリカに対する安定性が欠けると定理 4.5 は成立しない例となっている。以下残る例を挙げる。

例 4.1（コア特性以外の全ての公理を満たすルール）

まず任意のオリジナル経済 $e \in E^\infty$ に関してはルール f を、$f(e) := PO(e) \cap FIR(e)$ と定義する。

次にレプリカ $e^r \in E^\infty (r \geq 2)$ に関しては、任意の $z^* \in f(e)$ に関して、

$Z^r(z^*) = \{z^r \in Z^r : z^r = \{z_q\}_{q \in R}$

$s.t. u_i(x^r_{iq}) = u_i(x^*_i), \forall i \in N, \forall q \in R\}.$

として、

$f(e) := \cup_{z^* \in f(e)} Z^r(z^*)$

と定義する。

このルールが効用無差別性、レプリカに対する安定性（そして局所決定性と優加法

性）を満たすことは自明である。（一般化された）単調性も定理 4.3 での証明の要領で確認できる。

例 4.2（(一般化された）単調性以外の全ての公理を満たすルール）

各オリジナル経済 $e \in E^{\infty}$ に関して、一つのワルラス配分 z^e をとる。ルール f を以下のように定義する。

任意のオリジナル経済 $e \in E^{\infty}$ に関して、

$f(e) := \{z = (x, y) \in Z : u_i(x_i) = u_i(x_i^e)$ (全ての $i \in N$ に関して)$\}$

それ以外のレプリカ経済 $e^r \in E^{\infty}$ に関して、

$f(e^r) := Z^r(z^e)$

このルールは（一般化された）単調性以外の全ての公理を満たしている。

例 4.3（効用無差別性以外の全ての公理を満たすルール）

ルール f を次のように定義する。

任意のオリジナル経済 $e \in E^{\infty}$ に関して、$f(e) := f_W(e)$;

それ以外のレプリカ経済 $e^r \in E^{\infty}$ に関して、

$f(e^r) := \cup_{z^* \in f_W(e)}\{z^r \in Z^r : z^r = \{z_q\}_{q \in R}\ s.t. z_q = z^*$ (全ての $q \in R$ に関して)$\}$.

このルールは効用無差別以外の全ての公理を満たしている。

4.7　主体の集合が連続体の場合

交換経済モデルを考察する。l 個の私的財が存在し、財空間を R^l としよう。主体（消費者）の集合を N とおく。$(N, \mathbb{N}, \nu)$ はアトムレス測度空間であり、$\nu(N) = 1$ とする。全ての主体は同一の消費集合 R^l_+ を持つとしよう。主体 i の消費ベクトルを $x(i) \in R^l_+$ とする。初期資産プロファイルとは各主体 i に対して、$\omega(i) \in R^l_{++}$ を対応させる可測写像 ω である。$\omega(i)$ を主体 i の初期資産という。$\int_N \omega d\nu$ は有限値であると仮定する。写像 ω は本節を通して一つに固定しておく。資源配分 x とは、殆ど全ての $i \in N$ に関して $x(i) \in R^l_+$ となるような可測写像 $x : N \longrightarrow R^l_+$ のことである。ここで $x(i) \in R^l_+$ は主体 i の消費ベクトルである。資源配分 x が実行可能であるとは $\int_N x d\nu = \int_N \omega d\nu$ が成り立つときをいう。実行可能資源配分全ての集合を Z

としよう。（効用）プロファイルとは写像 $u : N \times R^l_+ \longrightarrow R$ のことである。効用プロファイルには以下の諸仮定をおく：(1) 任意の $i \in N$ に関して、$u(i, \cdot)$ は連続・全ての財に関して狭義単調増加、(2) 任意の $x \in R^l_+$ に関して、$u(\cdot, x)$ は可測（写像）である。ここで $u(i, \cdot)$ は効用プロファイル u が主体 i に指定する効用関数である。この 2 条件を満たす効用プロファイル全ての集合を U とおく。以上の設定は測度論的一般均衡理論 (Hildenbrand 1974) の標準的モデルに従っている。

社会的選択ルール f とは各 $u \in U$ に関して、Z の非空部分集合を対応させる写像のことである。U をルール f の定義域と呼ぶ。資源配分 x がプロファイル u でのワルラス配分であるとは以下の 2 条件が成立するときをいう：(1)x は実行可能であり、(2) ある価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ が存在して、殆ど全ての $i \in N$ に関して、$x(i)$ は $u(i, \cdot)$ を制約式 $x \in R^l_+$ s.t.$px \leq p\omega$ のもとで最大化している。プロファイル u でのワルラス配分全ての集合を $W(u)$ とする。ワルラスルール f_W とは任意のプロファイル u に対して $f_W(u) = W(u)$ となる写像である。よく知られているように、本稿の条件の下ではワルラスルールは定義できる (Aumann 1966)。

提携 $S \in \mathbb{N}$ がプロファイル u において資源配分 x をブロックするとは、ある資源配分 y で、(1) 殆ど全ての $i \in S$ に関して、$u(i, y) > u(i, x)$ であり、(2) $\nu(S) > 0$ かつ $\int_S y d\nu = \int_S \omega d\nu$ となるものが存在するときをいう。資源配分 $x \in Z$ がプロファイル u におけるコアに入るとは、そのプロファイルにおいて x をブロックする提携が存在しないときをいう。u におけるコアを $CO(u)$ とおく。

さて社会的選択ルールに対し、以下の三つの公理を課す。ルール f がコア特性を満たすとは、任意の $u \in U$ に関して、$f(u) \subset CO(u)$ となるときをいう。ルール f が効用無差別性を満たすとは、任意の $u \in U$ と任意の $z, z' \in Z$ に関して、殆ど全ての $i \in N$ に関して、$u(i, z(i)) = u(i, z'(i))$ が成り立つとき、$z \in f(u) \Longleftrightarrow z \in f(u')$ となるときをいう。ルール f が単調性を満たすとは以下の条件が成り立つときをいう：プロファイル $u, u' \in U$ と資源配分 $z \in Z$ を任意にとる。殆ど全ての $i \in N$ と任意の $y \in R^l_+$ に関し $u(i, z(i)) \geq u(i, y) \Longrightarrow u'(i, z(i)) \geq u'(i, y)$ ならば、$z \in f(u) \Longrightarrow z \in f(u')$ が成り立つ。

これら三つは既に登場した公理を測度論的な枠組みで再定式化しただけである。

定理 4.6 ワルラスルールはコア特性、効用無差別性、及び単調性を満たす。ワルラ

スルール以外にこの三つを満たすルールは存在しない。

証明. ワルラスルールがコア特性を満たすことはよく知られている (Hildenbrand 1974)。

単調性：プロファイル u, u' と $z \in f_W(u)$ を単調性の想定が成り立つようにとる。仮に $z \notin f_W(u')$ としよう（背理法）。$z \in f_W(u)$ に対応する価格ベクトルを p としよう。すると背理法の想定により、ある提携 $C \in \mathbb{N}, \nu(C) > 0$ が存在して、殆ど全ての $i \in C$ に関して、ある $y_i \in R^l_+$ で $u'(y_i, i) > u'(z(i), i)$ かつ $py_i \leq p\omega(i)$ となるようにできる。u と u' の関係から $u(y_i, i) > u(z(i), i)$ が殆ど全ての $i \in C$ に関して成り立つことになり、これは $z \in f_W(u)$ に矛盾する。

効用無差別性：$u \in U$ と $z, z' \in Z$ を殆ど全ての $i \in N$ に関して、$u(i, z(i)) = u(i, z'(i))$ であるようにとる。$z \in f_W(u)$ としよう。価格ベクトル $p \in int.\Delta^l$ が存在して、殆ど全ての $i \in N$ に関して、$z(i)$ は $u(i, \cdot)$ を制約条件 $x_i \in R^l_+\ s.t. px_i \leq p\omega(i)$ の下で最大にしている。仮にある提携 $C \in \mathbb{N}, \nu(C) > 0$ で $pz'(i) < p\omega(i)$ が成り立てば、効用関数の狭義単調増加性を考えると $z \in f_W(u)$ に矛盾する。そこで殆ど全ての $i \in N$ に関して $pz'(i) \geq p\omega(i)$ である。次にある $C \in \mathbb{N}, \nu(C) > 0$ で $pz'(i) > p\omega(i)$ となるものが存在したとする。すると $\int_N pz' d\nu > \int_N p\omega d\nu$、つまり $p\int_N z' d\nu > p\int_N \omega d\nu$ となり、$z' \in Z$ に矛盾する。以上から殆ど全ての $i \in N$ に関して $pz'(i) = p\omega(i)$ となり、価格ベクトル p は z' に対する均衡価格となり、所望の結果 $z' \in f_W(u)$ を得る。

ルールの一意性：3 公理を満足するルール f を所与とする。

$f_W \subset f$: $z \in f_W(u)$ を任意にとる。z に対応する均衡価格ベクトルを $p \in int.\Delta^l$ とする。新しいプロファイル $u' \in U$ を $u(i, x) = px$ （全ての $i \in N$ と $x \in R^l_+$ に関して）ととる。すると $f(u') = Z_p$,

ここで $Z_p = \{z' \in Z : pz'(i) = p\omega(i)$ (殆ど全ての $i \in N$ に関して)$\}$

である。まずこれを証明しよう。(Z_p は非空である。なぜなら ω が属するからである。)

効用無差別性により、$f(u') \subset Z_p$ を示せばよい。$z' \in f(u')$ を任意にとる。コア特性により、$z' \in CO(u')$ である。仮に $\nu(\{i \in N : pz'(i) < p\omega(i)\}) > 0$ としよう。すると提携 $\{i \in N : pz'(i) < p\omega(i)\}$ が z' をブロックし、矛盾する。故に

$\nu(\{i \in N : pz'(i) < p\omega(i)\}) = 0$ である。次に $\nu(\{i \in N : pz'(i) > p\omega(i)\}) > 0$ とすると、$\int_N pz'd\nu > \int_N p\omega d\nu$ となって、$z' \in Z$ に矛盾する。以上から $z' \in Z_p$ がいえた。

以上から資源配分 $z \in f_W(u)$ に関して $z \in Z_p = f(u')$ となる。f の単調性により、$z \in Z_p = f(u')$ は $z \in f(u)$ を意味し、所望の結果を得る。

$f \subset f_W$:これは f がコア特性を満たすこととコアとワルラス配分集合の同値性定理（Aumann 1964, Hilbendrand 1974）から直ちに従う。■

証明で重要なパートは $f_W \subset f$ のほうである。ここは測度論的取り扱いであるとはいえ、このパートの証明では第 4.3 節の定理 4.2, 4.3 の証明と同じ技法が用いられている。逆の包含関係 $f \subset f_W$ は主体の集合が連続体であるときコアとワルラス配分集合は同じであるという Aumann （1964）かの有名な定理を適用できるため非常に簡単になっている。前節までの離散モデルではコアとワルラス配分集合は主体の数が増えるごとに近似してはいくが完全に一致するとは限らない。そこで局所決定性等の追加的公理が必要であったが、主体の数が連続濃度以上の場合、これら公理は必要なくなるのである。

三つの公理のいずれかでも欠けると定理 4.6 は成立しない。例を示そう。

例 4.4（コア特性）

ある一人の主体 k をとる。どのプロファイル $u \in U$ に対してもこの主体に全ての資産 $\int_N \omega d\nu$ を配分するルールを f とする。このルールはコア特性以外の全ての公理を満たす。

例 4.5 (効用無差別性）

プロファイルの集合 Π を、$u \in \Pi \Longleftrightarrow$ ある $p \in int.\Delta^l$ が存在して、殆ど全ての $i \in N$ に関して $u_i(x) = px$（任意の $x \in R^l_+$ に関して)、と定義する。

ルール f を

$f(u) := \{\omega\}$ （$u \in \Pi$ のとき）

$f(u) := f_W(u)$ (それ以外)

と定義する。このルールは効用無差別性以外の全ての公理を満足する。

例 4.6（単調性）

各 $u \in U$ に関してワルラス配分を一つとり、それを z^u としよう。

$Z(z^u) := \{z' \in Z : $ 殆ど全ての $i \in N$ に関して $u(i, z'(i)) = u(i, z^u(i))\}$ としよう。

ルール f を、任意の $u \in U$ に関して

$f(u) := Z(z^u)$

と定義する。このルールは単調性以外の全ての公理を満足する。

4.8　結論

本章では前章とは違った観点からワルラスルールの公理化を与えた。選好や消費集合等の仮定は前章でのそれよりは一般化されている。しかし一方で、全てのレプリカ経済を含まなければならないという代償も払っている。この二つの章での公理化は互いに独立であることに留意すべきであろう。残された主題としては本章での公理化をレプリカの手法を使わずに成し遂げることである。これは言い換えると前章での公理化をより一般的な選好の仮定のもとで行なうことである。そのためには極限定理のオリジナル経済での意味を深く掘り下げて考えることが必要であろう。

第 5 章

道徳規範の公理分析（その 1）

5.1 序論

社会には、「何がよく何が悪いか」、さらに「してよいことと悪いこと」に関する暗黙の了解がある。道徳規範とでも呼ばれる、これら了解事項の目的は、人々が個々の具体的な社会状況に直面したとき、彼らに対し適切な行為を指示することである[*1]。道徳規範は地域・時代・文化等の違いに応じて多種多様ではある。しかし、これを全く必要としない社会は存在しない。それは道徳規範が社会生活を営む際に、人に正しき行為を導く指針を与えると考えられてきたからであろう。

さて人々全てが所定の道徳規範を受け入れ、これに適った正しき行為を行うとしても、その結果、帰結する社会の有り様が正しいと直ちに言えるであろうか．道徳規範の問題とは違うが、合理的選択に関して合成の誤謬という経済学で良く知られた現象がある。これは「人々の合理的な選択行動が、社会全体にとっては逆の結果を導くことがある」と主張するのであるが、類似した現象が道徳規範についても言えるのではないだろうか．「人々の倫理的な選択行動が、社会全体にとっては逆の結果を導くこと」が果たしてありえないと言い切れるであろうか。

道徳規範に関する規範的視点からの研究は、道徳哲学・倫理学の守備範囲である。これまで道徳哲学・倫理学は、個々人のとる行為の道徳的正しさの根拠付けをもっぱら研究対象としてきた。しかしそのような個々人の行為の集積や相互作用の結果とし

[*1] 本章では、道徳という言葉は用いず、道徳規範という用語を用いる。道徳は意味が広すぎる、と判断したためである。道徳が人に行動の規範を指示するという意味を強調し、道徳規範と呼ぶことにした。

てどのような社会的帰結が生まれるかに関する研究は、あまり進んでこなかったようである。少なくとも我々経済学者の視点からすれば、この問題に対し道徳哲学・倫理学が十分自覚的であったようには見えない。この問題の重要性は、たとえば義務論と帰結主義の間で戦わされた論争は考えればわかる。この論争の係争点は、個人の行為の道徳的正しさをその帰結で判断することが適切かどうかということであった。しかしそもそも行為がいかなる社会的帰結を生み出すかがわからなければ、この問いに解答を与えることはできよう筈がない。これは自明の理である。

道徳規範は自己決定に際しての行動原理の一つであると解釈できる 。道徳規範の役割は様々な状況下で「何がよいか」あるいは「如何にすべきか」の問いに直面している人に、なすべき行為の指針を与えることである 。道徳に対してこのような解釈を与えたとき、道徳規範に基づく意思決定の問題を分析する一つの方法はゲーム理論を用いることである。本稿で我々はフェアプレイゲーム (Miyagawa, Nagahisa, and Suga2006) を用い、この問題に新たな洞察を行う。

我々は純粋戦略のみからなる n 人標準形ゲームの集合を考える。社会コードとは、各ゲームにおいて、他のプレイヤー達のとる行為を所与として、当該プレイヤーに対してどのような行為の選択がその状況にて社会的にみて妥当であるかを指示する対応として定義される。すなわち、社会コードはプレイヤー i にとって社会的見地から見てとってよいとされる行為の集合 $F_i(G, x_{-i})$ を決定するのである。ここで G はゲーム、x_{-i} は i 以外の人がとっている行為の組である。$F_i(G, x_{-i})$ はこの二つに応じて変わる。

プレイヤーが二つ以上の社会的に許容される行為を持つときには、彼は自己の選好に従ってその中で最も良いものを選んでよい。一つの社会コードを所与として、そこでのフェアプレイ均衡とは行為プロファイル（各プレイヤーのとっている行為の組）の一つである。そこでは各プレイヤーは他のプレイヤーの行為を所与として彼にとってよいと許容される行為の中で最も望ましいものを選んでいる、のである。

我々は社会コードが満たすべき一群の公理を提出する。ここでその幾つかを簡単に紹介しよう。

第 1 は匿名性である。この公理は全てのプレイヤーは同じ取り扱いを受けるべきことを要求する。いまあなた自身がある所定の状況にてある行為をとっても良いと判断されるとしよう。このとき、それと同じ行為はあなた以外のどの個人にも、その個人

の置かれた状況があなたと同じであれば許されるべきである。これが匿名性である。この意味で社会コードの判断は不偏的でなければならない。

第 2 は厚生無差別性と呼ばれる公理である。社会にとって究極的に大切なものは人々の受け取る厚生であり、それ故二つの行為が厚生の観点から見て同じ帰結を生むのであれば、社会コードはこれら二つの行為の取り扱いに差をつけてはならない。例えば、ある個人がどのヘアスタイルを選択するか、考えているとしよう。2 種類のヘアスタイルがあり、そのどちらを選択しても、その人を含む全ての人々の厚生に差がないときは、社会コードの判断はその二つのヘアスタイルの間で差は存在しない。

第 3 は単調性である。これはある行為の良さは人々の厚生変化に対し、負の反応をしてはならないことを要求する。例えば、ある人がある一室にて喫煙することを許されるとしよう。部屋の中には他に何人かの人がおり、彼らの選好も任意に定められているとする。その状況でその人の喫煙は許されているとしよう。いま状況が変わり、他の人々のうち何人かはその人の喫煙に好意的になったとする。依然はその人の部屋での喫煙に反対だった人は中立もしくは賛成に、中立だった人は賛成に回るのである。他の人の選好は以前のままとする。このときその人の喫煙はやはり認められるべきである。これが単調性である。

第 4 は独立性である。独立性は $F_i(G, x_{-i})$ が x_{-i} がプレイされないときでの行為プロファイルに関する情報からは独立であることを要求している。定義により、$F_i(G, x_{-i})$ は「ゲーム G において i 以外のプレイヤーが x_{-i} をプレイする」としたとき、i にはどの行為の選択が許されるか、を表現している。したがって i 以外のプレイヤーの選択している行為の組が x_{-i} と異なる場合は、想定の範囲外である。そして $F_i(G, x_{-i})$ の決定には、そのような想定外の状況に関する情報は必要ない。これが独立性の言わんとすることである。社会コードが決定すべき事柄は他者の行為に対する当事者の反応の仕方であることに留意すれば、この公理はごく自然な要求であることがわかるだろう。

最後の公理は有効性である。これは、どのゲームでも少なくとも一つの行為プロファイルで以下の条件を満たすものが存在することを要求している：すなわち、そこでの各プレイヤーの取っている行為は社会コードの指示に反してはいない、と。この公理がなければ、社会コードはプレイヤー全ての行為を整合させる指示が与えられないことになる。

有効性を除く全ての公理の根底に流れている基本的な精神は、二つの状況間で成り立つ、ある種の対称性や連関性に注目し、その対称ないし連関した状況間では社会コードのなす行為の妥当性に関する判定もある種の整合性を保たねばならないというものである。いわば、これらの公理系は、プレイヤーのとる行為の妥当性をオペレーショナルな視点から判定しているといってよい。すなわち、これらの公理の基本的な考えは以下のようになろう。「もしプレイヤー i が一つの状況 S において行為 A を選択できるのなら、プレイヤー i' が一つの状況 S' において行為 A' を選択できる」と。

公理が暗黙に前提としているこの基本的な考えは倫理学・道徳哲学では「普遍化可能性」（Hare1963、1981 及び山内 1991）として知られている。この考えによれば、ある特定状況での道徳判断は必ず普遍化されなければならない。その判断は同一とみなされる状況での同様な道徳判断として妥当であるとされる場合に限って正しいとされる。これが普遍化可能性が要求していることである。勿論「どの観点からして」同一とみなすか、に関して普遍化可能性にも様々なバージョンが出てくる。我々の公理、匿名性、厚生無差別性、単調性、そして独立性などがそれらのバージョンの代表例である。この普遍化可能性の原理の重要性を最初に意識したのはカントの形式主義的倫理学（1781）であろう。尤も考え方そのものは古くから知られており、例えば新約聖書での黄金律「汝の欲するところを他人にもせよ」などにそのアイディアの原型を見ることができよう。我々の関心は、このような道徳判断のカント主義的適用とでもいうべき考えを社会コードに体現化し、ゲーム論的な枠組みでその帰結を究明することに存する。

さて道徳判断には二つのポイントがある。一つはその仕方である。これに関しては、先に述べたとおりカント主義的形式倫理学の考えを保持するのが我々の立場である。そしてもう一つは判断の材料である。つまり何に基づいて道徳判断を行うか、その情報的素材である。これに関しては諸公理から明らかな通り、プレイヤー達の序数的選好のみである。これのみに基づいて道徳判断は行われる。この立場はいわずと知れた新厚生経済学の立場である。従って学説史的に我々の研究を位置づけるとすれば、道徳規範の研究においてカント倫理学の形式主義と新厚生経済学の序数選好主義がどの程度まで両立可能か、それをゲーム理論的枠組みで追求したといえよう。

有効性を除くこれらの公理の基底にある考えそのものは社会的選択理論では比較的よく知られている。これに関しては例えば Sen(1970, 1986), Campbell-Kelly(2002)

などを参照していただきたい。ただ一点違いがある。社会的選択理論ではこれら公理は社会的選択ルールに課される。つまり、社会的選択の帰結に関して、ー我々のコンテキストで言えば行為プロファイルに関してー、これら公理は課される。これに対して社会コードは帰結そのものを特定化はしない。各プレイヤーに対して与えられた状況での選択可能な行為の集合を指定するのみである。帰結そのものはこの下でのプレイヤー同士の合理的選択を通して成立する均衡によって決まるのである。この意味で、我々の分析は手続き的正義論にも関っている。

我々は以上の公理を満たす任意の社会コードの下で、フェアプレイ均衡は必ずナッシュ均衡であることを示す（定理 5.1)。すなわち、任意のフェアプレイ均衡のおいて社会コードはどのプレイヤーの行動をも制約しないのである。我々はまた全ての狭義ナッシュ均衡はフェアプレイ均衡であることも示す（定理 5.1)。社会コードはどの狭義ナッシュ均衡をも排除できないのである。これらの結果を総合するとフェアプレイ均衡集合とナッシュ均衡集合の間に違いがあるとすれば、ナッシュ均衡で、そこにおいて一部のプレイヤーが複数の最適反応を持っている、そういう均衡が存在することになる。そこで社会コードがある種の連続性公理を満たすとすれば、この違いは消滅する。フェアプレイ均衡集合はナッシュ均衡集合と一致するのである（系 5.1)。

ナッシュ均衡は必ずしもパレート最適ではないので、この結果は社会コードの指示だけによって最適な社会状態を達成するのは困難であることを示している。例えば、ゲームが囚人のジレンマの場合、我々の結果はそこでの一意のナッシュ均衡が上記四つの公理を満たす任意の社会コードの下での一意のフェアプレイ均衡であることを意味している。マッチングペニーのゲームでは、我々の結果はフェアプレイ均衡が存在しないことを主張する。各合理的な主体のフェアな行為を両立させることは不可能となるのである。。

本章の構成について簡潔に述べておく。第 5.2 節ではモデルを提出する。モデルは純粋戦略での標準形 n 人ゲームである。社会コードとフェアプレイ均衡を厳密に定義するのが、この節での目的である。第 5.3 節では公理を導入していく。第 5.4 節は主定理とその説明であり、第 5.5 節は主定理の幾つかのバージョンを提出する。証明の大部分は付録にて行う。

5.2　記号と定義

$N = \{1, 2, ..., n\}$ はプレイヤーの集合であり、二人以上のプレイヤーから成る有限集合とする。Ω は潜在的に存在する行為（戦略）の集合であり、加算無限個の要素から成る非空集合とする。ゲームとは以下のリスト

$(X, \succcurlyeq) := (\prod_{i \in N} X_i, (\succcurlyeq_i)_{i \in N})$

のことである。ここで、任意の $i \in N$ に関して、$X_i \subset \Omega$ は有限個の行為から成る非空集合であり、$\succcurlyeq_i$ は $X := \prod_{i \in N} X_i$ 上で定義された完備かつ推移的な選好関係である。$\succcurlyeq_i$ の強選好及び無差別選好はそれぞれ $\succ_i$ と $\sim_i$ で記号する。X の要素を $x, y, ...,$ などと記号し、行為プロファイルと呼ぶ。これはプレイヤーの選択によって帰結する一つの社会状態（ないし選択肢）と解釈する。$\succcurlyeq$ を選好プロファイルと呼ぶ。ゲーム全ての集合を Λ で記号する。X を所与とし、$P(X)$ を X 上での完備かつ推移的な選好関係全ての集合とする。

$\prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$ を X_{-i} と記号する。X_{-i} の要素を x_{-i} と記号する。$BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ はプレイヤー i の x_{-i} に対する最適反応の集合であり、その形式的定義は $BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) := \{x_i \in X_i : (x_i, x_{-i}) \succcurlyeq_i (y_i, x_{-i})$ (全ての $y_i \in X_i$ に関して)$\}$ である。

各 $\succcurlyeq_i$ が集合 $Y \supset X$ 上で定義されていたとしても、$(X, \succcurlyeq |_X)$ ではなく $(X, \succcurlyeq)$ と表記する。各 $\succcurlyeq_i$ を効用関数 $u_i : X \longrightarrow R$ で代表させると便利な場合がある。そのときはゲームを (X, u) と表記する。$u = (u_i)_{i \in N}$ である。ただし、その効用数値の割り当てには意味はない。以下ではしばしばゲームを特定化した効用数値を与えた行列によって表示することがある。その場合も、これら効用数値の大小関係から導かれる序数的選好のみが本質的であることに留意されたい。

定義 5.1 社会コードとは一つの対応 F のことであり、それは任意のゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、任意のプレイヤー$i \in N$、任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に対して一つの非空集合 $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \subset X_i$ を対応させる。

（$F(i, X, \succcurlyeq, x_{-i})$ と書くのが形式上は正しいが、便宜上 $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ と書くことにする。）

$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ はゲーム $(X\ \succcurlyeq)$ において、i 以外のプレイヤーたちのとる行為が x_{-i} であるときに、プレイヤー i がとってよいと許容される行為の集合である。

$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ は常に非空である。つまり、各プレイヤーにとって、彼（彼女）がどのようなゲームと状況におかれても、必ず彼（彼女）にとって許容される行為が少なくとも一つは存在する。

$(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ をプレイヤー i の（直面する）状況と呼ぶ。そして x_i に関して $x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ が成り立つとき、x_i は状況 $(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ でのプレイヤー i のフェアプレイである、という。

社会コードが下す許容される、あるいはされないという判断の根拠に関して、我々の与える想定は以下のとおりである。我々は、ゲームをプレイする前に、プレイヤーたちは社会コードの指示に服することに合意するものと仮定する。従って、社会コードの指示には、プレイヤー全てが、納得して受け入れる普遍的根拠が与えられていなければならない。そのような普遍的根拠は、慣習、道徳、伝統、宗教的戒律、正義、など、実に様々なものが考えられるが、我々が以下で考えるのが、ある種の手続き的正義の原則である。その詳細は後述するが、プレイヤーたちは、社会コードが、自分を含め、等しく全てのプレイヤーに対して、状況にふさわしい妥当なプレイをとることを要求しているという理由でその指示に服するのである。従って社会コードは単に行為の妥当性を判断するだけでなく、その判断に基づき各プレイヤーの行為を規制する強制力を付与されていると考えて差し支えない。社会コードに人々が服するかどうかといったインセンティブの問題は解決済みである、と仮定する。

社会コードは、与えられた状況でプレイヤーに対し選択可能な行為の集合を示すだけであり、プレイヤーがその中でどれを選択するかは彼（彼女）に任されている。従って社会コードはプレイヤーの自由意思を常に完全に奪っているわけではない。ここでの指示は「これをせよ」という強い命令ではなく、「これをしてはならない」という弱い命令である。

社会コードが複数の行為をフェアプレイとしたとき、プレイヤーはそのような行為の中から、自分の選好上最も良いものを選択すると仮定する。

定義 5.2 社会コード F とゲーム $(X, \succcurlyeq)$ を所与とする。行為プロファイル x がフェアプレイ均衡であるとは、任意のプレイヤー i にとって、x_i が $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ の中で $\succcurlyeq_i$ に照らして最も良い行為であるときを言う。

フェアプレイ均衡の集合を $FPE(X, \succcurlyeq, F)$ と記号する。

$FPE(X, \succcurlyeq, F)$ は次のような $x \in X$ から構成される：任意の $i \in N$ に関して、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ かつ全ての $y_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ に関して $x \succcurlyeq_i (y_i, x_{-i})$.

