Theory of Labor and Credit Transactions with Labor Heterogeneity

髙羅, ひとみ

(Degree)
博士（経済学）
(Date of Degree)
2015-03-19
(Date of Publication)
2017-03-19
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
乙第3281号
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D2003281

博士論文

平成 26 年 8 月

神戸大学大学院経済学研究科

指導教員　宮川 栄一

氏　名　　高羅ひとみ

博士論文

Theory of Labor and Credit Transactions with Labor Heterogeneity

平成26年 8月

神戸大学大学院経済学研究科

指導教員　宮川 栄一

氏　名　　高羅ひとみ

目 次

第1章　はじめに

農村から都市への労働移動と都市での失業の存在は開発途上国で重要な問題である[1]．これらの問題を分析した理論の先駆けは Harris and Todaro[27] である（以下 HT モデルとかく）[2]．HT モデルでは都市の賃金は最低賃金法や労働組合によって市場決済水準よりも高く固定されている．都市の仕事は都市住民のみが応募することができて，採用される確率は単に仕事数を応募者数で割った値である．そのため，労働者は応募者数が仕事の数を上回った場合失業するかもしれない．他方，農村では最低賃金法が施行されないか労働組合が脆弱であるため，賃金は労働の需給を均等化させるように市場で決定される．そのため農村ではだれも失業しない．労働者は都市の期待賃金と農村賃金を比較して高い方へ移動する．労働市場の均衡では期待賃金が均等化し失業が存在する[3]．

HT モデルの政策提言の 1 つは，都市の失業問題を解決しようとするなら農村の賃金を上昇させるような政策を採り，都市と農村間の賃金格差を是正する方が効果的であるというものである．というのは，都市の雇用を拡大するような政策は農村からの労働移動を誘発してしまい，かえって失業を悪化させる場合があるからである．もう 1 つは労働の最適配分を達成するには都市生産者への賃金補助金政策だけでは不十分で，都市への労働移動を制限する政策が同時に実行されなければならないというものである[4]．補助金はその資金をどうやって賄うかという問題があるし，人々の移動に強制的

[1] インドにおける移住者の特性と移住過程を農村や都市で綿密に調べた現地調査に Oberai and Singh[40]（パンジャブ州）や Oberai，Prasad and Sardana[41]（ビハール州・ケーララ州・ウッタルプラデシュ州），Banerjee[1]（デリー）がある．ごく最近ではたとえば Keshri and Bhagat[28][29] がインドの全国標本調査（NSS）をもとに移住者の特性などを考察している．

[2] 図を用いた HT モデルのわかりやすい説明が Corden[20] と Corden and Findlay[21] にある．

[3] Khan[30][31][32] や Khan and Chaudhuri[34] は都市賃金が農村賃金や都市失業率，資本のレンタル率の関数によって決まるように HT モデルを修正し，失業均衡の存在や一意性，安定性について考察している．

[4] その後，Bhagwati and Srinivasan[14] は労働の最適配分を達成するために，必ずしも農村からの移動を制限する必要はなく，都市の生産者と同額の補助金 s^* を農村の生産者にも与えればよいということを証明した．さらに，Basu[7] は s^* の大きさは実際に分からなくても，十分大きな補助金を都市と農村の生産者に同額ずつ与えれば必ず労働の最適配分は達成されることを証明した．しかし，実際にこのような政策が採られた例はいまのところない（Lall, Selod and Shalizi [36, p.15]）．

な制約を加えることは人道的とはいえないため，都市の失業解消のためには農村と農業の開発が重要であるとの意見で多くの識者たちは一致している（たとえば Todaro and Smith [49, p.351] や Basu [10, p.179]，Fields [23, p.32] を参照せよ．）．

しかし，HT モデルは農村労働市場が競争市場であると仮定し，不特定多数の人間が賃金のみを通じて労働取引をするような状況を想定している．その後，HT モデルはさまざまな観点[5]から拡張されているが，都市の労働市場をより現実的な形に修正したモデルが大半で，農村の労働市場をより現実的な形に修正したものはほとんどない[6]．

途上国の農村では大多数の人々が農業に携わっている．しかし，土地の分配は不平等で，ごく少数の農家が村の大部分の土地を所有しているような場合も少なくない．そのため，地主に雇われて農作業をするだけの農業労働者も多い．農作業は主に作物を収穫する農繁期に集中しており，種をまいてから収穫までの農閑期はあまり人手を必要としない．土地などの資産を持たず手持ちの資金も十分でない農業労働者は，農閑期を生き延びるために，あるいは冠婚葬祭や病気など急な出費のために，どこかからお金を借りてやり繰りする必要がある．途上国の農村信用市場の顕著な特徴は，公式な信用への不平等なアクセスと非公式な信用の多様性である[7]．銀行や協同組合などの公式な貸し手から借りるには担保（主に土地）が必要であり，手続きは煩雑で時間がかかり，そのうえ賄賂を要求される場合もある．したがって，公式な貸し手から借りることができるのは多くの場合，担保となる十分な農地を持った上層の農家に限られている．そのため，土地を持たない農業労働者のほとんどは地主や雇用主，店主，高利貸し，友人・親類といった非公式な貸し手を利用している．こうした非公式な信用はたいてい口頭で契約が交わされ，土地を担保として要求されることはまれである（代わりに労働やゴールド，台所用品，第 3 者による保証などを担保として要求されることはあるけれども）．

こうした農村の非公式な信用を HT モデルに組み込んだ（私の知る限り）唯一のモ

[5]たとえば都市賃金の内生化（Calvo[18] や Stiglitz[47][48]）や資本移動（Corden and Findlay[21]），農村での都市雇用機会のサーチ（Fields[22]），都市での非公式な労働（Fields[22]），教育による雇用確率の違い（Fields[22]）．

[6]開発経済学の観点から労働移動の理論をサーベイしたものに Bardhan and Udry[6] の 5 章や Basu[10] の 8 章がある．国際経済学の観点からは Khan[33] を参照せよ．実証研究や事例も含むサーベイには Williamson[50]，より最近では Lall, Selod and Shalizi[36] がある．

[7]インドのアーンドラプラデシュ州とウッタルプラデシュ州で公式な信用へのアクセスを調べた大規模な現地調査として Basu[11] がある．インドの農村信用市場の構造について綿密に調べた村落調査として Sarap[44]（オリッサ州），より最近では Misha[37][38]（オリッサ州）や Gill[26]（パンジャブ州），Bhaumik and Rahim[15][16]（西ベンガル州）がある．フィリピンの村落調査については Floro and Yotopoulos[24] の調査を参照せよ．

デルに Chaudhuri[19] がある．Chaudhuri モデルでは労働者は農村に残る場合金貸しから消費目的のために融資を受ける．そして競争的な農村労働市場に労働を供給して得た賃金で返済する．農村信用市場は独占で，金貸しは利子収入（利子率と農村に残る労働者数の積）を最大にするように利子率を決定する．

しかし，多くの村落調査が明らかにしているように，土地を持たない農業労働者は農繁期に労働を提供するという約束と引き替えに，農閑期に雇用主（地主でもある）からお金を借りている[8]．独立した市場で取引されると通常想定される労働と信用が，農村では連結されて取引されているというのである[9][10]．こうした事実をふまえ，本稿の 2 章では労働と信用の連結取引を組み込んだ労働移動の一般均衡モデルを構築する．さらに，連結取引が観察される村落での近年の変化として，近隣都市などへの労働移動の増加を指摘している村落調査もある（たとえば Misha[37][39] や Sharma and Kumar[45]）．そのため，2 章で構築するモデルは都市失業の解決策としての農村開発を考えるうえでのみならず，都市への労働移動が農村での労働契約にどのような影響を与えるのかを考えるうえでも重要であるといえる．

村落調査によれば，連結取引では市場利子率より高い利子率で貸す地主もいれば，同じかそれより低い，場合によっては無利子で貸す地主さえいる．こうした地主の行動を説明する先行理論[11]の基本的なアイデアは，地主は賃金率 w と利子率 i を個別に勘案しているのではなく，組 (w, i) を選んでいると考えるというものである．たとえば Basu[9] は，Oi[42] の二部料金モデルを援用して，連結取引での価格体系を固定料金 w と購入量（借入量）1 単位当たりの料金 i の二本立てだと理解する．つまり労働者は農繁期に w の賃金率で働かなければならないが，農閑期に利子率 i で地主から借りたいだけ借りることができる．そのとき，労働者が同質か，あるいは労働者が異質

[8] こうした事実を明らかにした綿密な村落調査の先駆けは Bardhan and Rudra[5]（西ベンガル州・ビハール州・ウッタルプラデシュ州）である．その後の綿密な村落調査としてはたとえば Sarap[44]（オリッサ州），より最近では Misha[37][38]（オリッサ州）や Gill[26]（パンジャブ州），Bhaumik and Rahim[15][16]（西ベンガル州），Sohi and Chahal[46]（パンジャブ州），Sharma and Kumar[45]（ヒマチャルプラデシュ州）がある．同様の事実はフィリピンの農村でも観察されている（Floro and Yotopoulos[24] を参照せよ）．

[9] 連結取引は地主の側からすると，元利合計を賃金から差し引くことで貸し倒れを回避できる，あるいは人手を必要とするが手に入りにくい農繁期に確実に労働力を確保できるといった利点がある．こうした見地から連結取引の理論的根拠を提供するモデルとしてそれぞれ Basu[8] と Bardhan[3] がある．

[10] 現実には信用は労働だけでなく，土地や投入物（たとえば種や肥料，殺虫剤），農産物とも連結されて取引されることも多い．こうした事実を明らかにしている村落調査としては脚注 8 に挙げた文献を参照せよ．

[11] 連結取引の理論のサーベイに Bell[12] や Bardhan and Udry[6] の 9 章，Basu[10] の 14 章，Ray[43] がある．連結取引の理論の論文集に Bardhan[4] がある．

でも個別に違う価格づけを地主が行ってよいのなら，限界費用である市場利子率 r と同じ利子率で貸す（そしてそのときの各労働者の消費者余剰の水準に w を設定する）ことは地主の最適行動として説明できる[12]．しかし，異質な労働者に同じ組 (w, i) を一つだけ提示するような場合には，地主は市場利子率 r で貸しても効率的な信用配分を達成することができないので，r で貸すことが地主にとって最適だとは限らない[13]．この結果を Basu[9] は，異時点間の消費に対する選好が労働者によって異なる場合について考察している．

労働者（借り手）の異質性を考慮することの重要性は Floro and Yotopoulos [24, p.52] によっても強調されているが，労働と信用の連結取引の先行理論で Basu[9] 以外に労働者の異質性を組み込んだモデルはない[14]．したがって，本稿の 2〜4 章では次のような労働者の異質性を仮定する．

2 章では労働者は都市労働の初期保有量においてのみ異なる．そのため，都市で働くことを選択することで得る期待効用は人によって異なるが，農村で地主と信用と労働の連結取引をする場合に得る効用はみな同じである．都市で働くことで得る期待効用は初期保有量が大きい人ほど大きい．HT モデルやその修正モデルの多くとちがって，労働者は期待所得ではなく期待効用を最大にするように行動する．地主は組 (w, i) を選ぶことを通して自分のところで働く労働者数を調整できる．そこでは最適な利子率は市場利子率と同じであることが示される．さらに，失業均衡が一意に存在するための十分条件を導出している．この条件は労働者が期待所得を最大にする場合でも期待効用を最大にする場合でも同じであることが分かった．比較静学の結果は労働者が期待所得を最大にするのか期待効用を最大にするのかにより若干異なる．1 例として，都市の資本が増えても農村の賃金率は労働者が期待所得を最大にする場合には不変であるが，期待効用を最大にする場合には増える．

3 章では労働者は農閑期と農繁期の消費に対してコブ・ダグラス型の選好をもって

[12]Basu[8] の III.4 も参照せよ．また，小農が収穫物を商人に売り渡すという約束と引き替えに農閑期に商人から消費信用を借りるような場合でも同様のことがいえる（Gangopadhyay and Sengupta[25]）．つまり，商人にとって限界費用である市場利子率と同じ利子率で貸す（そしてそのときの消費者余剰の水準に生産物の価格を設定する）のが最適である．

[13]地主が異質な労働者を区別せず一括して契約を結ぶ場合だけでなく，地主が契約をいくつか用意して労働者にえらばせるような場合でも，最適な連結取引での利子率が市場利子率と乖離することを説明できる．詳細は Basu[9] を参照せよ．

[14]小作人の生産性や割引因子の異質性を組み込んだ信用と小作の連結取引モデルに Braverman and Guasch[17] と Banerji[2] がある．いずれの論文でも生産性や割引因子は小作人の私的情報であり，連結取引を逆選択の問題を軽減するための措置ととらえている．

いるが，割引因子が人によって異なる．さらに，連結取引をしない場合労働者は都市で失業する可能性があるが，そのリスクに対する態度も人によって異なる．パラメータによって，割引因子が大きい労働者ほど地主と連結取引を結ぶ場合と小さい労働者ほど連結取引を結ぶ場合があることが示される．割引因子が大きい労働者ほど連結取引を行う場合には，最適な利子率は市場利子率よりも低くなる（無利子を含む）．他方，割引因子が小さい労働者ほど連結取引を行う場合には，最適な利子率は市場利子率よりも高くなることが分かった．さらに，リスクに対する態度がみな同じでも，最適な利子率は態度が異なる場合のそれと同じであることも分かった．

4 章では労働者は初期保有量が異なる．これは現実には労働者のなかには農閑期の消費を地主からの借り入れによって賄うものもいれば手持ちの資金で賄うものもいる状況を表現したいためである．労働者は地主のもとで働くか否か，働くとすれば地主から借りるか否かを決める．地主は農閑期に借りた労働者もそうでない労働者も，農繁期にはみな同じ賃金率で雇うとする．その場合，連結取引で地主のもとで働いて借りる労働者がいれば，利子率は市場利子率よりも低くなることが分かった．

第2章 Theory of Unemployment in Dual Economy

2.1 Model

Consider two districts, the urban and the rural. The urban district consists of one city where there are many identical producers. On the other hand, the rural district consists of $l \geqslant 1$ identical villages. In each village, there is one landowner and $n > 1$ laborers. The landowner is a producer and also a consumer. Laborers, who are consumers, are identical in all aspects except for an endowment of urban labor. We assume that there is no mobility of labor between villages. Each laborer chooses to work either in the city or in a village.

We have two stylized periods, the lean and the peak. In reality, landowners need a few laborers, say, for cultivating and seeding in the lean period, which is followed by the peak one with so many laborers, say, for harvesting and threshing. We assume that period 1 is the lean and period 2 is the peak. We also assume, to keep things simple, that urban producers produce a commodity in period 1, while rural landowners produce a commodity in period 2. We call the commodity produced in period t commodity t, $t = 1, 2$.

In each village, a landowner, who is a producer, acts as a monopolist. A landowner employs all laborers who want to work in a village to produce commodity 2. Each laborer initially owns the same unit of rural labor and therefore earns the same wage, which may be lower than those each earns if employed in the city. In period 1, no commodity is produced in the village, and so every laborer earns no wages and needs to borrow to finance consumption. Hence the landowner also gives consumption loans to his employees. In the city, on the other hand, each producer uses capital and labor to produce commodity 1. Capital is initially owned by rural landowners, who are consumers. The laborers who want to work in the city may not get a job. In that case, they receives nothing. But, if employed, we assume that a laborer can earn a wage proportional to her urban labor endowment. We assume that each laborer knows the probability of urban unemployment. Comparing the expected utilities she would gain, each chooses to work either in the city or in a village.

We shall develop a simple general equilibrium model with two products and two factors of production where the employment rate is endogenously determined. Since villages are identical, focus now on one village and the city before defining unemployment equilibrium.

2.1.1 Consumer's utility maximization

Consider consumers, who consist of laborers and a landowner. Each laborer has the same utility function $u(c_1, c_2)$ from $\mathbb{R}^2_+$ into $\mathbb{R}$, where c_t be the consumer's consumption of commodity t, $t = 1, 2$. We assume, for simplicity, that a landowner also has the same utility function as laborers. We place the following standard assumptions on u.

Assumption2.1 u is continuous, quasi-concave and increasing over $\mathbb{R}^2_+$, strictly quasi-concave and strictly increasing over $\mathbb{R}^2_{++}$, and satisfies $u(0, 0) = 0$.

Furthermore, it satisfies

Assumption2.2 u is homogeneous of degree m $(0 < m \leqslant 1)$.

Laborer's utility maximization

Each laborer initially owns one unit of rural labor. But the endowments of urban labor differ across laborers and are parameterized by a. We call a laborer who initially owns a units of urban labor a laborer of type a. We denote the set of possible types of laborers by $[0, \bar{a}]$, where $\bar{a}$ is finite. We assume that a is distributed according to a continuous density function g with $g(a) > 0$ for all $a \in (0, \bar{a})$ and $\int_0^{\bar{a}} g(a)da = n$. The associated distribution function is G. We assume

Assumption2.3 G is strictly log–concave over $(0, \bar{a}]$.[1] That is, g/G is strictly decreasing over $(0, \bar{a}]$.

Each laborer chooses to work either in a village or in the city. We assume that the former results in perfectly certain outcome, but the latter is an alternative with uncertain outcome. For, in reality, it may be easier to find employment in a village because a laborer can use her connections. On the other hand, chance may play a bigger part in finding a job in the city, and so a laborer may face a risk of unemployment.

We assume that the laborer who wants to work in a village is always employed by a landowner. But it is in period 2 that wages are paid. Thus the laborer has to finance consumption in period 1 by borrowing. We assume that the laborer, who gives no asset as a security, has no option but to borrow from her employer. For there exists no legal machinery in the rural district to enforce repayment. As in Basu [8], given that no such government machinery exists, it is highly likely that the debtor will get away. Hence lending money to strangers can be risky. Thus a lender gives credit only to those with whom he has other dealings. Then, since the debtor who defaults totally also loses other dealings at the same time, it is very unlikely that the debtor will not repay.