ゲーム $(X, \succcurlyeq)$ でのフェアプレイ均衡 x は各プレイヤー i の戦略集合が $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ に制限された時の Social Equilibrium (Debreu1952) に他ならない。プレイヤー i は x から逸脱する誘因を持っている場合では、その行為は妥当ではないと判定され、逸脱が自制されるのである。

フェアプレイ均衡におけるプレイヤーの予想に関して若干指摘しておこう。標準形ゲームでは各プレイヤーは同時に自分の戦略を選択するのであり、均衡を考える際にはプレイヤーが相手の出す戦略にある種の予想を持つことが必要とされる。そこでフェアプレイ均衡に関しても、プレイヤーの予想に関する想定を決める必要がある。そうしなければ、プレイヤーの行動の結果、均衡に果たして到達できるかどうかわからなくなってしまう。これに関しては二つの解答が可能である。一つは社会コードに従うことが、プレイヤーの間で共有知識 (Aumann1976) になっていると想定することである。社会コードがルールとして社会の構成員全てに共有されていると考えれば、これは全く自然な想定であると思える。もう一つは、フェアプレイ均衡は人々の行為の結果帰結する一つの社会状態の善し悪しを判定する為のレファレンスポイントであり、必ずしもこれに従って実際にゲームをプレイするわけではないという考えである。この場合は相手プレイヤーのとる戦略に関する予想を特定化することは必ずしも必要ない[*2]。

[*2] フェアプレイゲームはひとつの仮想ゲームであり、道徳規範に従った選択がいかなる帰結をもたらすかをシュミレートしているのだ、とするのがこの立場である。従ってこの立場によれば、われわれは現実社会でフェアプレイゲームをプレイすることを要求されているわけではない。いわばフェアプレイゲームは、（カント的）道徳規範に従えば、いかなる帰結を産むか、をわれわれに教示し、そして道徳規範とは一体何なのか、をわれわれに考えさせるための寓話としての役割を果たすのである。規範経済学研究ではこのようなゲーム理論の使い方が可能であり、また有効でもある。この点に関しては長久（2004）を参照されたい。長久（2004）ではゲーム理論（より広くいえばゲーム理論に代表される合理的選択モデル）が、規範の受諾（または拒否）のための道具として用いられる様子を詳細に描いている。

5.3 公理

社会コードが満たすべき諸公理を順に導入する。最初の公理は匿名性である。これはプレイヤー間での名前の入れ替えは社会コードの判断には影響を与えないことを要求する。N 上の置換 π を所与とする。任意の行為プロファイル x に対して $x^\pi \in X$ は $x^\pi_{\pi(i)} = x_i$ と定義する。x^π ではプレイヤー $\pi(i)$ の行為は x_i と一致している。

定義 5.3 社会コード F が匿名性を満たすとは、任意のゲーム $(X, \succcurlyeq), (X', \succcurlyeq') \in \Lambda$ と任意の N 上の置換 π に関して、もし全ての $i \in N$ と全ての $x, y \in X$ に関して、$X_i = X'_{\pi(i)}$ かつ $[x \succcurlyeq_i y \Longleftrightarrow x^\pi \succcurlyeq'_{\pi(i)} y^\pi]$ ならば、全ての $i \in N$、全ての $x \in X$ に関して $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) = F_{\pi(i)}(X', \succcurlyeq', x_{-\pi(i)})$ が成り立つ。

次の公理を導入するために、一つの補助概念が必要である。$(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$ と $i \in N$ を所与とする。二つの行為 $x_i, x'_i \in X_i$ をとる。全ての $j \in N$ と $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して $(x_i, x_{-i}) \sim_j (x'_i, x_{-i})$ が成り立つとき、x_i と x'_i は厚生無差別であるといい、$x_i \simeq x'_i$ と記号する。

定義 5.4 社会コード F が厚生無差別性を満たすとは、全ての $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$ に関して、次の 2 条件が成り立つことを言う。

（1）全ての $i \in N$ に関して、$x_i \simeq y_i$ となる $x, y \in X$ を任意に取る（幾人かの i に関して $x_i = y_i$ もありうるとする）。このとき、任意の $i \in N$ に関して、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \Longleftrightarrow y_i \in F_i(X, \succcurlyeq, y_{-i})$ となる。

（2）任意の $x \in X$、任意の $i \in N$、及び x_i とは異なる行為で $x_i \simeq y_i$ となる任意の y_i に関して、

$F_i(X_i \backslash \{y_i\} \times X_{-i}, \succcurlyeq, x_{-i}) = F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \backslash \{y_i\}$ 及び

任意の $j \neq i$ に関して、$F_j(X_i \backslash \{y_i\} \times X_{-i}, \succcurlyeq, x_{-j}) = F_j(X, \succcurlyeq, x_{-j})$

条件（1）は社会コードが厚生無差別な二つの行為を区別しないことを意味している。条件（2）は二つのゲームの間での社会コードの整合性に関する要求である。一対の厚生無差別な行為の組があるとしよう。この二つの行為を加えたり、削除したりする操作によって社会コードの指示が異なることはない。これが条件（2）の言わんとすることである。

以下のゲームでこの公理を例解しよう。

	A	B
a	$6, 0$	$1, 5$
b	$2, 7$	$3, 4$
c	$2, 7$	$3, 4$

	A	B
a	$6, 0$	$1, 5$
b	$2, 7$	$3, 4$

表の読み方：縦に並ぶアルファベットはプレイヤー 1 の戦略、横に並ぶアルファベットはプレイヤー 2 の戦略である。各セルの数字の第 1 項目はプレイヤー 1 の利得、第 2 項目はプレイヤー 2 の利得を表す。例えば左側のゲームではプレイヤー 1 が a を選択し、プレイヤー 2 が A を選択すれば、プレイヤー 1 の利得が 6、プレイヤー 2 の利得は 0 となる。

まず左側のゲームに注目しよう。b と c は厚生無差別なので、厚生無差別性の（1）は b がプレイヤー 1 のフェアプレイであるのは c がそうであるとき、そしてそのときに限られることを要求する（条件 1 で $i = 1$, $x_{-i} = y_{-i}$ とおいて考えればよい)。更にまた、厚生無差別性の（1）はプレイヤー 1 が b と c のいずれをプレイするかは、プレイヤー 2 の行為の判定には影響しないことをも要求している（条件 1 で $i = 2$ 及び $x_i = y_i$ とおいて考えればよい)。

右側のゲームは左側のゲームから c を削除して得られる。c は b の複製であるから、ある意味これら二つのゲームは同一と見ることもできる。これが厚生無差別性（条件 2）を適用できる理由である。双方のゲームのどの行為プロファイルにおいても、任意のプレイヤーの左のゲームでの行為の妥当性は右のゲームでのその行為の妥当性のみに懸かっているのである。例えば左のゲームでの b が A に対する反応としてフェアプレイであるのは、右のゲームでそうなっているとき、そしてそのときのみである。

厚生無差別性の条件 (1) は社会的選択理論での厚生主義の考えをそのまま社会コードに移植した公理である。厚生主義とは個々人の得る厚生こそが真に重要であり、それゆえ異なった選択肢といえど、その厚生上の帰結に違いがないのであれば、等しく扱われるできである、という考えのことである。我々の公理では二つの要求がある。一つは、厚生無差別な行為同士を社会コードはどう取り扱うべきか（条件（1)）であり、もう一つは厚生無差別な行為の一つが加わったり、消えたりするときに、社会コードはどう反応するべきか（条件（2)）である。条件（1）は同一のゲーム内で定義され、条件（2）は異なったゲーム間、つまり行為の集合の異なったゲーム間、で

の社会コードの整合性の要求である。

厚生無差別性は、次の第 3 の公理、中立性と深い関係がある。中立性は二つのゲームの違いが単に行為のラベリングにしかない場合、社会コードは二つのゲームを同じように扱わねばならないことを要求する。形式的な定義は以下のとおりである。

定義 5.5 社会コード F が中立性を満たすとは任意のゲーム $(X, \succcurlyeq), (X', \succcurlyeq') \in \Lambda$ に関して、以下の条件が成り立つときをいう。全ての $i \in N$ に関して、全単射写像 $\rho_i : X_i \to X'_i$ が存在し、全ての $x, y \in X$ と全ての $i \in N$ に関して、

$x \succcurlyeq_i y \Longleftrightarrow (\rho_1(x_1), ..., \rho_n(x_n)) \succcurlyeq'_i (\rho_1(y_1), ..., \rho_n(y_n))$

であるとする。このとき、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \Longleftrightarrow \rho_i(x_i) \in F_i(X', \succcurlyeq', \rho_{-i}(x_{-i}))$ となる。

ここで $\rho_{-i}(x_{-i}) := (\rho_1(x_1), ..., \rho_{i-1}(x_{i-1}), \rho_{i+1}(x_{i+1}), ..., \rho_n(x_n))$ である。

命題 5.1 厚生無差別性は中立性を含意する。

証明. 付録 5.7.1 を参照。 ■

中立性は効用無差別性よりも論理的には弱い。これは例えば、中立性は行為の数が異なるゲーム間では適用されないことを考えればわかるだろう。

第 4 番目の公理、単調性は次のとおりである。ある行為プロファイル x と選好プロファイル $\succcurlyeq$ にてプレイヤー i の行為 x_i が許容されていたとする。いま選好プロファイルが $\succcurlyeq'$ に次のように変わるとする。x の $\succcurlyeq'$ における相対的ランキングは $\succcurlyeq$ でのそれより悪くはならないようにである。このとき x_i はこの新しいプロファイルでも許容される。これが単調性である。その形式的定義は以下のとおりである。

定義 5.6 社会コード F が単調性を満たすとは、任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、任意の $x \in X$、任意の $i \in N$、及び任意の $\succcurlyeq' \in P(X)^N$ に関して以下のことが成り立つときをいう。$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ かつ、全ての $j \in N$ と全ての $y \in X$ に関して、

$x \succcurlyeq_j y \Longrightarrow x \succcurlyeq'_j y,$

$x \succ_j y \Longrightarrow x \succ'_j y$

ならば $x_i \in F_i(X, \succcurlyeq', x_{-i})$

この公理はアロウの非負の感応性条件（1963）を社会コードに関する条件として読み替えたもの、と解釈できる。この公理は社会コードの条件として適切であることは

明らかであろう。なぜならそれは行為の社会的正しさの判定は人々の厚生変化に対して負の方向へ感応してはならないことを要求しているからだ。

第 5 番目の公理、独立性、はプレイヤー i の行為が x_{-i} に対して社会的に許容される対応であるかどうかは、x_{-i} がプレイされない状況で生じる行為プロファイル上での選好には依存しない（それからは独立である）ことを意味している。形式的定義は以下のとおりである。

定義 5.7 社会コード F が独立性を満たすとは、任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、任意の $\succcurlyeq' \in P(X)^N$、任意の $i \in N$、及び任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して以下の条件が成り立つときをいう。全ての $j \in N$ に関して、$\succcurlyeq_j$ と $\succcurlyeq'_j$ が $\{(y_i, x_{-i}) : y_i \in X_i\}$ 上で同じ選好を導くならば、$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) = F_i(X, \succcurlyeq', x_{-i})$ である。

独立性の根拠付けとしてすぐに思いつのはこの公理が社会的選択理論におけるアロウ (1963) の独立性公理と同じ意味を持つとすることである。つまり、独立性は個人の行為の妥当を評価する際での情報節約を実現するための要請であるとするのである。しかしこの正当化には問題がある。行為の妥当性を判断しているのは、プレイヤーであって、プランナーではない。完備情報ゲームであるとすれば、プレイヤーは選好プロファイルを知っており、情報節約は必要ないのである。

我々が与える正当化は次のとおりである。社会コードは、プレイヤー i に対し次の問いかけをしていると解釈できる。あなたは今、一つの状況にいるとしよう。つまりそこでは、他のプレイヤーたちは、一つの行為をとるとしよう。つまり彼らの行為は x_{-i} であるとしよう。さてこの時、あなたは何をすべきか（すべきでないか）。この問いは一つの条件付き問いかけである。この問いに対しプレイヤー i はそのとき私は、x_i をとるべきだが、そうすると、そのことを予想した一部のプレイヤーが x_{-i} でのとは違う行為をとる (と予想できる) ので、x_i をとるべきだろうと言うのは答えにならない。なぜなら一部のプレイヤーが違う行為を (とると予想できる) ので・・・は問いの前提他のプレイヤーは、一つの行為をとるとしように矛盾するからである。こう考えれば、独立性は、社会コードそのものの定義から自然に要求されることがわかる。

この解釈は、プレイヤーの行為の妥当性に関する判断思考、やや誤解を招く言い方かもしれないが、これを道徳的思考とでも呼んでおくが、が戦略的思考 (自分がある

行為をとるとき、相手が何をとるかに関する思考) から分離できるという考えに基づいている。この道徳的思考の戦略的思考からの分離可能性が、社会コードの背後に隠された (本稿での) 暗黙の仮定である。プレイヤー i は、先の条件付き問いかけに対し行為 x_i をとるべきであると答える際に、問いの前提他のプレイヤーは、その状況が記述しているところの行為をとるが、自分の戦略的思考からして判断するにありえない、と考えることは勿論可能である。彼は自分が x_i をとるときには、少なくとも他の一人のプレイヤーが、その状況の行為とは違う行為をとると戦略的思考から判断しているのである。しかしその現実的には生起しないと彼 (彼女) が考える状況でも、一応その状況を想定して、行為の妥当性を判定することは可能な筈である。

この点はさらに、フェアプレイ均衡の性質を考えれば、もっと良く理解できるであろう。フェアプレイ均衡は、自分が一つの行為を選んだときに、他のプレイヤーは行為を変えないという (何らかの理由なり推論なりに基づいた) 確信を各プレイヤーが等しく持っていることを前提にしている。この前提の下では、各プレイヤーに対し、社会コードも他のプレイヤーのとる行為を所与として、彼（彼女）がとる行為によって帰結する社会状態の全てのみに基づいて、行為の妥当性を審判すればよいことになる。つまり、フェアプレイ均衡を均衡概念として採用する限り、独立性は全く自然な要請なのである。

しかし、社会コードを一つの条件付き問いかけとみなす解釈は、社会コードが手続き的合理性を表現し、ゲームの帰結に関与するものではないという、我々が基本的立場に矛盾するかのように見える。というのは、条件付き問いかけでは、他のプレイヤーはそこでの状況が記述している行為をとるのであり、問いに答えようとしているプレイヤーが行為を一つ選択すれば、自動的に一つの社会状態が帰結することになるからである。結局このことは、行為の妥当性の判定が、その行為によって帰結する社会状態の善し悪しに依存する形になっていることを意味し、社会コードが帰結にコミットするものではないとする、我々の主張に反するように見えるのである。 しかしこれは錯覚なのである。問いかけの前件他のプレイヤーは、一つの行為をとるとしようは、一つの仮定に過ぎない。実際にその状況が実現するかいなかは、プレイヤーの合理的選択にかかっており、ゲームをプレイしてみなければわからないからである。

最後の公理、有効性、はどのゲームでも少なくとも一つの行為プロファイルで、そこでの各プレイヤーがとっている行為がフェアプレイである、とされているものが存

在しなければならない、ことを要求している。

定義 5.8 社会コード F が有効性を満たすとは、任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$ に対して、ある $x \in X$ で、

全ての $i \in N$ に関して、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$

となるものが存在するときをいう。

有効性が満たされないと、プレイヤー全てを社会コードの指示に従わさせることが不可能となるゲームが存在することになる。この公理は社会コードが与える指示がプレイヤー全員に両立するようにさせる基本的な要求である。有効性はフェアプレイ均衡の存在条件より論理的には弱い条件である。なぜなら全てのゲームでフェアプレイ均衡が存在すれば、有効性は満たされるからである。有効性の条件を満たす行為プロファイルをフェアプレイプロファイルと呼ぶ。

5.4　主要な結果

我々の主要結果は次のとおりである。社会コードが前節で述べた全ての公理を満たせば、任意のプレイヤーにとってのフェアプレイとされる行為の中で、そのプレイヤーにとって（制約なしでの）最適反応になっているものが少なくとも一つは存在する。社会コードはプレイヤーにとっての最適反応となる行為の幾つかは規制するかもしれないが、その全てを規制するわけではない、ということである。この結果から直ちに次のことが言える。この社会的コードのもとでは、全てのフェアプレイ均衡はナッシュ均衡となり、また全ての狭義ナッシュ均衡は必然的にフェアプレイ均衡となる。

$NE(X, \succcurlyeq)$ と $SNE(X, \succcurlyeq)$ をそれぞれ $(X, \succcurlyeq)$ での（純粋戦略での）ナッシュ均衡全ての集合及び強ナッシュ均衡全ての集合とする。Λ^{NE} を純粋戦略ナッシュ均衡が存在するゲーム全ての集合とする。本章では純粋戦略のみを扱うため、ナッシュ均衡及び狭義ナッシュ均衡共に純粋戦略にて定義されることに留意されたい。

定理 5.1 社会コード F が匿名性、厚生無差別性、単調性、独立性、及び有効性を満たすとしよう。

このとき、全ての $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、全ての $i \in N$、及び全ての $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、

（1）$F_i(X,\succcurlyeq,x_{-i})\cap BR_i(X,\succcurlyeq,x_{-i})\neq\emptyset$

故に全ての $(X,\succcurlyeq)\in\Lambda$ に関して、

（2）$SNE(X,\succcurlyeq)\subset FPE(X,\succcurlyeq,F)\subset NE(X,\succcurlyeq)$

定理 5.1 の（2）は（1）からの直接的帰結である。狭義ナッシュ均衡では最適反応は常に一意である。故に（1）からフェアプレイ均衡でなければならない。（2）での後のほうの包含関係を示すために、フェアプレイ均衡がナッシュ均衡ではない、と想定してみよう。すると最適反応をしていないプレイヤーが存在することになる。しかし、このプレイヤーにとって、最適反応かつフェアプレイとなる行為が存在するので、これは矛盾である。

証明はかなり長大であり複雑である。ここではその部分的な証明を紹介しよう。2 人・2 行為の場合での（1）の証明である。完全版の証明は付録の 5.7.2 を参照されたい。2 人のプレイヤー 1, 2 とゲーム $(X,\succcurlyeq)$ を想定する。どちらのプレイヤーにとっても行為の集合は $\{a,b\}$ としよう。（1）が成り立たないとしよう（背理法）。一般性を失うことなく、$F_1(X,\succcurlyeq,a)=\{a\}$ かつ $BR_1(X,\succcurlyeq,a)=\{b\}$ とおいてよい。ここでプレイヤー 2 は a をプレイすると想定されている。区別して論じるべき二つの場合がある。

ケース 1：$(b,a)\prec_2(a,a)$

すなわち、プレイヤー 1 が自らの最適反応をプレイすれば、プレイヤー 2 の境遇は悪化するケースである。次のゲームを考える。

	a	b
a	$2,2$	$\cdots$
b	$3,1$	$\cdots$

	a	b
a	$2,2$	$\cdots$
b	$3,1$	$\cdots$
c	$3,1$	$\cdots$

ここでセルの中で $\cdots$ となっているのはその値を特定化する必要がないことを意味している。独立性により左のゲームでは同じ結論が保持されなければならない。つまりプレイヤー 2 が a をプレイすれば、プレイヤー 1 にとってのフェアプレイは a だけになる。次に他の行為 c をプレイヤー 1 の行為の集合に加え、ゲームを構成する。右側のゲームがそれである。厚生無差別性と独立性により、プレイヤー 2 が a をプレイしているときは、行為 c は行為 b と同一であるとみなせる。それ故プレイヤー 2 が a をプレイすれば、プレイヤー 1 にとってのフェアプレイは依然として a のみで

ある。最後に次のゲームを考えよう。

	a	b
a	$2,2$	$3,1$
b	$3,1$	$2,2$
c	$3,1$	$3,1$

さて、このゲームに対し、いままで得られた結論を適用しよう。プレイヤー 2 が a をプレイするとしよう。そのときプレイヤー 1 にとってのフェアプレイは a のみである。そこで、いまプレイヤー 1 が a をプレイしたとする。そのとき、プレイヤー 2 に対して同じ議論を適用し、プレイヤー 2 にとってのフェアプレイは b のみとなる（匿名性）。しかしもしプレイヤー 2 が b をプレイすれば、プレイヤー 1 にとってのフェアプレイは b のみとなる。プレイヤー 1 が b をプレイすれば、プレイヤー 2 にとってのフェアプレイは a のみとなる。かくしてサイクルが完成する。このことにより、このゲームにはフェアプレイプロファイルが存在しないことになり、有効性に矛盾する。

ケース 2：$(b,a) \succcurlyeq_2 (a,a)$

$\succcurlyeq_2'$ は $\succcurlyeq_2$ で (b,a) を最下位に落とし、それ以外の序列は変えないようにして作った選好とする。そのときケース 1 より、$b \in F_1(X, (\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2'), a)$ である。$\succcurlyeq_2$ は $\succcurlyeq_2'$ から (b,a) を上に移動させて得られたので、単調性より $b \in F_1(X, \succcurlyeq, a)$ となる。これは我々の当初の前提に反する。□

上の証明の最後のゲームにおいて、プレイヤー 2 はプレイヤー 1 と同じ行為を選択することを欲しているが、プレイヤー 1 はプレイヤー 2 と同じ行為の選択を望んではいない。プレイヤー 1 のみが c を選択できるので、ナッシュ均衡はプレイヤー 1 が c を選ぶ所となる。問題が生じるのは、プレイヤー達が互いに、他者に配慮しあうとき、つまり利他的ないし自己犠牲的な行為を取り合うときである。他者に配慮しようとして、プレイヤー 1 はプレイヤー 2 と同じ行為を選ぶべきとなる。なぜならそれこそがプレイヤー 2 の望んでいることだからである。他方プレイヤー 2 はプレイヤー 1 を喜ばすために違った行為を選択すべき、となる。プレイヤー両方が他者に配慮しあうことが不可能であることに問題が存しているのである。

留意点 5.1　ケース 1 の証明はマッチングペニーゲームを使えばより簡潔にできる。

	a	b
a	$2,2$	$3,1$
b	$3,1$	$2,2$

(5) での左のゲームから得られる結論を適用して、このマッチングペニーゲームがフェアプレイプロファイルを持たないことが証明できる。（マッチングペニーゲームによる簡潔な証明では行為の集合を変化させる必要はない。つまり 2 人・2 行為のゲームのみに限って定理 5.1 を証明するには、厚生無差別性は必要以上に強すぎるのである。中立性で十分である。しかしながら、この結論は 2 人・2 行為のゲームより大きなサイズのゲームも考えねばならないときには妥当しない。一般化はできないのである。付録での例 5.7 はこの反例となっている。）これは証明を幾分かは簡潔にするのであるが、その代わりナッシュ均衡を持たないゲームを使わねばならない。定理 5.1 そのものはこういうゲームには依存しないのである。先に留意したように、(6) でのゲームは（純粋戦略での）ナッシュ均衡を持っている。付録で示されているように、一般的な証明では（純粋戦略での）ナッシュ均衡を持つゲームのみを使って証明が遂行されている。形式的には、純粋戦略ナッシュ均衡が存在するゲーム全ての集合を $\Lambda^{NE} := \{(X,\succcurlyeq) \in \Lambda : NE(X,\succcurlyeq) \neq \emptyset\}$ と記号しよう。そのとき定理 5.1 は任意のゲームの集合 Λ' such that $\Lambda' \supset \Lambda^{NE}$ に関しても成り立つのである。

付録での完全版の証明は相当に入り組んでいる。その理由は（1）が成立しないときは、そこでの行為プロファイルにおいて i の最適反応が複数存在し、そして他のプレイヤー達も i の最適反応に関して様々な選好を持ちうるからである。これらの選好関係を保持しながらサイクルを構成せねばならず、これが証明を困難なものにしている。しかも、このサイクルを一人のプレイヤーに関してだけでなく、全員に対して構成せねばならない。これが証明を複雑にするもう一つの理由である。

定理 5.1 での三つの均衡集合を巡る集合的包含関係（2）はいずれも逆は成り立たない。次の例は $SNE(X,\succcurlyeq) \subsetneq FPE(X,\succcurlyeq,F)$ が起こりうることを示している。

例 5.1（局所弱パレートコード）

全ての $(X,\succcurlyeq) \in \Lambda$、全ての $i \in N$、及び全ての $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、$F_i(X,\succcurlyeq,x_{-i})$ は次のような $x_i \in X_i$ 全ての集合とする：全ての $k \in N$ に関して $(x'_i,x_{-i}) \succ_k (x_i,x_{-i})$ となるような $x'_i \in X_i$ が存在しない。

プレイヤー i を所与とする。このプレイヤーのある所定の行為がフェアプレイでないとされるのは、全てのプレイヤーがそれよりも良くなる他の行為を i が持っているときである。

$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ は i 以外のプレイヤーの行為を x_{-i} に固定したときに生じる選択肢集合 $\{(y_i, x_{-i}) : y_i \in X_i\}$ 上でのパレート最適な選択肢を帰結させる i の行為全てからなる集合である。

このコードが定理 5.1 での全ての公理を満たしていることは簡単に確認できる。次のゲームにこのコードを適用してみよう。

	A	B
A	$2,2$	$1,1$
B	$1,1$	$1,1$

このとき $SNE(X, \succcurlyeq) = \{(A, A)\} \subsetneq \{(A, A), (B, B)\} = FPE(X, \succcurlyeq, F)$ である。

$FPE(X, \succcurlyeq, F) \subsetneq NE(X, \succcurlyeq)$ が起こりうるのは次の例からわかる。

例 5.2（局所強パレートコード）

例 5.1 でのコードを強パレート最適性に置き換えたバージョンである。すなわち、ある行為がフェアプレイでないとされるのは、どのプレイヤーがそれよりも悪くならず、少なくとも一人は良くなるような他の行為が存在するときである。このコードも定理 5.1 の全ての公理を満たす。また次のゲームを考える。

	A	B
A	$1,1$	$0,1$
B	$1,0$	$0,0$

このとき $FEP(X, \succcurlyeq, F) = \{(A, A)\} \subsetneq X = NE(X, \succcurlyeq)$ である。

定理 5.1 はフェアプレイ均衡が存在する十分条件を与えている。包含関係 $SNE(X, \succcurlyeq) \subset FPE(X, \succcurlyeq, F)$ は狭義ナッシュ均衡が存在するゲームではフェアプレイ均衡は存在することを示している。

一方でフェアプレイ均衡は必ずしもあらゆるゲームで存在するわけではない。特にナッシュ均衡が存在するゲームでフェアプレイ均衡が存在しないケースがある。社会コードは例 5.2 での局所強パレートコードとする。ゲームは以下のとおりである。

	A	B
A	$1,1$	$1,0$
B	$1,2$	$0,3$

このとき $NE(X,\succcurlyeq)=\{(A,A)\}$ であるが、$FPE(X,\succcurlyeq,F)=\emptyset$ である。このゲームでは (B,A) と (B,B) がフェアプレイプロファイルだが、どちらもフェアプレイ均衡にはならない。定理 5.1 での包含関係 $FPE(X,\succcurlyeq,F)\subset NE(X,\succcurlyeq)$ はフェアプレイ均衡が存在するための必要条件である。しかしこの例はこの関係が十分条件ではないことを示している。

また定義より、有効性はどのゲームにもフェアプレイプロファイルが存在しなければならないことを要求している。しかし、ナッシュ均衡が存在しなければそのプロファイルがフェアプレイ均衡になることはできない。

尤も、社会コードによってはナッシュ均衡の存在がフェアプレイ均衡存在の十分条件にもなりうる場合がある。次の例がそのことを示している。

例 5.3（アモラルコード）

いかなる行為も常にフェアプレイとなる：$F_i(X,\succcurlyeq,x_{-i}):=X_i$.

このコードでは $FPE(X,\succcurlyeq,F)=NE(X,\succcurlyeq)$ の成立はトリビアルである。つまりフェアプレイ均衡が存在するのは（純粋戦略での）ナッシュ均衡が存在するとき、そしてそのときのみである。尤もこのコードのみがこのような性質が成り立つわけでもない。局所弱パレートコード（例 5.1）でも $FPE(X,\succcurlyeq,F)=NE(X,\succcurlyeq)$ となる。なぜなら制約なしの最適反応は x_{-i} を所与として弱パレート最適となるからである。

各公理のどれか一つでも欠けると定理 5.1 は成立しない。章末の付録の例を参照されたい。

定理 5.1 とアロウの不可能性定理 (Arrow 1963) の形式上の類似点に関して少し触れたい。定理 5.1 の証明は、ある種の循環的性質に依拠している。ちょうどアロウの不可能性定理での集団的決定力の循環（例えばコンドルセーパラドックスのそれ）のような循環である。定理 5.1 の主張は、社会コードがナッシュ均衡では、各プレイヤーに他のプレイヤーの行為を所与として、決定権を与え、彼・彼女を独裁者にしてしまっている、と解釈すればどうであろうか？こう考えれば、定理 5.1 とアロウの不可能性定理の間には何かしら論理構造上の類似点が見つかるかもしれない。勿論、

フェアプレイを決定する「民主主義的な」社会コードを構成することは可能かもしれない。しかし、そのコードは定理 5.1 が教えるように、少なくとも一つの公理を侵犯することになるのである。

更に定理 5.1 とセンのリベラルパラドクス (Sen1970) との論理的な関係も指摘しておきたい。実際、Gibbard (1974) によるリベラルパラドクスの一つのヴァージョンはマッチングペニーのロジックをそのまま適用して得られた結果である。定理 5.1 でのとの違いは循環の向きである。Gibbard では各プレイヤーは自分の効用を高めようとしている。$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ をプレイヤーの権利と解釈したときに、リベラルパラドクスの議論と類似点が出てくるだろう。しかし決定的違いは我々の公理は「自由」概念に関してのものではない、ということである。各公理は $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ が一点集合になる場合も許容している。この場合、プレイヤーには選択の自由はない。

5.5 幾つかの拡張

5.5.1 完全公理化

定理 5.1 はフェアプレイ均衡集合の完全公理化を成し遂げてはいない。なぜならナッシュ均衡でありつつも狭義ナッシュ均衡ではない行為プロファイルがフェアプレイ均衡であるかどうかを決定できないからである。この小節では社会コードがある種の連続性を満たせば、フェアプレイ均衡集合の完全公理化が可能であることを示そう。我々は、前節での公理全てと連続性を満たす任意の社会コードに関して、フェアプレイ均衡集合とナッシュ均衡集合が一致することを示そう。

行為プロファイルの集合 X を所与とする。$U(X)$ は X 上で定義された効用関数 $u_i : X \to R$ 全ての集合とする。任意の効用関数プロファイル $u = (u_i)_{i \in N} \in U(X)^N$ を $n|X|$ 個の成分から成るベクトルであらわすとしよう。すると $U(X)^N$ は $R^{n|X|}$ と同一視できる。

二つのゲーム $(X, \succcurlyeq)$ と (X, u) は任意の $i \in N$ に関して、u_i が $\succcurlyeq_i$ を代表しているとき、そしてそのときにのみ同じであるとみなす。

定義 5.9 社会コード F が連続性を満たすとは、任意の $(X, u) \in \Lambda$、任意の $x \in X$、任意の $i \in N$、及び $U(X)^N$ 内での任意の効用関数プロファイルの列 $(u^k)_{k=1}^{\infty}$ に関し

て、もし $u^k \to u$ as $k \to \infty$ かつ全ての k に関して $x_i \in F_i(X, u^k, x_{-i})$ であるならば、$x_i \in F_i(X, u, x_{-i})$ となるときをいう。

数学的にはこれは u に関する対応 $F_i(X, u, x_{-i})$ の優半連続性である。これは任意の x_{-i} に関してフェアプレイが与える効用値のプロファイルが閉じていることを意味している。

系 5.1 社会コードが匿名性、効用無差別性、単調性、独立性、有効性、及び連続性を満たせば、任意のゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$ に関して、$FPE(X, \succcurlyeq, F) = NE(X, \succcurlyeq)$ が成り立つ。

また同じ結論は $\Lambda^{NE} \subset \Lambda'$ なる任意のゲームの集合 Λ' に関して成り立つ。

証明. 定義域内の任意のゲーム $(X, \succcurlyeq)$ をとる。$u \in U(X)^N$ を各 $i \in N$ に関して、u_i が $\succcurlyeq_i$ を代表するようにとる。定理 5.1 より $NE(X, u) \subset FPE(X, u, F)$ のみを示せばよい。$x \in NE(X, u)$ を任意に取る。各 $k \in \{1, 2, ...\}$ と $i \in N$ に関して、u_i^k を $u_i^k(x) = u_i(x) + (1/k)$ 及び全ての $y \neq x$ に関して $u_i^k(y) = u_i(y)$ とおく。明らかに $u_i^k \to u_i$ かつ $x \in SNE(X, u^k)$ である。定理 5.1 より全ての k に関して $x \in FPE(X, u^k)$ であり、全ての i と k に関して $x_i \in F_i(X, u^k, x_{-i})$ である。連続性より、全ての i に関して $x_i \in F_i(X, u, x_{-i})$、つまり $x \in FPE(X, u, F)$ となる。

■

5.5.2 定義域制限

既に触れたように、定理 5.1 はナッシュ均衡が存在するゲーム全ての上でも成立する。しかし、この定理は狭義ナッシュ均衡にも言及しているので、定義域を更に狭め、狭義ナッシュ均衡が存在するゲームの集合にしたときに、定理が成立するかどうかを確認しておくことは意義がある。実は、この定義域制限にまで定理 5.1 を拡張することは簡単にはできない。本節では定義域制限に関する幾つかの結果を紹介する。

Λ^{SNE} を狭義ナッシュ均衡が存在するゲーム全ての集合とする。すなわち $\Lambda^{SNE} := \{(X, \succcurlyeq) \in \Lambda : SNE(X, \succcurlyeq) \neq \emptyset\}$ である。この定義域 Λ^{SNE} 上では $SNE \subset FPE$ は以前成立するが、$FPE \subset NE$ は成立しなくなる。

命題 5.2 社会コード F は Λ^{SNE} 上で定義され、匿名性、厚生無差別性、単調性、独

立性、及び有効性を満たすとしよう。このとき全てのゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE}$ に関して、

$SNE(X, \succcurlyeq) \subset FPE(X, \succcurlyeq, F)$

が成り立つ。

命題 5.3 社会コード F は Λ^{SNE} 上で定義され、匿名性、厚生無差別性、単調性、独立性、及び有効性を満たすとしよう。このときあるゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE}$ に関して、

$FPE(X, \succcurlyeq, F) \subset NE(X, \succcurlyeq)$

が成り立たない。

証明. 命題 5.2 は付録にて証明がある。命題 5.3 を示すために、一つの社会コードを作ろう。

一つのゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE}$ をとる。i と x_{-i} を固定する。任意の部分集合 $X'_i \subset X_i$ と任意の $j \neq i$ に関して、$BR^j_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}, X'_i) := \{x_i \in X_i : (x_i, x_{-i}) \succcurlyeq_j (x'_i, x_{-i})$ (全ての $x'_i \in X'_i$ に関して)$\}$ と定義する。

これは X'_i 内の行為のうちで j によって最も選好される行為の集合である。この概念を使って、社会コード F を次のように定義する。

（1）$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) := [\underset{j \neq i}{\cup} BR^j_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}, X_i)] \cup [\underset{j \neq i}{\cap} BR^j_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}, BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}))]$

第 1 項は行為 x_i が少なくとも一人の $j \neq i$ に関して、最も好まれるのならその行為はフェアプレイであることを言っている。第 2 項は行為 x_i が全ての $j \neq i$ に関して i の最適反応内で最も好まれるのならそれもフェアプレイであることを言っている。

このコードは有効性を満たしている。これを見るために、任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE}$ と任意の $x \in SNE(X, \succcurlyeq)$ をとる。そのとき、全ての i に関して x_i は唯一つの最適反応であり、それ故トリビアルに全ての $j \neq i$ に関して i の最適反応の集合内で最も好まれる選択である。それ故（7）の第 2 項は x_i であり、よって $x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ となる。

このコードは単調性を満たしている。これをみるため、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ とし、$\succcurlyeq'$ を単調性の定義の通りとする。最初に、もし $x_i \in \underset{j \neq i}{\cup} BR^j_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}, X_i)$ であれば、$\succcurlyeq'$ の構成から $x_i \in \underset{j \neq i}{\cup} BR^j_i(X, \succcurlyeq', x_{-i}, X_i)$ となり、x_i は依然としてフェアプレイである。次に x_i が（1）の第 2 項に属しているとしよう。$\succcurlyeq'$ の構成から x_i は依然

として i にとっての最適反応であり、i の最適反応の集合が小さくなるだけである：$x_i \in BR_i(X, \succcurlyeq', x_{-i}) \subset BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$. x_i は当初全ての $j \neq i$ に関して i の最適反応の集合内で最も好まれる選択であったから、任意の j に関して x_i は下がらず、依然として全ての j に関して最も好まれる選択であり続ける。それ故 x_i は (1) の第 2 項に残る。

このコードは厚生無差別性も満たす。なぜならこのコードは選好のみに基づいて、異なった行為を区別しているからである。匿名性と独立性の成立も明らかである。

証明を完成さすため、次のような 3 人ゲームを考える。

		プレイヤー 2	
		a	b
プレイヤー 1	a	$4,1,4$	$6,6,6$
	b	$4,4,1$	$5,5,5$
	c	$2,6,6$	$1,1,1$

プレイヤー 3 は一つの行為しか持たないとする。つまり $X_3 = \{a\}$ である。(これは証明の簡潔化のための便宜上の仮定である。プレイヤー 3 が二つ以上の行為を持つ場合にも反例は拡張できる。) このゲームでは $SNE(X, \succcurlyeq) = NE(X, \succcurlyeq) = \{(a, b, a)\}$、一方 $FPE(X, \succcurlyeq, F) = \{(a, b, a), (c, a, a)\}$. ■

証明で使った社会コードは定理 5.1 を否定するものではない。なぜなら定義域を Λ^{NE} にまで広げるとこのコードは有効性を満たさなくなるからである。

命題 5.3 での反例は、ある意味それほどロバストではない。反例で使ったゲームではプレイヤー 1 が二つの最適反応を持っていることが決定的に利いている。プレイヤー 2 が a をプレイすればプレイヤー 1 は a と b の間で無差別となり、そのどちらも他の誰によっても一致して選好されることはなく、それがまたなぜプレイヤー 1 が彼の最適反応のどれをもフェアプレイとして許容されないのか、という理由になっている。プレイヤー 1 の選好が少しでも変わり、彼の最適反応が一つのみになれば、彼の最適反応はフェアプレイとなり、問題は解消する。

以上の観察から、無差別選好を排除すれば定理 5.1 を保持できるのではないか、という予想が立つ。この場合、ナッシュ均衡と狭義ナッシュ均衡は同じとなる。

幾つかの定義を追加したい。Λ^G は他のプレイヤーの行為を所与として、どのプレイヤーも無差別選好を持たない、そういうゲームの集合とする。$(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^G$ である

のは、任意の $i \in N$ と任意の x_{-i} に関して、$\succcurlyeq_i$ は $\{(y_i, x_{-i}) : y_i \in X_i\}$ 上で強選好のみであるとき、そしてそのときに限られる。$\Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ に社会コードの定義域を絞り込むこととする。

定義 5.10 行為のペア $\{x_i, x_i'\}$ を所与とする。x_i が x_i' をパレート優越するとは、任意のプレイヤー i と任意の x_{-i} に対して、x_i が x_i' より高い効用を与えるとき：すなわち、全ての $j \in N$ と全ての $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して $(x_i, x_{-i}) \succ_j (x_i', x_{-i})$ であるときをいう。社会コード F がパレート優越性を満たすとは、任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$、任意の $i \in N$ 、任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、もし x_i が x_i' をパレート優越するならば、$x_i' \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \Longrightarrow x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$, かつ $F_i(X_i \backslash \{x_i'\} \times X_{-i}, \succcurlyeq, x_{-i}) = F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \backslash \{x_i'\}$.

第 1 項目はある行為がフェアプレイならば、それをパレート優越するどの行為もフェアプレイになることを主張している。第 2 項目はパレート優越される行為のゲームからの削除は、残りの行為がフェアプレイか否かの判定には影響しないことを主張している。（パレート優越される行為が狭義ナッシュ均衡の構成に参加することはありえないので、新しいゲームも定義域に属している：$(X_i \backslash \{x_i'\} \times X_{-i}, \succcurlyeq,) \in \Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ である。）

定義 5.11 社会コード F が強独立性を満たすとは、任意の $(X, \succcurlyeq), (X', \succcurlyeq') \in \Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ s.t. $X_i = X_i'$ and $X_{-i} \cap X_{-i}' \neq \emptyset$、及び任意の $x_{-i} \in X_{-i} \cap X_{-i}'$ に関して、もし、任意の $j \in N$ に関して $\succcurlyeq_j$ と $\succcurlyeq_j'$ が $\{(y_i, x_{-i}) : y_i \in X_i\}$ 上で同じ選好を導くのであれば、 $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) = F_i(X', \succcurlyeq', x_{-i})$.

強独立性は先の独立性と同じアイディアに基づいてはいるが、形式上はやや強くなっている。なぜなら、強独立性は行為の集合が異なったゲーム間でも適用できる場合があるからである。定義からわかるように、二つのゲーム $(X, \succcurlyeq)$ と $(X', \succcurlyeq')$ は i 以外のプレイヤーに関しては異なった行為の集合を与えているかもしれない。しかしこの二つのゲームでは他のプレイヤーが $x_{-i} \in X_{-i} \cap X_{-i}'$ をプレイしているときには、i の行為が導く選択肢の集合上では選好上の違いはないのである。

命題 5.4 社会コード F は $\Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ 上で定義されており、匿名性、中立性、単調性、強独立性、有効性、そしてパレート優越性を満たすとしよう。このとき、全ての

$(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ に関して、$FPE(X, \succcurlyeq) = SNE(X, \succcurlyeq)$

となる。

証明. F が命題の前提を満たす任意のコードとする。ゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ を任意に取る。以下の関係を証明すれば十分である。

(1)　全ての i と全ての x_{-i} に関して、$BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) \subset F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$

すなわち、(唯一の) 制約なし最適反応がフェアプレイであることを言えばよい。所望の結果はこれから直ちに帰結する。背理法にて（1）を証明しよう。最適反応は一意であることより、ある $y \in X$ とある $i \in N$ に対して、$BR_i(X, \succcurlyeq, y_{-i}) = \{y_i\}$ かつ $y_i \notin F_i(X, \succcurlyeq, y_{-i})$ となる。一般性を失うことなく、$X_i = \{1, 2, ..., k\}$ 及び $y_i = k$ $(k \geq 2)$ とおく。

以下 w_{-i} なる記号が登場するが、これは次の通りである。もし $|X_{-i}| > 1$ ならば、$w_{-i} \neq y_{-i}$ なる w_{-i} を任意に選んでいる。$X_{-i} = \{y_{-i}\}$ ならば $w_{-i} = y_{-i}$ である。w_{-i} はこうして定義されたある特定の行為の組である。

$v : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を以下の条件を満たす利得ベクトル関数とする。

$v(x)$

$= (0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$ if $x = y$,

$= (x_i, ..., x_i)$ if $x_{-i} = y_{-i}$ かつ $x_i < y_i$,

$= (2k, ..., 2k)$ if $x = (y_i, w_{-i})$ かつ $w_{-i} \neq y_{-i}$

ここで第一行目の x_i は第 i 項目に入っている。他の全ての行為プロファイル x に関しては、$v(x) \in \mathbb{R}^N$ を次のように特定化する：

(i) $(k, ..., k) \ll v(x) \ll (2k, ..., 2k)$,

(ii) $(X, v) \in \Lambda^G$, 及び

(iii) 各 $x_i < k-1$ は $k-1$ によってパレート優越される。

このとき $(y_i, w_{-i}) \in SNE(X, v)$ であり、故に $(X, v) \in \Lambda^{SNE} \cap \Lambda^G$ である。$\succcurlyeq'$ は v によって導かれる選好プロファイルとする。

この構成から、任意の $x \in X$ と任意の $j \in N$ に関して、

(2) $y \succcurlyeq'_j x \Longrightarrow y \succcurlyeq_j x$, $y \succ'_j x \Longrightarrow y \succ_j x$

となる。この関係式の成立は $y \succcurlyeq'_j x$ が $x \neq y$ で成り立つのが、$x_{-i} = y_{-i}$ かつ $j = i$ であるときそしてそのときに限られることに留意すればよい。そしてそのとき

には $y \succ_j x$ となる。これは y の選び方から、$\{y_i\} = BR_i(X, \succcurlyeq, y_{-i})$ となるためである。

(2) より、$\succcurlyeq$ から $\succcurlyeq'$ への変化において、y の相対的順位はどのプレイヤーにおいても上がっていない。それ故、単調性と独立性より、$y_i \notin F_i(X, \succcurlyeq', y_{-i})$ となる。$k-1$ は全ての $x_i < k-1$ をパレート優越するので、$k-1 \in F_i(X, \succcurlyeq', y_{-i})$ となる。

X_i から全ての $x_i < k-1$ を除こう。$X'_i := \{k-1, k\}$ が i の新しい行為の集合であり、$X' := X'_i \times \prod_{j \neq i} X_j$ が新しい行為プロファイルの集合である。(k, w_{-i}) がこのゲームには残るから、$(X', \succcurlyeq') \in \Lambda^{SNE}$ である。取り除かれた行為は全て $k-1$ によってパレート優越されているから、k がフェアプレイでないという事実には変わらない。故に $F_i(X', \succcurlyeq', y_{-i}) = \{k-1\}$ である。y_{-i} を所与として、プレイヤー i のみが k の方を選好し、他は $k-1$ の方を選好していることに留意されたい。匿名性、中立性、強独立性から含意されるは以下の事実である：任意のゲームで、ある所定のプレイヤー j が二つの行為 a と b しか持っておらず、x_{-j} を所与として、j が a、他のプレイヤー全てが b をより好んでいるならば、j は b をプレイすべきである、と。

矛盾を導くため、フェアプレイプロファイルが一つも存在しないゲームを構成する。$n = 2$ のときは、次のゲームが利用できる。

	A	B	C
a	$7,7$	$2,2$	$1,1$
b	$0,0$	$9,3$	$3,9$
c	$5,8$	$4,4$	$6,6$

このゲームは狭義ナッシュ均衡 (a, A) を持つ。しかしフェアプレイプロファイルは一つも持たない。これを示せば $n = 2$ での命題の証明は完成する。

まずこのゲームから行為を削除し、次の二つのゲームを作る。

	A
a	$7,7$
b	$0,0$
c	$5,8$

	A
a	$7,7$
c	$5,8$

この二つのうちの右のゲームでは先ほど得た一般事実から「A に対するフェアプレイは c のみ」が出てくる。このこととパレート優越性より、左側のゲームでも「A に対するフェアプレイは c のみ」が出てくる。更にこの結論と強独立性により、オリジナルなゲームでは「A に対するフェアプレイは c のみ」が出てくる。言い換えるとオ

リジナルなゲームにおいて $(a,A),(b,A)$ はフェアプレイプロファイルではないことがわかる。

後は同じテクニックの繰り返しである。比較すべきゲームの一覧とそこから得られる結論のみを列記しておく。

	A	B	C
c	$5,8$	$4,4$	$6,6$

	A	C
c	$5,8$	$6,6$

$\Rightarrow (c,A),(c,B)$ はフェアプレイプロファイルではない。

	C
a	$1,1$
b	$3,9$
c	$6,6$

	C
b	$3,9$
c	$6,6$

$\Rightarrow (a,C),(c,C)$ はフェアプレイプロファイルではない。

	A	B	C
b	$0,0$	$9,3$	$3,9$

	B	C
b	$9,3$	$3,9$

$\Rightarrow (b,A),(b,C)$ はフェアプレイプロファイルではない。

	B
a	$2,2$
b	$9,3$
c	$4,4$

	B
b	$9,3$
c	$4,4$

$\Rightarrow (a,B),(b,B)$ はフェアプレイプロファイルではない。

以上からオリジナルなゲームではフェアプレイプロファイルが存在しないことがわかった。

$n \geq 3$ の場合は、次のようなゲームを用いる。各プレイヤーの行為の集合は $X_i = \{0,1\}$ とする。各 $i \in N$ に関して、ベクトル $t^i := (1,...,1,1-n,1,...,1) \in \mathbb{R}^N$ を定義する。ここで $1-n<0$ は i 項目にある。このベクトルは i の効用を一単位ずつ他のプレイヤーに移転している、と解釈可能である。$e^i = (0,...,0,1,0,...,0) \in \mathbb{R}^N$ を第 i 座標が 1 である単位ベクトルとする。L と M は整数であり、$L > M > n-1$ とおく。$\varepsilon \in (0,1)$ を所与とする。次のような利得ベクトル値関数 $u : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ を定義する。

(3)

$$u(x) := \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n t^i + \sum_{i=1}^{n-1} (1-x_i)(1-x_n) L t^i$$

$$+(1-x_1)x_2 \cdots x_n (1+L) t^1$$

$+x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(1-x_n)Me^n$

$+\varepsilon x.$

第 1 項はプレイヤー i と $n(i \neq n)$ が同時に 1 をプレイすれば、効用 1 単位がプレイヤー i から各プレイヤーに移転されることを意味している。第 2 項はプレイヤー i と n が同時に 0 をプレイすれば、$L > 1$ 単位の効用が i から他のプレイヤーに移転されることを意味している。第 3 項によって、プレイヤー 1 は行為プロファイル $(0, 1, ..., 1)$ においても効用移転を行うことがわかる。第 4 項では、プレイヤー n は行為プロファイル $(1, ..., 1, 0)$ で $M > 0$ なるボーナスを獲得する。最後の項で、1 をプレイするプレイヤーは少量のボーナス ε を受け取る。

ゲーム (X, u) では、$(1, ..., 1, 0)$ は狭義ナッシュ均衡であり、その利得ベクトルは $(\varepsilon, ..., \varepsilon, M)$ である。$(X, u) \in \Lambda^G$ を示すために、(3) 式の第 4 項目までは各プレイヤーに整数単位の効用を与えることに留意しよう。故に $x_i = 0$ ならば $u_i(x)$ は一つの整数である。他方で $x_i = 1$ ならば、$\varepsilon \in (0, 1)$ であるから $u_i(x)$ は整数ではない。これはプレイヤーが彼らが取る行為の間で無差別選好を決してとりえないことを意味している。

このゲームがフェアプレイプロファイルを持たないことを示すため、背理法を用いる。フェアプレイプロファイル x が存在したとする。二つのケースに区別して論じよう。

ケース 1.　$x_n = 0$ の場合。まず最初に $x = (0, ..., 0)$ であることを示そう。仮に、ある $i \neq n$ に関して $x_i = 1$ としよう。このとき i は 0 へ行為をスイッチすることによって、$Lt^i - \varepsilon e^i$ かまたは $Lt^i - \varepsilon e^i - Me^n$ の利得ベクトルを元の利得ベクトルに追加できる。$L > M$ かつ $\varepsilon > 0$ なので、このことによって i 自身の境遇は悪くなり、他のプレイヤーの境遇は揃って良くなる。それ故、このコードのもとでは i は 0 へ行為をスイッチしなければならない。これは x がフェアプレイプロファイルであるとする我々の前提に矛盾する。

それ故、もし $x_n = 0$ となる行為プロファイル x がフェアプレイプロファイルであるならば、$x = (0, ..., 0)$ である。しかしこのときには、プレイヤー n は 1 に行為をスイッチすべき、となる。なぜなら $u(0, ..., 0, 0) = \sum_{i=1}^{n-1} Lt^i = -Lt^n$ でありつつ、かつ $u(0, ..., 0, 1) = \varepsilon e^n$ だからである。

ケース 2.　$x_n = 1$ の場合。まず最初に全ての $1 < i < n$ に関して $x_i = 1$ であるこ

とを示そう。これを見るため、ある $1 < i < n$ に関して $x_i = 0$ としよう。これより (3) 式の第 3 項は 0 であることになる。それ故プレイヤー 1 は (3) 式の第 1 項と最終項のみに影響を与えるだけである。彼は 1 をプレイすべき、となる。なぜならそうすれば彼の効用を他者に移転できるからである。$x_1 = 1$ を所与として、プレイヤー i も (3) 式の第 1 項と最終項のみに影響を与えるだけとなる。同じ理由で彼も 1 に行為をスイッチすべきとなる。これは x がフェアプレイプロファイルであるという前提に矛盾する。

故に全ての $i > 1$ に関して $x_i = 1$ であることがわかった。これよりプレイヤー 1 は 0 をプレイすべきとなる。なぜなら、$u(1, 1, ..., 1) = \sum_{i=1}^{n-1} t^i + (\varepsilon, ..., \varepsilon)$ であり、一方で、$u(0, 1, ..., 1) = \sum_{i=2}^{n-1} t^i + (1 + L)t^1 + (0, \varepsilon, ..., \varepsilon)$ であり、$u(0, 1, ..., 1) - u(1, 1, ..., 1) = Lt^1 - \varepsilon e^1$ であるからである。

それ故、$x = (0, 1, ..., 1)$ が残された最後の可能性となる。しかし、この行為プロファイルでは、プレイヤー n が行為を 0 へスイッチすべきとなる。なぜなら $u(0, 1, ..., 1, 1) = \sum_{i=2}^{n-1} t^i + (1 + L)t^1 + (0, \varepsilon, ..., \varepsilon) = -t^n + Lt^1 + (0, \varepsilon, ..., \varepsilon)$ であり、一方 $u(0, 1, ..., 1, 0) = Lt^1 + (0, \varepsilon, ..., \varepsilon, 0)$ となり、$u(0, 1, ..., 1, 0) - u(0, 1, ..., 1, 1) = t^n - \varepsilon e^n$ であるからである。 ■

5.6 結論

ゲーム理論による道徳規範に関する従来の研究はインセンティブの側面を扱ったものが大半である。与えられた道徳規範に人々が従うインセンティブが働くかどうか、がそこでの研究テーマであったように思う。しかし道徳規範の研究はこれだけでは尽きないだろう。本稿では全く新しい研究を行った。ある仮想的な、しかし人々に強くアピールすると思える道徳規範を伴うゲームを考え、このゲームの社会的帰結に関して論理的な分析を行ったのである。本章も規範経済学に属する研究であり、現実に存在する手続き的正義がどう機能しているか、といった実証的研究ではないことは、明確に認識するべきである。

本章での問題設定それ自体は、社会的選択理論やメカニズムデザインなどで伝統的に知られているパラダイムの一つである。そのパラダイムでの問いは、社会全体の視点から見て、幾つかの理想的な価値を備えたシステムなり制度なりが、与えられた社

会的な目標を遂行しうる可能性があるかどうか、ということである。このパラダイムの先駆けとなったアロウの不可能性定理は、民主主義的な観点から見れば極めて妥当と思える幾つかの性能基準を有する集団的意思決定ルールが実は存在せず、その意味で民主主義には一つの論理的な限界があることを示した。本章の定理が我々に送るメッセージもこのアロウの定理と同じ種類のものである。それは、プレイヤーの行動に関する、手続き的正義の原則から見て極めて妥当な制約は、ナッシュ均衡を超える成果を決して生み出しえず、手続き的正義にも論理的な限界があることを示しているのである。しかもこの定理には、同時にナッシュ均衡の持つ規範的意味という、もう一つのメッセージも含まれている。（ナッシュ均衡の公理化としては例えば Peleg and Tijs (1996) がある。これらは Consistency を使った公理化であり、ゲームの解に関して公理が課されている。）

5.7 付録

5.7.1 命題 5.1 の証明

証明. F は厚生無差別性を満たす社会コードとする。$(X, \succcurlyeq), (X', \succcurlyeq') \in \Lambda$ は中立性の定義における前提を満たすゲームであるとしよう。一般性を失うことなく、この二つのゲームではプレイヤー 1 の行為の名前のみが異なると仮定する。すなわち $X_i' = X_i$ かつ全ての $i \neq 1$ に関して $\rho_i(x_i) = x_i$ とおく。（一般のケースの証明は他のプレイヤーに対して同じ議論を繰り返して適用すればいい）更に $X_1 \cap X_1' = \emptyset$ と仮定する。（$X_1 \cap X_1' \neq \emptyset$ の場合は次のようにすれば簡単に証明できる。$Y \subset \Omega$ を $|Y| = |X_1| = |X_1'|$、$Y \cap X_1 = \emptyset$、$Y \cap X_1' = \emptyset$ となるように適当に選ぶ。すると先の議論を X_1 と Y、及び Y と X_2 に適用すればよい。）

さて、$(X, \succcurlyeq)$ から始めよう。X_1' に 1 の行為の集合 X_1 を加える。すると任意の $x_1 \in X_1$ に関して x_1 と $\rho(x_1)$ は厚生無差別となるようにとる。こうして構成されたゲームを $((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, \succcurlyeq'')$ と記号する。このとき厚生無差別性は以下のことを含意する。全ての $x \in X$ に関して、

$x_1 \in F_1(X, \succcurlyeq, x_{-1})$

$\iff x_1 \in F_1((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, \succcurlyeq'', x_{-1})$

$\iff \rho_1(x_1) \in F_1((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, \succcurlyeq'', x_{-1})$

$\Longleftrightarrow \rho_1(x_1) \in F_1(X', \succsim', x_{-1})$

厚生無差別性は以下のことも意味する。全ての $x \in X$ と全ての $i \in N \backslash \{1\}$ に関して、

$F_i(X, \succsim, (x_1, x_{N\backslash\{1,i\}}))$

$= F_i((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, \succsim'', (\rho_1(x_1), x_{N\backslash\{1,i\}}))$

$= F_i(X', \succsim', (\rho_1(x_1), x_{N\backslash\{1,i\}}))$ ■

5.7.2 定理 5.1 の証明

証明. F は全ての公理を満足する社会コードとする。背理法にて証明する。あるゲーム $(X, \succsim) \in \Lambda$、あるプレイヤー $j \in N$、及びある $x_{-j}^* \in X_{-j}$ で

(3) $F_j(X, \succsim, x_{-j}^*) \cap BR_j(X, \succsim, x_{-j}^*) = \emptyset$

となるものが存在したとする。記法の便宜上 $B := BR_j(X, \succsim, x_{-j}^*)$ とおく。厚生無差別性より、一般性を失うことなく、$|B| \geq 2$ とおいてよい。$x_j^* \in F_j(X, \succsim, x_{-j}^*)$ を任意にとる。簡単化のため、$j = 1$、$X_1 = \{1, 2, ..., |X_1|\}$、$B = \{1, ..., k-1\}$、及び $x_1^* = k$ $(k \geq 3)$ とする。

$\succsim' \in P(X)^N$ は以下のような選好プロファイルとする。任意の $y_1, y_1' \in B$、任意の $z_1, z_1' \in X_1 \backslash B$、及び任意の $i \in N$ に関して、

(4) $(y_1, x_{-1}^*) \succsim_i' (y_1', x_{-1}^*) \Longleftrightarrow (y_1, x_{-1}^*) \succsim_i (y_1', x_{-1}^*)$

(5) $(y_1, x_{-1}^*) \succ_1' (z_1, x_{-1}^*) \sim_1' (z_1', x_{-1}^*)$

(6) $(y_1, x_{-1}^*) \prec_i' (z_1, x_{-1}^*) \sim_i' (z_1', x_{-1}^*)$ if $i \neq 1$.