Thus, in case a laborer chooses to work in a village, we express her utility maximizing behavior as

$$\max_{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+} u(c_1, c_2) \quad \text{subject to} \quad c_1 + \iota c_2 = \iota w, \tag{2.1}$$

where $\iota \equiv 1/(1+i) > 0$, which means the exchange rate of commodity 1 for commodity 2 between a laborer and a landowner. The laborer's budget constraint is expressed at the beginning of period 1. She borrows c_1 units of commodity 1 from a

[1] For a list of log–concave distributions, see Bagnoli and Bergstrom [13].

landowner in period 1 and has to pay the same unit of commodity 2 back in period 2 with interest at a rate of i, which may be a non–positive number. In period 2, she works for the landowner for a wage of $w \geqslant 0$ and can therefore afford to purchase $w-(1+i)c_1$ units of commodity 2. By Weierstrass's Theorem, there exists a solution to problem (2.1). If $\iota w = 0$, $(0,0)$ is a unique solution to the problem. We assume

Assumption2.4 The solution to problem (2.1) is interior for all $(\iota, \iota w) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

As a consequence of the strict quasi-concavity of utility function, the interior solution is unique. For each $(\iota, \iota w) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{+}$, a function that assigns the unique solution to problem (2.1) is denoted by $c_t(\iota, \iota w), t = 1, 2$. We also denote $u(c_1(\iota, \iota w), c_2(\iota, \iota w))$ by $V(\iota, \iota w)$. Since u is increasing over $\mathbb{R}^2_{+}$, Assumption 2.4 and $u(0,0) = 0$ implies $V(\iota, \iota w) > V(\iota, \iota \cdot 0) = 0$ for all $(\iota, \iota w) \in \mathbb{R}^2_{++}$. We assume that commodity 1 is gross substitute when the income expressed at the beginning of period 1 is unity, that is

Assumption2.5 $dc_1(\iota, 1)/d\iota \geqslant 0$ for all $\iota > 0$.

For example, this condition holds with equality if u is the Cobb–Douglas utility function and with strict inequality if the function is given by $u(c_1, c_2) = [\theta_1 c_1^\rho + \theta_2 c_2^\rho]^{1/\rho}$, where $\theta_t > 0$ for all t and $\rho \in (0,1)$.

In the city, on the other hand, a job is assigned by a lottery. For we assume that a laborer of type a knows that her type is a, but urban producers do not know it before employing the laborer. After employing laborers, each producer learns his employees' types. We assume that each laborer receives a wage proportional to her type if she gets a job and nothing otherwise. We denote an employment rate observed in a market, or a market rate of employment a laborer expects, by $e \in (0,1]$. $1-e$ then represents the unemployment rate observed in the market.

Thus, if she chooses to work in the city, a laborer of type a behaves as follows. With a probability of $1-e$, she is unemployed. She then earns and therefore consumes nothing in each period. Since $u(0,0) = 0$, she gets $V(R, 0) = 0$, where $R \equiv 1/(1 + r_2) > 0$ is the exchange rate of commodity 1 for commodity 2. With a probability of

e, on the other hand, she is employed. In this case, we express her utility maximizing behavior as

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2_+} u(c_1,c_2) \quad \text{subject to} \;\; c_1 + Rc_2 = \gamma a. \tag{2.2}$$

Her budget constraint is expressed at the beginning of period 1. In period 1, she earns a wage of γa, where $\gamma \in (0,1]$ is the per–endowment wage rate. Consuming c_1 units of commodity 1, she lends the rest to the market. In period 2, she lives on the interest earning. That is, she can receive $\gamma a - c_1$ units of commodity 2 with interest at a rate of r_2, which may be a non–positive number. As before, we denote a unique solution to problem (2.2) by $c_t(R,\gamma a), t = 1,2$, and $u(c_1(R,\gamma a), c_2(R,\gamma a))$ by $V(R,\gamma a)$.

In many migration models so far developed, which are partial equilibrium ones, a laborer decides where she works in order to maximize her expected *income* (see, for example, Harris and Todaro [27]). In Iritani and Sumino [35], which is a general equilibrium one, a laborer takes her utility into consideration when choosing a consumption bundle, but she maximizes her expected income when deciding where to work. The assumption that a laborer behaves as a maximizer of expected income is for simplicity and is relaxed in this paper. We instead assume that a laborer behaves as a maximizer of expected *utility*. Thus, facing the probability of urban employment in the market, every laborer chooses to work either in a village or in the city by comparing the expected utilities. Formally, given $(\iota, w, R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$, a laborer of type a chooses to work in a village if a satisfies

$$eV(R,\gamma a) \leqslant V(\iota,\iota w), \tag{2.3}$$

and in the city otherwise. We assume, for convenience, that a laborer chooses to work in a village if she is indifferent to the choice of place to work. Since $V(R,\gamma\cdot 0) = 0 \leqslant V(\iota,\iota w)$, there exists a laborer type who chooses to work in a village. Since $V(R,\gamma a)$ is strictly increasing in a, if a laborer of type a chooses to work in a village, so do all laborers with types less than a. We denote the highest laborer type who works in a village by $\hat{a}$. Formally,

$$\hat{a} \equiv \begin{cases} a' & \text{if there exists a unique } a' \in [0,\bar{a}] \text{ such that } eV(R,\gamma a') = V(\iota,\iota w), \\ \bar{a} & \text{if } eV(R,\gamma\bar{a}) < V(\iota,\iota w). \end{cases}$$

We denote a function that assigns $\hat{a}$ for each (ι, w, R, e) by $a(\iota, w, R, e)$.

Landowner's utility maximization

A landowner has an endowment of $\bar{K} > 0$ units of capital. She rents it to urban producers and receives a rental of $r_1\bar{K}$ in period 1, where $r_1 > 0$ is the rental rate. Note that the rental rate r_1, which is a return for capital, is not equated with an interest rate on consumption loans r_2. It is true that the returns of assets traded in the same period must become the same by arbitrage. But, in this paper, the period in which capital is traded is different from the one in which consumption loans are. That is, a landowner rents capital and receives a rental in period 1. On the other hand, lenders give consumption loans in period 1 and receive them with interest in period 2.

We express a landowner's utility maximizing behavior as

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}_+^2} u(c_1,c_2) \quad \text{subject to} \;\; c_1 + Rc_2 = r_1\bar{K} + R\pi(\iota(R,e), w(R,e)), \tag{2.4}$$

where $\pi(\iota(R,e), w(R,e))$ is the maximum level of profits, which are defined in the next subsection. The landowner's budget constraint is expressed at the beginning of period 1. If $c_1 < r_1\bar{K}$, the landowner lends $r_1\bar{K} - c_1$ units of commodity 1 to the market. Thus the total amount she can spend on commodity 2 is her loan earnings, $(1 + r_2)(r_1\bar{K} - c_1)$, plus the profit distribution, $\pi(\iota(R,e), w(R,e))$. On the other hand, if $c_1 > r_1\bar{K}$, she borrows $c_1 - r_1\bar{K}$ units of commodity 1 from the market and can therefore afford to purchase $\pi(\iota(R,e), w(R,e)) - (1 + r_2)(c_1 - r_1\bar{K})$ units of commodity 2. As before, we denote a unique solution to problem (2.4) by $c_t(R, r_1\bar{K} + R\pi(\iota(R,e), w(R,e)))$, $t = 1, 2$.

2.1.2 Producer's profit maximization

Next consider producers, who consist of a landowner in a village and producers in the city.

Landowner's profit maximization

In a village, a landowner uses labor to produce commodity 2. For the reason described in the previous subsection, the landowner also gives consumption loans to his employees in period 1. In other words, a landowner makes joint deals in credit and labor with each laborer. The landowner offers a package that is stated as a pair of an interest rate and a wage rate to each laborer. As in Basu [9], we interpret interlinkage of credit and labor transactions as a consequence of a monopolistic lender's attempt to extract consumer's surplus from a borrower by levying a two-part tariff. If she accepts a package, a laborer has to work for the landowner for a wage of w in period 2. But the laborer can take as much credit as she wishes at an interest rate i in period 1. If she rejects the offer, in this paper, each laborer chooses to work in the city and gets the expected utility depending on her type. We assume that the landowner does not know a laborer's type and offers a unique package to all laborers.

Letting $\eta > 0$ be an agricultural technical parameter and $F : [0, n] \to \mathbb{R}_+$ be a production function, we thus express the landowner's profit maximizing behavior as

$$\max_{(\iota,w)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_+} \pi(\iota, w), \tag{2.5}$$

where $\pi(\iota, w)$ is defined by

$$\pi(\iota, w) \equiv \eta F(G(a(\iota, w, R, e))) - wG(a(\iota, w, R, e)) + \left(\frac{1}{\iota} - \frac{1}{R}\right) c_1(\iota, \iota w) G(a(\iota, w, R, e)). \tag{2.6}$$

This formulation is similar to Basu [9, p.4], except that the landowner can also control the number of his employees by choosing (ι, w). We assume that F is continuous over $[0, n]$ and satisfies $F(0) = 0$. Furthermore, it satisfies

Assumption2.6 F is continuously differentiable with $F'(x) > 0$ for all $x \in (0, n]$ and $\lim_{x \to 0} F'(x) = \infty$, and is concave over $(0, n]$.

The landowner's objective function in (2.5) is expressed at the beginning of period 2. The first term of the objective function implies that, using all laborers who choose to work in the village, the landowner produces commodity 2. The second term is the total of wages he must pay to his employees. That is, the first two terms represent his production profits. On the other hand, the third term represents his interest profits. For the landowner lends $c_1(\iota, \iota w)$ units of commodity 1, which the landowner borrows from the market, to each employee in period 1, receives $(1+i)c_1(\iota, \iota w)$ units of commodity 2 from each and repays $(1 + r_2)c_1(\iota, \iota w)$ units of commodity 2 to the market in period 2. Problem (2.5) says that the landowner does not take his production profits and his interest profits into account separately. Rather he chooses a pair of a wage rate and an interest rate so as to maximize the sum of them.

The function π is continuous, but the domain is not compact. Therefore it is not self-evident whether a solution to problem (2.5) exists. Thus, in the next section, we will show its existence and also its uniqueness. We denote a unique solution to problem (2.5) by $\iota(R, e), w(R, e)$ and the maximum profits by $\pi(\iota(R, e), w(R, e))$.

Urban producer's profit maximization

In the city, there are many identical producers. Each uses labor and capital to produce commodity 1 according to the production function given by

$$F(L, K) = \min\left\{\frac{L}{\alpha}, \frac{K}{\beta}\right\},\ 0 < \alpha < 1, \beta > 0,$$

where L (respectively, K) is the labor (respectively, capital) input. We express the producer's profit maximizing behavior as

$$\max_{(L,K)} \frac{K}{\beta} - \gamma L - r_1 K.$$

The producer's objective function is expressed at the beginning of period 1. Since the price of commodity 1 is unity, the first term of the objective function is the value of product. Since we assume that the producer pays a wage of γa to his employee of type a, the second term represents the total of wages the producer must pay to his employees. The last term is the total of rentals he must pay to the owners of capital.

Since the optimal ratio of labor and capital is $L/K = \alpha/\beta$, we can equivalently express the producer's problem as

$$\max_{K} \frac{K}{\beta} - \gamma\frac{\alpha}{\beta}K - r_1 K.$$

Solving this problem, we obtain the following demand correspondence for capital,

$$K^d(r_1) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } r_1 > \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, \\ [0,\infty) & \text{if } r_1 = \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, \\ \emptyset & \text{if } r_1 < \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.1.3 Market equilibrium

We now define a market equilibrium. We first define the aggregate excess demand function for commodity 2, $z_2 : \mathbb{R}_{++} \times \left[\frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, \infty\right) \times \mathbb{R}_{++} \times (0,1] \to \mathbb{R}$, by

$$\begin{aligned} z_2(\beta, r_1, R, e) \equiv & \Bigg[lc_2(\iota(R,e), \iota(R,e)w(R,e))G(a(\iota(R,e), w(R,e), R, e)) \\ & + le\int_{a(\iota(R,e),w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} c_2(R,\gamma a)g(a)da + lc_2(R, r_1\bar{K} + R\pi(\iota(R,e), w(R,e))) \Bigg] \\ & - l\eta F(G(a(\iota(R,e), w(R,e), R, e))). \end{aligned}$$

The term in square brackets is the expected aggregate demand of commodity 2, and the last term is its aggregate supply.

Given the demand correspondence for capital in (2.7), we next define the aggregate excess demand correspondences for capital, commodity 1 and urban labor. For all $(\beta, r_1, R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times \left[\frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, \infty\right) \times \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$ and all $K \in K^d(r_1)$, let

$z_k(\beta, r_1, R, e, K)$ be defined by

$$z_k(\beta, r_1, R, e, K) \equiv K - l\bar{K}. \tag{2.8}$$

The function z_k represents the aggregate demand of capital minus its aggregate supply. Then we define the aggregate excess demand correspondence for capital by assigning a set $\{z_k(\beta, r_1, R, e, K) | K \in K^d(r_1)\}$ to each (β, r_1, R, e). Similarly, We define the aggregate excess demand correspondence for commodity 1 (respectively, urban labor) by assigning a set $\{z_1(\beta, r_1, R, e, K) | K \in K^d(r_1)\}$ (respectively, $\{z_L(\beta, r_1, R, e, K) | K \in K^d(r_1)\}$) to each (β, r_1, R, e), where

$$\begin{aligned}
z_1(\beta, r_1, R, e, K) \equiv & \Bigg[lc_1(\iota(R,e), \iota(R,e)w(R,e))G(a(\iota(R,e), w(R,e), R, e)) \\
& + le \int_{a(\iota(R,e),w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} c_1(R, \gamma a)g(a)da + lc_1(R, r_1\bar{K} + R\pi(\iota(R,e), w(R,e))) \Bigg] \\
& - \frac{K}{\beta}, \\
z_L(\beta, r_1, R, e, K) \equiv & \frac{\alpha}{\beta}K - le \int_{a(\iota(R,e),w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} ag(a)da.
\end{aligned}$$

The function z_1 represents the expected aggregate demand of commodity 1 minus its aggregate supply, while z_L represents the aggregate demand of urban labor minus its expected aggregate supply.

A market equilibrium can be defined as follows.

Definition Given a parameter $\beta > 0$, a triplet of prices $(r_1, R) \in \left[\frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, \infty\right) \times \mathbb{R}_{++}$, an employment rate $e \in (0, 1]$, and an allocation $K \in K^d(r_1)$ is a market equilibrium if it satisfies $z_2(\beta, r_1, R, e) = 0$ and $z_j(\beta, r_1, R, e, K) = 0$ for all $j = k, 1, L$.

Our characteristic feature in the definition is that an unemployment rate is endogenously determined, which is similar to Iritani and Sumino [35]. In this paper, wages for urban labor are fixed in the sense that a laborer of type a is paid a wage of γa if employed in the city. Therefore, even if there are the unemployed, wages do not fall.

2.2 Optimal interlinked contract

We now returns to the landowner's profit maximization problem. If the landowner knows the laborer's type and can therefore make a distinct offer to each laborer, by the same logic as in Basu [8, III.4] and [9, pp.4–7], in which laborers are identical, we can characterize an optimal interlinked contract. That is, it is optimal for the landowner to set ι to R, which is his marginal cost of lending, for all laborers and vary w so as to extract the entire surplus from each laborer. In this paper, however, the landowner does not know the laborer's type and offers a unique package to all laborers. He can also extract the entire surplus of type $a(\iota, w, R, e)$ at most. Then what package (ι, w) should he offer? In this section, we answer this question. We also establishes that an optimal interlinked contract, or a solution to the landowner's problem, exists uniquely.

2.2.1 Optimal interest rate

To characterize an optimal interest rate, we show that there exists a package (R, w') that generates at least as large profits as (ι, w) such that $\iota \neq R$. We first rewrite the landowner's objective function in problem (2.5) as

$$\pi(\iota, w) = \eta F(G(a(\iota, w, R, e))) - \left[w + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\iota}\right) c_1(\iota, \iota w)\right] G(a(\iota, w, R, e)).$$

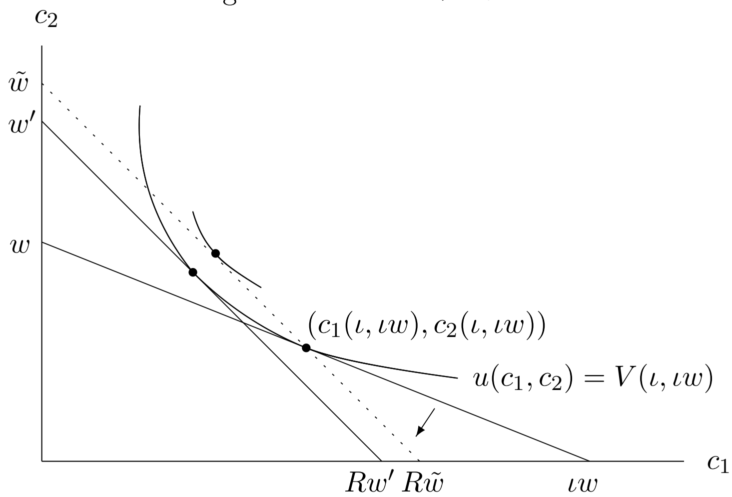
As in Basu [8], the term in square brackets represents per–laborer costs to the landowner. For, in period 2, the landowner pays a wage of w to each laborer, repays $(1 + r_2)c_1(\iota, \iota w)$ units of commodity 2 to the market, and receives $(1 + i)c_1(\iota, \iota w)$ units of commodity 2 from each laborer.

In the case where $w = 0$, $V(\iota, \iota \cdot 0) = eV(R, \gamma \cdot 0)$ for all $\iota > 0$. Since $V(R, \gamma a)$ is strictly increasing in a, this implies $a(\iota, 0, R, e) = 0$, which yields the next lemma.

Lemma2.1 $\pi(\iota, 0) = 0$ for all $\iota > 0$.

The lemma says that, if $w = 0$, the landowner's profits are independent of an inter-

Figure 2.1: when $\iota > R$



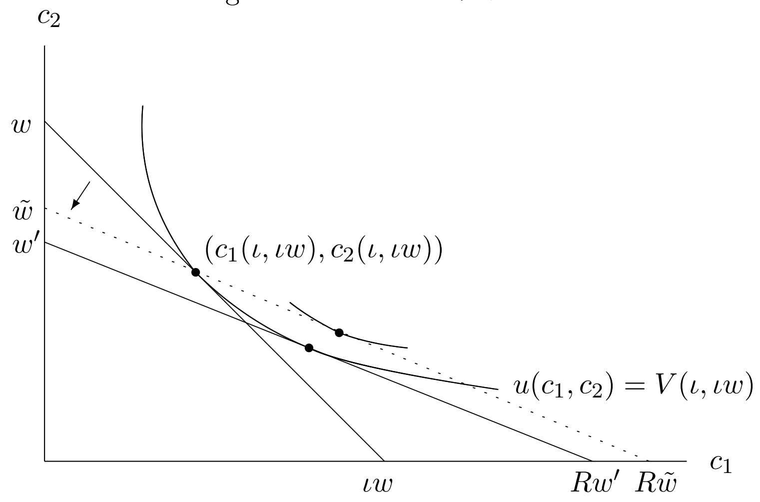
est rate because no laborers work in a village and thus borrow from the landowner.