これらの条件は $x_{-1} \neq x_{-1}^*$ となる x に関係する選好はなんら特定化はしていない。これは留意すべきである。独立性のおかげでこの規制からは何の問題も生じない。第1の条件は B 上での選好は変わらないことになる。(5) と (6) の無差別選好は各プレイヤーは $X_1 \backslash B$ 上では無差別選好であることがわかる。(5) と (6) の強選好は B が x_{-1}^* に対する 1 の最適反応の集合としてあり続けることを意味している。他のプレイヤーは B の外側の方がより良くなるにも関らず、である。

$\succsim$ から $\succsim'$ への変化は行為プロファイル (y_1, x_{-1}^*) with $y_1 \in B$ での各プレイヤーの弱 (強) 下方集合 (lower contour set) を収縮させるだけである。故に、単調性と独立性より、この選好変化はどの $x_1 \in B$ をも x_{-1}^* に対するフェアプレイにはさせない、つまり $F_1(X, \succsim', x_{-1}^*) \cap B = \emptyset$ であることになる。実際、仮に $x_1 \in F_1(X, \succsim', x_{-1}^*) \cap B$

とすれば、単調性と独立性より $x_1 \in F_1(X, \succcurlyeq, x^*_{-1})$ でなければならない。これは前提に反する。

いま、$\{k, k+1, ..., |X_1|\}$ に属する行為は全て、x^*_{-1} を所与としたとき全てのプレイヤーにとって無差別であることに留意しよう。だから、k 以外のこれら全ての行為を取り除くと、1 の行為の集合は $\{1, ..., k\}$ となる。取り除かれた行為は k と厚生上は区別付かないので、厚生無差別性と独立性より、B 内のどの行為もフェアプレイにはならない、つまり

$F_1(\{1, ..., k\} \times X_{-1}, \succcurlyeq', x^*_{-1}) \cap B = \emptyset$

である。F は非空値なので、

(7) $F_1(\{1, ..., k\} \times X_{-1}, \succcurlyeq', x^*_{-1}) = \{k\}$

である。匿名性と厚生無差別性より、この結論は他のゲーム、プレイヤーにも拡張できる。つまり、任意のプレイヤーに関して、そのプレイヤーが、次のような状況におかれているとしよう。彼（彼女）にとってある行為 x の選択が（一意の）一番悪い帰結をもたらす（それ以外の行為はすべて最適反応である）が、そのプレイヤー以外の全員に対して（一意の）最良の帰結をもたらす。このとき社会コードがそのプレイヤーに許容する行為は、x のみとなる。定理 5.1 を否定するならば、社会コードは上記の意味での利他主義（自己犠牲）奨励コードとならざるを得ない。以下ではこのコードが有効性を満たさないことを証明する。フェアプレイプロファイルが存在しないようなゲームを構成するのである。これで定理 5.1 の証明が完成する。

任意の $i \in N$ に関して、$u_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ は選好 $\succcurlyeq'_i$ を表現する効用関数とする。ただし $u_i(k, x^*_{-1}) = 0$ と基準化しておく。関数 $f : K \times N \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x_1, i) := u_i(x_1, x^*_{-1})$ とおく。ここで $K = \{1, 2, ..., k\}$ である。

この関数は一つの $k \times n$ 行列の式表現である。この行列の (x_1, i) 成分は i が行為プロファイル (x_1, x^*_{-1}) でゲーム $(X, \succcurlyeq)$ にて得る利得である。$u_i(k, x^*_{-1}) = 0$ の基準化のせいで、$f(k, i) = 0$ が全ての i に関して成り立っている。

関数 $\pi : N \times N \longrightarrow N$ を $\pi(i, j) := i - j + 1 \ (mod\ n)$ と定義する。

任意の $i \in N$ に関して、$\alpha_i : \{1, ..., n-1\} \times K \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ 及び $\beta_i > 0$ としよう。$\alpha_i(\cdot)$ と β_i の値は正の値である限り、何でもよい。ただしこれらの値は証明の最後まで固定されているものとする。

さていまや所望のゲームを定義する段階に来た。プレイヤーの行為の集合は全員同

じで、$K=\{1,...,k\}$ とする。各 i に関して利得関数 $v_i : K^N \longrightarrow \mathbb{R}$ は以下の通りとする。

(8) $v_i(x) := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i(j, x_n) f(x_j, \pi(j,i)) + \beta_i f(x_n, \pi(n,i))$ if $x_n < k$,

(9) $v_i(x) := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i(j,k)[f(k+1-x_j, \pi(j,i)) - f(1, \pi(j,i))]$ if $x_n = k$

以下ゲーム $(K^N, v), v=(v_i)_{i\in N}$ がフェアプレイプロファイルを持たないことを証明する。

補題 5.1 (K^N, v) における任意のフェアプレイプロファイル x に関して、$x_n < k$ ならば、全ての $i \neq n$ に関して $x_i = k$ である。

証明. x はフェアプレイプロファイルであり、$x_n < k$ としよう。$i \neq n$ をとる。x_{-i} を所与としてプレイヤー i が受け取ることのできる利得の集合を考えよう。(8) から、

$v_i(\cdot, x_{-i}) =$ 定数+ $\alpha_i(i, x_n) f(\cdot, 1)$

となる。ここで「定数」とあるが、これは i の行為の選択とは独立に決まってくる項のことである。i の選択が他のプレイヤーの厚生に与える影響も見ておく必要がある。全ての $j \in N$ に関して、

$v_j(\cdot, x_{-i}) =$ 定数+ $\alpha_j(i, x_n) f(\cdot, \pi(i,j))$

これらの等式から、他のプレイヤーが x_{-i} を選んでいるときのプレイヤー i のポジションは、x^*_{-1} を所与としてゲーム $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq')$ でのプレイヤー 1 のポジションと同一であることがわかる。プレイヤー j はプレイヤー $\pi(i,j)$ が $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq')$ にて演じる役と同じ役割を果たしている。形式的には、任意の行為のペア $a, a' \in K$ と任意の $j \in N$ に関して、

$v_j(a', x_{-i}) > v_j(a, x_{-i}) \Longleftrightarrow (a', x^*_{-i}) \succ'_{\pi(i,j)} (a, x^*_{-i})$ である。このとき、匿名性、独立性、厚生無差別性、中立性、及び（7）より、$F_i(K^N, v, x_{-i}) = \{k\}$ となる。 ■

補題 5.2 (K^N, v) における任意のフェアプレイプロファイル x に関して、もし全ての $i \neq n$ に関して $x_i = k$ であれば、$x_n = k$ である。

証明. x はフェアプレイプロファイルであり、$x_{-n} = (k, ..., k)$ であるとしよう。$f(k, \cdot) = 0$ であるから、

全ての $i \in N$ に関して $v_i(\cdot, x_{-n}) = \beta_i f(\cdot, \pi(n,i))$ となる。$\pi(n,n) = 1$ であるから、これはプレイヤー n のポジションが x^*_{-1} を所与としてゲーム $(K \times$

$X_{-1}, \succcurlyeq')$ でのプレイヤー 1 のポジションと同一であることを意味している。故に、$F_n(K^N, v, (k, ..., k)) = \{k\}$ となる。 ■

補題 5.1, 5.2 はフェアプレイプロファイルが存在すれば $x_n = k$ であることを意味する。

補題 5.3 (K^N, v) における任意のフェアプレイプロファイル x に関して $x_n = k$ であれば、全ての $i \neq n$ に関して $x_i = 1$ である。

証明. x はフェアプレイプロファイルであり、$x_n = k$ であるとしよう。$i \neq n$ をとり、このプレイヤーの行為の選択が利得ベクトルに与える影響を考察しよう。v の定義より、全ての $y_i \in X_i$ と全ての $j \in N$ に関して、

$v_j(y_i, x_{-i}) =$ 定数 $+\alpha_j(i,k)f(k+1-y_i, \pi(i,j))$

である。ここで「定数」とは y_i に関して一定であることを意味している。この式は、前と同様、状況 (K^N, v, x_{-i}) における各プレイヤー $i \neq n$ のポジションは状況 $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq', x^*_{-1})$ でのプレイヤー 1 のそれと同一であることを意味している。しかし今度は、$(K \times X_{-1}, \succcurlyeq', x^*_{-1})$ における行為 k は (K^N, v, x_{-i}) における行為 $k+1-k=1$ に対応してはいるが。それ故プレイヤー i にとってのフェアプレイは 1 のみである：$F_i(K^N, v, x_{-i}) = \{1\}$ となる。 ■

以上から、フェアプレイプロファイルが存在するとしたら、それは $(1, ..., 1, k)$ である他ない。しかし、次の補題では $(1, ..., 1, k)$ はフェアプレイプロファイルではないことが判明する。これをもって、(K^N, v) がフェアプレイプロファイルを持たないことになり、有効性に矛盾し、定理 5.1 の証明は完結する。 ■

補題 5.4 行為プロファイル $(1, ..., 1, k)$ はゲーム (K^N, v) でのフェアプレイプロファイルではない。

証明. 任意の行為のペア $a, a' \in K$ と任意の $i \in N$ に関して、

(10) $v_i(1, ..., 1, a') > v_i(1, ..., 1, a) \Longleftrightarrow (k+1-a', x^*_{-1}) \succ'_{\pi(n,i)} (k+1-a, x^*_{-1})$

を示せば十分である。実際、この条件が成り立てば、$x_{-n} = (1, ..., 1)$ に対するプレイヤー n のポジションはゲーム $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq'$) における x^*_{-1} に対するプレイヤー 1 のポジションに実質的には等しい。違いは、(K^N, v) におけるプレイヤー i が $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq'$) におけるプレイヤー $\pi(n,i)$ に相当し、(K^N, v) における行

為 a が $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq')$ における行為 $k+1-a$ に相当すること、及びプレイヤー $i \neq 1$ は (K^N, v) と $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq')$ では違った数の行為を持っていること、である。これらの相違点は、しかしながら、匿名性、厚生無差別性、及び独立性の下では本質的な差異ではない。故に（10）は $x_n = 1$ のみがゲーム (K^N, v) での $x_{-n} = (1, ..., 1)$ を所与としてプレイヤー n のただ一つのフェアプレイとなる、つまり $F_n(K^N, v, (1, ..., 1)) = \{1\}$ である。故に $(1, ..., 1, k)$ は (K^N, v) でのフェアプレイプロファイルではない。残る証明は（10）式の成立である。

以下が成立すれば（10）も成り立つ。任意の $i \in N$ と任意の $x_n < k$ に関して、

（11） $v_i(1, ..., 1, x_n) - v_i(1, ..., 1, k) = f(k+1-x_n, \pi(n,i)) - f(1, \pi(n,i))$

この式は関数 $v_i(1, ..., 1, \cdot)$ は、定数項を無視すれば、$f(\cdot, \pi(n,i))$ と同一であることを示している。尤も、関数の定義域の変数の並び方の順序は逆ではある。つまり $v_i(1, ..., 1, x_n)$ は $f(k+1-x_n, \pi(n,i))$ に対応している。

（8）と（9）から、（11）は次の式と同値である。

（12） $\sum_{j=1}^{n-1} f(1, \pi(j,i))[\alpha_i(j, x_n) + \alpha_i(j,k)] + \beta_i f(x_n, \pi(n,i))$
$= f(k+1-x_n, \pi(n,i)) - f(1, \pi(n,i))$

この条件は $\alpha_i(\cdot,\cdot)$ と $\beta_i(\cdot,\cdot)$ を任意に選んだ場合は必ずしも成立はしない。しかしながら、以下の主張は成り立つ：任意の $i \in N$ に関して、$\alpha_i : \{1, ..., n-1\} \times K \to \mathbb{R}_{++}$ と $\beta_i > 0$ で、全ての $x_n < k$ に関して（12）が成り立つものが存在する。この主張の証明を以下行いたい。とりあえず我々の証明にとってはこれで十分である。なぜならここまでの議論は $\alpha_i(\cdot,\cdot)$ と $\beta_i(\cdot,\cdot)$ の値はそれらが厳密に正である限り、どのような値でも成り立つからである。

さて主張を証明するため、$i \in N$ を一人取り出し固定する。一つの重要な留意点は以下のことである。全ての $x_n < k$ に関して、

$f(1, \pi(i,i)) > 0$ and $f(x_n, \pi(n,i)) < 0$ if $i \neq n$,

$f(1, \pi(1,i)) < 0$ and $f(x_n, \pi(n,i)) > 0$ if $i = n$

であること、これである。これは $\succcurlyeq'$ の定義と $f(k, \cdot) = 0$ の基準化からいえる。それ故、全ての $x_n < k$ に関して、（12）の左側は正・負両方の項を含んでいる。そこで（12）式の各項のウエイトを適切に選べば、この式は、全ての $x_n < k$ に関して成り立つということが直ちに明らかになる。しかしながら、$\alpha_i(j, x_n)$ が x_n に依存するのに対し、β_i は x_n に依存しないことは注意すべきである。

厳密な証明は以下のようになる。最初に $i \neq n$ のケースを考える。$\beta_i > 0$ を十分大きくとり、全ての $x_n < k$ に関して、

$$(13)\quad \sum_{j=1}^{n-1} f(1,\pi(j,i)) + \beta_i f(x_n,\pi(n,i)) < f(k+1-x_n,\pi(n,i)) - f(1,\pi(n,i))$$

が成り立つようにする。(（13）の左側は（12）のそれに、全ての (j,x_n) に関して $\alpha_i(j,x_n) = 1/2$ であるときは一致する。) $f(1,\pi(i,i)) > 0$ だから、(12) の等号は $\alpha_i(i,x_n)$ を増加させれば成り立つ。

$i = n$ のケースも同様である。最初に、$\beta_i > 0$ を十分大きくとり、全ての $x_n < k$ に関して、(13) の不等号を逆にした式が成り立つようにおく。この不等式は全ての (j,x_n) に関して $\alpha_i(j,x_n) = 1/2$ とおけば、(12) の左側がその右側よりも大きいことを示している。$f(1,\pi(1,n)) = f(1,n) < 0$ だから、(12) の等号は $\alpha_n(1,x_n)$ を増加させることによって達成できる。

総括すると、最後の二つのパラグラフは、全ての i に関して、α_i と β_i で (12) を全ての $x_n < k$ に関して成り立つようにできるものが存在することを示している。故に (19) は成り立つ。前に議論したように、(10) は $F_n(K^N,v,(1,...,1)) = \{1\}$ を意味し、それ故 $(1,...,1,k)$ はフェアプレイプロファイルではなくなる。■

留意点 5.2　証明は $\Lambda' \supset \Lambda^{NE}$ となる任意のゲームの集合 Λ' に関しても成り立つ。定理 5.1 の証明はナッシュ均衡を持つゲームのみを使って遂行されているからである。(K^N,v) と $(K \times X_{-1}, \succcurlyeq')$ に関しては、この点はトリビアルである。なぜなら $\succcurlyeq'$ は x^*_{-1} に関する一列のみを特定化しているだけだからである。これらのゲームがナッシュ均衡を持つことを示すのは、さほど難しくはない。(K^N,v) では、$k > 2$ より、証明中の議論から $(1,...,1,2)$ はナッシュ均衡であることがわかる。故に $(K^N,v) \in \Lambda^{NE}$ である。

5.7.3　定理 5.1 における公理系の独立性

定理 5.1 での公理はいずれも定理 5.1 の成立にとって必要不可欠である。以下の例がそのことを示している。

例 5.4（独立性：大域パレートコード）

$GP(X,\succcurlyeq)$ はゲーム $(X,\succcurlyeq)$ における強パレート効率的な行為プロファイルの集合とする。社会コードを以下のように定義する。

$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) := \{x_i \in X_i : (x_i, x'_{-i}) \in GP(X, \succcurlyeq)$ （ある $x'_{-i} \in X_{-i}$ に関して$)\}$

すなわち、ある行為がフェアプレイであるには、何か一つの他のプレイヤー達がとる行為 (それは実際に彼らが取っている行為 x_{-i} と必ずしも同じである必要はない) 結びついて、その行為が強パレート効率的な帰結を導くのが必要かつ十分である。このコードは独立性を除く全ての公理を満たしている。定理 5.1 の包含関係が二つ共に成立しないことは次の例を見ればいい。

	A	B
A	$1, 1$	$1, 0$
B	$0, 3$	$2, 2$

強パレート効率的な選択肢の集合は $\{(B, B), (B, A)\}$ であるから、プレイヤー 1 にとってのフェアプレイは B のみ、一方プレイヤー 2 にとってのフェアプレイは A と B である。これらはいずれも他のプレイヤーのとる行為に関係なく決まる。故に $FPE(X, \succcurlyeq, F) = \{(B, A)\}$ である。一方 $NE(X, \succcurlyeq) = SNE(X, \succcurlyeq) = \{(A, A)\}$ である。

例 5.5（匿名性：独裁制コード）

ある個人 $k \in N$ が存在して、全ての $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、全ての $i \in N$、及び全ての $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、

$F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) := \{x_i \in X_i : (x_i, x_{-i}) \succcurlyeq_k (y_i, x_{-i})$ (全ての $y_i \in X_i$ に関して$)\}$

一つの行為がフェアプレイであるのはそれが独裁者にとって最適であるとき、そしてそのときのみである。このコードは匿名性を除く全ての公理を満たす。このコードのもとでは定理 5.1 の二つの包含関係はいずれも成立しないのは自明である。

例 5.6（単調性：逆パレートコード）

このコードは最初に人々の選好を逆さまにして、そこに局所強パレートコード（例 2）を適用することによって定義される。形式的定義は以下のとおりである。$(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、$x \in X$, $i \in N$ を所与として、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ であるのは、以下のような $x'_i \in X_i$ が存在しないときそしてそのときに限られる：$(x'_i, x_{-i}) \preccurlyeq_k (x_i, x_{-i})$ が全ての $k \in N$ に対して成り立ち、かつ少なくとも一人の k に関してはこの関係が厳密な選好関係にて成り立つ。このコードは単調性を除く全ての公理を満たす。定理 5.1 での二つの包含関係が成り立たないのは次の例から明らかである。

	A	B
A	$2,2$	$1,1$
B	$1,1$	$0,0$

このとき $FPE(X, \succcurlyeq, F) = \{(B, B)\}$ である。一方 $NE(X, \succcurlyeq) = SNE(X, \succcurlyeq) = \{(A, A)\}$ である。

例 5.7（厚生無差別性：条件付き自己犠牲性コード）

このコードは大まかに言うならば以下のようになる。あるプレイヤーのある行為がフェアプレイでないのは、それが他の全てのプレイヤーにとって最も好まれない唯一の行為であり、かつ行為の数が十分に多いとき、そしてそのときのみである、と。いわばこのような条件が揃ったとき、プレイヤーの行為は禁止される。形式的定義は以下のとおりである。ゲーム $(X, \succcurlyeq)$ を任意に取る。仮に $\sum_{i \in N} 1/|X_i| \geq 1$ ならば、どの行為も全てのプレイヤーと全ての状況においてフェアプレイであるとする。つまり、全ての i と x_{-i} に関して $F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) := X_i$ とする。他方、$\sum_{i \in N} 1/|X_i| < 1$ ならば、つまり行為の数が各プレイヤーに関して十分多いならば、任意の $x \in X$ と任意の $i \in N$ に関して $x_i \notin F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ であるのは、全ての $x'_i \in X_i \backslash \{x_i\}$ と $k \in N \backslash \{i\}$ に関して $(x'_i, x_{-i}) \succ_k (x_i, x_{-i})$ であるときそしてそのときに限られる。

このコードは厚生無差別性を除く全ての公理を満たしている。有効性の成立を見るために、$\sum_{i \in N} 1/|X_i| < 1$ と仮定しよう（そうでないときはトリビアルである）。さて一つの状況を所与として、各プレイヤーにとってフェアプレイでない行為は高々一個しかない。ここが着眼点である。それゆえ、フェアプレイプロファイルでない行為プロファイルの個数の最大値は $\sum_{i \in N} \prod_{j \neq i} |X_j|$ である。それゆえ、フェアプレイプロファイルの個数の最小値は

$$\prod_{i \in N} |X_i| - \sum_{i \in N} \prod_{j \neq i} |X_j| = (1 - \sum_{i \in N} 1/|X_i|) \prod_{i \in N} |X_i| > 0$$

である。

このコードが厚生無差別性を満たさないことは、次の例から明らかである。

	A	B	C
a	$1,3$	$0,0$	$0,0$
b	$3,1$	$0,0$	$0,0$

	A	B	C
a	$1,3$	$0,0$	$0,0$
b	$3,1$	$0,0$	$0,0$
c	$3,1$	$0,0$	$0,0$

どちらのゲームでも $1/|X_1| + 1/|X_2| < 1$ となる。故に、プレイヤー 2 が A をプ

レイすれば、社会コードは左のゲームで b をフェアプレイとはしないことになる。なぜならその状況で b がプレイされれば、プレイヤー 2 にとって最も好まれない唯一つの選択肢が帰結するからである。一方右のゲームでは b は同じ状況でフェアプレイとなる。プレイヤー 2 にとって c が b と同程度に悪いからである。

左のゲームは定理 5.1 の包含関係が成り立たないことも示している。$FPE(X, \succcurlyeq, F) = \{(a, A)\}$ であり、$NE(X, \succcurlyeq) = SNE(X, \succcurlyeq) = \{(b, A)\}$ であるからである。

このコードは中立性も満たしていないから、この例は厚生無差別性を中立性に置き換えても定理 5.1 は成立しないことをも示している。

例 5.8（有効性：ボルタコード）

このコードは、任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda$、任意の $x \in X$、及び任意の $i \in N$ に関して、$x_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ であるのは、(x_i, x_{-i}) が $\{(x'_i, x_{-i}) : x'_i \in X_i\}$ 上でボルタ数が最大となるとき、ただし、全てのプレイヤーにとって無差別であるような行為プロファイルは同じ選択肢とみなす（例えば、全ての $k \in N$ に関して $(x'_i, x_{-i}) \sim_k (x''_i, x_{-i})$ であれば、この二つは同じ選択肢である。ボルタ数は、これらのうち一つを残し、残りは削除した上で計算する）、そしてそのときのみである。このコードは有効性を除く全ての公理を満たしている。有効性を満たさないのは、次の例からわかる。

	a	b	c
a	$5, 3$	$4, 2$	$0, 1$
b	$1, 5$	$3, 1$	$2, 0$
c	$0, 4$	$2, 5$	$1, 2$

例えば、プレイヤー 2 が a をプレイすれば、プレイヤー 1 にとってのフェアプレイは b のみとなる。実際、最初の一列目の行為プロファイルの中で、(b, a) はプレイヤー 2 にとっては第 1 位、プレイヤー 1 にとっては第 2 位である。一方 (a, a) はプレイヤー 1 にとっては第 1 位だが、プレイヤー 2 にとっては第 3 位である。故に、ボルタ数を計算すると、(b, a) は (a, a) より大きくなる。このコードはどの状況でも非空のフェアプレイの行為の集合を定義できる。しかし、上のゲームではフェアプレイプロファイルは一つも存在しない。実際、プレイヤー 2 が c をプレイすれば、プレイヤー 1 は c をプレイすべきである。しかしこの場合、プレイヤー 2 は b をプレイすべきとなる。更にこの場合、プレイヤー 1 は a をプレイすべきとなる。この場合、プレイヤー 2 は a をプレイすべきとなる。先に確認したとおり、この場合はプレイヤー 1

は b をプレイすべきであった。そしてこのときプレイヤー 2 は b をプレイすべきとなり、循環が成立してしまう。プレイヤー 2 の全ての行為をわたってしまっているので、フェアプレイプロファイルは存在しない。

このゲームでは定理 5.1 での包含関係は成立していない。まず $FPE(X,\succcurlyeq,F)=\emptyset$、$NE(X,\succcurlyeq)=SNE(X,\succcurlyeq)=\{(a,a)\}$ である。$FPE(X,\succcurlyeq,F)\subset NE(X,\succcurlyeq)$ が成立しないことを見るために、先のゲームで 1 列目のみからなるゲームを考えよう。このとき $FPE(X,\succcurlyeq,F)=\{(b,a)\}$ かつ $NE(X,\succcurlyeq)=\{(a,a)\}$ である。

5.7.4　命題 5.2 の証明

この命題の証明には命題 5.4 の証明での (3) 式で記述されるゲームを使用することを予め言っておきたい。F は命題の公理を満たす社会コードであり、$(X,\succcurlyeq)\in\Lambda^{SNE}$ としよう。次の関係を証明すれば十分である。

補題 5.5 全ての i と全ての x_{-i} に関して、$|BR_i(X,\succcurlyeq,x_{-i})|=1$ ならば、$BR_i(X,\succcurlyeq,x_{-i})\subset F_i(X,\succcurlyeq,x_{-i})$

証明. 背理法を用いる。ある $y\in X$ とある $i\in N$ に関して $BR_i(X,\succcurlyeq,y_{-i})=\{y_i\}$ かつ $y_i\notin F_i(X,\succcurlyeq,y_{-i})$ としよう。以下 w_{-i} なる記号が登場するが、これは以下の通りである。もし $|X_{-i}|>1$ ならば、$w_{-i}\neq y_{-i}$ となる $w_{-i}\in X_{-i}$ を任意に選んでいる。もし $X_{-i}=\{y_{-i}\}$ ならば、$w_{-i}=y_{-i}$ とおいている。w_{-i} はこうして定義されたある特定の行為の組である。$\succcurlyeq'$ は以下のような利得ベクトル関数 $v:X\longrightarrow\mathbb{R}^N$ にて表現される選好プロファイルとしよう。

$v(x)$

$=(1,...,1)$ if $x=y$,

$=(2,...,2,0,2,...,2)$ if $x_{-i}=y_{-i}$ かつ $x_i\neq y_i$,

$=(3,...,3)$ if $x=(y_i,w_{-i})$ かつ $w_{-i}\neq y_{-i}$,

$=(2,...,2)$ otherwise

ここで第 2 項での 0 は第 i 番目に入る。このゲームでは (y_i,w_{-i}) が狭義ナッシュ均衡なので、$(X,\succcurlyeq')\in\Lambda^{SNE}$ である。

構成により、全ての $x\in X$ と全ての $j\in N$ に関して、

(1)　$y\succcurlyeq'_j x\Longrightarrow y\succcurlyeq_j x,\ y\succ'_j x\Longrightarrow y\succ_j x$

が成り立つ。これを見るため、$y \succcurlyeq'_j x$ が $x \neq y$ にて成立するためには、$x_{-i} = y_{-i}$ かつ $j = i$ であるときに限られる点に留意されたい。しかしそのときには $y \succ_j x$ となる。なぜなら y の最初の選び方から $\{y_i\} = BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ だからである。(1) は $\succcurlyeq$ から $\succcurlyeq'$ への変化において、y の相対的順位は、どのプレイヤーにとっても上がってはいないことを示している。それ故、単調性と独立性により、$y_i \notin F_i(X, \succcurlyeq', x_{-i})$ となる。y_i 以外の全ての行為 x_i は y_{-i} を所与として厚生無差別であるから、厚生無差別性と独立性より $F_i(X, \succcurlyeq', x_{-i}) = X_i \backslash \{y_i\}$ である。

行為 $z_i \in X_i \backslash \{y_i\}$ を任意に取る。y_i と z_i 以外の行為は X_i から全て除く。$X'_i := \{y_i, z_i\}$ を i の新しい行為の集合とし、$X' := X'_i \times \prod_{j \neq i} X_j$ を新しい行為プロファイルの集合とする。(y_i, w_{-i}) はこのゲームに残るので、$(X', \succcurlyeq') \in \Lambda^{SNE}$ である。厚生無差別性により $F_i(X', \succcurlyeq', y_{-i}) = \{z_i\}$ である。y_{-i} を所与として、プレイヤー i は y_i の方を好み、他のプレイヤーは皆 z_i の方を好む。それ故、匿名性、厚生無差別性、及び独立性より次のことがわかる：任意のゲームで、ある所定のプレイヤー j が行為を a と b の二つしか持っておらず、x_{-j} を所与としてプレイヤー j は a の方を好み、他のプレイヤーは皆 b の方を好めば、j は b をプレイすべきだ、と。厚生無差別性により、この結論は j が二つ以上の行為を持っている場合にも拡張できる。

$n \geq 3$ の場合は、証明は命題 5.4 でのそれと同じである：命題 5.4 での (3) 式でのゲームを利用すればよい。$n = 2$ では命題 5.4 の証明はそのままでは使えない。なぜならこの証明はパレート優越性に依拠しているからである。そこで、次のようなゲームを考える。

	A	B	C
a	$1,1$	$2,0$	$2,0$
b	$0,2$	$2,0$	$0,2$
c	$0,2$	$0,2$	$2,0$

このゲームは狭義ナッシュ均衡 (a, A) を持つ。前パラグラフで導かれた結論から、もしプレイヤー 2 が A をプレイしているならば、プレイヤー 1 は b または c をプレイすべきとなる。なぜならそうすることによって彼の境遇は悪くなり、他のプレイヤーの境遇は良くなるからである。同じ議論によって、どの行為プロファイルでも少なくとも一人のプレイヤーはその行為を変えねばならないことが容易に証明できる。

■

補題 5.5 にはもう一つの含意がある。各プレイヤーの持つ行為が二つの場合、$FPE \subset NE$ の関係は Λ^{SNE} 上で保持される、ということである。ただし $n \geq 3$ の仮定が必要である。補題 5.5 の証明を見直さばわかるが、$n = 2$ では各プレイヤーが 3 個の行為を持つ必要があるからである（これに対して $n \geq 3$ での補題の証明は、各プレイヤーも持つ行為が二つで遂行されている。）

系 5.2 $n \geq 3$ で社会コードの定義域は全ての i に関して $|X_i| = 2$ である Λ^{SNE} 内のゲーム $(X, \succcurlyeq)$ 全てであるとしよう。社会コード F は匿名性、単調性、独立性、厚生無差別性、及び有効性を満たすとする。このとき定義域内での全てのゲームに関して、

$SNE(X, \succcurlyeq) \subset FPE(X, \succcurlyeq, F) \subset NE(X, \succcurlyeq)$

となる。

証明. $FPE(X, \succcurlyeq) \subset NE(X, \succcurlyeq)$ のパートのみ証明が必要である。$x \in FPE(X, \succcurlyeq, F)$ かつ $x \notin NE(X, \succcurlyeq)$ となる行為プロファイル x が存在したとしよう。i は x_i が x_{-i} に対する最適反応とならないプレイヤーとする。二つの行為しか i は持たないから、$BR_i(X, \succcurlyeq, x_{-i}) = \{y_i\}$ となる。ここで $X_i = \{x_i, y_i\}$ である。しかし補題 5.5 よりこのときは $y_i \in F_i(X, \succcurlyeq, x_{-i})$ である。それ故 i は自分の最適反応にスイッチすることが許されるので、矛盾に逢着する。 ■

第 6 章

道徳規範の公理分析（その 2）

6.1　序論

前章での議論ではプレイヤーは混合戦略をとりえなかった。本章ではこの想定を外し、プレイヤーが混合戦略をも取り得るという前提の下で議論を再構成したい。

混合戦略にて議論を再考する理由は以下の二つである。

第 1 に理由は理論的なものである。今日ゲーム理論ではナッシュ均衡は混合戦略で定義するというのが標準となっている。純粋戦略のみのゲームでは理論的な説得力を有しない。特に我々が前章で得た主要定理は純粋戦略のみという想定に強く依存するのではないか、という疑念は払底できない。主要結果とはいうまでもなく、「社会コードが幾つかの規範的公理を満たすとき、フェアプレイ均衡は全てナッシュ均衡であり、更にある種の公理系の下では両者は一致する」のことである。果たしてこの主要定理は混合戦略の下で生き残るかどうか？これは是非とも確認すべき課題である。

第 2 の理由はいささか長くなる。これは社会コードの解釈に関してである。混合戦略を考えるということは社会コードの定義も改訂しなければならない。それは以下のような設定になるだろう。あるゲーム G を所与とする。プレイヤー i が他のプレイヤー達のとる混合戦略の組が m_{-i} であるという状況の下で、彼はどの混合戦略 m_i をとるべきか（とるべきでないか)、という具合にである。この設定が社会コードを一種の道徳規範と見做すときにどのような含意を含んでいるのであろうか？ポイントは二つある。

第 1 のポイントは「・・・他のプレイヤー達のとる混合戦略の組が m_{-i} である・・・」という文言に関係している。我々がある状況にて正しい選択行為を強いられている、

そういう場面を想像しよう。このとき、我々は往々にして、自分が果たしてどのような状況に直面しているのか、はっきりとは認識できてはいないことがある。「この状況ではこうすべきだ」という原則そのものは明確であっても、複雑な現実の下であっては、この原則がすんなりと適用できるとは限らない。多くの場合、実際に自分が置かれている状況は原則の適用が正当化される「この状況」に果たして該当するか否か、はにわかには判断しがたいからだ。判断できない理由は状況に対する情報の欠如、あるいは判断する側の思考力・判断力の限界など様々あるだろうが、とにかく原則どおりにはいかない、という経験は誰しも持っているものと思う。行為者が（彼・彼女にとって）不確定な要素の残る状況にて選択を強いられているのであり、そしてこの経験的事実がゲーム理論の枠組みでの「・・・他のプレイヤー達のとる混合戦略の組が m_{-i} である・・・」という設定に読み込まれていると考えるのである。

第 2 のポイントは「・・・彼はどの混合戦略 m_i をとるべきか（とるべきでないか)」に関っている。自分が置かれている状況を正確に認識できていたとしても、なお人はどの行為を選択すべきか、迷う場合がある。例えば、友人があなたの家に駆け込んできたとしよう。彼は警察に追われている。政治集会にいたところ嗅ぎつけられ追われているのだ。事情の全てを知っているあなたは匿うことにした。暫くして警察がやってきて、友人を出せ、とあなたに言う。このときあなたはどうするか。ここでは二つのモラルコードが対立している。「（友人との）約束は守るべきだ」というコードと「嘘はついてはならない」というコードだ。両者はこの設定では両立しそうにない。こういう状況下では人は二つのコードの妥協点を探るはずである。両者を適切にミックスして中間的な解を求めるに違いない。これが「・・・彼はどの混合戦略 m_i をとるべきか（とるべきでないか)」に関する我々の解釈である。社会コード自身が幾つかのサブコードから組み合わせであり、しかも状況によってはこれらのコードは相反する指示を与える可能性がある時には、人は混合戦略を選択するだろう。

さて本章で得られた結果を簡単に素描しておきたい。モデルは前章のモデルとほぼ同じである。ただし混合戦略を用いることによる変更点がある。それはプレイヤーの選好であり、彼らが序数的選好順序を持つという想定を変えて、選択肢の集合上で効用関数を持つという想定に変える。ここで選択肢（社会状態）とは各プレイヤーのとる純粋戦略（行為）からなるリストのことである。この効用関数を基にしてプレイヤーの混合戦略プロファイル全ての集合上での効用関数が、一つのフォンノイマン・

モルゲンシュテルン型効用関数として与えられる。

前章で登場した公理もこの変更に従って改訂を受けることになる。匿名性、効用無差別性、独立性、単調性がそのような改訂を受ける公理である。これらの公理は同一と見做せる二つの状況間での社会コードの判断の整合性を要求していた。前章では状況間の同一性は各プレイヤーの持つ序数的選好で評価されていた。つまり選択肢間での各プレイヤーの順位付けのみが重要であった。しかしここでは、プレイヤーが選択肢に割り当てる効用数値の大きさも関係してくる。上の四つの公理もその趣旨に沿って改訂される。新しい公理としてアフィン変換からの不変性がある。これは各プレイヤーの効用関数のアフィン変換は社会コードの判断に影響を与えないことを要求する。またこれに関連して、独立性を少し弱くしたバージョン、弱独立性、も定義される。

さて我々は社会コードが匿名性、効用無差別性、独立性、単調性、及び有効性を満たせば、狭義ナッシュ均衡は全てフェアプレイ均衡であり、またフェアプレイ均衡は全てナッシュ均衡であることを示す (定理 6.1)。更に社会コードがこの五つの公理に加えて連続性も満たすならば、フェアプレイ均衡集合はナッシュ均衡集合と一致することも示す (定理 6.2) 。前章での主要結果は生き残るのである。なお上の二つの結果で独立性は弱独立性とアフィン変換からの不変性に置き換えることもできる (命題 6.5)

本章の構成について簡潔に述べておく。第 6.2 節は記号と定義である。社会コードとフェアプレイ均衡の定義を行なう。第 6.3 節は公理を定式化する。公理に関しての幾つかの重要な結果を証明する。第 6.4 節は主要結果とその証明である。第 6.5 節は社会コードの例を幾つか出す。第 6.6 節は結論である。残された問題に関して簡潔な展望を与えたい。証明のうち補題 6.2 の証明は長大なので付録にまわした。その他の証明は本文中で述べることにした。

6.2　記号と定義

n 人のプレイヤーが存在し、その集合を N とする。2 人以上のプレイヤーが存在するものと仮定する。潜在的に存在する行為全ての集合を Ω とする。Ω は加算無限個の要素からなると仮定し、純粋戦略の集合とみなす。Ω の任意の非空有

限部分集合 X_i をプレイヤー i のとりうる行為の集合とする。$X := \prod_{i \in N} X_i$ とおく。$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ は行為（純粋戦略）プロファイルであり、選択肢と同じとみなす。その構成要素 $x_i (i = 1, ..., n)$ はプレイヤー i の行為である。プレイヤー i のとりうる行為の集合が X_i のとき、$M(X_i)$ を i の混合戦略の集合とする。X_i が文脈上明らかであるとき、$M(X_i)$ を M_i と略記する。$M := \prod_{i \in N} M_i$ とおく。$m = (m_1, m_2, ..., m_n) \in M$ は混合戦略プロファイルである。その構成要素 m_i($i = 1, ..., n)$ はプレイヤー i の混合戦略である。m_i は X_i から $[0, 1]$ への確率密度関数であり、各 $x_i \in X_i$ に対する生起確率 $m_i(x_i)$ を対応させる。$m_i = (m_i(x_i))_{x_i \in X_i}$ とも記号する。$0 \leq m_i(x_i) \leq 1, \sum_{x_i \in X_i} m_i(x_i) = 1$ である。定義上、行為（純粋戦略）x_i も混合戦略とみなす。これは x_i に確率 1、それ以外の行為に確率 0 を割り当てる確率密度関数である。

以下特に断らない限り、混合戦略プロファイルというときは、幾人かのプレイヤーが純粋戦略をとる場合をも念頭においていると約束する。

用語であるが、ここで純粋戦略を行為と解釈し、そう呼ぶことにする。純粋戦略であると断定できないときは混合戦略と呼ぶ。行為とは呼ばない。混合戦略は単に戦略と呼ぶ場合もある。図式で書くと、純粋戦略の集合 = 行為の集合 $\subset$ 混合戦略の集合＝戦略の集合である。

各プレイヤー i は M 上で選好を持つが、それは以下の手順で構成される効用関数である。X 上での効用関数 u_i を所与とする。M 上での i の効用関数 v_i は、任意の $m \in M$ に関して

$$v_i(m) := \sum_{x \in X} \prod_{i \in N} m_i(x_i) u_i(x)$$

と定義される。ここで $\prod_{i \in N} m_i(x_i)$ は混合戦略 m にて $x \in X$ が生起する確率である。x_i は x の第 i 成分である。

プレイヤー i の効用関数 v_i は以上のように X 上の効用関数 u_i を基礎にして構成されるノイマン・モルゲンシュテルン型期待効用関数である。以上の構成法からわかるように、M 上の効用関数 v_i は X 上の効用関数 u_i によって一意に決まってくる。よって以下では M と v_i を X と u_i に同一視することにする。X を所与とし、X 上での各プレイヤーの効用関数の組 $u = (u_i)_{i \in N}$ を効用プロファイルと呼ぶ。

各プレイヤーの行為の集合と効用関数が決まれば、一つのゲームができる。ただ構成から明らかなように、ゲームのプリミティブな要素は X とその上での各プレ

イヤー i の効用関数 u_i であるので、ゲームは M と v_i の代わりに X と u_i を充て、$G := (X, u)$ で記号することとしたい。論理的に可能なゲーム全ての集合を Λ とおく。各 i に関して $\emptyset \neq Y_i \subset X_i$ を所与とする。$Y := \prod_{i \in N} Y_i$ としよう。u_i の Y 上への制限を $u_{i|Y}$ とし、$u_{|Y} = (u_{1|Y}, ..., u_{n|Y})$ とおき、ゲーム $(Y, u_{|Y})$ を定義する。文脈上、$u_{|Y}$ の定義が明らかな場合、(Y, u) と記法する。ゲーム (X, u) を所与とする。各プレイヤーのとる混合戦略の組 $m = (m_1, ..., m_n) \in M$ のことを混合戦略プロファイル、または簡潔に戦略プロファイル、と呼ぶ。

任意の $(X, u) \in \Lambda, i \in N, m_{-i} \in X_{-i}$ に関して、プレイヤー i の最適反応とは、全ての $m_i' \in M_i$ に関して $v_i(m_i, m_{-i}) \geq v_i(m_i', m_{-i})$ となる混合戦略 $m_i \in M_i$ のことである。最適反応の集合を $BR_i(X, u, m_{-i})$ と記法する。

定義 6.1 プレイヤー i の持つ社会コード F_i とは、各ゲーム $G := (X, u)$ とそこで他のプレイヤーのとる混合戦略 m_{-i} を所与とした時に、i のとりうる混合戦略の非空集合 $F_i(X, u, m_{-i}) \subset M_i$ を対応させる多価写像として定義される。各プレイヤーの持つ社会コード全てを集め、$F := (F_i)_{i \in N}$ とおき、これを社会コードと呼ぶ。

定義 6.2 ゲーム $G = (X, u)$ と社会コード $F := (F_i)_{i \in N}$ を所与とする。混合戦略プロファイル $m \in M$ が（このゲームでの社会コード F のもとでの）フェアプレイ均衡であるとは、以下の 2 条件が成立するときを言う。任意のプレイヤー i に関して

(1) 全ての $m_i' \in F_i(X, u, m_{-i})$ に関して $v_i(m_i, m_{-i}) \geq v_i(m_i', m_{-i})$

(2) $m_i \in F_i(X, u, m_{-i})$

である。

フェアプレイ均衡全ての集合を $FPE(X, u, F)$ と記号する。ゲーム $G := (X, u)$ でのナッシュ均衡全ての集合を $NE(X, u)$ と記号する。同じく狭義ナッシュ均衡全ての集合を $SNE(X, u)$ と記号する。定義からわかるとおり、フェアプレイ均衡集合は社会コードに応じて変わり得る。

6.3　公理系

以下、社会コードに対する公理を順に導入していく。

N 上の置換 π を所与とする。行為プロファイル x に関して x^{π} を $x^{\pi}_{\pi(i)} := x_i$ で定

義する。また同じく、混合戦略プロファイル m に関して、m^π を $m^\pi_{\pi(i)} := m_i$ で定義する。

定義 6.3 社会コード F が匿名性を満たすとは、任意の二つのゲーム $(X,u),(X',u') \in \Lambda$ と任意の N 上の置換 π に関して、全ての $i \in N$ と全ての $x \in X$ に関して、$X_i = X'_{\pi(i)}$ かつ $u'_{\pi(i)}(x^\pi) = u_i(x)$ であるとき、全ての $i \in N$ と全ての $m \in M$ に関して $F_i(X,u,m_{-i}) = F_{\pi(i)}(X',u',m^\pi_{-\pi(i)})$.

匿名性の前提の下では、任意の混合戦略 m に関して $v'_{\pi(i)}(m^\pi) = v_i(m)$ となる。つまりプレイヤー i をプレイヤー $\pi(i)$ に置き換えたゲームが (X',u') である。

前章での匿名性はその適用に当たって選好順序だけが問題であったが、今回は効用数値もカウントされている。しかし後に分かることであるが、独立性（後述）を満たす社会コードでは、この違いは消滅する。

$(X,u) \in \Lambda$ と $i \in N$ を所与とする。混合戦略 $m_i, m'_i \in M_i$ が厚生無差別であるとは $v_j(m_i,m_{-i}) = v_j(m'_i,m_{-i})$ が全ての $j \in N$ と $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して成り立つときをいう。二つの混合戦略 m_i と m'_i が厚生無差別であるとき、$m_i \simeq m'_i$ と表記する。

定義 6.4 社会コード F が厚生無差別性を満たすとは、任意のゲーム $(M,u) \in \Lambda$ に関して、以下の 2 条件が成立するときを言う。

(1) $m, m' \in M$ は、全ての i に関して m_i, m'_i が厚生無差別である（幾人かの i に関して $m_i = m'_i$ の場合もありうる）ような混合戦略プロファイルとする。このとき、任意の $i \in N$ に関して、$m_i \in F_i(X,u,m_{-i}) \Longleftrightarrow m'_i \in F_i(X,u,m'_{-i})$

(2) 任意の $m \in M$、任意の $i \in N$、及び m_i とは異なる行為で $m_i \simeq y_i$ かつ $m_i(y_i) = 0$ となる任意の $y_i \in X_i$ に関して、

$F_i(X_i \backslash \{y_i\} \times X_{-i}, u, m_{-i}) = F_i(X,u,m_{-i}) \backslash \{y_i\}$ 及び

任意の $j \neq i$ に関して、$F_j(X_i \backslash \{y_i\} \times X_{-i}, u, m_{-j}) = F_j(X,u,m_{-j})$

ゲームから削除される・加えられる戦略は純粋戦略 (行為) である点に注意されたい。混合戦略を加えたり、削除することは概念的に困難である。また (2) において $m_i(y_i) = 0$ でなければ y_i を削除すれば、m_i も消えてしまう。これでは厚生無差別な戦略がゲームに残るとは必ずしもいえない。この他、匿名性と同様、効用数値が定

義で役割を果たしているが、匿名性で説明したのと同様、独立性を仮定すれば、この点は問題にならなくなる。

ゲーム $(X, u) \in \Lambda$ を所与とする。各プレイヤー i に関して効用関数 v_i から導かれる選好 $\succcurlyeq_{v_i}$ とは、任意の $m, m' \in M$ に関して、$m \succcurlyeq_{v_i} m' \Longleftrightarrow v_i(m) \geq v_i(m')$ となる M 上の 2 項関係である。$\succ_{v_i}$ 及び $\sim_{v_i}$ も同様に定義される。

定義 6.5 社会コード F が独立性を満たすとは、任意の $(X, u), (X, u') \in \Lambda$, 任意の $i, j \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、$\succcurlyeq_{v_j}$ と $\succcurlyeq_{v'_j}$ が $\{(m_i, m_{-i}) : m_i \in M_i\}$ 上で同一であれば、$F_i(X, u, m_{-i}) = F_i(X, u', m_{-i})$ であることをいう。

定義 6.6 社会コード F が弱独立性を満たすとは、任意の $(X, u), (X, u') \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、任意の $j \in N$、任意の $m_i \in M_i$ に関して、v_j と v'_j が $\{(m_i, m_{-i}) : m_i \in M_i\}$ 上で同一であるとき、

$F_i(X, u, m_{-i}) = F_i(X, u', m_{-i})$ となることをいう。

独立性は前章でのそれとその考え方においては同一である。一方弱独立性は独立性よりも弱い。弱独立性は新しい公理である。

定義 6.7 社会コード F が単調性を満たすとは、任意の $(X, u), (X, u') \in \Lambda$, 任意の $m \in M$, 任意の $i \in N$ に関して、

$m_i \in F_i(X, u, m_{-i})$ であり、かつ全ての $j \in N$ と全ての $m' \in M \backslash \{m\}$ に関して、

$v_j(m) \geq v_j(m') \Longrightarrow v'_j(m) \geq v'_j(m'), v_j(m) > v_j(m') \Longrightarrow v'_j(m) > v'_j(m')$

ならば $m_i \in F_i(X, u', m_{-i})$ である。

単調性もその考え方においては前章でのそれと同じである。

定義 6.8 社会コード F がアフィン変換からの不変性を満たすとは、任意のゲーム $(X, u), (X, u') \in \Lambda$ に関して, 各 $j \in N$ に関して、実数 $\alpha_j > 0$ と β_j が存在し、任意の $x \in X$ に関して

$u'_j(x) = \alpha_j u_j(x) + \beta_j$ であったとき、任意の $i \in N$、$m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、$F_i(X, u, m_{-i}) = F_i(X, u', m_{-i})$ であるときをいう。明らかに、任意の $m \in M$ に関して $v'_j(m) = \alpha_j v_j(m) + \beta_j$ が成り立つ。

この公理は新しく加わる公理である。ただし後で示す通り、この公理＋弱独立性は

独立性と同値である（命題 6.4)。この公理はその名の通り効用関数のアフィン変換は社会コードの判断に影響しないことを要請している。

行為プロファイルの集合 X を所与とする。$U(X)$ は X 上での効用関数全ての集合とする。任意の効用プロファイル $u=(u_i)_{i\in N}\in U(X)^N$ は $n|X|$ 個の数からなるベクトルとして表現できる。故に $U(X)^N$ は $R^{n|X|}$ と同一と見做してよい。

定義 6.9 社会コード F が連続性を満たすとは、任意のゲームの列 $(X,u^\nu)\in\Lambda$ と任意の $i\in N$, 任意の $m_{-i}\in M_{-i}$ に関して、$m_i\in F_i(X,u^\nu,m_{-i})$ かつ $u^\nu\longrightarrow u$ ならば、$m_i\in F_i(X,u,m_{-i})$ となることをいう。

定義 6.10 社会コード F が有効性を満たすとは、任意のゲーム $(X,u)\in\Lambda$ に関して、戦略プロファイル $m\in M$ で各 $i\in N$ に関して $m_i\in F_i(X,u,m_{-i})$ となるものが存在することをいう。

有効性の定義での戦略プロファイルをフェアプレイプロファイルと呼ぶ。これらの公理も前章で登場済みであるが、X で定義されているのではなく、M で定義されていることに留意されたい。

以上登場した八つの公理を前章でのそれらと比較してみよう。弱独立性とアフィン変換からの不変性は新しい公理である。しかし社会コードがこの二つをともに満たすことはそれが独立性を満たすことと同値である（命題 6.4）ので、この二つは除いて考えてよい。残り六つの公理を前章でのそれらと比較してみよう。言うまでのないことであるが、これらすべては混合戦略まで広げて定義されている。この点以外に前章でのバージョンと違いがない公理は独立性、単調性、及び連続性の三つである。一方、効用数値の大きさが定義に関係している公理もある。匿名性と厚生無差別性である[*1]。しかし独立性を満たす社会コードに限って言えば、この違いは消滅する。残るは有効性である。社会コードが厚生無差別性を満たせば、この公理は前章でのバージョンと同じになる（命題 6.3)。従って、これら六つの公理は前章で登場したそれらと混合戦略まで広げて定義されている点を除き、違いはないと結論できる。ただし「違いがない」とは考え方にであって、混合戦略に定義を広げることによって幾つかの公理は前章のそれとはどの戦略をフェアプレイとみなすかに関して大きな違いが出てくる。たとえば独立性と単調性は前章のそれらより強い公理となっている。

[*1] 連続性も効用数値が関係するが、これは前章でも同じことであった。

さて、これら公理の関して、幾つかの重要な結果がある。五つの命題に纏めておきたい。

任意のゲーム $(X, u), (X', u') \in \Lambda$ に関して,

任意の $i \in N$ に対し、以下の条件を満たす X_i から X_i' への全単射 ρ_i が存在するとしよう。

任意の行為プロファイル $x \in X$ に関して、$u_i'(x) = u_i(\rho_1(x_1), \rho_2(x_2), ..., \rho_n(x_n))$

明らかに $v_i'(m) = v_i(\rho(m))$ でもある。ここで $\rho(m) = (\rho_1(m_1), ..., \rho_n(m_n))$ である。ここで $\rho_i(m_i)$ は混合戦略で、$\rho_i(m_i)(x_i) = m_i(\rho_i(x_i))$ の形をとる。形式的には、これは $\rho : X_i \longrightarrow X_i$ と $m_i : X_i \longrightarrow [0, 1]$ の合成関数である。

このとき任意の混合戦略プロファイル $m \in M$ と任意の $i \in N$ に関して、

$m_i \in F_i(X, u, m_{-i}) \Longleftrightarrow \rho(m_i) \in F_i(X', u', \rho(m)_{-i})$ であれば、社会コード F は中立性を満たすという。

中立性も前章のそれと考え方は同じだが、ここでも選好順序だけでなく、各行為プロファイルに割り当てている効用数値も意味を持つ点に注意すべきである。

命題 6.1 社会コードが厚生無差別性を満たせば、中立性も満たす。

証明. 社会コード F が厚生無差別性を満たすとしよう。ゲーム $(X, u), (X', u') \in \Lambda$ は中立性の前提が成り立つようにとる。一般性を失うことなく、この二つのゲームではプレイヤー 1 の行為を除いては全て同一であるとしよう。すなわち、全ての $i \neq 1$ に関しては、$X_i' = X_i$ かつ $\rho_i(x_i) = x_i$ である、とする。

更に $X_1 \cap X_1' = \emptyset$ と仮定しよう。$X_1 \cap X_1' \neq \emptyset$ の場合はそれから簡単に証明できる：$Y \subset \Omega$ を $|Y| = |X_1| = |X_2|, Y \cap X_1 = \emptyset, Y \cap X_2 = \emptyset$ となるようにとれば、最初の議論を (X_1, Y) と (Y, X_2) に適用できる。

さて (X, u) から出発する。プレイヤー 1 の行為集合 X_1 に対して X_1' を加える。任意の $x_1 \in X_1$ に対して x_1 と $\rho_1(x_1)$ が厚生無差別になるようにする。(これが可能であるのは補題 6.1 を参照のこと。) こうしてできるゲームを $((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, u'')$ と記法しよう。厚生無差別性より、任意の $m \in M$ に関して、

$m_1 \in F_1(X, u, m_{-1})$

$\Longleftrightarrow m_1 \in F_1((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, u'', m_{-1})$

$\Longleftrightarrow \rho(m_1) \in F_1((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, u'', m_{-1})$

$\Longleftrightarrow \rho(m_1) \in F_1(X', u', m_{-1})$

更に厚生無差別性は、任意の $i \neq 1$ に関して、

$F_i(X, u, (m_1, m_{N\setminus\{1,i\}}))$

$= F_i((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, u'', (m_1, m_{N\setminus\{1,i\}}))$

$= F_i((X_1 \cup X_1') \times X_{-1}, u'', (\rho_1(m_1)), m_{N\setminus\{1,i\}}))$

$= F_i(X', u', (\rho_1(m_1)), m_{N\setminus\{1,i\}}))$. ■

第 2 の命題は厚生無差別性に関することである。

$G = (X, u) \in \Lambda, i \in N, m_{-i} \in M_{-i}$ を所与とする。

$V(G, m_{-i}) := \{(v_1(m_i, m_{-i}), ..., v_n(m_i, m_{-i})) : m_i \in M_i\}$ とおく。

$V(G, m_{-i})$ は m_{-i} を所与として戦略集合 $\{(m_i, m_{-i}) : m_i \in M_i\}$ が張る効用ベクトルの集合である。プレイヤー i の厚生無差別な行為 y_i の削除・追加は、どの m_{-i} に関する効用ベクトルの集合を変化させることはない。これが次の命題 6.2 である。行為 y_i の削除・追加は $m_i(y_i) > 0$ である混合戦略の削除・追加を誘発するが、これらはプレイヤーの享受する効用の次元で見る限り、事態の変化を全く起さないのである。

命題 6.2 $G = (X, u) \in \Lambda$ と $i \in N$ を所与とする。

ある $m_i \in M_i$ と $y_i \in X_i$ に関して、$m_i \simeq y_i$ かつ $m_i(y_i) = 0$ となるとしよう。

このとき、(X, u) から i の行為 y_i を除いたゲーム $G' = (X_i\setminus\{y_i\} \times X_{-i}, u)$ を考える。

このとき $V(G, m_{-i}) = V(G', m_{-i})$

証明. $\supset$ は明らかなので逆向きの包含関係を示せばよい。

$v \in V(G, m_{-i})$ を任意にとる。v を定義する i の戦略を m_i' とする。任意のプレイヤー j に関して、

$$
\begin{aligned}
&v_j(m_i', m_{-i}) := \sum_{x_i \in X_i} m_i'(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) \\
&= \sum_{x_i \in X_i\setminus\{y_i\}} m_i'(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) + m_i'(y_i) v_j(y_i, m_{-i}) \\
&= \sum_{x_i \in X_i\setminus\{y_i\}} m_i'(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) + m_i'(y_i) v_j(m_i, m_{-i}) \ (\longleftarrow m_i \simeq y_i) \\
&= \sum_{x_i \in X_i\setminus\{y_i\}} m_i'(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) + m_i'(y_i) \left(\sum_{x_i \in X_i} m_i(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) \right) \\
&= \sum_{x_i \in X_i\setminus\{y_i\}} m_i'(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) + m_i'(y_i) \left(\sum_{x_i \in X_i\setminus\{y_i\}} m_i(x_i) v_j(x_i, m_{-i}) \right)
\end{aligned}
$$

$(\longleftarrow m_i(y_i)=0)$

$= \sum_{x_i\in X_i\backslash\{y_i\}} (m'_i(x_i)+m'_i(y_i)m_i(x_i))\, v_j(x_i,m_{-i})$

各 $x_i \in X_i\backslash\{y_i\}$ に対する確率を $m'_i(x_i)+m'_i(y_i)m_i(x_i)$ とおいた混合戦略を $m''_i \in M'_i$ を作ると、$v_j(m'_i,m_{-i}) = v_j(m''_i,m_{-i})$ となる。

(ここで $m'_i(x_i)+m'_i(y_i)m_i(x_i)$ は明らかに非負であり、

$\sum_{x_i\in X_i\backslash\{y_i\}} \{m'_i(x_i)+m'_i(y_i)m_i(x_i)\} = \sum_{x_i\in X_i\backslash\{y_i\}} m'_i(x_i)+m'_i(y_i) \sum_{x_i\in X_i\backslash\{y_i\}} m_i(x_i) = 1$)

任意の j に関して、この関係が成り立つので所望の結果を得る。■

命題 6.2 の前提において、i 以外のプレイヤー j に関しては、任意の $m_j \in M'_j$ に関して $V(G,m_{-j}) = V(G',m_{-j})$ であるのは自明である。以上から厚生無差別な行為の削除・追加はプレイヤーが享受する効用の次元で見る限り、何も変えないことがわかる。

また命題 6.2 と同様な計算で二つのゲームが生み出す効用ベクトル全ての集合、つまり

$\{(v_1(m),...,v_n(m):m\in M\}$ と $\{(v_1(m),...,v_n(m):m\in M'\}$ は同一であることもわかる。

次の命題は有効性に関している。まず若干の用語を定義しよう。任意の混合戦略 m_i と任意の行為 x_i に関して、$x_i \in [m_i] \Longleftrightarrow m_i(x_i)>0$ と記法する。同じく任意の m_{-i} と任意の x_{-i} に関して、$x_{-i}\in[m_{-i}] \Longleftrightarrow \prod_{j\neq i} m_j(x_j)>0$ と記法する。また任意の混合戦略プロファイル $m\in M$ に関して、$[m] := \{x\in X : \prod_{i\in N} m_i(x_i)>0\}$ とおく。

命題 6.3 社会コード F は厚生無差別性を満たすとする。

$(X,u)\in\Lambda$ を所与とする。行為プロファイル $x\in X$ で各 $i\in N$ に関して $x_i \in F_i(X,u,x_{-i})$ となるものが存在するとき、そしてその時に限って $m\in M$ で各 $i\in N$ に関して $m_i \in F_i(X,u,m_{-i})$ となるものが存在する

証明. 命題での x が存在すれば、それ自身を m とおけるので、m が存在するときに x の存在を示せば十分である。$(X,u)\in\Lambda$ を所与とする。有効性により、ある $m\in M$ で $m\in \prod_{i\in N} F_i(X,u,m_{-i})$ となるものが存在する。以下の事実を証明する。

(1) ある $x\in[m]$ に関して $x\in \prod_{i\in N} F_i(X,u,x_{-i})$

これが示されれば命題 6.3 の証明は完了する。$\sum_{i\in N}|[m_i]|$ に関する帰納法で証明する。

仮にこの数が n であれば (定義よりこの数が n 未満であることはない)、$[m]$ はただ一つの行為プロファイル x からなるので、証明は完了する。次にこの数が $k-1(\geq n)$ であるときの主張の正しさを仮定して k の場合を考える。あるプレイヤー $j\in N$ をとる。ただし $|[m_j]|\geq 2$ とする。(このようなプレイヤーが取れないならば、そこで証明は完了する。) 行為 $a_j\notin X_j$ をとる。この a_j を j の行為として (X,u) に追加して、新しいゲーム $(\widetilde{X},\widetilde{u})\in\Lambda$ を以下の要領で構成する。

$\widetilde{X}_j=X_j\cup\{a_j\},\widetilde{X}_i=X_i($ 全ての $i\neq j$ に関して $)$

任意の $k\in N$ に関して、$\widetilde{u}_k$ は j の純粋戦略が a_j でなければ u_k と同じであり、a_j であれば

$\widetilde{u}_k(a_j,\cdot)=v_k(m_j,\cdot)$ とおく。この $\widetilde{u}_k$ を基礎にして期待効用関数 $\widetilde{v}_k$ を構成する。

明らかに $(\widetilde{X},\widetilde{u})$ において $a_j\simeq m_j$ である（補題 6.1 参照)。

$m'=(a_j,m_{-j})$ としよう。厚生無差別性により、$m'\in\prod_{i\in N}F_i(\widetilde{X},\widetilde{u},m'_{-i})$ である。帰納法の想定により、ある $x'\in[m']$ で $x'\in\prod_{i\in N}F_i(\widetilde{X},\widetilde{u},x'_{-i})$ となるものが存在する。ここで x' の第 j 成分は a_j である。$x''=(m_j,x'_{-j})$ としよう。$a_j\simeq m_j$ であるから、厚生無差別性より、$x''\in\prod_{i\in N}F_i(\widetilde{X},\widetilde{u},x''_{-i})$ である。再び帰納法の想定により、ある $x=(x_j,x'_{-j})$ で $x_j\in[m_j]$ かつ $x\in\prod_{i\in N}F_i(\widetilde{X},\widetilde{u},x_{-i})$ となる。これに厚生無差別性を使い、a_j を削除すると所望の結果 $x\in\prod_{i\in N}F_i(X,u,x_{-i})$ を得る。 ■

任意の $(X,u)\in\Lambda$ に関して、行為プロファイル $x\in X$ で各 $i\in N$ に関して $x_i\in F_i(X,u,x_{-i})$ となるものが存在するとき、社会コード F は $X-$ 有効性を満たすと呼ぶ。命題 6.3 により、有効性の代りに $X-$ 有効性を用いてよいことになる。$X-$ 有効性は有効性よりも操作が簡単であるので、後の証明が非常に楽になる。

命題 6.4 以下の二つは同値である。

（1）社会コード F が独立性を満たす；

（2）社会コード F が弱独立性とアフィン変換からの不変性を満たす。

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) は自明なので、(2) $\Longrightarrow$ (1) を証明すればよい。まず次の関係を証明する。

（3）任意の $(X,u),(X,u')\in\Lambda$, 任意の $i,j\in N$, 任意の $m_{-i}\in M_{-i}$ に関して、

$\succcurlyeq_{v_j}$ と $\succcurlyeq_{v'_j}$ は $\{(m_i, m_{-i}) : m_i \in M_i\}$ 上で同一であるとしよう。このとき定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が存在して、任意の $m_i \in M_i$ に関して、

$v'_j(m_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(m_i, m_{-i}) + \beta_j$

となる。

(3) の証明：i の純粋戦略に関して (3) を証明すればよい。すなわち、任意の $z_i \in X_i$ に関して

(4) $v'_j(z_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(z_i, m_{-i}) + \beta_j$

であることを示せば十分である。$v_j(\cdot, m_{-i})$ が X_i 上でとる値の数に応じて区別して証明する。

ケース 1：$v_j(\cdot, m_{-i})$ が X_i 上で定値をとる

(3) の前提により、$v'_j(\cdot, m_{-i})$ も定値である。故に $\alpha_j = 1$ とおき、$v'_j(\cdot, m_{-i}) = v_j(\cdot, m_{-i}) + \beta_j$ となるように β_j を調整すればよい。

ケース 2：$v_j(\cdot, m_{-i})$ が X_i 上で二つの値をとる

$v_j(x_i, m_{-i}) > v_j(y_i, m_{-i})$ となる $x_i, y_i \in X_i$ をとる。$\alpha_j > 0, \beta_j$ は連立方程式