On the other hand, in the case where $w > 0$, we show that the landowner can increase his profits by changing the offer (ι, w) such that $\iota \neq R$ to (R, w').

Lemma2.2 For all $(\iota, w) \in \mathbb{R}^2_{++}$, if $\iota \neq R$, there exists a unique $w' > 0$ such that $\pi(R, w') > \pi(\iota, w)$.

The proof is relegated to Appendix A.1. To get the intuition, let $\iota > R$ and consider what happens if the landowner lowers ι to R and raises w to $\tilde{w}$, as depicted in Figure 1, where $\tilde{w}$ is equal to per–laborer costs under the original offer (ι, w). Per–laborer costs under a new offer $(R, \tilde{w})$ are $\tilde{w}$ and therefore the same as before. On the other hand, each laborer's budget line changes from a line with a slope of $-1/\iota$ to a dotted line with a slope of $-1/R$, as illustrated in Figure 1. Note that the dotted line goes through a vector $(c_1(\iota, \iota w), c_2(\iota, \iota w))$, which is the consumption bundle each laborer chooses so as to maximize her utility given the original offer. But, under the new offer $(R, \tilde{w})$, no laborer chooses her original consumption bundle. Thus each laborer gets higher utility level than $u(c_1(\iota, \iota w), c_2(\iota, \iota w))$, or $V(\iota, \iota w)$. Hence, holding ι fixed at R, the landowner can lower $\tilde{w}$ to w' so as to keep each laborer at her original utility level $V(\iota, \iota w)$. By doing so, the landowner can also decrease per–laborer costs.

Figure 2.2: when $\iota < R$



Consequently, if he changes the offer (ι, w) to (R, w'), the landowner can decrease per–laborer costs with the number of his employees unchanged. Thus the landowner can produce the same amount of output at lower costs than before and therefore increase his profits.

By the same logic, if $\iota < R$, by raising ι to R and lowering w to w', as depicted in Figure 2, the landowners can increase his profits.

2.2.2 Degree of laborer's risk aversion

In the case where $\iota = R$, condition (2.3) has a few implications. To see this, consider Assumption 2.2. Then, for all $(R, I) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_+$,

$$c_t(R, I) = Ic_t(R, 1), t = 1, 2, \tag{2.9}$$

and therefore

$$V(R, I) = u(Ic_1(R, 1), Ic_2(R, 1)) = I^m u(c_1(R, 1), c_2(R, 1)). \tag{2.10}$$

where I represents a laborer's income and the last equality also follows from Assumption 2.2. By (2.10), we can restate condition (2.3) as

$$e(\gamma a)^m u(c_1(R,1), c_2(R,1)) \leqslant (\iota w)^m u(c_1(\iota,1), c_2(\iota,1)). \tag{2.11}$$

In particular, if $\iota = R$, $u(c_1(R,1), c_2(R,1)) = u(c_1(\iota,1), c_2(\iota,1))$ and hence (2.11) is equivalent to

$$e^{\frac{1}{m}}\gamma a \leqslant Rw. \tag{2.12}$$

The right hand side is the income that a laborer gets from working in a village. In the case where $m = 1$, the left hand side of (2.12) becomes $e\gamma a$, which is the expected income that a laborer gets from working in the city. Hence, as in Iritani and Sumino [35], every laborer decides where to work by comparing her expected incomes. The idea behind this fact is that, if $m = 1$, (2.10) implies that V is linear in income and therefore a laborer is risk neutral. On the other hand, in the case where $m \in (0,1)$, V is concave in income and therefore a laborer is risk averse. Hence, if $e < 1$, the left hand side of (2.12), which is the income I such that $V(R,I) = eV(R,\gamma a)$, is less than the expected income. As m gets smaller, each laborer gets more risk averse and therefore more laborers choose to work in a village.

By (2.12), we can also solve the function $a(R,w,R,e)$ explicitly. To see this, for any $(R,e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$, let $\bar{w}(R,e)$ denote the value of w such that

$$eV(R,\gamma\bar{a}) = V(R,Rw).^2 \tag{2.13}$$

Then, if $w \in [0, \bar{w}(R,e))$, there exists a unique $a' \in [0,\bar{a})$ such that $eV(R,\gamma a') = V(R,Rw)$, which is equivalent to $e^{\frac{1}{m}}\gamma a' = Rw$ by (2.12). If $w > \bar{w}(R,e)$, $V(R,Rw) >$

[2] The existence of w satisfying (2.13) follows from $V(R, R\cdot 0) = 0 < eV(R,\gamma\bar{a}) \leqslant V\left(R, R\cdot\frac{\gamma\bar{a}}{R}\right)$ and the continuity of V. Its uniqueness follows because $V(R,Rw)$ is strictly increasing in w.

$eV(R, \gamma\bar{a})$. Thus, by the definition of $a(R, w, R, e)$, we obtain

$$a(R, w, R, e) = \begin{cases} \frac{Rw}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} & \text{if } w \in [0, \bar{w}(R, e)], \\ \bar{a} & \text{if } w > \bar{w}(R, e). \end{cases} \tag{2.14}$$

This tells us that the value $\bar{w}(R, e)$ is the minimum level of wage rate inducing all laborers to work in a village when $\iota = R$.

2.2.3 Existence of optimal interlinked contract

We establish that a solution to the landowner's profit maximization problem exists. By Lemmas 2.1 and 2.2, to search for its solution, we can restrict our attention to the case where $\iota = R$. Then, since his interest profit is zero, the landowner's problem can be equivalently restated as choosing $w \geqslant 0$ so as to maximize his production profits, or formally, as solving

$$\max_{w \geqslant 0} \ \pi(R, w) = \eta F(G(a(R, w, R, e))) - wG(a(R, w, R, e)). \tag{2.15}$$

To show that a solution to this problem exists, consider the case where $w > \bar{w}(R, e)$. Then, by (2.14), $a(R, w, R, e) = \bar{a}$. This yields the next lemma.

Lemma2.3 $\pi(R, w) < \pi(R, \bar{w}(R, e))$ for all $w > \bar{w}(R, e)$.

The lemma says that a wage rate w such that $w > \bar{w}(R, e)$ is never chosen by the landowner. To get the intuition, suppose that the landowner raises the wage rate from $\bar{w}(R, e)$. Then the number of employees remains unchanged because all laborers choose to work in a village. Hence the total revenue that the landowner gets from production does not change. But, the total wage he must pay to his employees increases. Thus, given $\iota = R$, the landowner earns less profits by choosing any $w > \bar{w}(R, e)$.

By Lemma 2.3, the landowner's optimal wage rate must lie in the compact set $[0, \bar{w}(R, e)]$. Since $\pi(R, \cdot)$ is continuous in w, by Weierstrass's Theorem, a solution to problem (2.15) exists.

Proposition2.1 There exists $w^* \in [0, \bar{w}(R,e)]$ that maximizes $\pi(R,w)$.[3]

2.2.4 Uniqueness of optimal contract

We show that a solution to the landowner's profit maximization problem is unique and also yields strictly positive profits. By the lemmas so far and Proposition 2.1, we can restrict our attention to the case where $\iota = R$ and $w \in [0, \bar{w}(R,e)]$. Let $\Pi(w) \equiv \pi(R,w)$. Then differentiating $\Pi(w)$ with respect to $w \in (0, \bar{w}(R,e))$ gives

$$\Pi'(w) = \eta F'(G(a(R,w,R,e)))\frac{dG(a(R,w,R,e))}{dw} - G(a(R,w,R,e)) - w\frac{dG(a(R,w,R,e))}{dw}. \tag{2.16}$$

Since $da(R,w,R,e)/dw = R/[e^{\frac{1}{m}}\gamma]$ by (2.14),

$$\frac{dG(a(R,w,R,e))}{dw} = g(a(R,w,R,e))\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} > 0.$$

Hence we can rewrite (2.16) as

$$\Pi'(w) = \frac{dG(a(R,w,R,e))}{dw}\psi(w),$$

where $\psi(w)$ is defined by

$$\psi(w) \equiv \frac{\Pi'(w)}{\frac{dG(a(R,w,R,e))}{dw}} = \eta F'(G(a(R,w,R,e))) - \left[\frac{G(a(R,w,R,e))}{g(a(R,w,R,e))\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + w\right]. \tag{2.17}$$

With a differential increase in w, profits change by $\Pi'(w)$, while the number of employees increases by $dG(a(R,w,R,e))/dw$. Thus ψ represents marginal profits from a differential increase in the number of employees. We show that ψ has the following properties.

Lemma2.4 (a) $\lim_{w \to 0} \psi(w) = \infty$. (b) ψ is continuous and strictly decreasing in w

[3] We do not require the log–concavity of G (Assumption 2.3), and the differentiability and concavity of F (Assumption 3.7) for the result.

over $(0, \bar{w}(R,e))$.

The proof is relegated to Appendix A.2. This lemma brings us to the following result.

Proposition2.2 A maximizer of Π is unique: if $\lim_{w \to \bar{w}(R,e)} \psi(w) \geqslant 0$, $\bar{w}(R,e)$ is a unique maximizer of Π, and if $\lim_{w \to \bar{w}(R,e)} \psi(w) < 0$, there exists a unique $\hat{w} \in (0, \bar{w}(R,e))$ such that $\Pi'(\hat{w}) = 0$ and it is a unique maximizer of Π. The maximum of Π is strictly positive.

The logic behind the proposition is straightforward. Either $\lim_{w \to \bar{w}(R,e)} \psi(w) \geqslant 0$ or $\lim_{w \to \bar{w}(R,e)} \psi(w) < 0$.[4] If the former inequality holds, property (b) in Lemma 2.4 implies that $\psi(w) > 0$ for all $w \in (0, \bar{w}(R,e))$. Since the sign of $\psi(w)$ is the same as that of $\Pi'(w)$ for all $w \in (0, \bar{w}(R,e))$, this implies that marginal profit from a differential increase in w is always strictly positive. If the latter inequality holds, properties (a) and (b) together imply that there exists a unique $\hat{w} \in (0, \bar{w}(R,e))$ such that $\psi(\hat{w}) = 0$, $\psi(w) > 0$ for all $w \in (0, \hat{w})$ and $\psi(w) < 0$ for all $w \in (\hat{w}, \bar{w}(R,e))$. Since the sign of ψ is the same as that of Π', this implies that Π has a single peak at $\hat{w}$, where marginal profit is zero. In each case, since $\Pi(0) = 0$, the maximum profit is strictly positive.

2.3 Unemployment equilibrium

We now turn to an equilibrium, which is a solution to the system of four excess demand equations. This section studies the conditions for a parameter of β under which there exists an equilibrium uniquely and the equilibrium has unemployment.

2.3.1 The number of independent excess demand equations

We show that the number of independent excess demand equations is two, and the unknowns are R and e. We start by showing that Walras Law holds. For all

[4] $\lim_{w \to \bar{w}(R,e)} \psi(w)$ may be $-\infty$, which is indeed the case if $g(\bar{a}) = 0$. The proposition also apply to this case.

$(\beta, r_1, R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times \left[\frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, \infty\right) \times \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$ and all $K \in K^d(r_1)$,

$$\begin{aligned}
&r_1 z_k(\beta, r_1, R, e, K) + \gamma z_L(\beta, r_1, R, e, K) + z_1(\beta, r_1, R, e, K) + R z_2(\beta, r_1, R, e) \\
&= l[c_1(R, Rw(R,e)) + Rc_2(R, Rw(R,e)) - Rw(R,e)]G(a(R, w(R,e), R, e)) \\
&\quad + le \int_{a(R,w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} [c_1(R, \gamma a) + Rc_2(R, \gamma a) - \gamma a] g(a) da \\
&\quad + l[c_1(R, r_1\bar{K} + R\pi(R, w(R,e))) + Rc_2(R, r_1\bar{K} + R\pi(R, w(R,e))) - r_1\bar{K} - R\pi(R, w(R,e))] \\
&\quad + Rl[\pi(R, w(R,e)) - \eta F(G(a(R, w(R,e), R, e))) + w(R,e)G(a(R, w(R,e), R, e))] \\
&\quad + \left(r_1 - \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}\right) K. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

The equality follows because $\iota(R,e) = R$ for all $(R,e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$. Since $c_t(R, Rw(R,e))$, $t = 1, 2$, satisfy the budget constraint in (2.1), the first term of the right hand side of (2.18) is zero. Since $c_t(R, \gamma a)$, $t = 1, 2$, satisfy the budget constraint in (2.2), the second term is zero. Since $c_t(R, r_1\bar{K} + R\pi(R, w(R,e)))$, $t = 1, 2$, satisfy the budget constraint in (2.4), the third term is zero. By (2.6), the fourth term is zero. Since $K \in K^d(r_1)$, the last term is also zero by (2.7). Thus the right hand side of (2.18) is zero and therefore the left hand side must be zero. This implies that the sum of the values of aggregate excess demands is always zero, that is, Walras Law holds.

Furthermore, by (2.8), solving $z_k(\beta, r_1, R, e, K) = 0$ gives the equilibrium value of K, which is $l\bar{K}$. Since $l\bar{K} \in K^d(r_1)$, we also obtain the equilibrium value of r_1, which is $\frac{1-\gamma\alpha}{\beta}$. Substituting these equilibrium values into the left hand side of (2.18) implies that for all $(\beta, R, e) \in \mathbb{R}^2_{++} \times (0,1]$,

$$\gamma z_L\left(\beta, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, R, e, l\bar{K}\right) + z_1\left(\beta, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, R, e, l\bar{K}\right) + R z_2\left(\beta, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, R, e, l\bar{K}\right) = 0.$$

This, together with $R > 0$, implies that if

$$z_L\left(\beta, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, R, e, l\bar{K}\right) = 0, \qquad (2.19)$$

$$z_1\left(\beta, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, R, e, l\bar{K}\right) = 0, \qquad (2.20)$$

we must also have $z_2\left(\beta, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}, R, e, l\bar{K}\right) = 0$. Thus an equilibrium can obtained as (R, e) satisfying (2.19) and (2.20).

2.3.2 Existence and uniqueness of unemployment equilibrium

We present the conditions for β under which there exists an equilibrium uniquely and the equilibrium has unemployment. Let $\underline{\beta}$ denote the value of β such that

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = \int_0^{\bar{a}} ag(a)da.$$

Proposition2.3 There exists a unique $\beta^* > \underline{\beta}$ such that if $\beta < \beta^*$, no equilibrium exists, and if $\beta \geqslant \beta^*$, an equilibrium exists uniquely. If $\beta = \beta^*$, the equilibrium satisfies full employment. If $\beta > \beta^*$, the equilibrium has unemployment.

The proof is relegated to Appendix A.3. The proposition says that if $\beta < \beta^*$, no equilibrium exists. In the case where $\beta \leqslant \underline{\beta}$, the logic behind nonexistence is straightforward. To see this, we rewrite (2.19) as

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = e\int_{a(R,w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} ag(a)da. \tag{2.21}$$

Since $a(R, w(R, e), R, e) > 0$ for all $(R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0, 1]$,

$$e\int_{a(R,w(R,e),R,e)}^{\bar{a}} ag(a)da < \int_0^{\bar{a}} ag(a)da.$$

Hence, if

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} \geqslant \int_0^{\bar{a}} ag(a)da, \tag{2.22}$$

there exists no $(R, e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0, 1]$ satisfying (2.21). Condition (2.22) is equivalent to $\beta \leqslant \underline{\beta}$ and says that the aggregate demand of urban labor is more than or equal to the aggregate labor supply when all laborers work in the city.

We next consider the case where $\beta > \underline{\beta}$. Then, as we will show in Appendix A.3., there exists a unique $a(\beta) \in (0, \bar{a})$ such that

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = \int_{a(\beta)}^{\bar{a}} ag(a)da. \tag{2.23}$$

The value of $a(\beta)$ is the threshold type inducing the supply of urban labor to equate to its demand. If $\hat{a} < a(\beta)$, $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ is more than the right hand side of (2.23) and hence its left hand side. On the other hand, if $\hat{a} > a(\beta)$, the reverse inequality holds. Thus there exists $e \in (0, 1]$ satisfying (2.21) if and only if $\hat{a} \leqslant a(\beta)$.

Rewrite (2.20) as

$$lc_1(R, Rw)G(\hat{a}) + le\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} c_1(R, \gamma a)g(a)da + lc_1\left(R, \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}\bar{K} + R\pi(R, w)\right) = \frac{l\bar{K}}{\beta}. \tag{2.24}$$

By (2.9), we can rewrite the left hand side as

$$l\left[RwG(\hat{a}) + e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} \gamma ag(a)da + \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}\bar{K} + R\pi(R, w)\right] c_1(R, 1).$$

The term in square brackets represents the aggregate expected income and, by (2.6) and (2.21), equals

$$e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} \gamma ag(a)da + \frac{1-\gamma\alpha}{\beta}\bar{K} + R\eta F(G(\hat{a})) = \frac{\bar{K}}{\beta} + R\eta F(G(\hat{a})).$$

Thus (2.24) reduces to

$$\left[\frac{\bar{K}}{\beta} + R\eta F(G(\hat{a}))\right] c_1(R, 1) = \frac{\bar{K}}{\beta}, \tag{2.25}$$

which is equivalent to

$$R\eta F(G(\hat{a}))c_1(R, 1) = \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(R, 1)]. \tag{2.26}$$

As $\hat{a}$ goes up, so does R. The rough mechanism of this fact is given as follows.

$(R, e, \hat{a}, w)$ satisfies (2.14), (2.21), (2.26) and

$$\eta F'(G(\hat{a})) = w + G(\hat{a})\frac{dw}{dG(\hat{a})}. \tag{2.27}$$

As $\hat{a}$ goes up, the supply of urban labor $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ goes down, while its demand $\alpha\bar{K}/\beta$ does not change. Thus, to equate the demand and the expected supply, the employment rate e must go up. Then the expected utility that type $\hat{a}$ gets from working in the city goes up. Hence the rural income expressed at the beginning of period 1, $w/[1 + r_2]$, must go up. On the other hand, since the number of rural employees goes up, the marginal revenue from a differential increase in the number of employees, $\eta F'(G(\hat{a}))$, goes down. Thus the corresponding marginal cost, or the right hand side of (2.27), must go down. The rural wage rate w goes either down or up. If w goes down, the interest rate r_2 must go down to increase the income $w/[1 + r_2]$. On the other hand, if w goes up, it increases the first term of the right hand side of (2.27). Since the left hand side goes down, it implies that the second term of the right hand side must go down, where the second term denotes the additional amount the landowner has to pay to the existing employees because of the higher w. For the second term to go down, the interest rate must go down. In each case, the interest rate goes down, which implies that the exchange rate of commodity 1 for commodity 2, R, goes up.

As $\hat{a}$ goes up, so does the supply of rural good $\eta F(G(\hat{a}))$. Furthermore, since the price of rural good R goes up, so does the consumption of urban good $c_1(R, 1)$. Thus the amount of rural aggregate income that is consumed for urban good, $R\eta F(G(\hat{a}))c_1(R, 1)$, goes up. On the other hand, the amount of urban income that is not consumed for the urban good, $[1 - c_1(R, 1)]\bar{K}/\beta$, goes down. As $\hat{a}$ goes to zero, so does the supply of rural good. Thus the amount of rural income that is consumed for urban good goes to zero.

As β goes down, $\alpha\bar{K}/\beta$ goes up. Hence the right hand side of (2.23) must go up. Thus $a(\beta)$ and hence $\hat{a}$ go down.

2.4 Comparative statics

This section analyzes how changes in various parameters affect $(R, e, \hat{a}, w)$ satisfying (2.14), (2.21), (2.25) and (2.27). We assume, additionally, that g and F are twice differentiable, and satisfy

Assumption2.7 $G(y)/g(y) - y(G(y)/g(y))' \leqslant 0$ for all $y \in (0, \bar{a})$.[5]

This condition holds with equality if G is an uniform or power function distribution, and with strict inequality if G is a lognormal, exponential, Weibull, Gamma, or Beta distribution.

Case 1: $\bar{K}$ goes up or β goes down. We consider the case where the initial endowments of capital goes up or capital becomes more productive.

Proposition2.4 As the initial endowments of capital (i.e., $\bar{K}$) goes up or capital becomes more productive (i.e., β goes down),

1. the price of rural good and the employment rate go up (i.e., $\partial R/\partial \bar{K} > 0$, $\partial R/\partial \beta < 0$, $\partial e/\partial \bar{K} > 0$, and $\partial e/\partial \beta < 0$),
2. the supply of urban labor goes up (i.e., $\partial \hat{a}/\partial \bar{K} < 0$ and $\partial \hat{a}/\partial \beta > 0$) if and only if
$$m \in (0,1) \text{ or } \frac{dc_1(R,1)}{dR} > 0, \tag{2.28}$$
3. the supply of urban labor does not change (i.e., $\partial \hat{a}/\partial \bar{K} = 0 = \partial \hat{a}/\partial \beta$) if and only if
$$m = 1 \text{ and } \frac{dc_1(R,1)}{dR} = 0, \tag{2.29}$$
4. the rural wage rate goes up (i.e., $\partial w/\partial \bar{K} > 0$ and $\partial w/\partial \beta < 0$) if and only if both (2.28) and
$$\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} - \hat{a}\left(\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})}\right)' < 0 \text{ or } F''(G(\hat{a})) < 0, \tag{2.30}$$

[5] A sufficient condition for Assumption 2.7 is that $(yg'(y)/g(y))' \leqslant 0$ for all $y \in (0, \bar{a})$, $\lim_{y\to 0} yg'(y)/g(y) \neq \infty$, and $\lim_{y\to 0} yg(y) = 0$.

hold,

5. the rural wage rate does not change (i.e., $\partial w/\partial \bar{K} = 0 = \partial w/\partial \beta$) if and only if either (2.29) or

$$\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} - \hat{a}\left(\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})}\right)' = 0 \text{ and } F''(G(\hat{a})) = 0, \tag{2.31}$$

holds.

The proof is relegated to Appendix A.4. To get the intuition of statement 1, suppose that either $\bar{K}$ goes up or β goes down. In each case, the demand of urban labor $\alpha\bar{K}/\beta$ goes up. Hence its expected supply $e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ must go up. Thus, if the supply of urban labor goes down, the employment rate must go up. Then the expected utility that type $\hat{a}$ gets from working in the city goes up. Hence the rural income expressed at the beginning of period 1, Rw, must go up. Thus, if the rural wage rate goes down, the rural interest rate must go down. On the other hand, since the number of rural employees goes up, the marginal revenue from a differential increase in the number of employees $\eta F'(G(\hat{a}))$ goes down. Hence the corresponding marginal cost, or the right hand side of (2.27), must go down. If the rural wage rate goes up, it increases the first term of the right hand side. Thus, for the second term to go down, the rural interest rate must go down.

Since $\bar{K}$ goes up or β goes down, the supply of urban good $\bar{K}/\beta$ goes up. Hence its demand must go up. If the number of rural employees goes down, so does the supply of rural good $\eta F(G(\hat{a}))$. Hence its demand must go down. Thus the exchange rate of urban good for rural good, R, must go up. Then the rural interest rate goes down. Hence, if the rural wage rate goes up, so does the rural income expressed at the beginning of period 1. Thus, to increase the expected utility from working in the city, the employment rate must go up. On the other hand, since the number of rural employees goes down, the marginal revenue from a differential increase in the number of employees $\eta F'(G(\hat{a}))$ goes up. Hence the corresponding marginal cost, or the right hand side of (2.27), must go up. If the rural wage rate goes down, it decreases the first term of the right hand side. Thus, for the second term to go up, the employment rate must go up.

To get the rough mechanism of $\partial a/\partial \bar{K} \leqslant 0$, suppose that $\hat{a}$ goes up as $\bar{K}$ goes up. Then, as in the above paragraph, so does R. Hence Assumption 2.5 implies that $c_1(R,1)$ either goes up or does not change. Consequently, both sides of (2.25) go up. But its left hand side goes up more than its right hand side. To see this, rewrite (2.14), (2.21), (2.25) and (2.27) as

$$\left(\frac{e}{\bar{K}}\right)^{\frac{1}{m}} \bar{K}^{\frac{1}{m}-1}\gamma\hat{a} = \frac{R}{\bar{K}}w, \tag{2.32}$$

$$\eta F'(G(\hat{a})) = w + \frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} \frac{\left(\frac{e}{\bar{K}}\right)^{\frac{1}{m}} \bar{K}^{\frac{1}{m}-1}\gamma}{\frac{R}{\bar{K}}}, \tag{2.33}$$

$$\left[\frac{1}{\beta} + \frac{R}{\bar{K}}\eta F(G(\hat{a}))\right] c_1(R,1) = \frac{1}{\beta}, \tag{2.34}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{e}{\bar{K}} \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} a g(a) da. \tag{2.35}$$

Since $\hat{a}$ goes up, so does $e/\bar{K}$ by (2.35). w goes either down or up. If w goes down, $R/\bar{K}$ goes up by (2.32). If w goes up, so does $R/\bar{K}$ by (2.33). In each case, $R/\bar{K}$ goes up. Consequently, the left hand side of (2.34) goes up, while its right hand side does not change. Since multiplying both sides of (2.34) by $\bar{K}$ gives (2.25), this implies that the left hand side of (2.25) goes up more than its right hand side.

Replacing $\bar{K}$ and $1/\beta$ with $1/\beta$ and $\bar{K}$ in (2.32) to (2.35), if $\hat{a}$ goes up as β goes down, the left hand side of (2.25) goes up more than its right hand side.

Case 2: α goes down. We consider the case where urban labor becomes more productive.

Proposition2.5 As urban labor becomes more productive (i.e., α goes down), the price of rural good, the employment rate and the supply of urban labor go down (i.e., $\partial R/\partial\alpha > 0$, $\partial e/\partial\alpha > 0$ and $\partial\hat{a}/\partial\alpha < 0$). The rural wage rate goes down (i.e., $\partial w/\partial\alpha > 0$) if and only if (2.30) holds, and does not change (i.e., $\partial w/\partial\alpha = 0$) if and only if (2.31) holds.

To get the intuition of $\partial\hat{a}/\partial\alpha < 0$, suppose that $\hat{a}$ decreases with a decrease in

α. Then $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} g(a)da$ increases, while $\alpha\bar{K}/\beta$ decreases. Consequently, by (2.21), e decreases. In other words, as urban labor becomes more productive, the demand of urban labor goes down. On the other hand, if a threshold type decreases, the supply of urban labor increases. Thus, to equate the demand of urban labor and its expected supply, the employment rate decreases. w either increase or decreases. If w increases, R decreases by (2.14). In other words, since both a threshold type and the employment rate decrease, so does the expected utility that a threshold type gets from working in the city. Hence, if the rural wage rate increases, so does the rural interest rate to decrease the rural income expressed at the beginning of period 1. Since $G(\hat{a})$ decreases, $\eta F'(G(\hat{a}))$ increases. Thus, if w decreases, so does R by (2.27). In other words, since the number of rural employees decreases, the marginal revenue from a differential increase in the number of rural employees increases. Hence R decreases to increase the corresponding marginal cost. In each case, R decreases. Then $c_1(R, 1)$ either decreases or does not change. Furthermore, since $\hat{a}$ decreases, so does $\eta F(G(\hat{a}))$. On the other hand, with a decrease in α, $\bar{K}/\beta$ does not change. Consequently, the left hand side of (2.25) decreases, while its right hand side does not change. In other words, since the price of rural good decreases, the consumption of urban good when the income is unity either decreases or does not change. Furthermore, a decrease of a threshold type decreases the supply of rural good. On the other hand, as urban labor becomes more productive, the supply of urban good does not change. Thus the sum of values of outputs decreases. Consequently, the demand of urban good decreases, while its supply does not change.

The rough mechanism of $\partial R/\partial\alpha > 0$ and $\partial e/\partial\alpha > 0$ is given as follows. With a decrease in α, $\bar{K}/\beta$ does not change, while $\hat{a}$ and thus $\eta F(G(\hat{a}))$ increase. Furthermore $c_1(R, 1)$ is non–decreasing in R. Consequently, by (2.25), R decreases. In other words, as urban labor becomes more productive, the supply of urban good does not change, while a threshold type and thus the supply of rural good increase. Furthermore, the consumption of urban good when the income is unity is non–decreasing in the price of rural good. Thus, not to change the demand of urban good, the price of rural good decreases. w either decreases or increases. A decrease in w, together with a decrease in R, implies that Rw decreases. Hence so does e by (2.14). In other words, a decrease of wage rate, together with an increase of interest rate, decreases the income expressed at the beginning of period 1. Thus the utility from working in the village decreases. Hence, to decrease the expected utility from working in the city, the employment rate decreases. Since $G(\hat{a})$ increases, $\eta F'(G(\hat{a}))$ decreases. Thus, if w increases, e decreases by (2.27). In other words, since the number of rural employees increases, the marginal revenue from a differential increase in the number of rural employees decreases. Hence e decreases to decrease the corresponding marginal cost.

Case 3: γ goes up. We consider the case where urban per–endowment wage rate goes up.

Proposition2.6 As urban per–endowment wage rate (i.e., γ) goes up, the price of rural good and the supply of urban labor go up (i.e., $\partial R/\partial \gamma > 0$ and $\partial \hat{a}/\partial \gamma < 0$), and the employment rate go down (i.e., $\partial e/\partial \gamma < 0$). The rural wage rate goes up (i.e., $\partial w/\partial \gamma > 0$) if and only if (2.30) holds, and does not change (i.e., $\partial w/\partial \gamma = 0$) if and only if (2.31) holds.

To get the intuition of $\partial \hat{a}/\partial \gamma < 0$, suppose that $\hat{a}$ increases with an increase in γ. Then $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} g(a)da$ decreases, while $\alpha \bar{K}/\beta$ does not change. Consequently, by (2.21), e increases. In other words, with an increase of urban per–endowment wage rate, the demand of urban labor does not change. On the other hand, if a threshold type increases, the supply of urban labor decreases. Thus, to equate the demand of urban labor and its expected supply, the employment rate increases. w either decrease or increases. If w decreases, R increases by (2.14). In other words, an increase of urban per–endowment wage rate, together with an increase of a threshold type and the employment rate, implies that the expected utility that a threshold type gets from working in the city increases. Hence, if the rural wage rate decreases, so does the rural interest rate to increase the rural income expressed at the beginning of period 1.

Since $G(\hat{a})$ increases, $\eta F'(G(\hat{a}))$ decreases. Thus, if w increases, so does R by (2.27). In other words, since the number of rural employees increases, the marginal revenue from a differential increase in the number of rural employees decreases. Hence R increases to decrease the corresponding marginal cost. In each case, R increases. Then $c_1(R, 1)$ either increases or does not change. Furthermore, since $G(\hat{a})$ increases, so does $\eta F(G(\hat{a}))$. On the other hand, with an increase in γ, $\bar{K}/\beta$ does not change. Consequently, the left hand side of (2.25) increases, while its right hand side does not change. In other words, since the price of rural good increases, so does the consumption of urban good when the income is unity. Furthermore, an increase of a threshold type increases the supply of rural good, while an increase of urban per–endowment wage rate does not change the supply of urban good. Thus the sum of the values of outputs increases. Consequently, the demand of urban good increases, while its supply does not change.

The rough mechanism of $\partial R/\partial\gamma > 0$ is given as follows. With an increase in γ, $\bar{K}/\beta$ does not change, while $\hat{a}$ and thus $\eta F(G(\hat{a}))$ decrease. Furthermore, $c_1(R, 1)$ is non–decreasing in R. Consequently, by (2.25), R increases. In other words, with an increase of urban per–endowment wage rate, the supply of urban good does not change, while a threshold type and thus the supply of rural good decrease. Furthermore, the consumption of urban good when the income is unity is non–decreasing in the price of rural good. Thus, not to change the demand of urban good, the price of rural good increases.

The rough mechanism of $\partial e/\partial\gamma < 0$ is given as follows. With an increase in γ, $\alpha\bar{K}/\beta$ does not change. On the other hand, $\hat{a}$ decreases and thus $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ increases. Consequently, by (2.21), e decreases. In other words, with an increase of urban per–endowment wage rate, the demand of urban labor does not change. On the other hand, a threshold type decreases and thus the supply of urban labor increases. Thus, to equate the demand of urban labor and its expected supply, the employment rate decreases.

Case 4: η goes up. We consider the case where rural labor becomes more productive.

Proposition2.7 As rural labor becomes more productive (i.e., η goes up), the price of rural good goes down (i.e. $\partial R/\partial\eta < 0$) and the rural wage rate goes up (i.e. $\partial w/\partial\eta > 0$). The employment rate goes up and the supply of urban labor goes down (i.e. $\partial e/\partial\eta > 0$ and $\partial\hat{a}/\partial\eta > 0$) if and only if $dc_1(R,1)/dR > 0$. The employment rate and the supply of urban labor do not change (i.e. $\partial e/\partial\eta = 0 = \partial\hat{a}/\partial\eta$) if and only if $dc_1(R,1)/dR = 0$.

Suppose that η increases. Then $\hat{a}$ either increases or decreases. In each case, R decreases. To see this, suppose first that $\hat{a}$ increases. Then so does $\eta F(G(\hat{a}))$. On the other hand, with an increase in η, $\bar{K}/\beta$ does not change. Furthermore, $c_1(R,1)$ is non–decreasing in R. Consequently, by (2.25), R decreases. In other words, as rural labor becomes more productive, the supply of urban good does not change. On the other hand, if a threshold type increases, so does the supply of rural good. Furthermore, the consumption of urban good when the income is unity is non–decreasing in the price of rural good. Consequently, the price of rural good decreases not to change the demand of urban good.

If $\hat{a}$ decreases, $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ increases. On the other hand, with an increase in η, $\alpha\bar{K}/\beta$ does not change. Consequently, by (2.21), e decreases. In other words, as rural labor becomes more productive, the demand of urban labor does not change. On the other hand, if a threshold type decreases, the supply of urban labor increases. Thus, to equate the demand of urban labor and its expected supply, the employment rate decreases. w either increases or decreases. If w increases, R decreases by (2.14). In other words, since both a threshold type and the employment rate decrease, so does the expected utility that a threshold type gets from working in the city. Hence, if the rural wage rate increases, so does the rural interest rate to decrease the rural income expressed at the beginning of period 1. An increase in η, together with a decrease in $G(\hat{a})$, implies that $\eta F'(G(\hat{a}))$ increases. Thus, if w decreases, so does R by (2.27). In other words, as rural labor becomes more productive, the marginal revenue from a differential increase in the number of rural employees increases. Hence R decreases to increase the corresponding marginal cost.

To get the intuition of $\partial\hat{a}/\partial\eta \geqslant 0$, suppose that $\hat{a}$ decreases with an increase in η. Then, as in the above paragraph, both e and R decrease. To see that $R\eta F(G(\hat{a}))$ decreases, rewrite (2.14) and (2.27) as

$$e^{\frac{1}{m}}\gamma\hat{a} = R\eta\frac{w}{\eta}, \tag{2.36}$$

$$F'(G(\hat{a})) = \frac{w}{\eta} + \frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})}\frac{e^{\frac{1}{m}}\gamma}{R\eta}. \tag{2.37}$$

w/η either increases or decreases. If w/η increases, $R\eta$ decreases by (2.36). If w/η decreases, so does $R\eta$ by (2.37). In each case, $R\eta$ decreases. This, together with a decrease in $G(\hat{a})$ and thus $F(G(\hat{a}))$, implies that $R\eta F(G(\hat{a}))$ decreases. Furthermore, since R decreases, $c_1(R, 1)$ either decreases or does not change. On the other hand, with an increase in η, $\bar{K}/\beta$ does not change. Consequently, the left hand side of (2.25) decreases, while its right hand side does not change.

The rough mechanism of $\partial e/\partial\eta > 0$ and $\partial w/\partial\eta > 0$ is given as follows. With an increase in η, $\alpha\bar{K}/\beta$ does not change. On the other hand, $\hat{a}$ increases and thus $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ decreases. Consequently, by (2.21), e increases. In other words, as rural labor becomes more productive, the demand of urban labor does not change. On the other hand, a threshold type increases and thus the supply of urban labor decreases. Thus, to equate the demand of urban labor and its expected supply, the employment rate increases. Furthermore, since R decreases, w increases by (2.14). In other words, since both a threshold type and the employment rate increase, so does the expected utility that a threshold type gets from working in the city. Hence an increase of rural interest rate implies that the rural wage rate increases to increase the rural income expressed at the beginning of period 1.