$v'_j(x_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(x_i, m_{-i}) + \beta_j$

$v'_j(y_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(y_i, m_{-i}) + \beta_j$

の解となるようにとればよい。実際に解くと、

$\alpha_j = \frac{v'_j(x_i, m_{-i}) - v'_j(y_i, m_{-i})}{v_j(x_i, m_{-i}) - v_j(y_i, m_{-i})}$

となり、(3) の前提から右項の分子分母は同じ符号をとるから $\alpha_j > 0$ が従う。

ケース 3：$v_j(\cdot, m_{-i})$ が X_i 上で三つ以上の値をとる

$\{v_j(x_i, m_{-i}) : x_i \in X_i\}$ の中で最大値と最小値を与える i の純粋戦略がある。各々を $x_i, y_i \in X_i$ としよう。

この $x_i, y_i \in X_i$ に関して

(5) $v'_j(x_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(x_i, m_{-i}) + \beta_j$

(6) $v'_j(y_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(y_i, m_{-i}) + \beta_j$

となる $\alpha_j > 0, \beta_j$ はケース 2 での計算の如く一意にしか存在しない。従って (4) が主張する $\alpha_j > 0, \beta_j$ は存在するとしたら、この $\alpha_j > 0, \beta_j$ 以外には考えられない。以下 (5),(6) の解 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が求める $\alpha_j > 0, \beta_j$ であることを証明する。

任意の $z_i \in X_i$ に関して、$v_j(z_i, m_{-i}) = v_j(x_i, m_{-i})$ であれば z_i も x_i 同様 $v_j(\cdot, m_{-i})$ の最大値を与える。従って (3) の前提により、z_i も x_i 同様 $v'_j(\cdot, m_{-i})$ の

最大値を与えることとなり、$v'_j(z_i, m_{-i}) = v'_j(x_i, m_{-i})$。故に (5) より $v'_j(z_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(z_i, m_{-i}) + \beta_j$ となり、所望の結果（4）を得る。$v_j(z_i, m_{-i}) = v_j(y_i, m_{-i})$ の場合も同様である。

したがって残るは

（7）$v_j(x_i, m_{-i}) > v_j(z_i, m_{-i}) > v_j(y_i, m_{-i})$

の場合である。プレイヤー i の混合戦略として、確率 t で x_i, 確率 $1-t$ で y_i を選択するものを考える。ただし $0 < t < 1$ である。この戦略を t_i としよう。t を適当の調整して

（8）$v_j(t_i, m_{-i}) = v_j(z_i, m_{-i})$

とできる。（3）の前提により、

（9）$v'_j(t_i, m_{-i}) = v'_j(z_i, m_{-i})$

である。更に

（10）$v'_j(t_i, m_{-i}) = tv'_j(x_i, m_{-i}) + (1-t)v'_j(y_i, m_{-i}) \overset{(5),(6)}{=} t\{\alpha_j v_j(x_i, m_{-i}) + \beta_j\} + (1-t)\{\alpha_j v_j(y_i, m_{-i}) + \beta_j\}$

$= \alpha_j v_j(t_i, m_{-i}) + \beta_j \overset{(8)}{=} \alpha_j v_j(z_i, m_{-i}) + \beta_j$

である。故に

$v'_j(z_i, m_{-i}) \overset{(9)}{=} v'_j(t_i, m_{-i}) \overset{(10)}{=} \alpha_j v_j(z_i, m_{-i}) + \beta_j$

以上で（4）の証明が完了した。

(2) $\Longrightarrow$ (1) の証明に入る。$(X, u), (X, u') \in \Lambda, i, j \in N, m_{-i} \in M_{-i}$ を独立性の前提を満たすようにとる。

$F_i(X, u, m_{-i}) = F_i(X, u', m_{-i})$ を示せばよい。（3）より定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が存在して

任意の $m_i \in M_i$ に関して $v'_j(m_i, m_{-i}) = \alpha_j v_j(m_i, m_{-i}) + \beta_j$

となる。いま $(x, u'') \in \Lambda$ を、全ての $j \in N$ に関して、任意の $m \in M$ に関して、

$v''_j(m) = \alpha_j v_j(m) + \beta_j$

ととる。するとアフィン変換からの不変性と独立性により

$F_i(X, u, m_{-i}) \overset{\text{アフィン変換}}{=} F_i(X, u'', m_{-i}) \overset{\text{独立性}}{=} F_i(X, u', m_{-i})$

となって所望の結果を得る。■

命題 6.4 の成立には効用関数の形状が強く関係している。任意の $j \in N$ に関して純粋戦略上での効用関数 u_j と u'_j が m_{-i} を所与として序数的に同一というだけなら

ば、アフィン変換より一般的な単調変換でこれら二つの効用関数が同一となれば十分である。しかし混合戦略上でもこの二つの効用関数は序数的に同一でなければならないので、アフィン変換で同一となるものしか残らなくなるのである。この命題と関連した次の命題がある。

命題 6.5 任意の二つのゲーム $(X,u),(X,u') \in \Lambda$ に関して、任意の $j \in N$ に関して v_j と v'_j が M 上で同じ選好を導くための必要十分条件は

（1）定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が存在して、全ての $m \in M$ に関して $v'_j(m) = \alpha_j v_j(m) + \beta_j$ が成り立つことである。

証明. 十分性は明らかなので必要性を示せばよい。証明には先の命題 6.4 のケース 3 の技法も使う。また位相的技法も使うので、若干の準備作業を行う。

M に対しノルムを入れる。任意の $i \in N$ に関して、X_i の要素に番号 $1,2,...,|X_i|$ を付ける。

任意の m_i を $R^{|X_i|}$ 内の点 $(m_i(1), m_i(2), ..., m_i(|X_i|))$ と同一視する。

従って M_i は $R^{|X_i|}$ での基本単体 $\Delta^{|X_i|} := \{z \in R_+^{|X_i|} : z_1 + z_2 + \cdots + z_{|X_i|} = 1\}$ と同一視できる。

$m = (m_i)_{i \in N}$ は同じく $R^{|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_n|}$ 内の点と同一視する。ここで $m_1 \in R^{|X_1|}, m_2 \in R^{|X_2|}, ..., m_n \in R^{|X_n|}$ である。M は n 個の基本単体の直積 $\Delta^{|X_1|} \times \Delta^{|X_2|} \times ... \times \Delta^{|X_n|}$ と同一視できる。M にはユークリッドノルムを導入する。以上から M は有限次元ユークリッド空間内のコンパクト凸集合となる。

さて証明に入ろう。任意の $x,y \in X$ に関して $u_j(x) = u_j(y)$ ならば証明すべきことは何もない。

そこで

（1）ある $x,y \in X$ に関して $u_j(x) \neq u_j(y)$

と想定する。

$M^* := \{m \in M : m_i(x_i) > 0$ (任意の $i \in N$, 任意の $x_i \in X_i$ に関して)$\}$

としよう。任意の $m^* \in M^*$ をとる。

構成より、この m^* に対しては、どのプレイヤー i に関しても m'_i, m''_i で

（2）$v_j(m'_i, m^*_{-i}) < v_j(m^*) < v_j(m''_i, m^*_{-i})$

となるものが存在する。(（1）よりこれは可能)

プレイヤー $i \in N$ を所与とする。i に関して（2）を成立させる m_i', m_i'' を任意に選び、集合

（3）$M^*(m^*) := \{m \in M^* : v_j(m_i', m_{-i}^*) < v_j(m) < v_j(m_i'', m_{-i}^*)\}$

を考える。$M^*(m^*)$ は非空の開集合となる。定義より $m^* \in M^*(m^*)$ である。

定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ で

（4）$v_j'(m_i', m_{-i}^*) = \alpha_j v_j(m_i', m_{-i}^*) + \beta_j$

（5）$v_j'(m_i'', m_{-i}^*) = \alpha_j v_j(m_i'', m_{-i}^*) + \beta_j$

となるものが一意に存在する。$\alpha_j > 0$ は命題の前提から従う。

任意の $m \in M^*(m^*)$ をとる。i の混合戦略 t_i として、確率 t で m_i', 確率 $1-t$ で m_i'' を選択するものを考える。

t を調整して

（6）$v_j(t_i, m_{-i}^*) = v_j(m)$

とできる。故に命題の前提より

（7）$v_j'(t_i, m_{-i}^*) = v_j'(m)$

である。そこで

$v_j'(m) \overset{(7)}{=} v_j'(t_i, m_{-i}^*) = tv_j'(m_i', m_{-i}^*) + (1-t)v_j'(m_i'', m_{-i}^*)$

$\overset{(4),(5)}{=} t\{\alpha_j v_j(m_i', m_{-i}^*) + \beta_j\} + (1-t)\{\alpha_j v_j(m_i'', m_{-i}^*) + \beta_j\}$

$= \alpha_j\{tv_j(m_i', m_{-i}^*) + (1-t)v_j(m_i'', m_{-i}^*)\} + \beta_j$

$= \alpha_j v_j(t_i, m_{-i}^*) + \beta_j \overset{(6)}{=} \alpha_j v_j(m) + \beta_j$

すなわち

(8)定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が存在して、任意の $m \in M^*(m^*)$ に関して $v_j'(m) = \alpha_j v_j(m) + \beta_j$

となる。

各 m^* ごとに開集合 $M^*(m^*)$ が取れ、この上で v_j' と v_j の間には (8) の如くアフィン変換が成り立つ。しかしまだその係数 α_j, β_j は m^* ごとに異なる可能性が残っている。そこで以下のように証明を続ける。

任意の二つの $M^*(m), M^*(m')$,$(m, m' \in M^*)$、の間の二項関係 $\approx$ を以下のように定める。

$M^*(m) \approx M^*(m') \Longleftrightarrow m = m'$ または $M^*(m) \cap M^*(m') \neq \phi$ または

二つを繋ぐ開集合の列 $M^*(m^1), ..., M^*(m^k), m^1, ..., m^k \in M^*$ で $M^*(m) \cap$

$M^*(m^1) \neq \phi, M^*(m^1) \cap M^*(m^2) \neq \phi, ..., M^*(m^{k-1}) \cap M^*(m^k) \neq \phi, M^*(m^k) \cap M^*(m') \neq \phi$

となるものが存在する；

と定義しよう。明らかに $\approx$ は同値関係なので、$\approx$ によって開集合族 $\{M^*(m)\}_{m \in M^*}$ は同値類に分割される。

同値類が二つ以上あるとしよう。そのうちの一つの同値類に属す開集合 $M^*(m)$ の集合を $Q = \{M^*(m), ...,\}$ とおく。この同値類に属す開集合は、定義によりこの同値類に属さない開集合 $M^*(m)$ とは交わりを持たない。すると連結集合 M^* は互いに非空の二つの開集合 $\bigcup_{M^*(m) \in Q} M^*(m), \bigcup_{M^*(m) \notin Q} M^*(m)$ に分割されることになり矛盾する。故に同値類はひとつしかない。これより係数 α_j, β_j は m^* ごとに異なることはあり得ない。つまり

(9) 定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が存在して、任意の $m \in M^*$ に関して $v'_j(m) = \alpha_j v_j(m) + \beta_j$

となる。$v'_j(\cdot), v_j(\cdot)$ が m に関する連続関数であることに留意すれば（9）式が任意の $m \in M$ に関してで成り立つことは明らかである。 ■

この命題により社会コード F がアフィン変換からの不変性を満たせば、このコードは効用関数の代わりに選好関係で定義できることになる。(とはいっても M 上での選好関係にである。) 以下このことを示そう。$M(X)$ 上のプレイヤー i の選好 $\succcurlyeq_i$ の集合 $P(M(X))$ を次のように定義する。$\succcurlyeq_i \in P(M(X))$ であるのは、以下のときそしてその時のみである：

ある X 上の効用関数 u_i が存在して、$m \succcurlyeq_i m' \Longleftrightarrow$ 全ての $m, m' \in M$ に関して $v_i(m) \geq v_i(m')$.

つまり選好 $\succcurlyeq_i$ は純粋戦略プロファイル上のある効用関数 u_i を混合戦略上に広げたフォンノイマンモルゲンシュテルン型の効用関数によって導かれる選好である、ということである。

ゲーム $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda'$ とは選択肢集合 X とその上で上記のように定義される各プレイヤーの選好の組、選好プロファイル $\succcurlyeq = (\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n) \in P(M(X))^n$、からなる（$\Lambda'$ はそのようなゲームの集合)。新しい定義での社会コードを F' とおくと、

任意の $(X, \succcurlyeq) \in \Lambda', i \in N, m_{-i} \in M_{-i}$ に関して $F'_i(X, \succcurlyeq, m_{-i}) := F_i(X, u_{\succcurlyeq}, m_{-i})$ と定義できる。ここで $(X, u_{\succcurlyeq})$ は各選好 $\succcurlyeq_i$ を導く効用関数 u_i の組から成る効用プロファイルである。このようなゲーム $(X, u_{\succcurlyeq})$ は一意ではな

いが、命題 6.5 より F' はゲーム $(X, u_{\succsim})$ に依存せず一意に定義できる。以下の主要定理では全て社会コードは独立性を満たすので、社会コードを以上のような流儀で序数選好で定義し直すことも可能である。

6.4　主要結果

次の二つが主要結果である。

定理 6.1 社会コード F が匿名性、厚生無差別性、独立性、単調性、及び有効性を満たすとしよう。このとき、任意の $(X, u) \in \Lambda$ に関して、

$SNE(X, u) \subset FPE(X, u, F) \subset NE(X, u)$

が成り立つ。

定理 6.2 社会コード F が定理 6.1 の公理に加えて連続性を満たすとしよう。

このとき、任意の $(X, u) \in \Lambda$ に関して、

$FPE(X, u, F) = NE(X, u)$

が成り立つ。

両定理とも独立性を弱独立性 + アフィン変換からの不変性に入れ替えることが可能である（命題 6 .4)。両定理の証明は以下の補題及び付録にて行われる。

補題 6.1 任意の $(X, u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_i, m'_i \in M_i (m_i \neq m'_i)$, 任意の $z_{-i} \in X_{-i}$ に関して、

(1) $v_j(m_i, z_{-i}) = v_j(m'_i, z_{-i})$ (全ての $j \in N$ に関して)

が成り立てば $m_i \simeq m'_i$ である。

証明. 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、

$v_j(m_i, m_{-i}) = \sum_{z_{-i} \in X_{-i}} \prod_{k \neq i} m_k(z_k) v_j(m_i, z_{-i}) \overset{(1)}{=} \sum_{z_{-i} \in X_{-i}} \prod_{k \neq i} m_k(z_k) v_j(m'_i, z_{-i}) = v_j(m'_i, m_{-i})$.

(z_k は z_{-i} の第 k 成分である。)

これが任意の $j \in N$ に関して成り立つので、所望の結果を得る。 ■

補題 6.2 任意の $(X, u) \in \Lambda$, 任意の $m \in M$, 任意の $a \in \Omega^N \backslash X$ に関して、

$(X', u') \in \Lambda$ で以下の性質を満たすものが存在する。

(1) $X'_i = X_i \cup \{a_i\}$ (任意の $i \in N$ に関して);

(2) $u'|_X = u$;

(3) $a_i \simeq m_i$ (任意の $i \in N$ に関して);

証明. ゲーム (X', u') は以下の要領で段階を経て構成される。

まず $(X^1, u^1) \in \Lambda$ を以下のように定義する。

$X_1^1 = X_1 \cup \{a_1\}$, 任意の $j \neq 1$ に関して $X_j^1 = X_j$;

任意の $j \in N$, 任意の $(x_1, x_{-1}) \in X^1$ に関して、

$$u_j^1(x_1, x_{-1}) = \begin{cases} v_j(m_1, x_{-1}) & \text{if } x_1 = a_1 \\ u_j(x_1, x_{-1}) & \text{if } x_1 \neq a_1 \end{cases}$$

$u^1|_X = u$ は構成からして明らか。(X^1, u^1) において $a_1 \simeq m_1$ である。

（その証明）任意の $x_{-1} \in X_{-1}^1$ に関して、

$v_j^1(m_1, x_{-1}) = u_j^1(a_1, x_{-1})$ を言えばよい（補題 6.1)。

定義より $u_j^1(a_1, x_{-1}) = v_j(m_1, x_{-1})$, 一方

$v_j^1(m_1, x_{-1}) = \sum_{x_1 \in X_1} m_1(x_1) u_j^1(x_1, x_{-1}) = \sum_{x_1 \in X_1} m_1(x_1) u_j(x_1, x_{-1}) = v_j(m_1, x_{-1})$.

故に $v_j^1(m_1, x_{-1}) = u_j^1(a_1, x_{-1})$.(証明終わり）

次に (X^1, u^1) から出発して $(X^2, u^2) \in \Lambda$ を以下のように定義する。

$X_2^2 = X_2 \cup \{a_2\}$, 任意の $j \neq 2$ に関して $X_j^2 = X_j^1$;

任意の $j \in N$, 任意の $(x_2, x_{-2}) \in X^2$ に関して、

$$u_j^2(x_2, x_{-2}) = \begin{cases} v_j^1(m_2, x_{-2}) & \text{if } x_2 = a_2 \\ u_j^1(x_2, x_{-2}) & \text{if } x_2 \neq a_2 \end{cases}$$

$u^2|_X = u$ は構成からして明らか。また先と同じ手順で $a_2 \simeq m_2$ である。

また $a_1 \simeq m_1$ も (X^2, u^2) において保持される。

（その証明）任意の $x_{-1} \in X_{-1}^2$ に関して、

$v_j^2(m_1, x_{-1}) = u_j^2(a_1, x_{-1})$ を言えばよい（補題 6.1)。

x_{-1} でのプレイヤー 2 の成分が a_2 でないとき、

$v_j^2(m_1, x_{-1}) = v_j^2(m_1, x_2, x_{-\{1,2\}}) = v_j^1(m_1, x_2, x_{-\{1,2\}}) = v_j^1(m_1, x_{-1})$,

$u_j^2(a_1, x_{-1}) = u_j^2(a_1, x_2, x_{-\{1,2\}}) = u_j^1(a_1, x_2, x_{-\{1,2\}}) = u_j^1(a_1, x_{-1})$.

(X^1, u^1) において $a_1 \simeq m_1$ であったから、両者は等しい。

x_{-1} でのプレイヤー 2 の成分が a_2 であるとき、

$v_j^2(m_1, x_{-1}) = v_j^2(m_1, x_2, x_{-\{1,2\}}) = v_j^1(m_1, m_2, x_{-\{1,2\}})$

$u_j^2(a_1, x_{-1}) = u_j^2(a_1, x_2, x_{-\{1,2\}}) = v_j^1(a_1, m_2, x_{-\{1,2\}})$.

(X^1, u^1) において $a_1 \simeq m_1$ であったから、両者は等しい。（証明終わり）

以下同じ要領で $a_3, ..., a_n$ を一つずつ加え新しいゲームを作っていく。

最後にできるゲームが求めるゲームである。 ■

補題 6.2 において社会コード F が厚生無差別性を満たせば $F_i(X, u, m_{-i}) = F_i(X', u', a_{-i})\backslash\{a_i\}$ が従う。

補題 6.3 社会コード F が匿名性、厚生無差別性、独立性、単調性、及び有効性を満たすとしよう。このとき、任意の $(X, u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、$F_i(X, u, x_{-i}) \cap BR_i(X, u, x_{-i}) \neq \phi$ が成り立つ。

証明は付録に回す。この補題も独立性を弱独立性 + アフィン変換からの不変性に入れ替えてよい。

この補題での x_{-i} を m_{-i} へ一般化したのが次の補題 6.3 である。定理 6.1 はこの補題から直ちに従う。

補題 6.4 社会コード F が匿名性、厚生無差別性、独立性、単調性、及び有効性を満たすとしよう。このとき、任意の $(X, u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、$F_i(X, u, m_{-i}) \cap BR_i(X, u, m_{-i}) \neq \phi$ が成り立つ。

証明. 各 $j \neq i$ について $a_j \in \Omega\backslash X_j$ を一つずつ選び、ゲーム $(X', u') \in \Lambda$ を補題 6.2 の通りに構成する。補題 6.3 より $F_i(X', u', a_{-i}) \cap BR_i(X', u', a_{-i}) \neq \phi$ であり、これと厚生無差別性の (1) より $F_i(X', u', m_{-i}) \cap BR_i(X', u', m_{-i}) \neq \phi$ を得る。(X', u') から行為 a_j をすべて削除して厚生無差別性の (2) より所望の結果を得る。 ■

6.5 例

次の例は定理 6.2 での公理全てを満足する社会コードである。

例 6.1 (アモラルコード)

全ての戦略がどの状況下でも正しいとするコード：任意の $(X, u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して $F_i(X, u, m_{-i}) := M_i$.

このコードではナッシュ均衡集合=フェアプレイ均衡集合はトリビアルに成立して

いる。またフェアプレイ均衡の存在もナッシュ均衡の存在に帰着する。このコード以外にも定理 6.2 の全ての公理を満たすコードは存在する。

例 6.2 (最適反応コード)

任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、$F_i(X,u,m_{-i}) := BR_i(X,u,m_{-i})$.

定理 6.1 の公理をすべて満たす社会コードの下ではフェアプレイ均衡は存在するであろうか？狭義ナッシュ均衡が存在すれば当然フェアプレイ均衡は存在するし、社会コードが連続性も満たせばやはり存在する（定理 6.2)。また上記二つの例でもナッシュ均衡集合=フェアプレイ均衡集合なので、これらの例に限ればやはり存在は言える。しかし次の例が示すようにこの問いに対する解答は一般的には否である。またこの例での社会コードは連続性を満たさないことも留意すべきである。

例 6.3 (連続性：局所強パレートコード)

任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、

$F_i(X,u,m_{-i}) := \{m_i \in M_i :$ 全ての $j \in N$ に関して $v_j(m'_i, m_{-i}) \geq v_j(m_i, m_{-i})$ であり、かつ少なくとも一人の j に関してこの不等号が $>$ で成り立つような m'_i が存在しない $\}$.

このコードは連続性以外のすべての公理をは満たす。以下の 2 人 2 戦略ゲームではこのコードの下でのフェアプレイ均衡は存在しない。縦軸にプレイヤー 1 の純粋戦略、横軸にプレイヤー 2 の純粋戦略をとる。2 人の純粋戦略は共に a, b である。セルの中の最初の数字がプレイヤー 1 の利得、後の数字がプレイヤー 2 の利得である。

	a	b
a	$1,0$	$2,0$
b	$0,2$	$2,1$

社会コード F は次のようになる。

$$F_1(X,u,m_{-1}) = \begin{cases} \{b\} & \text{if } m_2(b) = 1 \\ M_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_2(X,u,m_{-2}) = \begin{cases} \{b\} & \text{if } m_1(a) = 1 \\ M_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

つまり両プレイヤーともに原則的に何を選択しても構わないが、以下の条件下では選択が限られる。プレイヤー 2 が確率 1 で b を選択している状況ではプレイヤー 1

に許される戦略は確率 1 で b を選択することのみであり、またプレイヤー 1 が確率 1 で a を選択している状況ではプレイヤー 2 に許される戦略は確率 1 で b を選択することのみである。この場合、フェアプレイ均衡は存在しない。(その証明：プレイヤー 2 が確率 1 で b を選択していれば、プレイヤー 1 は確率 1 で b を選択するしかない。このときプレイヤー 2 は何でも選択できるので彼は a を選択し、矛盾する。次にプレイヤー 2 が確率 1 で b を選択するのでなければ、プレイヤー 1 は何でも選択できるので、彼は a を選択する。しかしこのとき、プレイヤー 2 は確率 1 で b を選択せねばならずやはり矛盾する。) 一方プレイヤー 1 が確率 1 で a を選択しさえすれば、（プレイヤー 2 が何を選択しようとも）必ずナッシュ均衡となる。

このコードでは定理 6.1 は成立するが、定理 6.2 は成り立たない。$FPE(X,u) \subsetneq NE(X,u)$ の例があるのである。前章での例 5.2 がそれを示している。その例では

	a	b
a	$1,1$	$0,1$
b	$1,0$	$0,0$

であった。ここで (b,b) はナッシュ均衡だがフェアプレイ均衡とはならない。

以下の例は定理 6.1 の公理が一つでも欠けると定理 6.1（当然定理 6.2 も）は成り立たないことを示している。

例 6.4 (匿名性：独裁制コード)

あるプレイヤー $k \in N$ を所与とする。任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、

$F_i(X,u,m_{-i}) := \{m_i \in M_i : v_k(m_i,m_{-i}) \geq v_k(m'_i,m_{-i})$ (任意の $m'_i \in M_i$ に関して)$\}$.

k が他のプレイヤーの戦略を固定したときの独裁者となっている。プレイヤー i のある行為がある状況下で正しいとされるのは、その状況下でその行為が k の効用を最大にしている場合、そしてそのときのみである。

このコードは匿名性以外の全ての公理を満たしている。

定理 6.1 は成り立たない。任意の $(X,u) \in \Lambda$ に関して k にとって最良の戦略プロファイルの集合を $X_k(u)$ とすると $X_k(u) \subset FPE(X,u,F)$ である。$X_k(u)$ が一点から構成されれば、その点はフェアプレイ均衡となる。ここが常にナッシュ均衡であることはないし、狭義ナッシュ均衡がこの点と一致する保証もない。故に定理 6.1(定

理 6.2 も) は成り立たない。

例 6.5 (弱独立性：大域的パレートコード)

$WP(X,u)$ はゲーム (X,u) における弱パレート最適な戦略プロファイル全ての集合とする。

社会コード F を、任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、

$F_i(X,u,m_{-i}) := \{m_i \in M_i :$ ある $m'_{-i} \in M_{-i}$ に関して $(m_i, m'_{-i}) \in WP(X,u)\}$

と定義する。

ある混合戦略 m_i がある状況で正しいとされるとは、その戦略が他のプレイヤーのある戦略の組 m'_{-i} と結びついて弱パレート最適となる場合、そしてそのときに限られる。

このコードは弱独立性以外の全ての公理を満たす。若干微妙なのは連続性である。証明を付記しておく。

連続性:$m_i \in F_i(X,u^\nu,m_{-i}), u^\nu \longrightarrow u$ としよう。F の定義より、ある $m^\nu_{-i} \in M_{-i}$ で $(m_i, m^\nu_{-i}) \in WP(X,u^\nu)$ となる。M_{-i} はコンパクトより $m^\nu_{-i} \longrightarrow m^0_{-i}$ としてよい。ここで $(m_i, m^0_{-i}) \notin WP(X,u)$ としてみよう (背理法)。

ある $(m'_i, m'_{-i}) \in M$ が存在して、$v_j(m_i, m^0_{-i}) < v_j(m'_i, m'_{-i})$ が全ての $j \in N$ に関して成り立つ。ある j に関して ν の部分列で $v^\nu_j(m_i, m^\nu_{-i}) \geq v^\nu_j(m'_i, m'_{-i})$ となるものが取れると、$v_j(m_i, m^0_{-i}) \geq v_j(m'_i, m'_{-i})$ が帰結し、先の不等式と矛盾する。そこである番号 ν' があって、全ての j に関して、その番号以上の ν に関しては、$v^\nu_j(m_i, m^\nu_{-i}) < v^\nu_j(m'_i, m'_{-i})$ となる。しかしこれでは $(m_i, m^\nu_{-i}) \in WP(X,u^\nu)$ ではなくなり、矛盾する。

このコードの下では定理 6.1 は成立しない。以下のような 2 人 2 戦略のゲームを考える。

	a	b
a	$3,3$	$0,1$
b	$1,0$	$2,2$

すると (b,b) は狭義ナッシュ均衡であるがフェアプレイ均衡ではない。次にフェアプレイ均衡がナッシュ均衡にはならない例として囚人のジレンマゲームがある。

	a	b
a	$3,3$	$0,4$
b	$4,0$	$2,2$

このゲームでは (a,a) はフェアプレイ均衡だがナッシュ均衡ではない。

例 6.6 (単調性：局所逆パレートコード)

プレイヤーの選好を逆さにしてパレート最適性をかけるコードを考える。形式的定義は以下の通り。任意の $(X,u) \in \Lambda$, $i \in N$, $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、$m_i \in F_i(X,u,m_{-i})$ であるのは、全ての $j \in N$ に関して $-v_j(m_i', m_{-i}) > -v_j(m_i, m_{-i})$ となるような $m_i' \in M_i$ が存在しないとき、そしてそのときに限られる。このコードは単調性を除く全ての公理を満たす。このコードの下では定理 6.1(及び定理 6.2) は成立しない。例えば $(X,u) \in \Lambda$ において二つの行為プロファイル $x, y \in X$ をとり、x は全員がどの行為プロファイルよりも選好上良いと判断し、逆に y は全員がどの行為プロファイルよりも選好上悪いとしているとする。x は狭義ナッシュ均衡であるがフェアプレイ均衡ではない。また y はフェアプレイ均衡であるがナッシュ均衡ではない。

例 6.7 (アフィン変換からの不変性：局所ベンサムコード)

任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、

$m_i \in LB(X,u,m_{-i})$ であるのは m_i が関数 $\sum_{j \in N} v_j(\cdot, m_{-i})$ を M_i 上で最大にしているとき、そしてそのときのみであるとする。社会コード F を $m_i \in F_i(X,u,m_{-i})$ であるのは $m_i \in LB(X,u,m_{-i})$ であるとき、そしてそのときに限られる、とする。このコードはアフィン変換からの不変性を除く全ての公理を満たす。

定理 6.1 は成り立たない。全員の効用和を X 上で最大にする $x \in X$ が一意に存在すれば、x は明らかにフェアプレイ均衡である。これが常にナッシュ均衡になることはあり得ないから $FPE(X,u,F) \subset NE(X,u)$ は常に成り立つとは限らない。$SNE(X,u) \subset FPE(X,u,F)$ も常に成り立つとは限らない。たとえば純粋戦略プロファイル $x \in SNE(X,u)$ であったといよう。いま (X,u') を次のように定義する。正数 C と $y_1 \neq x_1$ があって

$u_2'(y_1, x_{-1}) = C \ s.t. C + \sum_{j \in N \setminus \{2\}} u_j(y_1, x_{-1}) > \sum_{j \in N} u_j(x)$; であり、これ以外の行為プロファイルに対する各プレイヤーの効用は u でのそれと等しい、とする。新しい

ゲームでも x は狭義ナッシュ均衡であるが、もはやフェアプレイ均衡ではない。以上からこのコードの下では定理 6.1(故に定理 6.2 も) は成り立たない。

例 6.8 (有効性：利他主義コード)

任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i,j \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、

$BR_{ij}(X,u,m_{-i}) := \{m_i \in M_i : (m_i, m_{-i}) \succcurlyeq_j (m'_i, m_{-i})$ (全ての $m'_i \in M_i$ に関して)$\}$ と定義する。

利他主義コードは $F_i(X,u,m_{-i}) := \bigcup_{j \neq i} BR_{ij}(X,u,m_{-i})$ と定義される。プレイヤー i にとって許容される行為は他者が最高に評価する行為のみである。他者の利益をまず優先して行動することをこのコードは推奨する。

このコードは有効性を除く全ての公理を満たしている。有効性を満たしていない簡単な例としてかのマッチングペニーゲームがある。

	a	b
a	$0,1$	$1,0$
b	$1,0$	$0,1$

このゲームが示すように利他主義コードは $X-$ 有効性を満たさない（命題 6.3 参照)。故に命題 6.3 より利他主義コードは有効性を満たしえない。命題 6.3 が示すように、このゲームではフェアプレイ均衡は存在しない。一方 2 人が a と b を半々の確率で選択する混合戦略対がこのゲームでの唯一つのナッシュ均衡となる。

定理 6.1(及び定理 6.2) の不成立は次の例が示している。

	a	b
a	$1,1$	$2,0$
b	$0,2$	$1,1$

(a,a) は狭義ナッシュ均衡であるがフェアプレイ均衡ではない。プレイヤー 2 が a を選択しているとき、社会コードはプレイヤー 1 に b の選択を指示するからである。(b,b) はフェアプレイ均衡であるが、ナッシュ均衡ではない。

例 6.9 (厚生無差別性：条件付自己犠牲コード)

このコードは前章での例 5.7 を混合戦略にまで広げたヴァージョンである。大まかに言うならば以下のようになる。あるプレイヤーのある行為がフェアプレイでないのは、それが他の全てのプレイヤーにとって最も好まれない唯一の行為であり、かつ行為の数が十分に多いとき、そしてそのときのみである、と。いわばこのような条件

が揃ったとき、プレイヤーの行為は禁止される。形式的定義は以下のとおりである。ゲーム (X,u) を任意に取る。仮に $\sum_{i\in N} 1/|X_i| \geq 1$ ならば、どの行為も全てのプレイヤーと全ての状況においてフェアプレイであるとする。つまり全ての i と m_{-i} に関して $F_i(X,u,m_{-i}) := M_i$ とする。他方、$\sum_{i\in N} 1/|X_i| < 1$ ならば、つまり行為の数が各プレイヤーに関して十分多いならば、任意の $m \in M$ と任意の $i \in N$ に関して、$m_i \notin F_i(X,u,m_{-i})$ であるのは、全ての $m'_i \in M_i \backslash \{m_i\}$ と全ての $k \in N \backslash \{i\}$ に関して $(m'_i, m_{-i}) \succ_k (m_i, m_{-i})$ であるときそしてそのときに限られる。

このコードは厚生無差別性を除く全ての公理を満たしている。例 5.7 で確認したとおり、このコードは X-有効性を満たすので、当然有効性も成り立つ。このコードが厚生無差別性を満たさないことも前章の例が示している。

このコードの下では定理 6.1 は成り立たない。ゲーム (X,u) では行為の数が十分に大きいとしよう。ある行為プロファイル x が狭義ナッシュ均衡であるとする。ゲーム (X,u') では、全ての $k \in N \backslash \{1\}$ に関して、$u'_k(y_1, x_{-1}) > u'_k(x_1, x_{-1})$ であり、それ以外の効用は (X,u) でのと同じとする。x は (X,u') でも狭義ナッシュ均衡であるが、もはやフェアプレイ均衡ではない。プレイヤー 1 が (X,u',x_{-1}) で x_1 をとれないからである。また (X,u'') において $X_1 = \{1,2,...,|X_1|\}$ とする。任意の $(t,x_{-1}) \in X, (t \in \{1,2,...,|X_1|\}),$ に関して、プレイヤー $k \in N \backslash \{1\}$ の効用関数を $u''_k(t,x_{-1}) = t$ とおく。すると任意の x_{-1} に関して $\{t\} = F_1(X,u'',x_{-1})$ であり、(t,x_{-1}) はフェアプレイ均衡である。ここが常にナッシュ均衡である保証はない。

なおより簡単な社会コードとして

任意の $(X,u) \in \Lambda$, 任意の $i \in N$, 任意の $m_{-i} \in M_{-i}$ に関して、$F_i(X,u,m_{-i}) := M_i \backslash X_i$.