Appendix A

A.1. Proof of Lemma 2.2

Let $(R, e) \in R_{++} \times (0, 1]$ be given. Let $(\iota, w) \in \mathbb{R}^2_{++}$ be any pair such that $\iota \neq R$. Then, $V(\iota, \iota w) > 0 = eV(R, \gamma \cdot 0)$. Since $V(R, \gamma a)$ is strictly increasing in a, this implies

$$a(\iota, w, R, e) > 0. \tag{2.38}$$

Now change ι to R and w to $\tilde{w} = C(\iota, w)$, where $C(\iota, w) \equiv w + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\iota}\right) c_1(\iota, \iota w)$. Then,

$$w - \frac{1}{\iota} c_1(\iota, \iota w) = \tilde{w} - \frac{1}{R} c_1(\iota, \iota w).$$

By (2.1), the left hand side equals $c_2(\iota, \iota w)$ and hence

$$c_1(\iota, \iota w) + R c_2(\iota, \iota w) = R\tilde{w}.$$

Since a solution to problem (2.1) given $(R, \tilde{w})$ is unique, this implies

$$V(R, R\tilde{w}) > u(c_1(\iota, \iota w), c_2(\iota, \iota w)) = V(\iota, \iota w).$$

Furthermore, we also have

$$V(R, R \cdot 0) = 0 < V(\iota, \iota w).$$

Since V is continuous and strictly increasing in income, there exists a unique intermediate value $w' \in (0, \tilde{w})$ such that $V(R, Rw') = V(\iota, \iota w)$. It then follows that

$$C(R, w') - C(\iota, w) = w' - \tilde{w} < 0 \text{ and } a(R, w', R, e) = a(\iota, w, R, e). \tag{2.39}$$

Thus, by (2.38) and (2.39),

$$\begin{aligned} \pi(R, w') &= \eta F(G(a(R, w', R, e))) - C(R, w') G(a(R, w', R, e)) \\ &> \eta F(G(a(\iota, w, R, e))) - C(\iota, w) G(a(\iota, w, R, e)) \\ &= \pi(\iota, w). \end{aligned}$$

A.2. Proof of Lemma 2.4

Let $(R,e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$ be given. Consider $\psi : (0, \bar{w}(R,e)) \to \mathbb{R}$ defined by (2.17). Since $\lim_{x\to 0} F'(x) = \infty$ (by Assumption 3.7) and $\lim_{y\to 0} g(y)/G(y) = \lim_{y\to 0}(\ln G(y))' = \infty$,

$$\lim_{w\to 0}\psi(w) = \lim_{w\to 0}\left[\eta F'(G(a(R,w,R,e))) - \frac{G(a(R,w,R,e))}{g(a(R,w,R,e))\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} - w\right] = \infty.$$

Since we assume that F', g and G are continuous, ψ is continuous. Since we assume that F' is non–increasing and g/G is strictly decreasing, ψ is strictly decreasing in w.

A.3. Proof of Proposition 2.3

Consider the following system of equations:

$$\begin{cases} w = \bar{w}(R,e) & \text{if } \lim_{w\to\bar{w}(R,e)}\psi(w) \geqslant 0, \\ \eta F'(G(\hat{a})) - \frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} - w = 0 \text{ and } w \in (0,\bar{w}(R,e)) & \text{if } \lim_{w\to\bar{w}(R,e)}\psi(w) < 0, \end{cases} \tag{2.40}$$

$$e^{\frac{1}{m}}\gamma\hat{a} = Rw, \tag{2.41}$$

$$R\eta F(G(\hat{a}))c_1(R,1) = \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(R,1)], \tag{2.42}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da, \tag{2.43}$$

where

$$\lim_{w\to\bar{w}(R,e)}\psi(w) = \eta F'(n) - \lim_{w\to\bar{w}(R,e)}\frac{G(n)}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} - \bar{w}(R,e).$$

Substituting (2.41) into (2.40) gives

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{a} & \text{if } \eta F'(n) \geqslant e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\lim_{\hat{a}\to\bar{a}}\frac{n}{g(\hat{a})} + \bar{a}\right]\Big/ R, \\ \eta F'(G(\hat{a})) = e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} + \hat{a}\right]\Big/ R \text{ and } \hat{a} \in (0,\bar{a}) & \text{if } \eta F'(n) < e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\lim_{\hat{a}\to\bar{a}}\frac{n}{g(\hat{a})} + \bar{a}\right]\Big/ R. \end{cases}$$

Since we assume that $F'(x) > 0$ for all $x \in (0, n]$, this is equivalent to

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{a} & \text{if } \frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} \geqslant \lim_{\hat{a}\to\bar{a}} \xi(\hat{a}), \\ \frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} = \xi(\hat{a}) \text{ and } \hat{a} \in (0, \bar{a}) & \text{if } \frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} < \lim_{\hat{a}\to\bar{a}} \xi(\hat{a}), \end{cases} \tag{2.44}$$

where $\xi : (0, \bar{a}) \to \mathbb{R}_{++}$ is defined by

$$\xi(\hat{a}) \equiv \left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} + \hat{a}\right] \Big/ [\eta F'(G(\hat{a})]. \tag{2.45}$$

Thus a solution of (2.40) to (2.43) is the same as a solution of (2.41) to (2.44).

Lemma2.5 ξ is strictly increasing in $\hat{a}$ over $(0, \bar{a})$ and satisfies $\lim_{\hat{a}\to 0} \xi(\hat{a}) = 0$.

Proof. Consider a function $\xi : (0, \bar{a}) \to \mathbb{R}_{++}$ defined by (2.45). Since F' is non–increasing and g/G is strictly decreasing, ξ is strictly increasing in $\hat{a}$ over $(0, \bar{a})$. Since $\lim_{x\to 0} F'(x) = \infty = \lim_{y\to 0} g(y)/G(y)$, it follows that $\lim_{\hat{a}\to 0} \xi(\hat{a}) = 0$. □

Lemma2.6 $\lim_{R\to 0} c_1(R, 1) \in [0, 1)$.

Proof. Assumption 2.4 implies $c_1(R, 1) \in (0, 1)$ for all $R > 0$. Furthermore, by Assumption 2.5, $c_1(R, 1)$ is non–decreasing in R over $\mathbb{R}_{++}$. Combining these two facts yields the result. □

Lemma2.7 For all $\beta > \underline{\beta}$, there exists a unique $a(\beta) \in (0, \bar{a})$ such that $\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = \int_{a(\beta)}^{\bar{a}} ag(a)da$, $\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} < \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ if $\hat{a} \in [0, a(\beta))$, and $\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} > \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ if $\hat{a} \in (a(\beta), \bar{a}]$. $a(\beta)$ is strictly increasing over $(\underline{\beta}, \infty)$ and satisfies $\lim_{\beta\to\underline{\beta}} a(\beta) = 0$.

Proof. Take any β such that $\beta > \underline{\beta}$. Then

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{a}} ag(a)da = 0 < \frac{\alpha}{\beta}\bar{K} < \frac{\alpha}{\underline{\beta}}\bar{K} = \int_0^{\bar{a}} ag(a)da,$$

where the last equality follows from the definition of $\underline{\beta}$. Since the function $\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ is continuous and strictly decreasing in $\hat{a}$ over $[0, \bar{a}]$, there exists a unique $a(\beta) \in (0, \bar{a})$

such that

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = \int_{a(\beta)}^{\bar{a}} ag(a)da, \tag{2.46}$$

$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} < \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ if $\hat{a} \in [0, a(\beta))$, and $\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} > \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ if $\hat{a} \in (a(\beta), \bar{a}]$.

(2.46) holds for any β such that $\beta > \underline{\beta}$. Since the left hand side of (2.46) is strictly decreasing, so is its right hand side, which implies that $a(\beta)$ is strictly increasing over $(\underline{\beta}, \infty)$. Furthermore,

$$\lim_{\beta \to \underline{\beta}} \int_{a(\beta)}^{\bar{a}} ag(a)da = \lim_{\beta \to \underline{\beta}} \frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = \frac{\alpha}{\underline{\beta}}\bar{K} = \int_0^{\bar{a}} ag(a)da,$$

which implies $\lim_{\beta \to \underline{\beta}} a(\beta) = 0$. □

The following two lemmas give the proof of Proposition 2.3.

Lemma2.8 There exists a unique $(R^*, \beta^*) \in \mathbb{R}_{++} \times (\underline{\beta}, \infty)$ such that $z_L\left(\frac{1-\gamma\alpha}{\beta^*}, R^*, 1, \beta^*, l\bar{K}\right) = 0$ and $z_1\left(\frac{1-\gamma\alpha}{\beta^*}, R^*, 1, \beta^*, l\bar{K}\right) = 0$.

Proof. Let $e = 1$. Then we show that there exists a unique $(\hat{a}, w, R, \beta) \in (0, \bar{a}] \times \mathbb{R}^2_{++} \times (\underline{\beta}, \infty)$ satisfying (2.41) to (2.44). If $R/\gamma \geqslant \lim_{\hat{a} \to \bar{a}} \xi(\hat{a})$, by (2.44), $\hat{a} = \bar{a}$. Then

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} > 0 = \int_{\bar{a}}^{\bar{a}} ag(a)da \quad \text{for all } \beta > \underline{\beta}.$$

This implies that there exists no $(\hat{a}, \beta) \in (0, \bar{a}] \times (\underline{\beta}, \infty)$ satisfying (2.43) and (2.44).

Thus we consider the case where $R/\gamma < \lim_{\hat{a} \to \bar{a}} \xi(\hat{a})$. Then, by (2.44), $\hat{a} > 0$. This, together with (2.43) and the definition of $\underline{\beta}$, implies

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} = \int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da < \int_0^{\bar{a}} ag(a)da = \frac{\alpha}{\underline{\beta}}\bar{K},$$

that is, $\beta > \underline{\beta}$. Hence, by Lemma 2.7, (2.43) implies

$$\hat{a} = a(\beta). \tag{2.47}$$

Furthermore, by (2.44),

$$\frac{R}{\gamma} = \xi(\hat{a}). \tag{2.48}$$

Substituting this and (2.47) into (2.42) gives

$$\gamma\xi(a(\beta))\eta F(G(a(\beta)))c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1) = \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1)]. \tag{2.49}$$

Since $a(\beta)$ is strictly increasing, so are $\xi(a(\beta))$ and $F(G(a(\beta)))$. Furthermore, by Assumption 2.5, $c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1)$ is non–decreasing. Thus the left hand side of (2.49) is strictly increasing in β over $(\underline{\beta},\infty)$, while its right hand side is strictly decreasing. Since $\lim_{\beta\to\underline{\beta}} a(\beta) = 0$, it follows that $\lim_{\beta\to\underline{\beta}} \xi(a(\beta)) = 0 = \lim_{\beta\to\underline{\beta}} F(G(a(\beta)))$. Furthermore, by Lemma 2.6, $\lim_{\beta\to\underline{\beta}} c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1) \in [0,1)$. Thus the left hand side of (2.49) converges to 0 as $\beta \to \underline{\beta}$. Since $\xi(a(\beta)) > 0$, Assumption 2.4 implies $1 - c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1) \in (0,1)$ for all $\beta \in (\underline{\beta},\infty)$. This, together with $\lim_{\beta\to\infty} \bar{K}/\beta = 0$, implies that the right hand side of (2.49) converges to 0 as $\beta \to \infty$.

Consequently, there exists a unique $\beta^* \in (\underline{\beta},\infty)$ satisfying (2.49). Furthermore,

$$\begin{cases} \gamma\xi(a(\beta))\eta F(G(a(\beta)))c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1) < \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1)] & \text{if } \beta < \beta^*, \\ \gamma\xi(a(\beta))\eta F(G(a(\beta)))c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1) > \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1)] & \text{if } \beta > \beta^*. \end{cases} \tag{2.50}$$

Substituting β^* into (2.47) gives $\hat{a}^* = a(\beta^*) < \bar{a}$. Substituting $\hat{a}^*$ into (2.48) gives $R^*/\gamma = \xi(\hat{a}^*) < \lim_{\hat{a}\to\bar{a}} \xi(\hat{a})$, where the inequality follows from Lemma 2.5. Substituting R^* and $\hat{a}^*$ into (2.41), we get $w^* = \gamma\hat{a}^*/R^*$. □

Lemma2.9 If $\beta < \beta^*$, there exists no $(R,e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1]$ satisfying (2.19) and (2.20), and if $\beta > \beta^*$, there exists a unique $(R,e) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1)$ satisfying (2.19) and (2.20).

Proof. Take any β such that $\beta \neq \beta^*$. We considered the case where $\beta \leqslant \underline{\beta}$ in the text. Here, we consider the case where $\beta > \underline{\beta}$. We show that if $\beta < \beta^*$, there exists no $(\hat{a},w,R,e) \in (0,\bar{a}] \times \mathbb{R}^2_{++} \times (0,1]$ satisfying (2.41) to (2.44), and if $\beta > \beta^*$, there exists a unique $(\hat{a},w,R,e) \in (0,\bar{a}] \times \mathbb{R}^2_{++} \times (0,1)$ satisfying (2.41) to (2.44).

If $\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} \geqslant \lim_{\hat{a}\to\bar{a}} \xi(\hat{a})$, by (2.44), $\hat{a} = \bar{a}$. Then

$$\frac{\alpha}{\beta}\bar{K} > 0 = e\int_{\bar{a}}^{\bar{a}} ag(a)da \text{ for all } e \in (0,1].$$

This implies that there exists no $(e, \hat{a}) \in (0,1] \times (0, \bar{a}]$ satisfying (2.43) and (2.44).

Thus we consider the case where $\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} < \lim_{\hat{a}\to\bar{a}} \xi(\hat{a})$. Then, by (2.44), $\hat{a} < \bar{a}$ and hence multiplying both sides of (2.43) by $1/\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da$ gives

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}}{\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da} = e. \tag{2.51}$$

Since $e \in (0,1]$ and $\hat{a} > 0$, lemma 2.7 implies that the left hand side of (2.51) is defined over $(0, a(\beta)]$, where $a(\beta) < \bar{a}$. By (2.44),

$$\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma} = \xi(\hat{a}). \tag{2.52}$$

Substituting (2.51) into this gives

$$R = \gamma\phi(\beta, \hat{a}), \tag{2.53}$$

where $\phi : (\underline{\beta}, \infty) \times (0, a(\beta)] \to \mathbb{R}_{++}$ is defined by

$$\phi(\beta, \hat{a}) \equiv \xi(\hat{a}) \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}}{\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Substituting (2.53) into (2.42) gives

$$\gamma\phi(\beta,\hat{a})\eta F(G(\hat{a}))c_1(\gamma\phi(\beta,\hat{a}),1) = \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\phi(\beta,\hat{a}),1)]. \tag{2.54}$$

The functions $\phi(\beta,\hat{a})$ and $F(G(\hat{a}))$ are strictly increasing in $\hat{a}$, and $c_1(\gamma\phi(\beta,\hat{a}),1)$ is non–decreasing. Thus the left hand side of (2.54) is strictly increasing in $\hat{a}$ over $(0, a(\beta)]$, while its right hand side is non–increasing. Since $\lim_{\hat{a}\to 0} \phi(\beta,\hat{a}) = 0 = \lim_{\hat{a}\to 0} F(G(\hat{a}))$ and $\lim_{\hat{a}\to 0} c_1(\gamma\phi(\beta,\hat{a}),1) \in [0,1)$, the left hand side of (2.54) converges to 0 as $\hat{a} \to 0$.

If $\beta < \beta^*$, (2.50) implies

$$\gamma\xi(a(\beta))\eta F(G(a(\beta)))c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1) < \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\xi(a(\beta)),1)].$$

Since $\phi(\beta, a(\beta)) = \xi(a(\beta))$ for all $\beta > \underline{\beta}$, this is equivalent to

$$\gamma\phi(\beta, a(\beta))\eta F(G(a(\beta)))c_1(\gamma\phi(\beta, a(\beta)),1) < \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\phi(\beta, a(\beta)),1)],$$

which implies that the left hand side of (2.54) at $a(\beta)$ is smaller than its right hand side. Consequently, the left hand side of (2.54) and its right hand side do not cross over $(0, a(\beta)]$, which implies that there exists no $\hat{a} \in (0, a(\beta)]$ satisfying (2.54).

Similarly, if $\beta > \beta^*$,

$$\gamma\phi(\beta, a(\beta))\eta F(G(a(\beta)))c_1(\gamma\phi(\beta, a(\beta)),1) > \frac{\bar{K}}{\beta}[1 - c_1(\gamma\phi(\beta, a(\beta)),1)].$$

Hence the left hand side of (2.54) at $a(\beta)$ is larger than its right hand side. Consequently, the left hand side of (2.54) and its right hand side cross only once over $(0, a(\beta))$, which implies that there exists a unique $\hat{a}^{**} \in (0, a(\beta))$ satisfying (2.54). Substituting $\hat{a}^{**}$ into (2.51) gives

$$e^{**} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}}{\int_{\hat{a}^{**}}^{\bar{a}} ag(a)da} < \frac{\frac{\alpha}{\beta}\bar{K}}{\int_{a(\beta)}^{\bar{a}} ag(a)da} = 1,$$

where the last equality follows from Lemma 2.7. Substituting e^{**} and $\hat{a}^{**}$ into (2.52) gives $\frac{R^{**}}{e^{**\frac{1}{m}}\gamma} = \xi(\hat{a}^{**}) < \lim_{\hat{a}\to\bar{a}} \xi(\hat{a})$, where the inequality follows from Lemma 2.5. Substituting R^{**}, e^{**} and $\hat{a}^{**}$ into (2.41), we get $w^{**} = e^{**\frac{1}{m}}\gamma\hat{a}^{**}/R^{**}$. □

A.4. Proof of Proposition 2.4 to 2.6

By (2.40) to (2.43), we have the following system of four equations depending on endogenous variables $(R, e, w, \hat{a})$ and parameters $(\bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta)$:

$$\begin{cases} \Upsilon(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) = 0, \\ \Psi(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) = 0, \\ \zeta_j(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) = 0 \text{ for all } j = 1, L, \end{cases} \tag{2.55}$$

where

$$\begin{aligned} \Upsilon(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) &\equiv e^{\frac{1}{m}}\gamma\hat{a} - Rw, \\ \Psi(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) &\equiv \eta F'(G(\hat{a})) - \frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} - w, \\ \zeta_1(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) &\equiv \left[R\eta F(G(\hat{a})) + \frac{\bar{K}}{\beta}\right] c_1(R, 1) - \frac{\bar{K}}{\beta}, \\ \zeta_L(R, e, w, \hat{a}, \bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta) &\equiv \frac{\alpha}{\beta}\bar{K} - e\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} ag(a)da. \end{aligned}$$

Consider a solution $x \equiv (R, e, w, \hat{a})$ at parameter values $q \equiv (\bar{K}, \alpha, \beta, \gamma, \eta)$. We denote the Jacobian matrix of the system of equations (2.55) with respect to the endogenous variables, evaluated at (x, q), by J. Then

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Upsilon}{\partial R} & \frac{\partial \Upsilon}{\partial e} & \frac{\partial \Upsilon}{\partial w} & \frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial R} & \frac{\partial \Psi}{\partial e} & \frac{\partial \Psi}{\partial w} & \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial R} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial e} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial w} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}} \\ \frac{\partial \zeta_L}{\partial R} & \frac{\partial \zeta_L}{\partial e} & \frac{\partial \zeta_L}{\partial w} & \frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}} \end{vmatrix} < 0,$$

because

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Upsilon}{\partial R} = -w < 0,\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial e} = \frac{1}{m} e^{\frac{1}{m}-1} \gamma \hat{a} > 0,\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial w} = -R < 0,\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} = e^{\frac{1}{m}} \gamma > 0,\\
&\frac{\partial \Psi}{\partial R} = \frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a}) \frac{R^2}{e^{\frac{1}{m}} \gamma}} > 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial e} = -\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a}) \frac{R}{\gamma}} \frac{1}{m} e^{\frac{1}{m}-1} < 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial w} = -1 < 0,\\
&\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} = \eta F''(G(\hat{a})) g(\hat{a}) - \left(\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} \right)' \frac{1}{\frac{R}{e^{\frac{1}{m}} \gamma}} < 0, \qquad (2.56)\\
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial R} = \eta F(G(\hat{a})) c_1(R, 1) + \left[R \eta F(G(\hat{a})) + \frac{\bar{K}}{\beta} \right] \frac{d c_1(R, 1)}{dR} > 0, \qquad (2.57)\\
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial e} = 0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial w},\\
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}} = R \eta F'(G(\hat{a})) g(\hat{a}) c_1(R, 1) > 0, \qquad (2.58)\\
&\frac{\partial \zeta_L}{\partial R} = 0 = \frac{\partial \zeta_L}{\partial w},\ \frac{\partial \zeta_L}{\partial e} = -\int_{\hat{a}}^{\bar{a}} a g(a) da < 0,\ \frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}} = e \hat{a} g(\hat{a}) > 0,
\end{aligned}
$$

where (2.56) follows from $F''(G(\hat{a})) \leqslant 0$ and $(g(\hat{a})/G(\hat{a}))' < 0$, (2.57) follows from $dc_1(R, 1)/dR \geqslant 0$, and (2.58) follows from $F'(G(\hat{a})) > 0$. Thus, by the Implicit Function Theorem, we can solve the system of equations (2.55) for endogenous variables as a function of parameters around (x, q). By the chain rule,

$$
J \times \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \bar{K}} \\ \frac{\partial e}{\partial \bar{K}} \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{K}} \\ \frac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Upsilon}{\partial \bar{K}} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{K}} \\ -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}} \\ -\frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}} \end{bmatrix},
$$

where

$$
\frac{\partial \Upsilon}{\partial \bar{K}} = 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{K}},\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}} = -\frac{1 - c_1(R, 1)}{\beta} < 0,\ \frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}} = \frac{\alpha}{\beta} > 0.
$$

By the Cramer's rule, we can obtain the following results.

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{K}} = \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\left\{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] + \frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right]\right\} - \frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right]}{|J|} > 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial \bar{K}} = \frac{-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] + \frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\left\{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] + \frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right]\right\}}{|J|} > 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{a}}{\partial \bar{K}} &= \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] - \frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e}\right]}{|J|} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} + \hat{a}\right]\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e} + \frac{1}{me}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\right]}{|J|} \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.59}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R} &= -\frac{e^{\frac{1}{m}}\gamma}{R}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} + \hat{a}\right], \\ \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} &= -\frac{e^{\frac{1}{m}-1}\gamma}{m}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} + \hat{a}\right], \\ -\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e} + \frac{1}{me}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R} &= \frac{\alpha}{\beta e}\left\{\left[\frac{1}{m} - 1\right]\eta F(G(\hat{a}))c_1(R,1)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m}\left[R\eta F(G(\hat{a})) + \frac{\bar{K}}{\beta}\right]\frac{dc_1(R,1)}{dR}\right\} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

The last inequality holds with strict inequality if and only if (2.28) holds, and with equality if and only if (2.29) holds. Hence so does (2.59).

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{K}} &= \left\{ -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] + \frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}}\right] \right\} \Big/ |J| \\ &= \left\{ e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + \hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right]\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e} + \frac{1}{me}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \bar{K}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\right] \right\} \Big/ |J| \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.61}$$

where

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e} = 0,\\
&\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} = \frac{e^{\frac{1}{m}}\gamma}{R}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + \hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right],\\
&\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} = \frac{e^{\frac{1}{m}-1}\gamma}{m}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + \hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right],\\
&\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + \hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}} = \frac{e^{\frac{1}{m}}\gamma}{R}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} - \hat{a}\left(\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})}\right)'\right] + \hat{a}\eta F''(G(\hat{a}))g(\hat{a}) \leqslant 0,
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

The last inequality holds with strict inequality if and only if (2.30) holds, and with equality if and only if (2.31) holds. This, together with (2.60), implies that (2.61) holds with strict inequality if and only if both (2.28) and (2.30) hold, and with equality if and only if either (2.29) or (2.31) holds.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \frac{-\frac{\partial \zeta_L}{\partial \alpha}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right]}{|J|} > 0,\\
\frac{\partial e}{\partial \alpha} &= \frac{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] + \frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right]\right\}}{|J|} > 0,\\
\frac{\partial \hat{a}}{\partial \alpha} &= \frac{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \alpha}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right]}{|J|} < 0,\\
\frac{\partial w}{\partial \alpha} &= \frac{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] + \frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}}\right]\right\}}{|J|}\\
&= \frac{\frac{e^{\frac{1}{m}-1}\gamma}{m}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \alpha}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + \hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right]}{|J|} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

By (2.62), the last inequality holds with strict inequality if and only if (2.30) holds, and with equality if and only if (2.31) holds.

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} = \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\left\{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] + \frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right]\right\} - \frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right]}{|J|} < 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial \beta} = \frac{-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] + \frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\left\{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] + \frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right]\right\}}{|J|} < 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{a}}{\partial \beta} &= \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right] - \frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e}\right]}{|J|} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})} + \hat{a}\right]\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e} + \frac{1}{me}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\right]}{|J|} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.63}$$

where

$$\begin{aligned}-\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e} + \frac{1}{me}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R} = -\frac{\alpha \bar{K}}{\beta^2 e}\Bigg\{&\left[\frac{1}{m} - 1\right]\eta F(G(\hat{a}))c_1(R,1) \\ &+ \frac{1}{m}\left[R\eta F(G(\hat{a})) + \frac{\bar{K}}{\beta}\right]\frac{dc_1(R,1)}{dR}\Bigg\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

The last inequality holds with strict inequality if and only if (2.28) holds, and with equality if and only if (2.29) holds. Hence so does (2.63).

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \beta} = \Bigg\{ &- \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right] \\ &+ \frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial e} - \frac{\partial \psi}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right] + \frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}}\right]\Bigg\} \Bigg/ |J| \\ = \Bigg\{&e^{\frac{1}{m}}\gamma\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}} + \hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right]\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e} + \frac{1}{me}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \beta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\right]\Bigg\} \Bigg/ |J| \leqslant 0,\end{aligned}$$

By (2.62) and (2.64), the above inequality holds with strict inequality if and only if both (2.28) and (2.30) hold, and with equality if and only if either (2.29) or (2.31) holds.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \gamma} &= \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[-\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial w}+\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\right]}{|J|} > 0,\\
\frac{\partial e}{\partial \gamma} &= \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[-\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial w}+\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\right]}{|J|} < 0,\\
\frac{\partial \hat{a}}{\partial \gamma} &= \frac{-\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[-\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial w}+\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\right]}{|J|} < 0,\\
\frac{\partial w}{\partial \gamma} &= \frac{\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[-\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}+\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}}\right]+\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial e}-\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right]+\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right]}{|J|}\\
&= \frac{-e^{\frac{1}{m}}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}}+\hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right]}{|J|} \geqslant 0, \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

where

$$-\frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}+\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}} = -e^{\frac{1}{m}}\left[\frac{G(\hat{a})}{g(\hat{a})\frac{R}{e^{\frac{1}{m}}\gamma}}+\hat{a}\frac{\partial \psi}{\partial \hat{a}}\right], \frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial e}-\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e} = 0 = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \gamma}\frac{\partial \Psi}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}.$$

It follows from (2.62) that (2.65) holds with strict inequality if and only if (2.30) holds, and with equality if and only if (2.31) holds.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \eta} &= \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}+\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\left\{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial e}-\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\right]+\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}}-\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\right]\right\}}{|J|} < 0,\\
\frac{\partial e}{\partial \eta} &= \frac{\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}}\left\{\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right]+\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right\}}{|J|} \geqslant 0, \qquad (2.66)\\
\frac{\partial \hat{a}}{\partial \eta} &= \frac{-\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\left\{\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right]+\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\right\}}{|J|} \geqslant 0, \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

where

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial w}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right]+\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial w}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R} = -RF'(G(\hat{a}))\left[R\eta F(G(\hat{a}))+\frac{\bar{K}}{\beta}\right]\frac{dc_1(R,1)}{dR} \leqslant 0.$$

The last inequality holds with strict inequality if and only if $dc_1(R,1)/dR > 0$, and with equality if and only if $dc_1(R,1)/dR = 0$. Hence so do (2.66) and (2.67).

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{a}}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right] - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial R}\frac{\partial \Upsilon}{\partial e}\frac{\partial \zeta_L}{\partial \hat{a}} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \hat{a}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}\right] + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Upsilon}{\partial R}\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{a}}\frac{\partial \zeta_L}{\partial e}}{|J|} > 0,$$

where

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta_1}{\partial R} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial R} = F'(G(\hat{a}))\left[R\eta F(G(\hat{a})) + \frac{\bar{K}}{\beta}\right]\frac{dc_1(R,1)}{dR} + wF(G(\hat{a}))c_1(R,1) > 0.$$

第3章　連結取引の理論:割引因子とリスクに対する態度が労働者によって異なる場合

3.1　モデル

ある農村を考える．そこには独占地主と $n>1$ 人の労働者がいる．期間は農閑期と農繁期の 2 期間である．第 1 期が農閑期である．地主は雇用主であるとともに貸し手でもある．第 2 期に地主は農村にいるすべての労働者を雇って生産をする．第 1 期には生産は行わず，地主は彼の労働者に消費信用を与える．労働者は第 1 期財と第 2 期財に対する選好が異なるが，地主はどの労働者にも同じ契約をただ一つだけ提示するとする．契約は賃金率と利子率の組である．つまり地主は第 1 期にはどの労働者にも同じ利子率で貸し，第 2 期にはどの労働者も同じ賃金率で雇う．各労働者は地主のもとで働くか働かないかを選択する．労働者が地主のもとで働かない場合，都市に行くとする．簡単化のため，都市では第 1 期にのみなにかしらの生産が行われるとする．ただし，都市に行く労働者は失業するかもしれない．そのとき所得はゼロである．

3.1.1　労働者の効用最大化

労働者を考える．労働者は財 1 と財 2 に対する選好が異なる．労働者は $[\underline{j},\bar{j}],\underline{j}\geqslant 0$ に分布し，その分布は密度関数 g で表現されるとする．g について

Assumption3.1　g は $[\underline{j},\bar{j}]$ で連続であり，$g(j)>0\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]$ かつ $\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} g(j)dj=n$ である

を仮定する．労働者 j の効用関数は，コブ・ダグラス型の効用関数のべきと同次性はともに線形でどの労働者も同じ関数であるが，値が労働者により異なるとする．形式

的には

$$u_j(c_1,c_2)=c_1^{\alpha(j)}c_2^{\beta(j)-\alpha(j)} \tag{3.1}$$

である．ただし，$c_t, t=1,2$ は t 期の財の消費量であり，$\alpha(j)=a_1+a_2j, \beta(j)=b_1+b_2j, j\in[\underline{j},\bar{j}]$ である．関数 α と β は

Assumption3.2 $\alpha(j)>0, \beta(j)>0,\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]$

Assumption3.3 $\beta(j)>\alpha(j),\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]$

Assumption3.4 $b_2>0$

Assumption3.5 $a_2b_1-a_1b_2\neq 0$

を満たすとする[1]．労働者 j の効用関数 (3.1) は

$$u_j(c_1,c_2)=\left(c_1^{\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}}c_2^{1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}}\right)^{\beta(j)}$$

と書き直すことができる．任意の $j\in(\underline{j},\bar{j})$ について，$\left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)'$ の符号は $a_2b_1-a_1b_2$ のそれと同じである．よって，$a_2b_1-a_1b_2>0$ なら，j が小さい労働者ほど財 2 の消費を高く評価する．財 2 は第 2 期に生産される財なので，j が小さい労働者ほどより我慢強いことを意味する．$a_2b_1-a_1b_2<0$ なら，j が小さい労働者ほど財 1 の消費を高く評価する．財 1 は第 1 期に生産される財なので，j が小さい労働者ほどより近視眼的であることを意味する．

労働者 j が地主のもとで働く場合，彼女の効用最大化問題を

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}_+^2} u_j(c_1,c_2) \quad \text{subject to} \quad c_1+\iota c_2=\iota w$$

と表現する．ただし，$\iota\equiv 1/(1+i)\in(0,1]$ である．i は地主が労働者に貸すときの利子率である．予算制約は第 1 期首の時点で表現されている．労働者 j は第 1 期に c_1 単位の財 1 を地主から借りて，第 2 期に元利合計 $(1+i)c_1$ を支払う．第 2 期には労働者は地主のもとで賃金率 w で働く．よって，財 2 は $w-(1+i)c_1$ だけ消費することができる．地主は労働者を区別せずどの労働者にも同じ利子率 i で貸し，どの労働者も

[1] $b_2=0$ でも以下の議論は成立するが，証明を別途行う必要があるため，紙面の都合上割愛する．

同じ賃金率 w で雇う．よって，予算制約はどの労働者も同じである．この問題の解を $c_1^{\mathrm{r}}(j), c_2^{\mathrm{r}}(j)$ とかく．r は rural の頭文字である．

$$c_1^{\mathrm{r}}(j) = \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\iota w,\ c_2^{\mathrm{r}}(j) = \frac{\beta(j)-\alpha(j)}{\beta(j)}w \tag{3.2}$$

である．

労働者が地主のもとで働かない場合，労働者は都市に行くとする．その場合，確率 $(1-e)$ で失業する．そのとき彼女の稼ぎはゼロ，したがって各期の消費量はゼロである．他方，確率 e で彼女は雇用される．その場合の彼女の効用最大化問題を

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}_+^2} u_j(c_1,c_2) \quad \text{subject to} \ \ c_1 + Rc_2 = a$$

と表現する．ただし，$R \equiv 1/(1+r) \in (0,1]$ である．r は市場利子率である．予算制約は第 1 期首の時点で表現されている．労働者 j は第 1 期に a だけの所得を稼ぐ．a は正値で，労働者によらない．c_1 単位の財 1 を消費して，残りは市場に利子率 r で貸す．第 2 期には利子所得 $(1+r)(a-c_1)$ で生活する．どの労働者も同じ所得を得て，同じ利子率で貸すので，予算制約はどの労働者も同じである．この問題の解を $c_1^{\mathrm{uj}}(j), c_2^{\mathrm{uj}}(j)$ とかく．uj は urban job の頭文字である．

$$c_1^{\mathrm{uj}}(j) = \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}a,\ c_2^{\mathrm{uj}}(j) = \frac{\beta(j)-\alpha(j)}{\beta(j)}\frac{a}{R} \tag{3.3}$$

である．

各労働者 j は都市の失業率に直面して，農村で働くか都市で働くかを期待効用に基づき決定する．形式的には，$(\iota, w, R, e) \in (0,1] \times \mathbb{R}_{++} \times (0,1]^2$ を所与として，

$$eu_j(c_1^{\mathrm{uj}}(j), c_2^{\mathrm{uj}}(j)) < u_j(c_1^{\mathrm{r}}(j), c_2^{\mathrm{r}}(j)) \tag{3.4}$$

であれば，労働者 j は農村で働く．(3.4) の左辺が右辺を上回れば，労働者は都市で働くことをえらぶ．(3.2) と (3.3) を (3.4) に代入すれば，

$$e\left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}a\right)^{\alpha(j)}\left(\frac{\beta(j)-\alpha(j)}{\beta(j)}\frac{a}{R}\right)^{\beta(j)-\alpha(j)} < \left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\iota w\right)^{\alpha(j)}\left(\frac{\beta(j)-\alpha(j)}{\beta(j)}w\right)^{\beta(j)-\alpha(j)}$$

となる．これを変形すると，

$$\begin{aligned}
&e < \left(\frac{\iota}{R}\right)^{\alpha(j)} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{\beta(j)} \\
\Leftrightarrow\ &\log e < \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \frac{Rw}{a} \\
\Leftrightarrow\ &\log e < (a_1 + a_2 j) \log \frac{\iota}{R} + (b_1 + b_2 j) \log \frac{Rw}{a} \\
\Leftrightarrow\ &\log e < \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\} + j \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

を得る[2]．

$(\iota, w, R, e) \in (0,1] \times \mathbb{R}_+ \times (0,1]^2$ のとき，農村で働く労働者の集合に含まれる最大の開集合を $S(\iota, w, R, e)$ とかく．S は Stay の頭文字である．ここで，最大の開集合を考えるのは，次の項でみるように地主の利潤に関係するのは面積 $\int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj$ と $\int_{S(\iota,w,R,e)} c_1^{\mathrm{r}}(j)g(j)dj$ だからである．農村で働く労働者の集合に含まれる最大の開集合の代わりに，その集合を含む最小の閉集合を考えたとしても面積は同じなので，以下の議論に影響はない．同様に，都市で働くことをえらぶ労働者の集合に含まれる最大の開集合を $M(\iota, w, R, e)$ とかく．M は Migrate の頭文字である．