がある。このコードは定値であるから、匿名性、独立性、単調性、連続性の成立は自明である。有効性の成立も明らかである。純粋戦略ナッシュ均衡は全てこのコードで弾かれるので、純粋戦略での狭義ナッシュ均衡はフェアプレイ均衡にはなりえない。故に定理 6.1（及び定理 6.2）が成立しないことも自明である。ただし、このコードではフェアプレイ均衡が存在すれば、それはナッシュ均衡なので $FPE(X,u) \subset NE(X,u)$ の関係はフェアプレイ均衡集合が空の場合は成り立つことを考え合わせれば、正しいことになる。

以上の例は局所ベンサムコードと利他主義コードを除いて前章で登場したものとおなじである。それらを混合戦略を扱えるよう定義しなおしたにすぎない。前章では利他主義コードの代わりにボルタコードが有効性を満たさない例として使われている。ボルタコードを混合戦略ケースに適用するのはかなり面倒であるため、ここでは使わなかった。なお前章でボルタコードを利他主義コードに置き換えることもできる。

フェアプレイ均衡の存在条件に関して若干示唆すべき点がある。公理の独立性で登場した社会コード、例 6.3 から 6.7 及び例 6.9 ではフェアプレイ均衡が常に存在するかどうか、に関しては何も述べてこなかった。実はこのことは現段階では確認できていない。フェアプレイ均衡存在のための条件、特に社会コードの公理系に関連しての条件、に関する研究は未解決問題である。いまのところ判った結果は定理 6.2 であり、匿名性以下六つの公理（または七つの公理）を満たす社会コードではフェアプレイ均衡が存在する、というものである。この結果をどこまで強めることができるかが今後の課題である。ただしその存在条件は、例 6.3 が予想するとおり、ここでの公理系とは関係が薄い可能性がある。

存在条件に関しては社会コード F の持つ位相的・代数的性質が関係するものと推察する。F_i を M_{-i} の写像として考えてみよう。つまりゲーム (X, u) を所与として、$F_i(X, u, \cdot)$ を m_{-i} の関数と見做すのである。更に M からそれ自身への多価写像

$m \mapsto \prod_{i \in N} \{m_i \in M_i : v_i(m_i, m_{-i}) \geq v_i(m'_i, m_{-i})$ (全ての $m'_i \in F_i(X, u, m_{-i})$ に関して)$\}$

を考えてみよう。フェアプレイ均衡プロファイルはこの多価写像の不動点に他ならない。そこでこの多価写像が不動点を持つには $F_i(X, u, \cdot)$ が凸コンパクト値をとり、連続 (=優半・劣半連続) であればいい (Berge の最大値定理と角谷の不動点定理 (Debreu 1959))。$F_i(X, u, \cdot)$ が凸コンパクト値であり連続であるという要請は社会コードに対する公理として定式化できるだろう。凸値であるとはある状況下での正しい選択同士の凸結合はやはり正しいと解釈できる。コンパクト値・連続性は我々が課した連続性とよく似た公理となろう。問題はこれらの公理が匿名性以下、フェアプレイ均衡集合の公理化に用いた七つの公理とどのような論理的関係を持つのか、である。これは今後の課題である。ただし本章で登場した社会コードのうちでこの不動点写像が連続・凸コンパクトを満たすと確認できたのはアモラルコード (例 6.1) のみであった。不動点定理を介してフェアプレイ均衡の存在を保証する公理系と我々の公理

系には明確な論理的関係はないのではないか、と現段階では推測している。

6.6 結論

道徳判断が持つ二つの性質として Hare(1952,1963,1982) は指図性 (prescriptivity) と普遍化可能性 (universalizability) を挙げる。このうち指図性とは、道徳判断が与えられた状況下における自己決定に関する指令・命令であることを指している。道徳判断は与えられた状況でこれこれをせよ」、「これこれをすべきでないという命令であり、指図である、というのである。そしてこれらの命令・指図は個別的な状況での、その場限りでの命令・指図ではない。それは普遍化されねばならない。「ある状況である人が喫煙してはならないという道徳判断は「その状況と似た状況で、全ての人が喫煙してはならないと普遍化されるべきである。これが普遍化可能性である*2。

さて Hare の主張を認めるとすると、人々はこのように自らの道徳判断を普遍化して各々の直面する状況で選択を行なうことになる。人々の道徳判断に基づく選択の結果、いかなる帰結が生まれるのか、これは究明に値する主題である。本章及び前章で得た結論は意外な定理であった。その帰結はナッシュ均衡である、と。

この定理は Hare 流の道徳判断を採用した場合、判断の普遍化の仕方によっては、道徳判断を無効にしてしまう、パラドクシカルな結果を生み出すことがあることを主張している。

ただし一つの留意事項がある。先に・・・判断の普遍化の仕方によっては・・・と断ったが、道徳判断の普遍化の仕方は本稿で扱ったものの他に様々な可能性があるということである。特に我々の議論ではプレイヤーはあらゆるタイプの効用関数をとりうる、という前提があった。いわゆる社会的選択理論での定義域の広範性に対応する前提である。しかし、現実には想起しそうもない状況 (状況とはどの人がどの効用関数を持つかということ) まで考えて、道徳判断を適用しなければならない、という設定には疑問があるだろう。人々のとりうる選好パターンに制限を加えれば、各公理の

*2 更にヘアはこの普遍化の仕方で重要なのはカント的な手続き的整合性にあると強調する。道徳判断は人を殺してはならないとか「嘘をついてはいけないとか実質的な内容を問題にするだけでなく (勿論これも重要であるが)、判断の仕方の整合性をも重視すべきであるという。ある状況では適用して、それと同じような状況では適用しない、といった恣意的な運用を厳しく非難する。道徳判断のこのような形式主義は彼によればカントに由来するという。

働く場も狭くなり、ナッシュ均衡を越える帰結が生まれるかもしれない。

またこれに関連して、社会コードの定義も再考を要する。我々の設定ではプレイヤー i は他のプレイヤーの選択 m_{-i} の選択を所与にして自分の行為の善し悪しを判断するという形になっている。そこでは自分の選択する行為によって他のプレイヤーは選択を変更しない、という仮定がある。しかし実際には人はある状況下で自分の選択を決める際に、それによって他者の選択行動も変わることをも考慮している。学校の先生が給食が拙くて残したい、と思っても、自分の児童達に示しが付かないとして無理に食べるような状況がそうである。このような設定では当然独立性などは公理としては要求されないだろう。ただしこの設定では非協力ゲームの枠組みと折り合いが悪い。プレイヤーが選択を考えるとき、他のプレイヤーは行動を変えない、とする見方が有力だからである。無論、戦略的思考と道徳的思考は別物である、という反論も可能ではあるが、このあたりの問題をどう解決するか、がポイントであろう。

これら残された主題に加え、2 点ばかりの主題に言及しておきたい。社会コードによっては次のような奇妙な判断をするものもある：ゲーム $(X, u) \in \Lambda, m_{-i} \in M_{-i}$ を所与とする。$m_i \in F_i(X, u, m_{-i})$ でありつつ、ある $j \neq i$ に関しては、$m_j \notin F_j(X, u, (m_i, m_{-\{i,j\}}))$ であると。つまり戦略プロファイル $m = (m_i, m_j, m_{-\{i,j\}})$ において i は m_i ととることは許されるのに j は m_j をとるのは許されない、ということが起こりうる。二人の行為は共に同じ社会状態 m を帰結するにもかかわらず、である。社会コードの機能が行為それ自体の善し悪しを判定することにあり、帰結の善し悪しを判定することではない点がこのような奇妙な現象を生み出す理由である。そこで次のような条件を課してみよう。社会コード F が state-dependent であるとは、任意の $(X, u) \in \Lambda$, 任意の $m \in M$, 任意の $i, j \in N$ に関して、$m_i \in F_i(X, u, m_{-i}) \Longleftrightarrow m_j \in F_j(X, u, m_{-j})$ であるときをいう。このコードでは行為の善し悪しはその行為が生み出す帰結によって判断されることになる。state-dependent な社会コードの帰結は考察に値する。

更にもう一点ある。これは混合戦略を用いることに関係している。序論で社会コードは幾つかの (時には相反する判断を下す) サブコードから成ると書いた。プレイヤーが混合戦略を選択するのは、これらサブコードにウエイトをつけて判断しているとも解釈できる。ここでの問題は、社会コード F に対して、幾つかのサブコード $F^\theta (\theta \in \Theta)$ が存在し、F はこれらのコードの凸結合となるかどうか、である。ここ

で F^θ は前章での社会コードである。つまりどのプレイヤーも混合戦略をとらないときに当該プレイヤーに明確な指示、つまり行為、を指し示す社会コードである。社会コード F の判断がこれら異なる F^θ の判断の首尾一貫したウエイト付けによっているのかどうかは興味深い主題である。

6.7　付録

証明の基本的アイディアは前章での主要結果、定理 5.1（厳密には少し強めたヴァージョン）、に証明を帰着させることにある。幾つかの補助概念が必要である。

定義 6.11 X コード G とは、任意の $(X,u)\in\Lambda$, 任意の $i\in N$, 任意の $x_{-i}\in X_{-i}$ に対して X_i の非空部分集合 $G_i(X,u,x_{-i})$ を対応させる多価写像 G_i の集合 $\{G_i\}_{i\in N}$ である。

X コードは前章での社会コードに極めて類似している。しかし両者の定義域は異なる。前章での社会コードは任意の二つのゲーム $(X,u),(X,u')$ が序数的に等しい、-つまり全てのプレイヤー j に関して、u_j と u'_j が X 上で同じ選好順序を導く-、ならば社会コードは同じ値をとる。しかし X コードでは必ずしもそうとは限らない。X コードの定義ではゲーム $(X,u),(X,u')$ は異なるのである。

X コードに対する幾つかの公理を定義する。

定義 6.12 X コード G が匿名性を満たすとは、任意のゲーム $(X,u),(X',u')\in\Lambda$ と任意の N 上の置換 π に関して、もし全ての $i\in N$ と全ての $x\in X$ に関して、$X_i=X'_{\pi(i)}$ かつ $u_i(x)=u'_{\pi(i)}(x^\pi)$ ならば、全ての $i\in N$、全ての $x\in X$ に関して $G_i(X,u,x_{-i})=G_{\pi(i)}(X',u',x_{-\pi(i)})$ が成り立つ。

X コード G が厚生無差別性を満たすとは、全ての $(X,u)\in\Lambda$ に関して、次の 2 条件が成り立つことを言う。

（1）全ての $i\in N$ に関して、$x_i\simeq y_i$ となる $x,y\in X$ を任意に取る（幾人かの i に関して $x_i=y_i$ もありうるとする)。このとき、任意の $i\in N$ に関して、$x_i\in G_i(X,u,x_{-i})\Longleftrightarrow y_i\in G_i(X,u,y_{-i})$ となる。

（2）任意の $x\in X$、任意の $i\in N$、及び x_i とは異なる行為で $x_i\simeq y_i$ となる任意の y_i に関して、

$G_i(X_i \backslash \{y_i\} \times X_{-i}, u, x_{-i}) = G_i(X, u, x_{-i}) \backslash \{y_i\}$ 及び

任意の $j \neq i$ に関して、$G_j(X_i \backslash \{y_i\} \times X_{-i}, u, x_{-j}) = G_j(X, u, x_{-j})$.

X コード G が弱単調性を満たすとは、任意の $(X, u), (X, u') \in \Lambda$、任意の $x \in X$、任意の $i \in N$ に関して、以下のことが成り立つときをいう。

$x_i \in G_i(X, u, x_{-i})$ かつ、全ての $j \in N$ と全ての $y \in X \backslash \{x\}$ に関して、

$u_j(x) \leq u'_j(x), u_j(y) \geq u'_j(y)$ ならば $x_i \in G_i(X, u', x_{-i})$.

X コード G が弱独立性を満たすとは、任意の $(X, u), (X, u') \in \Lambda$、任意の $i \in N$、任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して以下の条件が成り立つときをいう。全ての $j \in N$ に関して、u_j と u'_j が $\{(y_i, x_{-i}) : y_i \in X_i\}$ 上で一致するならば、$G_i(X, u, x_{-i}) = G_i(X, u', x_{-i})$ である。

X コード G がアフィン変換からの不変性を満たすとは、任意の $(X, u), (X, u') \in \Lambda$、任意の $i \in N$、$x_{-i} \in X_{-i}$ に関して以下の条件が成り立つときをいう。全ての $j \in N$ に関して、定数 $\alpha_j > 0, \beta_j$ が存在して

全ての $x \in X$ に関して $u'_j(x) = \alpha_j u_j(x) + \beta_j$

となるならば、$G_i(X, u, x_{-i}) = G_i(X, u', x_{-i})$ である。

X コード G が有効性を満たすとは、任意の $(X, u) \in \Lambda$ に対して、ある $x \in X$ で、

全ての $i \in N$ に関して、$x_i \in G_i(X, u, x_{-i})$

となるものが存在するときをいう。

弱単調性を除くすべての公理は前章及び本章での社会コードにおけるそれらと考え方は同じである。弱単調性では効用関数の X 上で取る値が関係してくる。厚生無差別性での二項関係 $\simeq$ は、前章でのそれと同じである。

また前章での命題 5.1 と同様、X コードの厚生無差別性は X コードの中立性を意味する。

任意のゲーム $(X, u), (X', u') \in \Lambda$、任意の $i \in N$ に対し、以下の条件を満たす X_i から X'_i への全単射 ρ_i が存在するとしよう。任意の行為プロファイル $x \in X$ に関して、$u'_i(x) = u_i(\rho_1(x_1), \rho_2(x_2), ..., \rho_n(x_n))$

このとき任意の $x \in X$ と任意の $i \in N$ に関して、

$x_i \in G_i(X, u, x_{-i}) \Longleftrightarrow \rho(x_i) \in G_i(X', u', \rho(x)_{-i})$ であれば、X コード G は中立性を満たすという。

さて次の補題が成り立つ。これは前章での定理 5.1 の拡張といえる。

補題 6.5 X コード G は匿名性、厚生無差別性、弱単調性、弱独立性、アフィン変換からの不変性、及び有効性を満たすとする。このとき、任意の $(X,u) \in \Lambda$、$i \in N$、$x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、

$G_i(X,u,x_{-i}) \cap BR_i(X,u,x_{-i}) \neq \phi$

である。

証明. 証明は前章の定理 5.1 と同じ要領でできる。G は全ての公理を満足する X コードとする。背理法にて証明する。あるゲーム $(X,u) \in \Lambda$、あるプレイヤー $j \in N$、及びある $x^*_{-j} \in X_{-j}$ で

(1)　$G_j(X,u,x^*_{-j}) \cap BR_j(X,u,x^*_{-j}) = \emptyset$

となるものが存在したとする。記法の便宜上 $B := BR_j(X,u,x^*_{-j})$ とおく。厚生無差別性より、一般性を失うことなく、$|B| \geq 2$ とおいてよい。$x^*_j \in G_j(X,u,x^*_{-j})$ を任意にとる。簡単化のため、$j=1$、$X_1 = \{1,2,...,|X_1|\}$、$B=\{1,...,k-1\}$、及び $x^*_1 = k$ $(k \geq 3)$ とする。

いま新しい効用プロファイル u^* を考える。$(\cdot, x^*_{-1})$ 上での u から u^* への効用変化が重要である。これは次のようになる。まず B 上での効用 $((b,x^*_{-1}), b \in B$ の効用の意味である$)$ はどのプレイヤーにとっても変化しないとする。$X_1 \backslash B$ 上での効用はプレイヤー 1 に関してはすべて無差別となり、効用も下がることはない。しかし依然として 1 の最適反応になることはない。1 以外のプレイヤーに関しては $X_1 \backslash B$ の全てが $(\cdot, x^*_{-1})$ 上で彼にとって最善となる（かつ B は全て最善にならない）ようにとる。かつ $X_1 \backslash B$ の全てに関する 1 以外のプレイヤーの効用は全員等しいとする。

u^* の形式的定義は以下のようになる。定数 C, D を以下のように定める。まず C は、B に属さないどの $x_1 \in X_1 \backslash B$ の効用 $u_1(x_1, x^*_{-1})$ よりも高いか等しく、かつ 1 の x^*_{-1} に対する最適反応、すなわち B の各要素、の効用よりも低いと設定する。形式的には、任意の $b \in B$ をとり、$u_1(b, x^*_{-1}) > C \geq max\{u_1(x_1, x^*_{-1}) : x_1 \in X_1 \backslash B\}$ とおく。

一方、$D = max\{u_j(x_1, x^*_{-1}) : j \in N, x_1 \in X_1\} + 1$ としよう。

そこで u^* は以下のような効用プロファイルとする。

(2)　任意の $b \in B$, 任意の $c_1 \in X_1 \backslash B$, 任意の $j \neq 1$ に関して、

$u_1^*(b,x_{-1}^*)=u_1(b,x_{-1}^*)>C=u_1(c_1,x_{-1}^*)$;

$u_j^*(c_1,x_{-1}^*)=D>u_j^*(b,x_{-1}^*)=u_j(b,x_{-1}^*)$.

また u^* においては $(\cdot,x_{-1}^*)$ での効用はどのプレイヤーも正とする（アフィン変換からの不変性よりこれは可能)。弱独立性より $(\cdot,x_{-1}^*)$ 以外での効用はどのプレイヤーも負とおいてよい。$b_1\in G_1(X,u^*,x_{-1}^*)\cap B$ としてみよう。弱単調性より $b_1\in G_1(X,u,x_{-1}^*)\cap B$ となって前提に矛盾する。故に

(3) $G_1(X,u^*,x_{-1}^*)\cap B=\emptyset$.

以上から弱独立性より $(\cdot,x_{-1}^*)$ での各プレイヤーの効用が (2) の如くであれば (3) が成り立つことになる。

また各プレイヤーは x_{-1}^* を所与として $X_1\backslash B$ に関しては無差別である。そこでまた新しい効用プロファイル u^{**} として、$x_{-1}\neq x_{-1}^*$ に関して $u_1^*(c_1,x_{-1})=C, u_j^*(c_1,x_{-1})=D$ (全ての $c_1\in X_1\backslash B$, 全ての $j\neq 1$ に関して), かつこれ以外は u^* と同じと置けば、$X_1\backslash B$ の任意の二つの行為に対して厚生無差別性が適用できる。だから、k 以外のこれら全ての行為を取り除くと、1 の行為の集合は $\{1,...,k\}$ となる。取り除かれた行為は k と厚生上は区別付かないので、厚生無差別性と弱独立性より、B 内のどの行為もフェアプレイにはならない、つまり $G_1(\{1,...,k\}\times X_{-1},u^{**},x_{-1}^*)\cap B=\emptyset$ である。G_1 は非空値なので、

(4) $G_1(\{1,...,k\}\times X_{-1},u^{**},x_{-1}^*)=\{k\}$

である。

ここで $K:=\{1,...,k\}$ としよう。中立性より、全てのプレイヤーが $1,...,k$ を行為として持つと仮定してよい。すなわち、全ての $i\in N$ に関して $K\subset X_i$ である。更に x_{-1}^* は k のみから構成されるとしよう。厚生無差別性より、各プレイヤー $i\neq 1$ の K に属さない行為をすべて削除してなおかつ (4) が成り立つようにすることは可能である。例えば効用プロファイル u(本来は u^{***} とでも記号すべきだろうが、煩雑なのでこう記号する) を

任意の $i,j\in N$, 任意の $a\in X_j\backslash K$, 任意の $x_{-j}\in X_{-j}$ に関して $u_i(a,x_{-j})=u_i(k,x_{-j})$, これ以外は u^{**} の効用値、とおく。こういう効用プロファイルは $(\cdot,x_{-1}^*)$ 上での $u_i^{**}(i\in N)$ の値と矛盾することなく構成可能である。まず $x\in X$ の中で x の構成成分のうち一つでも K 以外のものを含むものはいったん削除し、残った行為プロファイルの各プレイヤーの効用は u^{**} でのそれと同じにする。（この措置によ

り、集合 $\{(x_1, x^*_{-1}) : x_1 \in K\}$ 上での各自の効用は u^{**} でのそれと同じとなる。）さて削除した行為プロファイル $x \in X$ に関しては以下のように効用を定める。任意の $i \in N$ に関して

$u_i(x) = u_i(\widehat{x})$, ここで、任意の $j \in N$ に関して

$$\widehat{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{if } x_j \in K \\ k & \text{if } x_j \notin X_j \backslash K \end{cases}$$

$\widehat{x}$ は x の成分で K に属さないものは全て k に置き換えてできた行為プロファイルである。構成より $u_i(x) = u_i^{**}(\widehat{x})$ でもある。

すると任意の $j \in N$ の行為 $a \in X_j \backslash K$ は行為 k と厚生無差別である (補題 6.1)。故に厚生無差別性により各 $j \in N$ の行為 $a \in X_j \backslash K$ をすべて削除しても (4) が成り立つことになる。以上を纏めると以下の性質をもつゲーム $(K^N, u) \in \Lambda$ が存在することになる。

（5）任意の $j, j', j'' \in N \backslash \{1\}$, 任意の $k' \in K \backslash \{k\}$ に関して、

$u_1(1, x^*_{-1}) = u_1(2, x^*_{-1}) = \cdots = u_1(k-1, x^*_{-1}) > u_1(k, x^*_{-1})$;

$u_j(k, x^*_{-1}) = u_{j'}(k, x^*_{-1}) > u_{j''}(k', x^*_{-1})$

かつ $G_1(K^N, x^*_{-1}, u) = \{k\}$, ここで $x^*_{-1} = (k, ..., k) \in K^{N-1}$.

状況 (K^N, x^*_{-1}, u) においてはプレイヤー 1 は、彼以外のプレイヤー全員にとって最良の帰結をもたらす行為 k ととることが推奨される。k はプレイヤー 1 にとっては最悪の帰結をもたらす行為であるにもかかわらずである。すなわちこの状況においてプレイヤー 1 は自己犠牲的行為をとらねばならないのである。匿名性と中立性を考えれば、プレイヤーと行為を置換してもこの自己犠牲的関係は保持されることになる。以下ではこの X コードが有効性を満たさないことを証明する。つまり補題 6.5 を否定するならば、矛盾が起こることを示す。フェアプレイプロファイルが存在しないようなゲームを構成するのである。これで補題 6.5 の証明が完成する。

記号の簡単化のため、任意の $i \in N$ に関して、$u_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ は (5) を表現する効用関数とする。ただし $u_i(k, x^*_{-1}) = 0$ と基準化しておく（アフィン変換からの不変性よりこれは可能)。関数 $f : K \times N \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x_1, i) := u_i(x_1, x^*_{-1})$ とおく。

この関数は一つの $k \times n$ 行列の式表現である。この行列の (x_1, i) 成分は i が行為プロファイル (x_1, x^*_{-1}) でゲーム (K^N, u) にて得る利得である。$u_i(k, x^*_{-1}) = 0$ の基準化のせいで、$f(k, i) = 0$ が全ての i に関して成り立っている。

関数 $\pi : N \times N \longrightarrow N$ を $\pi(i,j) := i - j + 1\ (mod\ n)$ と定義する。

任意の $i \in N$ に関して、$\alpha_i : \{1, ..., n-1\} \times K \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ 及び $\beta_i > 0$ としよう。$\alpha_i(\cdot)$ と β_i の値は正の値である限り、何でもよい。ただしこれらの値は証明の最後まで固定されているものとする。

さていまや所望のゲームを定義する段階に来た。K^N 上での各 i に関して効用関数 $v_i : K^N \longrightarrow \mathbb{R}$ は以下の通りとする。

(6) $v_i(x) := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i(j, x_n) f(x_j, \pi(j,i)) + \beta_i f(x_n, \pi(n,i))$ if $x_n < k$,

(7) $v_i(x) := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i(j,k)[f(k+1-x_j, \pi(j,i)) - f(1, \pi(j,i))]$ if $x_n = k$

以下ゲーム $(K^N, v), v = (v_i)_{i \in N}$ がフェアプレイプロファイルを持たないことを証明する。

補題 6.6 (K^N, v) における任意のフェアプレイプロファイル x に関して、$x_n < k$ ならば、全ての $i \neq n$ に関して $x_i = k$ である。

証明. x はフェアプレイプロファイルであり、$x_n < k$ としよう。$i \neq n$ をとる。x_{-i} を所与としてプレイヤー i が受け取ることのできる効用を考えよう。(6) から、

$v_i(\cdot, x_{-i}) =$ 定数$+\ \alpha_i(i, x_n) f(\cdot, 1) =$ 定数$+\ \alpha_i(i, x_n) u_1(\cdot, x^*_{-1})$

となる。ここで「定数」とあるが、これは i の行為の選択とは独立に決まってくる項のことである。i の選択が他のプレイヤーの厚生に与える影響も見ておく必要がある。全ての $j \in N$ に関して、

$v_j(\cdot, x_{-i}) =$ 定数$+\ \alpha_j(i, x_n) f(\cdot, \pi(i,j)) =$ 定数$+\ \alpha_j(i, x_n) u_{\pi(i,j)}(\cdot, x^*_{-1})$

これらの等式から、他のプレイヤーが x_{-i} を選んでいるときのプレイヤー i のポジションは、x^*_{-1} を所与としてゲーム (K^N, u) でのプレイヤー 1 のポジションと同一であることがわかる。プレイヤー j はプレイヤー $\pi(i,j)$ が x^*_{-1} を所与として (K^N, u) にて演じる役と同じ役割を果たしている。形式的には、任意の行為 $a \in K$ と任意の $j \in N$ に関して、

$v_i(a, x_{-i}) = \alpha_i(i, x_n) u_1(a, x^*_{-1}) +$ 定数

$v_j(a, x_{-i}) = \alpha_j(i, x_n) u_{\pi(i,j)}(a, x^*_{-1}) +$ 定数 $(j \neq i)$

である。このとき、匿名性、弱独立性、厚生無差別性、アフィン変換からの不変性、及び (5) より、$G_i(K^N, v, x_{-i}) = \{k\}$ となる。■

補題 6.7 (K^N, v) における任意のフェアプレイプロファイル x に関して、もし全て

の $i \neq n$ に関して $x_i = k$ であれば、$x_n = k$ である。

証明. 仮に $x_n < k$ としよう（背理法）。x はフェアプレイプロファイルであり、$x_{-n} = (k, ..., k)$ であるとしよう。$f(k, \cdot) = 0$ であるから、全ての $i \in N$ に関して、

$v_i(\cdot, x_{-n}) = \beta_i f(\cdot, \pi(n, i)) = \beta_i u_{\pi(n,i)}(\cdot, x^*_{-1})$ となる。$\pi(n, n) = 1$ であるから、これはプレイヤー n のポジションが x^*_{-1} を所与としてゲーム (K^N, u) でのプレイヤー 1 のポジションと同一であることを意味している。故に、$G_n(K^N, v, (k, ..., k)) = \{k\}$ となり、矛盾する。■

補題 6.6, 6.7 はフェアプレイプロファイルが存在すれば $x_n = k$ であることを意味する。

補題 6.8 (K^N, v) における任意のフェアプレイプロファイル x に関して $x_n = k$ であれば、全ての $i \neq n$ に関して $x_i = 1$ である。

証明. x はフェアプレイプロファイルであり、$x_n = k$ であるとしよう。$i \neq n$ をとり、このプレイヤーの行為の選択が全プレイヤーの効用に与える影響を考察しよう。v の定義より、全ての $y_i \in X_i$ と全ての $j \in N$ に関して、

$v_j(y_i, x_{-i}) =$ 定数 $+\alpha_j(i, k) f(k + 1 - y_i, \pi(i, j)) =$ 定数 $+\alpha_j(i, k) u_{\pi(i,j)}(k + 1 - y_i, x^*_{-1})$

である。ここで「定数」とは y_i に関して一定であることを意味している。この式は、前と同様、状況 (K^N, v, x_{-i}) における各プレイヤー $i \neq n$ のポジションは状況 (K^N, u, x^*_{-1}) でのプレイヤー 1 のそれと同一であることを意味している。しかし今度は、(K^N, u, x^*_{-1}) における行為 k は (K^N, v, x_{-i}) における行為 $k + 1 - k = 1$ に対応してはいるが。それ故プレイヤー i にとってのフェアプレイは 1 のみである：$G_i(K^N, v, x_{-i}) = \{1\}$ となる。■

以上から、フェアプレイプロファイルが存在するとしたら、それは $(1, ..., 1, k)$ である他ない。しかし、次の補題では $(1, ..., 1, k)$ はフェアプレイプロファイルではないことが判明する。これをもって、(K^N, v) がフェアプレイプロファイルを持たないことになり、有効性に矛盾し、定理 6.1 の証明は完結する。■

補題 6.9 行為プロファイル $(1, ..., 1, k)$ はゲーム (K^N, v) でのフェアプレイプロファイルではない。

証明. 任意の行為 $a \in K$ と任意の $i \in N$ に関して、

(8) $v_i(1, ..., 1, a) =$ 正の定数 $\times u_{\pi(n,i)}(k+1-a, x^*_{-1})+$ 定数

を示せば十分である。実際、この条件が成り立てば、$x_{-n} = (1, ..., 1)$ に対するプレイヤー n のポジションはゲーム (K^N, u) における x^*_{-1} に対するプレイヤー 1 のポジションに実質的には等しい。違いは、(K^N, v) におけるプレイヤー i が (K^N, u) におけるプレイヤー $\pi(n,i)$ に相当し、(K^N, v) における行為 a が (K^N, u) における行為 $k+1-a$ に相当することである。これらの相違点は、しかしながら、匿名性、厚生無差別性、アフィン変換からの不変性、及び弱独立性の下では本質的な差異ではない。故に（8）は $x_n = 1$ のみがゲーム (K^N, v) での $x_{-n} = (1, ..., 1)$ を所与としてプレイヤー n のただ一つのフェアプレイとなる、つまり $G_n(K^N, v, (1, ..., 1)) = \{1\}$ である。故に $(1, ..., 1, k)$ は (K^N, v) でのフェアプレイプロファイルではない。残る証明は（8）式の成立である。

以下が成立すれば（8）も成り立つ。任意の $i \in N$ と任意の $x_n < k$ に関して、

（9）　$v_i(1, ..., 1, x_n) - v_i(1, ..., 1, k) = f(k+1-x_n, \pi(n,i)) - f(1, \pi(n,i)).$

(その証明）まず $a \in K$ に関して、$a < k$ ならば（9）式の x_n を a とおいて整理すると

$v_i(1, ..., 1, a) = f(k+1-a, \pi(n,i)) + v_i(1, ..., 1, k) - f(1, \pi(n,i)).$

故に

$v_i(1, ..., 1, a) = u_{\pi(n,i)} f(k+1-a, x^*_{-1}) + v_i(1, ..., 1, k) - f(1, \pi(n,i)).$

$v_i(1, ..., 1, k) - f(1, \pi(n,i))$ は定数なので（8）が成り立つ。

次に $a = k$ を考える。この場合（8）は

（10）$v_i(1, ..., 1, k) =$ 正の定数 $\times u_{\pi(n,i)}(1, x^*_{-1})+$ 定数

となる。（10）の成立を言えばよい。（9）を整理すると

$v_i(1, ..., 1, k) = v_i(1, ..., 1, x_n) - f(k+1-x_n, \pi(n,i)) + f(1, \pi(n,i))$

ここで $x_n (< k)$ は任意でいいので、右辺の第 1 項と 2 項は定数。故に（10）が成立する。

以上で（9）⇒(8) は言えた。

ところで（9）式は関数 $v_i(1, ..., 1, \cdot)$ は、定数項を無視すれば、$f(\cdot, \pi(n,i))$ と同一であることを示している。尤も、関数の定義域の変数の並び方の順序は逆ではある。つまり $v_i(1, ..., 1, x_n)$ は $f(k+1-x_n, \pi(n,i))$ に対応している。

（6）と（7）から、（9）は次の式と同値である。

（11）$\sum_{j=1}^{n-1} f(1,\pi(j,i))[\alpha_i(j,x_n)+\alpha_i(j,k)]+\beta_i f(x_n,\pi(n,i))$
$= f(k+1-x_n,\pi(n,i))-f(1,\pi(n,i))$

この条件は $\alpha_i(\cdot,\cdot)$ と $\beta_i(\cdot,\cdot)$ を任意に選んだ場合は必ずしも成立はしない。しかしながら、以下の主張は成り立つ：任意の $i\in N$ に関して、$\alpha_i:\{1,...,n-1\}\times K\to\mathbb{R}_{++}$ と $\beta_i>0$ で、全ての $x_n<k$ に関して（11）が成り立つものが存在する。この主張の証明を以下行いたい。とりあえず我々の証明にとってはこれで十分である。なぜならここまでの議論は $\alpha_i(\cdot,\cdot)$ と $\beta_i(\cdot,\cdot)$ の値はそれらが厳密に正である限り、どのような値でも成り立つからである。

さて主張を証明するため、$i\in N$ を一人取り出し固定する。一つの重要な留意点は以下のことである。全ての $x_n<k$ に関して、

$f(1,\pi(i,i))>0$ and $f(x_n,\pi(n,i))<0$ if $i\neq n$,

$f(1,\pi(1,i))<0$ and $f(x_n,\pi(n,i))>0$ if $i=n$

であること、これである。これは u の定義と $f(k,\cdot)=0$ の基準化からいえる。それ故、全ての $x_n<k$ に関して、（11）の左側は正・負両方の項を含んでいる。そこで（11）式の各項のウエイトを適切に選べば、この式は、全ての $x_n<k$ に関して成り立つということが直ちに明らかになる。しかしながら、$\alpha_i(j,x_n)$ が x_n に依存するのに対し、β_i は x_n に依存しないことは注意すべきである。

厳密な証明は以下のようになる。最初に $i\neq n$ のケースを考える。$\beta_i>0$ を十分大きくとり、全ての $x_n<k$ に関して、

（12）$\sum_{j=1}^{n-1} f(1,\pi(j,i))+\beta_i f(x_n,\pi(n,i))<f(k+1-x_n,\pi(n,i))-f(1,\pi(n,i))$

が成り立つようにする。（12）の左側は（11）のそれに、全ての (j,x_n) に関して $\alpha_i(j,x_n)=1/2$ であるときは一致する。$f(1,\pi(i,i))>0$ だから、（11）の等号は $\alpha_i(i,x_n)$ を増加させれば成り立つ。

$i=n$ のケースも同様である。最初に、$\beta_i>0$ を十分大きくとり、全ての $x_n<k$ に関して、（12）の不等号を逆にした式が成り立つようにおく。この不等式は、全ての (j,x_n) に関して $\alpha_i(j,x_n)=1/2$、とおけば、（12）の左側がその右側よりも大きいことを示している。$f(1,\pi(1,n))=f(1,n)<0$ だから、（11）の等号は $\alpha_n(1,x_n)$ を増加させることによって達成できる。

総括すると、最後の二つのパラグラフは、全ての i に関して、α_i と β_i で（12）を全ての $x_n < k$ に関して成り立つようにできるものが存在することを示している。故に（12）は成り立つ。前に議論したように、（12）は $G_n(K^N, v, (1, ..., 1)) = \{1\}$ を意味し、それ故 $(1, ..., 1, k)$ はフェアプレイプロファイルではなくなる。■

さて補題 6.3 の証明は以下のとおりである。

証明. X コード G を次のように定義する。

$G_i(X, u, x_{-i}) := [F_i(X, u, x_{-i}) \cap X_i] \cup [\bigcup_{j \neq i} \{x_i \in X_i : u_j(x_i, x_{-i}) \geq u_j(x_i', x_{-i})$ (全ての $x_i' \in X_i$ に関して$)\}]$

$\bigcup_{j \neq i} \{\cdots\}$ の項は G_i の定義に必要である。これがないと $G_i(X, u, x_{-i})$ が空になる可能性がある。G が匿名性、弱独立性、アフィン変換からの不変性、厚生無差別性を満たすことは F_i がこれらを満たすことと G の定義より明らかである。G が有効性を満たすことも命題 6.3 から従う。G が弱単調性を満たすことの証明は以下のとおりである。$(X, u), (X, u') \in \Lambda$、$x \in X$、$i \in N$ を所与とする。全ての $j \in N$ と全ての $y \in X \backslash \{x\}$ に関して、

$u_j(x) \leq u_j'(x), u_j(y) \geq u_j'(y)$ であったとする。このとき

$x_i \in G_i(X, u, x_{-i}) \Longrightarrow x_i \in G_i(X, u', x_{-i}).$

を言えばよい。G の定義から $x_i \in F_i(X, u, x_{-i}) \Longrightarrow x_i \in F_i(X, u', x_{-i})$ を示せば十分である。

$v_j(x) \geq v_j(m)$ となる $m \in M$ を任意に取る。

$$v_j(x) - v_j(m) = v_j(x) - \sum_{y \in X} p_m(y) v_j(y) = \sum_{y \in X} p_m(y) v_j(x) - \sum_{y \in X} p_m(y) v_j(y)$$
$$= \sum_{y \in X} p_m(y)\{v_j(x) - v_j(y)\} \leq \sum_{y \in X} p_m(y)\{v_j'(x) - v_j'(y)\} = v_j'(x) - v_j'(m).$$

ここで $p_m(y) := \prod_{i \in N} m_i(y_i).$

故に $v_j(x) \geq v_j(m) \Longrightarrow v_j'(x) \geq v_j'(m)$ となる。同じく $v_j(x) > v_j(m) \Longrightarrow v_j'(x) > v_j'(m)$ でもあるから F の単調性より $x_i \in F_i(X, u', x_{-i})$ となり、所望の結果を得る。

故に補題 6.5 より

（1）$G_i(X, u, x_{-i}) \cap BR_i(X, u, x_{-i}) \neq \phi$

が従う。ここから

（2）$F_i(X, u, x_{-i}) \cap BR_i(X, u, x_{-i}) \neq \phi$

を導けばよい。$BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i = X_i$ の場合は自明である ($BR_i(X,u,x_{-i}) = M_i$ となるため)。そこで $BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i \neq X_i$ としよう。

以下の証明の基本方針を素描しよう。まず i 以外のプレイヤーの効用関数を変えて新しい効用プロファイル $(u_i,(u'_j)_{j\neq i})$ を構成する。その構成では $F_i(X,(u_i,(u'_j)_{j\neq i}),x_{-i}) \cap BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i \neq \phi$ であるようにする。これは $BR_i(X,u,x_{-i})$ と G_i の第 2 の項 $\underset{j\neq i}{\cup}\{x_i \in X_i : u_j(x_i,x_{-i}) \geq u_j(x'_i,x_{-i})$ (全ての $x'_i \in X_i$ に関して)$\}$ が交わりを持たないように構成すればよい。$(u_i,(u'_j)_{j\neq i})$ にも (1) は成り立つので、$F_i(X,(u_i,(u'_j)_{j\neq i}),x_{-i}) \cap BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i \neq \phi$ となる。更に任意の $b_i \in F_i(X,(u_i,(u'_j)_{j\neq i}),x_{-i}) \cap BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i$ に関して効用プロファイル $(u_i,(u'_j)_{j\neq i})$ から u への変化が弱単調性の前提を満たすように構成すれば証明は完了する。形式的証明は以下のとおりである。

任意の $j \neq i$ に関して、u'_j を次のように定義する。

任意の $b_i \in BR_i(X,u,x_{-i}), c_i \in X_i \backslash BR_i(X,u,x_{-i}), z_{-i} \in X_{-i}$ に関して

$u'_j(b_i,z_{-i}) := u_j(b_i,z_{-i}) - K_j, K_j > 0$ は定数

$u'_j(c_i,z_{-i}) := u_j(c_i,z_{-i})$

ただし K_j は $min\{u_j(x) : x \in X\} > max\{u_j(b_i,z_{-i}) : b_i \in BR_i(X,u,x_{-i}), z_{-i} \in X_{-i}\} - K_j$

が成り立つようにとる。この操作により、$j \neq i$ は $BR_i(X,u,x_{-i})$ を x_{-i} を所与として、u'_j のトップにすることは決してない。この $(u_i,(u'_j)_{j\neq i})$ に関しても（1）は成り立ち、G の定義から

（3）$F_i(X,(u_i,(u'_j)_{j\neq i}),x_{-i}) \cap BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i \neq \phi$

である。

$b_i \in F_i(X,(u_i,(u'_j)_{j\neq i}),x_{-i}) \cap BR_i(X,u,x_{-i}) \cap X_i$ を任意に取る。

$(u_i,(u'_j)_{j\neq i})$ から u への選好変化は b_i に関して F の単調性の前提を満たすことを示せば証明は完了する。

$v'_j(b_i,x_{-i}) \geq v'_j(m)$ となる $m \in M$ を任意に取る。

$v'_j(b_i,x_{-i}) - v'_j(m) = v'_j(b_i,x_{-i}) - \sum_{y\in X} p_m(y)v'_j(y) = \sum_{y\in X} p_m(y)v'_j(b_i,x_{-i}) - \sum_{y\in X} p_m(y)v'_j(y)$

$= \sum_{y\in X} p_m(y)\{v'_j(b_i,x_{-i}) - v'_j(y)\}$

$= \sum_{y \in X s.t. y_i = b_i} p_m(y)\{v'_j(b_i, x_{-i}) - v'_j(y)\} + \sum_{y \in X s.t. y_i \neq b_i} p_m(y)\{v'_j(b_i, x_{-i}) - v'_j(y)\}$
$= \sum_{y \in X s.t. y_i = b_i} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - K_j - (u_j(y) - K_j)\} + \sum_{y \in X s.t. y_i \neq b_i} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - K_j - u_j(y)\}$

$= \sum_{y \in X s.t. y_i = b_i} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - u_j(y)\} + \sum_{y \in X s.t. y_i \neq b_i} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - u_j(y)\} - \sum_{y \in X s.t. y_i \neq b_i} p_m(y) K_j$

$\leq \sum_{y \in X s.t. y_i = b_i} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - u_j(y)\} + \sum_{y \in X s.t. y_i \neq b_i} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - u_j(y)\}$
$= \sum_{y \in X} p_m(y)\{u_j(b_i, x_{-i}) - u_j(y)\} = v_j(b_i, x_{-i}) - v_j(m).$

ここで $p_m(y) = \prod_{i \in N} m_i(y_i)$ である。

故に $v_j(b_i, x_{-i}) \geq v_j(m)$ となる。同様にして $v'_j(b_i, x_{-i}) > v'_j(m) \Longrightarrow v_j(b_i, x_{-i}) > v_j(m)$ となるので、所望の結果を得る。■

定理 6.2 の証明は以下の通りである。

証明. $m_i \in BR_i(X, u, m_{-i})$ を任意にとる。$m_i \in F_i(X, u, m_{-i})$ を示せば、$NE(X, u) \subset FPE(X, u, F)$ となって定理 6.1 を考え合わせれば所望の結果を得る。

$a_i \in \Omega \backslash X_i$ を一つとり、ゲームの列 $(X^\nu, u^\nu) \in \Lambda$ を次のように定義する。

$X_i^\nu = X_i \cup \{a_i\}, X_j^\nu = X_j$ (全ての $j \neq i$ に関して)

任意の $k \in N$、任意の $x_i \in X_i$、任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、

$u_k^\nu(a_i, x_{-i}) := u_k(m_i, x_{-i}) + \frac{1}{\nu}$, $u_k^\nu(x_i, x_{-i}) := u_k(x_i, x_{-i})$

またゲーム $(X^0, u^0) \in \Lambda$ を X^0 は X^ν に等しく、

任意の $k \in N$、任意の $x_i \in X_i$、任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に関して、

$u_k^0(a_i, x_{-i}) := v_k(m_i, x_{-i})$, $u_k^0(x_i, x_{-i}) := u_k(x_i, x_{-i})$ と定義する。

$u^\nu \longrightarrow u^0$ であり、$(X^0, u^0) \in \Lambda$ においては $a_i \simeq m_i$ である (補題 6.1)。

各 ν に関して、$BR_i(X^\nu, u^\nu, m_{-i}) = \{a_i\}$

であることが以下の計算からわかる：ここで記号 $m_{-i}(x_{-i})$ は $\prod_{j \neq i} m_j(x_j)$ のことである。

$v_i^\nu(a_i, m_{-i})$:

$= \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} m_{-i}(x_{-i}) u_i^\nu(a_i, x_{-i})$
$= \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} m_{-i}(x_{-i}) \left\{u_i(m_i, x_{-i}) + \frac{1}{\nu}\right\}$
$> \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} m_{-i}(x_{-i}) u_i(m_i, x_{-i}) = v_i(m_i, m_{-i})$
$\geq v_i(m'_i, m_{-i})$ (任意の $m'_i \in M'_i$ に関して)

$= v_i^\nu(m_i', m_{-i})$.

さてこの関係と補題 6.3 より $a_i \in F_i(X^\nu, u^\nu, m_{-i})$. 故に連続性により $a_i \in F_i(X^0, u^0, m_{-i})$. これと厚生無差別性により $m_i \in F_i(X, u, m_{-i})$ となり、所望の結果を得る。 ■

参考文献

[1] Allen B (1996) A remark on a social choice problem. Soc Choice Welfare 13:11-16

[2] Arrow KJ (1963) Social Choice and Individual Values. Wiley, Second Edition, New York（長名訳 「社会的選択と個人的評価」日本経済新聞社 1977）

[3] Arrow KJ, Hahn F (1971) General competitive analysis. North-Holland, Amsterdam

[4] Aumann RJ (1964) Markets with a continuum of traders. Econometrica 32:39-50

[5] Aumann RJ (1966) Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders. Econometrica 34:1-17

[6] Aumann R (1976) Agreeing to disagree. Annals of Statistics 4: 1236-1239

[7] Barton AP, Böhm V (1982) Consumer Theory. In:Arrow JK,Intrillgator MD (eds) Handk Math Econ Vol II, Chap 9

[8] Bergstrom TC (1975) Maximal elements of acyclic relations on compact sets. J Econ Theory 10: 403-404

[9] Binmore KC (1976) Social choice and parties. Rev Econ Stud 43:459-64

[10] Binmore K (1986a,b,c) Nash bargaining theory I,II,III.In :Binmore K, Dasgupta P (eds) The economic theory of bargaining, Blackswell, New York

[11] Blau JH (1957) The existence of social welfare functions. Econometrica 25: 302-313

[12] Border KC (1983) Social welfare functions for econom ic environments with and without the Pareto principle.
J Econ Theory 29: 205-216

[13] Bordes G, LeBreton M (1989) Arrovian theorems with private alternatives domains and selfish individuals. J Econ Theory 47: 257-281

[14] Bordes G, LeBreton M (1990) Arrovian theorems for economic domains: The case where there are simultaneously private and public goods. Soc Choice Welfare 7:1-17

[15] Bordes G, Campbell DE, LeBreton M (1995) Arrow's theorem for economic domains and Edgeworth hyperboxes. Int Econ Rev 36: 441-454

[16] Bordes G, Salles,M (1978) Sur l'Impossibilie des fonctions de decision collective : Un commentaire et un resultat. Rev Econ Polot 88: 442-448

[17] Campbell DE (1990) Can equity be purchased at the expense of efficiency?: An axiomatic inquiry. J Econ Theory 51: 32-47

[18] Campbell DE (1992a) Transitive social choice in economic environments. Int Econ Rev 33: 341-352

[19] Campbell DE (1992b) Equity, Efficiency, and Social Choice. Oxford : Clarendon Press

[20] Campbell DE (1992c) Public goods and Arrovian social choice. Soc Choice Welfare 9: 173-183

[21] Campbell DE, Kelly JS (2002) Impossibility theorems in the Arrovian framework. In:Arrow KJ, Sen AK, Suzumura K (eds) Handbook of social choice and welfare Vol.1

[22] Chichilnisky G, Heal GM (1979) Necessary and sufficient conditions for the resolution of the social choice paradox, J Econ Theory 31: 68-87

[23] Debreu G (1952) A social equilibrium existence theorem. In: Proceedings of the national academy of sciences of the U.S.A. 38:886-893

[24] Debreu G (1959) Theory of Value. Wiley, Yew York.

[25] Debreu G, Scarf H (1963) A limit theorem on the core of an economy. Int Econ Rev 4: 235-246

[26] Donaldson D, Weymark J (1988) Social choice in economic environments. J Econ Theorey 46: 291-308

[27] Dutta B, Sen A (1991) A necessary and sufficient condition for two-person

Nash implementation. Rev Econ Stud 58:121-128

[28] Dutta B, Sen A, Vohra R (1995) Nash implementation through elementary mechanisms in economic environments. Economic Design 1:173-203

[29] Fleurbaey M, Suzumura K, Tadenuma,K (2005a) Arrovian aggregation in economic environments:How should we know about indifference surfaces? J Econ Theory 124: 22-44

[30] Fleurbaey M, Suzumura K, Tadenuma,K (2005b) The inforamtional basis of the theory of fair allocation. Soc Choice Welfare 24: 311-341

[31] Fountain J, Suzumura K (1982) Collective choice rules without the Pareto principle. Int Econ Rev 23: 299-332

[32] Gevers L (1986) Walrasian social choice : some simple axiomatic approaches. In:Heller et al.(eds) Social choice and public decision making: essays in honor of Arrow JK Vol 1. Cambridge Univ. Press, Cambridge

[33] Gibbard A (1969) Social choice and the Arrow's condition. Mimeo

[34] Hare MR (1963) Freedom and reason Oxford （山内訳 「自由と理性」理想社 1982）

[35] Hare MR (1981) Moral thinking: Its levels, method and point. Oxford（内井・山内監訳「道徳的に考えること：レベル・方法・要点」 勁草書房 1994）

[36] Hildenbrand W (1974) Core and Equilibria in a Large Economy. Princeton Univ. Press, Princeton

[37] Hurwicz L (1979) On allocations attainable through Nash equilibria. J Econ Theory 21:140-166

[38] Hurwicz L (1979) Outcome functions yielding Walrasian and Lindahlian allocations at Nash equilibrium points. Rev. Econ. Stud. 46: 217-225

[39] Hurwicz L,Maskin E,Postlewaite (1980) A feasible implementation of social choice correspondence by Nash equilibria. Mimeo.

[40] Inada K (1964) On the economic welfare function. Econometrica 32: 315-338

[41] Kalai E, Muller E, Satterthwaite MA (1979) Social welfare functions when preferences are convex, strictly monotonic and continuous. Public Choice

34: 87-97

[42] Kalai E, Smolodinsky M (1975) Other solutions to Nash's bargaining problem. Econometrica 43:513-518.

[43] Kannai Y (1970) Continuity properties of the core of a market. Econometrica 38: 791-815

[44] Kant I (1781) Kritik der reinen vernunft.(篠田訳純粋理性批判 (上中下) 岩波 1961)

[45] 小林公 「合理的選択と契約」 1991 弘文堂

[46] LeBreton M, Weymark J (2003) Arrovian social choice theory on economic domains. forthcoming In:ArrowKJ, Sen AK, Suzumura K (eds) Handbook of social choice and welfare Vo2.

[47] Mas-Colell A (1985) The Theory of General Economic Equilibrium; A differentiable approach. Cambridge University Press

[48] Mas-Colell A, Sonnenschein H (1972) General possibility theorems for group decisions. Rev Econ Stud 39: 185-192

[49] Maniquet F (1993) Informational efficiency, horizontal equity and the equal income Walrasian rule. Mimeo.

[50] Maniquet F (1996) Horizontal equity and stability when the number of agents is variable in the fair division problem Econ. Letters 50: 85-90

[51] Maskin E (1999) Nash equilibrium and welfare optimality, The Review of Econ Studies 66: 23-38.

[52] McKelvey RD (1989) Game forms for Nash implementation of social choice correspondences. Soc Choice Welfare 6:139-156

[53] Miyagawa E, Nagahisa R, Suga K (2006) Universalizability of social codes: An economic approach. Mimeo.

[54] Moore J, Repullo R (1990) Nash implementation: A full characterization. Econometitrica 59:509-519

[55] Moulin H (1988) Axioms of cooperative decision making. Cambridge University Press

[56] Moulin H (1990) Uniform externalities: Two axioms for fair allocation. J

Pub Econ 43:305-326

[57] 村上泰亮 （1971） 経済厚生 「価格理論 II」所収 岩波

[58] 長久領壱 (1996) 経済環境のもとでの社会的選択 (鈴村編著社会的選択理論の研究所収 日本経済研究センター研究報告 No.86)

[59] Nagahisa R (1991a) Acyclic and continuous social choice in T_1-connected spaces: Including its application to economic environments. Soc Choice Welfare 8: 319-332

[60] Nagahisa R (1991b) A local independence condition for characterization of Walrasian allocations rule. J Econ Theory 54: 106-123

[61] Nagahisa R (1992) Walrasian social choice in a large economy. Math Soc Scie 24:73-78

[62] Nagahisa R (1994) A necessary and sufficient condition for Walrasian social choice. J Econ Theory 62:186-208

[63] Nagahisa R, Suh, SC (1995) A characterization of the Walras rule. Soc Choice Welfare 12: 335-352. Reprinted in Walker DE(ed) The Legacies of Leon Walras (2001) The series of Intellectual Legacies of Modern Economics Vol.2.Edward Elgar Publishing

[64] Nagahisa R (1996) Identification of domain restrictions over which acyclic, continuous-valued, and positive responsive social choice rules to operate. Soc Choice Welfare 13: 383-395

[65] 長久領壱 （2004）「規範の受諾：説論としてのゲーム理論」早稲田大學政治經濟學會 357 巻：5 − 22

[66] Nagahisa R (2006) Some further results on acyclic, continuous-valued, and positive responsive social choice rules. Mimeo

[67] Nagahisa R (2006) Axiomatic analysis of social codes: A social choice approach. Mimeo.

[68] Nash J (1950) The bargaining problem. Econometrica 18: 155-162

[69] Nash J (1951) Noncooperative games. Annals of Math 54: 289-295

[70] Nikaido F (1968) Convex structures and economic theory. Academic Press New York London

[71] Peleg B (1985) An axiomatization of the core of cooperative game without sidepayment. J Math Econ 14: 203-214

[72] Peleg B, Tijs SH (1996) The consistency principle for games in strategic form. Int J Game Theory 25: 13-34

[73] Rawls J (1971) A Theorey of Justice. Haravard University Press Massachusetts (矢島欽次監訳 「正義論」 紀伊国屋書店 1979)

[74] Repullo R (1987) A simple proof of Maskin's theorem of Nash implementation. Soc Choice Welfare 4:39-41

[75] Redekop J (1991) Social welfare functions on restricted economic domains. J Econ Theory 53: 396-427

[76] Redekop J (1993a) Arrow-inconsistent economic domains. Soc Choice Welfare 10: 107-126

[77] Redekop J (1993b) Social welfare functions on parametric domains. Soc Choice Welfare 10: 127-148

[78] Roemer J (1988) Axiomatic bargaining theory of economic environments. J Econ Theory 45:1-31

[79] Saijo T (1988) Strategy space reduction in Maskin's theorem: Sufficient conditions for Nash implementation. Econometrica 54:693-700

[80] Saijo T, Tatamitani K, Yamato T (1996) Toward natural implementation. Int Econ Rev 37:949-980

[81] Sakai T (2009) Walrasian social orderings in exchange economies. J Math. Econ 45:16-22

[82] Schmeidler D (1980) Walrasian analysis via strategic outcome functions. Econometrica 48:1585-1594

[83] Schmeidler D (1983) A condition guaranteeing that Nash allocation is Walrasian. J Econ Theory 28:376-378

[84] Schmeidler D, Vind K (1972) Fair net trades. Econometrica 40:637-42

[85] Schmitz N (1977) A further note on Arrow's impossibility theorem. J Math Econ 4: 189-196

[86] 盛山和夫「制度論の構図」 1995 創文社

[87] Sen AK (1970) Collective Choice and Social Welfare. Holden-Day,San Francisco

[88] Sen AK（1986） Social choice theory. In: Arrow KJ, Intriligator MD (eds) Handbook of mathematical economics Vol.3 North Holland

[89] 鈴村興太郎「経済計画理論」 1982 筑摩書房

[90] Suzumura K (1983) Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare. Cambridge University Press

[91] Thomson W (1981) Nash's bargaining solution and utilitarian choice rule. Econometrica 49 535-538

[92] Thomson W (1985) Manipulation and Implementation in Economics. University of Rochester Lecture Notes

[93] Thomson W (1988) A study of choice correspondences in economies with a variable number of agents. J Econ Theory 46:247-259

[94] Walker M (1977) On the existence of maximal elements. J Econ Theory 16: 470-474

[95] Williams S (1986) Realization and Nash implementation: two aspects of mechanism design. Econometrica 54:139-152

[96] Wilson RB (1972) Social choice theory without the Pareto principle. J Econ Theory 5: 478-486

[97] Varian HR (1984) Microeconomic Analysis 2nd edition W.W. Norton & Company

[98] 山内友三郎（1991）「相手の立場に立つ：ヘアの道徳哲学」勁草書房

[99] Yoshihara N (2000) A characterization of natural and double implementation in production economies. Soc Choice Welfare 17:571-599