$w = 0$ のとき，農村で働く場合の所得 ιw がゼロになるので，各期の消費はゼロとなる．よって，農村で働くことで得る効用はどの労働者もゼロである．一方，都市の雇用率 e は正であり，雇用される場合の所得 a は正なので，都市で働くことで得る期待効用はどの労働者も正値である．したがって，全員都市で働くことをえらぶので，農村で働く労働者の集合は空集合になる．よって，$S(\iota, 0, R, e) = \emptyset$ となる．

$w > 0$ かつ $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \neq 1$ のとき

$$\hat{j} \equiv \mathrm{median} \left\{ \frac{\log e - \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}}, \underline{j}, \bar{j} \right\}$$

とする．ただし，$\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \in \mathbb{R}$ である．任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，$j \gtrless \hat{j}$

[2] $\log e$ の e は雇用率の e をあらわしている．

であれば，

$$
\begin{aligned}
j &\gtrless \frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}} \\
\Leftrightarrow\ &\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\} + j\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\} > \log e
\end{aligned}
$$

となる．よって，(3.5) したがって (3.4) が成り立つので，j は農村で働く．同様に考えると，$j \lesseqgtr \hat{j}$ であれば，j は都市で働くことをえらぶ．したがって，

$$
S(\iota, w, R, e) = \begin{cases} (\hat{j}, \bar{j}) & \text{if } \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > 1 \\ (\underline{j}, \hat{j}) & \text{if } \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1 \end{cases}
$$

$$
M(\iota, w, R, e) = \begin{cases} (\underline{j}, \hat{j}) & \text{if } \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > 1 \\ (\hat{j}, \bar{j}) & \text{if } \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1 \end{cases}
$$

となる．

$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} = 1$ のとき，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \gtreqless e$ であれば，任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，

$$
\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\} + j\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\} \gtreqless \log e
$$

つまり

$$
u_j(c_1^{\mathrm{r}}(j), c_2^{\mathrm{r}}(j)) \gtreqless e u_j(c_1^{\mathrm{uj}}(j), c_2^{\mathrm{uj}}(j))
$$

となる．よって，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} > e$ であれば，全員農村で働くので，$S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} < e$ であれば，全員都市で働くことをえらぶので，$M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} = e$ であれば，どの労働者も農村で働くことと都市で働くことが無差別になる．この場合，農村で働く労働者数について次の仮定をおく．

Assumption3.6 $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} = 1$ かつ $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} = e$ を満たす $(\iota, w, R, e) \in (0,1] \times \mathbb{R}_+ \times (0,1]^2$ を所与として，地主の利潤（次の節で定義される）を最大にするように農村で働く労働者数が選ばれる．

この仮定は地主の利潤最大化問題の解の存在を証明するときに必要になる．

3.1.2　地主の利潤最大化

独占地主を考える．農繁期である第2期に地主は農村に残る労働者をすべて雇って生産する．農閑期である第1期には生産は行われず，地主は彼の労働者に消費信用を供与する．つまり地主は，労働取引と信用取引を連結させて，労働者と取引をすると想定する．賃金が支払われるのは第2期であるので，労働者は第1期の消費を借り入れによって賄う必要がある．しかし，農村では返済を履行させる法的な手段がない．土地などの担保をもつ地主は銀行などから借りることができるが，担保をもたない労働者は借りることができない．雇用主である地主が貸し手を兼ねるのは，賃金から差し引くという形で確実に労働者に返済をさせることができるためである．

連結取引をする地主はパッケージを労働者に提示する．パッケージは連結取引での利子率と賃金率の組で表される．前の項でみたように，本稿で財1と財2に対する選好が労働者によって異なる．労働者が異質であるとき，地主がパッケージを提示する方法は現実にはさまざまだろう．個別に異なるパッケージを提示する地主もいれば，いくつかのパッケージを用意して労働者に選ばせる地主もいるかもしれない．Basu [9] では，このような提示の仕方をする地主を想定し，最適な連結取引を分析している．しかし，現実には，異質な労働者を区別せずに，どの労働者にも同じパッケージをただ一つだけ提示するような地主もいるだろう．本稿ではそうした地主を想定する．そのとき，もし労働者 j がパッケージを受け入れれば，彼女は第2期に賃金率 w で働かなければならない．しかし利子率 i で第1期に好きなだけ借りることができる．どの労働者も直面する賃金率と利子率は同じである．

すると地主の利潤最大化行動は

$$\max_{(\iota,w)\in(0,1]\times\mathbb{R}_+} \pi(\iota,w) = F\left(\int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj\right) - w\int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj + \frac{1}{\iota}\int_{S(\iota,w,R,e)} c_1^{\mathrm{r}}(j)g(j)dj - \frac{1}{R}\int_{S(\iota,w,R,e)} c_1^{\mathrm{r}}(j)g(j)dj \tag{3.6}$$

と表現できる．ただし，関数 $F:[0,n]\to\mathbb{R}_+$ は地主の生産技術を表す．F について以下を仮定する．

Assumption3.7 生産関数 F は $(0,n)$ で微分可能で，$[0,n]$ で増加的かつ連続である．$F(0)=0$，$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F'(x)=\infty$ である．

地主の目的関数は第 2 期首の時点で書かれている．第 2 期に農村に残るすべての労働者を使って，地主は第 2 財を生産する．それを表しているのが目的関数の第 1 項である．第 2 項は彼の労働者に支払わなければならない賃金総額である．すなわち最初の 2 つの項は総生産利潤を表している．地主は第 1 期に $c_1^r(j)$ 単位の財 1 を利子率 r で市場から借りる．それを第 2 期に雇う労働者 j に利子率 i で貸す．地主が彼の労働者から受け取る元利合計の総額を述べているのが第 3 項である．地主が市場に支払う元利合計の総額を述べているのが第 4 項である．すなわち，最後の 2 項は総利子利潤を表している．(2.5) は地主は彼の生産利潤と利子利潤を個別に勘案して，賃金率と利子率を別々にえらばない．むしろその和を最大にするように利子率と賃金率の組をえらぶことをいっている．この考え方自体は Basu と同じである．異なるのは組のえらび方である．Basu では，労働者の選好が異なるもとで，地主は労働者ごとに生産利潤と利子利潤の和を最大にするような組を一つえらぶ．あるいは総生産利潤と総利子利潤の和を最大にするように組のベクトルをえらぶ．それに対して，本稿では，地主は総生産利潤と総利子利潤の和を最大にするように組を一つえらぶ.

関数 π は連続だが，定義域がコンパクトでないので，地主の利潤最大化問題 (3.6) に解があるかどうかは自明ではない．したがって，次節でその解の存在を証明する．さらに解の一意性も証明する．問題 (3.6) の一意の解を $(\iota(R,e),w(R,e))$ とかく．

3.2 最適な連結契約の存在

この節では，地主の利潤最大化問題 (3.6) に，一意の解 $(\iota(R,e),w(R,e))$ が存在することを示す．$(R,e)\in(0,1]^2$ を所与とする．$\iota\in(0,1]$ を任意にえらんで固定する．このとき，

$$\log e=\alpha(\bar{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\bar{j})\log\frac{Rw}{a}$$

を満たす w を $\bar{w}(\iota)$ とかく．$\bar{w}(\iota)=\left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\bar{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{j})}}\frac{a}{R}$ である．$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}<1$ であれば,

$$
\begin{aligned}
\log e &= \alpha(\bar{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\bar{j})\log\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\\
&=\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_1}\right\}+\bar{j}\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\right\}\\
&\leqslant\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_1}\right\}+j\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\right\},\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]
\end{aligned}
$$

となるので，$\bar{w}(\iota)$ は $\iota\in(0,1]$ のもとで $S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ をみたす賃金率の最小値である．同様に考えると，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}>1$ であれば，$\bar{w}(\iota)$ は $\iota\in(0,1]$ のもとで $M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ をみたす賃金率の最大値である．

$$\log e=\alpha(\underline{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\underline{j})\log\frac{Rw}{a}$$

を満たす w を $\underline{w}(\iota)$ とかく．$\underline{w}(\iota)=\left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\underline{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\underline{j})}}\frac{a}{R}$ である．$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}<1$ であれば,

$$
\begin{aligned}
\log e &= \alpha(\underline{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\underline{j})\log\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\\
&=\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_1}\right\}+\underline{j}\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\right\}\\
&\geqslant\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_1}\right\}+j\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\right\},\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]
\end{aligned}
$$

となるので，$\underline{w}(\iota)$ は $\iota\in(0,1]$ のもとで $M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ をみたす賃金率の最大値である．同様に考えると，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}>1$ であれば，$\underline{w}(\iota)$ は $\iota\in(0,1]$ のもとで $S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ をみたす賃金率の最小値である．

Lemma3.1　$\iota\in(0,1]$ を任意にえらんで固定する．$\underline{w}(\iota)\leqslant\bar{w}(\iota)\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\leqslant\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\leqslant 1\ \Leftrightarrow$

$$
\begin{cases}
\iota\leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} & \text{if } a_2b_1-a_1b_2>0\\
\iota\geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} & \text{if } a_2b_1-a_1b_2<0
\end{cases}
$$

が成り立つ.

Proof. $\iota \in (0,1]$ を任意にえらんで固定する.

$$\bar{w}(\iota) - \underline{w}(\iota) = \frac{a}{R}\left[\left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\bar{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{j})}} - \left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\underline{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\underline{j})}}\right]$$

なので,

$$\begin{aligned}
\bar{w}(\iota) \gtrless \underline{w}(\iota) \ &\Leftrightarrow\ \left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\bar{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{j})}} \gtrless \left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\underline{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\underline{j})}} \\
&\Leftrightarrow\ \left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\bar{j})}\right)^{\beta(\underline{j})} \gtrless \left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\underline{j})}\right)^{\beta(\bar{j})} \\
&\Leftrightarrow\ \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\bar{j})\beta(\underline{j})-\alpha(\underline{j})\beta(\bar{j})} \gtrless e^{\beta(\bar{j})-\beta(\underline{j})} \\
&\Leftrightarrow\ \left(\frac{R}{\iota}\right)^{(a_2b_1-a_1b_2)(\bar{j}-\underline{j})} \gtrless e^{b_2(\bar{j}-\underline{j})} \\
&\Leftrightarrow\ \left(\frac{R}{\iota}\right)^{a_2b_1-a_1b_2} \gtrless e^{b_2} \\
&\Leftrightarrow 1 \gtrless e^{b_2}\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2b_1-a_1b_2}
\end{aligned}$$

である. ただし 2 行目の同値性は仮定 3.2 より $\beta(\bar{j})\beta(\underline{j}) > 0$ を用いている. また 4 行目の同値性は

$$\alpha(\bar{j})\beta(\underline{j}) - \alpha(\underline{j})\beta(\bar{j}) = (a_1 + a_2\bar{j})(b_1 + b_2\underline{j}) - (a_1 + a_2\underline{j})(b_1 + b_2\bar{j}) = (a_2b_1 - a_1b_2)(\bar{j} - \underline{j})$$

を用いている.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} - 1 &= \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left[\frac{R}{a}\left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\bar{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{j})}}\frac{a}{R}\right]^{b_2} - 1 \\
&= \left(\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2\beta(\bar{j})-b_2\alpha(\bar{j})} e^{b_2}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{j})}} - 1
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} \leqq 1 &\Leftrightarrow \left(\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2\beta(\bar{j})-b_2\alpha(\bar{j})} e^{b_2}\right)^{\frac{1}{\beta(\bar{j})}} \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2\beta(\bar{j})-b_2\alpha(\bar{j})} e^{b_2} \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2b_1-a_1b_2} e^{b_2} \leqq 1\end{aligned}$$

である．ただし 2 行目の同値性は仮定 3.2 より $\beta(\bar{j}) > 0$ を用いている．また，3 行目の同値性は

$$a_2\beta(\bar{j}) - b_2\alpha(\bar{j}) = a_2(b_1 + b_2\bar{j}) - b_2(a_1 + a_2\bar{j}) = a_2b_1 - a_1b_2$$

を用いている．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} - 1 &= \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left[\frac{R}{a}\times\left(e\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\alpha(\underline{j})}\right)^{\frac{1}{\beta(\underline{j})}}\frac{a}{R}\right]^{b_2} - 1 \\ &= \left(\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2\beta(\underline{j})-b_2\alpha(\underline{j})} e^{b_2}\right)^{\frac{1}{\beta(\underline{j})}} - 1\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} \leqq 1 &\Leftrightarrow \left(\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2\beta(\underline{j})-b_2\alpha(\underline{j})} e^{b_2}\right)^{\frac{1}{\beta(\underline{j})}} \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2\beta(\underline{j})-b_2\alpha(\underline{j})} e^{b_2} \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2b_1-a_1b_2} e^{b_2} \leqq 1\end{aligned}$$

である．ただし 2 行目の同値性は仮定 3.2 より $\beta(\underline{j}) > 0$ を用いている．また 3 行目の同値性は

$$a_2\beta(\underline{j}) - b_2\alpha(\underline{j}) = a_2(b_1 + b_2\underline{j}) - b_2(a_1 + a_2\underline{j}) = a_2b_1 - a_1b_2$$

を用いている．

$$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2b_1-a_1b_2} e^{b_2} \leqslant 1 \;\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \leqslant \frac{R}{\iota} \;\Leftrightarrow\; \iota \leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} & \text{if } a_2b_1-a_1b_2>0 \\ e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \geqslant \frac{R}{\iota} \;\Leftrightarrow\; \iota \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} & \text{if } a_2b_1-a_1b_2<0 \end{cases}$$

なので，所望の結果を得る． □

Lemma3.2 $\iota \in (0,1]$ を任意にえらんで固定する．
$\iota \leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2 \gtrless 0$) であれば，

$$\begin{cases} \text{任意の } w \in (0, \underline{w}(\iota)] \text{ について, } M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j}), \\ \text{任意の } w \in (\underline{w}(\iota), \bar{w}(\iota)) \text{ について, } S(\iota, w, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j}) \text{ かつ } M(\iota, w, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j}), \\ \text{任意の } w \geqslant \bar{w}(\iota) \text{ について, } S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j}) \end{cases}$$

である． $\iota \gtrless R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2 \gtrless 0$) であれば，

$$\begin{cases} \text{任意の } w \in (0, \bar{w}(\iota)] \text{ について, } M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j}), \\ \text{任意の } w \in (\bar{w}(\iota), \underline{w}(\iota)) \text{ について, } M(\iota, w, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j}) \text{ かつ } S(\iota, w, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j}), \\ \text{任意の } w \geqslant \underline{w}(\iota) \text{ について } S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j}) \end{cases}$$

である．

Proof. $\iota \in (0,1]$ を任意にえらんで固定する．
(1) $\iota \leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2 \gtrless 0$) のとき．任意の $w \in (0, \underline{w}(\iota))$ について，

$$\begin{aligned} \log e &= \alpha(\underline{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\underline{j}) \log \frac{R\underline{w}(\iota)}{a} \\ &> \alpha(\underline{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\underline{j}) \log \frac{Rw}{a} \\ &= \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\} + \underline{j} \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\} \\ &\geqslant \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\} + j \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\} \\ &= \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \frac{Rw}{a}, \ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}] \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，2 行目の不等号 (>) は仮定 3.2 より $\beta(\underline{j}) > 0$ を用いている．

また，4 行目の不等号は仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，補題 3.1 より $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} < 1$ となることを用いている．よって，全員都市に行くので，$M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

$w = \underline{w}(\iota)$ のとき，$j(\iota, \underline{w}(\iota), R, e) = \underline{j}$ であり，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} < 1$ である．よって，$M(\iota, \underline{w}(\iota), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

任意の $w \in (\underline{w}(\iota), \bar{w}(\iota))$ について，$S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ か $M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ のいずれかが成り立っているとする（背理法の仮定）．仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} < 1$ である．$S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ だとする．$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1$ なので，$j(\iota, w, R, e) = \bar{j}$ である．すると，

$$\log e \leqslant \alpha(\bar{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\bar{j}) \log \frac{Rw}{a}$$

が成り立つ．$\bar{w}(\iota)$ の定義より，

$$\log e = \alpha(\bar{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\bar{j}) \log \frac{R\bar{w}(\iota)}{a}$$

が成り立つ．仮定 3.2 より $\beta(\bar{j}) > 0$ なので，2 つを合わせると，$\bar{w}(\iota) \leqslant w$ となり，矛盾である．したがって，$M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．いま $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1$ なので，$j(\iota, w, R, e) = \underline{j}$ である．すると，

$$\log e \geqslant \alpha(\underline{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\underline{j}) \log \frac{Rw}{a}$$

が成り立つ．$\underline{w}(\iota)$ の定義より

$$\log e = \alpha(\underline{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\underline{j}) \log \frac{R\underline{w}(\iota)}{a}$$

が成り立つ．仮定 3.2 より $\beta(\underline{j}) > 0$ なので，2 つを合わせると，$\underline{w}(\iota) \geqslant w$ となり，矛盾である．

$w = \bar{w}(\iota)$ のとき，$j(\iota, \bar{w}(\iota), R, e) = \bar{j}$ であり，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} < 1$ である．よって，$S(\iota, \bar{w}(\iota), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

$w > \bar{w}(\iota)$ を任意にとる．補題 3.1 より $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} < 1$ であり，仮定 3.4 より

$b_2 > 0$ なので，$\bar{w}(\iota) < \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ である．よって，$w \in \left(\bar{w}(\iota), \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}\right)$ か $w \geqslant \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ のいずれかが成り立つ．$w \in \left(\bar{w}(\iota), \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}\right)$ のとき．

$$\begin{aligned}
\log e &= \alpha(\bar{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\bar{j}) \log \frac{R\bar{w}(\iota)}{a} \\
&< \alpha(\bar{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\bar{j}) \log \frac{Rw}{a} \\
&= \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\} + \bar{j} \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\} \\
&\leqslant \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\} + j \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\} \\
&= \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \frac{Rw}{a}, \ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 2 行目の不等号 $(<)$ は仮定 3.2 より $\beta(\bar{j}) > 0$ を用いている．また，4 行目の不等号は仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1$ となることを用いている．よって，全員農村に残るので，$S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．$w \geqslant \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ のとき．任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，

$$\begin{aligned}
\alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \frac{Rw}{a} &\geqslant \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \left\{ \frac{R}{a} \times \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R} \right\} \\
&= \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \\
&= \log \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2\beta(j) - b_2\alpha(j)}{b_2}} \\
&= \log \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_2}} > \log e
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 1 行目の不等号は仮定 3.2 より $\beta(j) > 0 \ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ を用いている．また，4 行目の等号は

$$a_2\beta(j) - b_2\alpha(j) = a_2(b_1 + b_2 j) - b_2(a_1 + a_2 j) = a_2b_1 - a_1b_2, \ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$$

を用いている．最後の不等号 $(>)$ は $\iota \lesseqgtr R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$) であり，仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，$e < (R/\iota)^{\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$) であることから成り立つ．したがって，全員農村に残るので，$S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

(2) $\iota \gtrless R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2 \gtrless 0$) のとき．任意の $w>\underline{w}(\iota)$ について，

$$\begin{aligned}
\log e &= \alpha(\underline{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\underline{j})\log\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\\
&< \alpha(\underline{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\underline{j})\log\frac{Rw}{a}\\
&= \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}+\underline{j}\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}\\
&\leqslant \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}+j\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}\\
&= \alpha(j)\log\frac{\iota}{R}+\beta(j)\log\frac{Rw}{a},\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，2 行目の不等号 ($<$) は仮定 3.2 より $\beta(\underline{j})>0$ を用いている．また，4 行目の不等号は仮定 3.4 より $b_2>0$ なので，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} > 1$ となることを用いている．よって，全員農村に残るので，$S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ である．

$w=\underline{w}(\iota)$ のとき，$j(\iota,\underline{w}(\iota),R,e)=\underline{j}$ であり，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}>1$ である．よって，$S(\iota,\underline{w}(\iota),R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ である．

任意の $w\in(\bar{w}(\iota),\underline{w}(\iota))$ について，$M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ か $S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ のいずれかが成り立っているとする（背理法の仮定）．仮定 3.4 より $b_2>0$ なので，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}>1$ である．$M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ だとする．$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}>1$ なので，$j(\iota,w,R,e)=\bar{j}$ である．すると，

$$\log e \geqslant \alpha(\bar{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\bar{j})\log\frac{Rw}{a}$$

が成り立つ．$\bar{w}(\iota)$ の定義より

$$\log e = \alpha(\bar{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\bar{j})\log\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}$$

が成り立つ．仮定 3.2 より $\beta(\bar{j})>0$ なので，2 つを合わせると，$\bar{w}(\iota)\geqslant w$ となり，矛盾である．したがって，$S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ である．いま $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}>1$ なので，

$j(\iota, w, R, e) = \underline{j}$ である．すると，

$$\log e \leqslant \alpha(\underline{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\underline{j}) \log \frac{Rw}{a}$$

が成り立つ．$\underline{w}(\iota)$ の定義より

$$\log e = \alpha(\underline{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\underline{j}) \log \frac{R\underline{w}(\iota)}{a}$$

が成り立つ．仮定 3.2 より $\beta(\underline{j}) > 0$ なので，2 つを合わせると，$\underline{w}(\iota) \leqslant w$ となり，矛盾である．

$w = \bar{w}(\iota)$ のとき，$j(\iota, \bar{w}(\iota), R, e) = \bar{j}$ であり，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} > 1$ である．よって，$M(\iota, \bar{w}(\iota), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

$w \in (0, \bar{w}(\iota))$ を任意にとる．補題 3.1 より $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} > 1$ であり，仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，$\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R} < \bar{w}(\iota)$ である．よって，$w \in \left(0, \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}\right]$ か $w \in \left(\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}, \bar{w}(\iota)\right)$ のいずれかが成り立つ．$w \in \left(0, \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}\right]$ のとき．任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，

$$\begin{aligned}
\alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \frac{Rw}{a} &\leqslant \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \left\{ \frac{R}{a} \times \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R} \right\} \\
&= \alpha(j) \log \frac{\iota}{R} + \beta(j) \log \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \\
&= \log \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2\beta(j) - b_2\alpha(j)}{b_2}} \\
&= \log \left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2}} < \log e
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 1 行目の不等号は仮定 3.2 より $\beta(j) > 0 \ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ を用いている．また最後の不等号 $(<)$ は $\iota \gtrless R/e^{\frac{b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}$ (ただし $a_2 b_1 - a_1 b_2 \gtrless 0$) であり，仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，$e > (R/\iota)^{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2}}$ (ただし $a_2 b_1 - a_1 b_2 \gtrless 0$) であることから成り立つ．したがって，全員都市に行くので，$M(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．$w \in \left(\left(\frac{R}{\iota}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}, \bar{w}(\iota)\right)$

のとき，

$$\begin{aligned}\log e &= \alpha(\bar{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\bar{j})\log\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\\ &> \alpha(\bar{j})\log\frac{\iota}{R}+\beta(\bar{j})\log\frac{Rw}{a}\\ &= \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}+\bar{j}\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}\\ &\geqslant \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}+j\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}\\ &= \alpha(j)\log\frac{\iota}{R}+\beta(j)\log\frac{Rw}{a},\ \forall j\in[\underline{j},\bar{j}]\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし2行目の不等号 $(>)$ は仮定 3.2 より $\beta(\bar{j})>0$ を用いている．また，4行目の不等号は仮定 3.4 より $b_2>0$ なので $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}>1$ となることを用いている．よって，全員都市に行くので，$M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ である． □

Lemma3.3　$\iota\in(0,1]$ を任意にえらんで固定する．$\iota\leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2\geqslant 0$) であれば，$\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}}\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w}=\infty$ である．$\iota\geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2\geqslant 0$) であれば，$\lim_{\substack{w\to\bar{w}(\iota)\\ w>\bar{w}(\iota)}}\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w}=\infty$ である．

Proof. $\iota\in(0,1]$ を任意にえらんで固定する．$\iota\leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2\geqslant 0$) であれば，任意の $w\in(\underline{w}(\iota),\bar{w}(\iota))$ について，仮定 3.4 より $b_2>0$ なので，補題 3.1 より $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}<\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}<1$ である．よって，$S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\hat{j})$，ただし，$\hat{j}=j(\iota,w,R,e)$ である．補題 3.2 より，$S(\iota,w,R,e)\neq(\underline{j},\bar{j})$ かつ $M(\iota,w,R,e)\neq(\underline{j},\bar{j})$ なので，$\hat{j}\in(\underline{j},\bar{j})$ である．よって，

$$\left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{R}\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}c_1^{\mathrm{r}}(j)g(j)dj=\left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{R}\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\iota wg(j)dj=\left(1-\frac{\iota}{R}\right)w\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$$

であるから，

$$\pi(\iota,w)=F\left(\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}g(j)dj\right)-w\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}g(j)dj+\left(1-\frac{\iota}{R}\right)w\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$$

である．仮定 3.1 より g は連続で，仮定 3.7 より F は微分可能なので，したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w} &= \left[F'\left(\int_{\underline{j}}^{\hat{j}} g(j)dj\right)\times g(\hat{j}) - wg(\hat{j}) + \left(1-\frac{\iota}{R}\right)w\frac{\alpha(\hat{j})}{\beta(\hat{j})}g(\hat{j})\right]\frac{\partial\hat{j}}{\partial w}\\ &\quad - \int_{\underline{j}}^{\hat{j}} g(j)dj + \left(1-\frac{\iota}{R}\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj\end{aligned}$$

である．ここで，$\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}}\hat{j} = \underline{j}$ である．よって，仮定 3.7 より $\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}} F'\left(\int_{\underline{j}}^{\hat{j}} g(j)dj\right) = \infty$ であり，仮定 3.1 より $\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}} g(\hat{j}) = g(\underline{j}) > 0$ となる．また，$\hat{j}\in(\underline{j},\bar{j})$ より，

$$\log e = \alpha(\hat{j})\log\frac{\iota}{R} + \beta(\hat{j})\log\frac{Rw}{a}$$

である．これは w に関する恒等式なので，微分すると，

$$\begin{aligned} & 0 = \alpha'(\hat{j})\frac{\partial\hat{j}}{\partial w}\log\frac{\iota}{R} + \beta'(\hat{j})\frac{\partial\hat{j}}{\partial w}\log\frac{Rw}{a} + \beta(\hat{j})\frac{1}{w}\\ \Leftrightarrow\ & \left(a_2\log\frac{\iota}{R} + b_2\log\frac{Rw}{a}\right)\frac{\partial\hat{j}}{\partial w} = -\frac{\beta(\hat{j})}{w}\\ \Leftrightarrow\ & \left(\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}\right)\frac{\partial\hat{j}}{\partial w} = -\frac{\beta(\hat{j})}{w}\end{aligned}$$

である．よって，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \neq 1$ であれば，

$$\frac{\partial\hat{j}}{\partial w} = -\frac{\beta(\hat{j})}{w\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}$$

である．$\underline{w}(\iota) > 0$，補題 3.1 より $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} < 1$ であり，仮定 3.2 より $\beta(\underline{j}) > 0$ なので，

$$\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}}\frac{\partial\hat{j}}{\partial w} = -\frac{\beta(\underline{j})}{\underline{w}(\iota)\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\right\}} > 0$$

である．よって，

$$\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}}\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w} = \infty$$

となる．

$\iota \gtreqless R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtreqless 0$) であれば，任意の $w\in(\bar{w}(\iota),\underline{w}(\iota))$ につい

て，仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} > 1$ である．よって，$S(\iota, w, R, e) = (\hat{j}, \bar{j})$，ただし，$\hat{j} = j(\iota, w, R, e)$ である．補題 3.2 より，$S(\iota, w, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ かつ $M(\iota, w, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ なので，$\hat{j} \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．よって，

$$\pi(\iota, w) = F\left(\int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj\right) - w\int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

である．仮定 3.1 より g は連続で，仮定 3.7 より F は微分可能なので，したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(\iota, w)}{\partial w} = &-\left[F'\left(\int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj\right) \times g(\hat{j}) - wg(\hat{j}) + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \frac{\alpha(\hat{j})}{\beta(\hat{j})} g(\hat{j})\right] \frac{\partial \hat{j}}{\partial w} \\ &- \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj\end{aligned}$$

である．ここで，$\lim_{\substack{w \to \bar{w}(\iota) \\ w > \bar{w}(\iota)}} \hat{j} = \bar{j}$ である．よって，仮定 3.7 より $\lim_{\substack{w \to \bar{w}(\iota) \\ w > \bar{w}(\iota)}} F'\left(\int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj\right) = \infty$ であり，仮定 3.1 より $\lim_{\substack{w \to \bar{w}(\iota) \\ w > \bar{w}(\iota)}} g(\hat{j}) = g(\bar{j}) > 0$ となる．また，$\bar{w}(\iota) > 0$，補題 3.1 より $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2} > 1$ であり，仮定 3.2 より $\beta(\bar{j}) > 0$ なので，

$$\lim_{\substack{w \to \bar{w}(\iota) \\ w > \bar{w}(\iota)}} \frac{\partial \hat{j}}{\partial w} = -\frac{\beta(\bar{j})}{\bar{w}(\iota) \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota)}{a}\right)^{b_2}\right\}} < 0$$

である．よって，

$$\lim_{\substack{w \to \bar{w}(\iota) \\ w > \bar{w}(\iota)}} \frac{\partial \pi(\iota, w)}{\partial w} = \infty$$

となる． □

補題 3.2，3.3 より，次の命題が成り立つ．地主の利潤最大化問題の解の存在はこの節の最後に証明するが，この命題より，地主は正の最大利潤を得ることが分かる．

Proposition3.1　ある $(\iota, w) \in (0, 1] \times \mathbb{R}_{++}$ が存在して，$\pi(\iota, w) > 0$ である．

Proof. 仮定 3.5 より，$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ か $a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ のいずれかである．$0 < \iota < \min(R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}}, 1)$ をとる．

$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ であれば，補題 3.2 より，$M(\iota, \underline{w}(\iota), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．すると，$(\iota, \underline{w}(\iota), R, e)$ のもとで，農村に残る労働者の集合は $\{\underline{j}\}$ か $\emptyset$ なので，$S(\iota, \underline{w}(\iota), R, e) = \emptyset$

となる．よって，$\pi(\iota,\underline{w}(\iota))=0$ である．また，補題 3.3 より，$\lim_{\substack{w\to\underline{w}(\iota)\\ w>\underline{w}(\iota)}}\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w}=\infty$ である．よって，ある $w>\underline{w}(\iota)>0$ が存在して，$\pi(\iota,w)>0$ である．

$a_2b_1-a_1b_2<0$ であれば，補題 3.2 より，$M(\iota,\bar{w}(\iota),R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ である．すると，$(\iota,\bar{w}(\iota),R,e)$ のもとで，農村に残る労働者の集合は $\{\bar{j}\}$ か $\emptyset$ なので，$S(\iota,\bar{w}(\iota),R,e)=\emptyset$ となる．よって，$\pi(\iota,\bar{w}(\iota))=0$ である．また，補題 3.3 より，$\lim_{\substack{w\to\bar{w}(\iota)\\ w>\bar{w}(\iota)}}\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w}=\infty$ である．よって，ある $w>\bar{w}(\iota)>0$ が存在して，$\pi(\iota,w)>0$ である． □

$w=0$ のとき，$S(\iota,0,R,e)=\emptyset$ なので，$\pi(\iota,0)=0$ である．また，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}<1$ のとき，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\leqslant e$ であれば，$\frac{\log e-\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\leqslant 0$ となるので，$\hat{j}=\underline{j}$ である．よって，$M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ となるので，$\pi(\iota,w)=0$ である．また，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}=1$ のとき，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}<e$ であれば，$M(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ である．よって，$\pi(\iota,w)=0$ である．

命題 3.1 より，正の最大利潤が保証されるので，したがって，$(R,e)\in(0,1]^2$ を所与として，利潤最大化問題の解は (i) $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}<1$ かつ $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}>e$，(ii) $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}=1$ かつ $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\geqslant e$，(iii) $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}>1$ を満たす $(\iota,w)\in(0,1]\times\mathbb{R}_{++}$ にあることが分かる．(i)，(ii) あるいは (iii) を満たす $(\iota,w)\in(0,1]\times\mathbb{R}_{++}$ の集合を D とかく．$\pi(\iota,w)$ の定義域を D に限定して，利潤を最大にする (ι,w) の存在を証明する．

Lemma3.4 $(\iota_m,w_m)\in D, m=1,2,\dots$ を $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}=1$ かつ $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}=e$ を満たす $(\iota,w)\in D$ に収束する任意の列とする．$\lim_{m\to\infty}\pi(\iota_m,w_m)\leqslant\pi(\iota,w)$ が成り立つ．

Proof. $(\iota_m,w_m)\in D, m=1,2,\dots$ を $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}=1$ かつ $\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}=e$ を満たす $(\iota,w)\in D$ に収束する任意の列とする．必要であれば部分列をとれば，次の (a)〜(d) のいずれかが成り立つ．

(a)$\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_2}=1\wedge\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_1}>e, m=1,2,\dots$ のとき．$S(\iota_m,w_m,R,e)=(\underline{j},\bar{j}), m=1,2,\dots$ である．

(b)$\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_2}>1\wedge\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_1}\geqslant e, m=1,2,\dots$ のとき．$\frac{\log e-\log\left\{\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_2}\right\}}\leqslant 0, m=1,2,\dots$ となるので，$j(\iota_m,w_m,R,e)=\underline{j}, m=1,2,\dots$ である．よって，$S(\iota_m,w_m,R,e)=(\underline{j},\bar{j}), m=1,2,\dots$ である．

したがって，(a) あるいは (b) であれば，

$$\pi(\iota_m, w_m) = F(n) - w_m n + \left(1 - \frac{\iota_m}{R}\right) w_m \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj, m = 1, 2, \ldots$$

である．よって，仮定 3.6 より，

$$\lim_{m \to \infty} \pi(\iota_m, w_m) = F(n) - wn + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj \leqslant \pi(\iota, w)$$

となる．

(c)$\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_2} > 1 \wedge \left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_1} < e, m = 1, 2, \ldots$のとき．$S(\iota_m, w_m, R, e) = (j(\iota_m, w_m, R, e), \bar{j}), m = 1, 2, \ldots$ なので，

$$\begin{aligned}\pi(\iota_m, w_m) = &F\left(\int_{j(\iota_m, w_m, R, e)}^{\bar{j}} g(j) dj\right) - w_m \int_{j(\iota_m, w_m, R, e)}^{\bar{j}} g(j) dj \\ &+ \left(1 - \frac{\iota_m}{R}\right) w_m \int_{j(\iota_m, w_m, R, e)}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj, m = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

である．$j(\iota_m, w_m, R, e) \in [\underline{j}, \bar{j}], m = 1, 2, \ldots$ なので，その中から収束する部分列を取り出すことができる．記号の節約のために，部分列を $j(\iota_m, w_m, R, e), m = 1, 2, \ldots$ 自身であるとする．$\lim_{m \to \infty} j(\iota_m, w_m, R, e) \in [\underline{j}, \bar{j}]$ なので，よって，仮定 3.6 より，

$$\begin{aligned}\lim_{m \to \infty} \pi(\iota_m, w_m) = &F\left(\int_{\lim_{m \to \infty} j(\iota_m, w_m, R, e)}^{\bar{j}} g(j) dj\right) - w \int_{\lim_{m \to \infty} j(\iota_m, w_m, R, e)}^{\bar{j}} g(j) dj \\ &+ \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\lim_{m \to \infty} j(\iota_m, w_m, R, e)}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj \\ \leqslant &\pi(\iota, w)\end{aligned}$$

となる．

(d)$\left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_2} < 1 \wedge \left(\frac{\iota_m}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw_m}{a}\right)^{b_1} > e, m = 1, 2, \ldots$のとき．$S(\iota_m, w_m, R, e) =$

$(\underline{j}, j(\iota_m, w_m, R, e)), m = 1, 2, \ldots$ なので，

$$\pi(\iota_m, w_m) = F\left(\int_{\underline{j}}^{j(\iota_m, w_m, R, e)} g(j)dj\right) - w_m \int_{\underline{j}}^{j(\iota_m, w_m, R, e)} g(j)dj + \left(1 - \frac{\iota_m}{R}\right) w_m \int_{\underline{j}}^{j(\iota_m, w_m, R, e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj, m = 1, 2, \ldots$$

である．$j(\iota_m, w_m, R, e) \in [\underline{j}, \bar{j}], m = 1, 2, \ldots$ なので，その中から収束する部分列を取り出すことができる．記号の節約のために，部分列を $j(\iota_m, w_m, R, e), m = 1, 2, \ldots$ 自身であるとする．$\lim_{m\to\infty} j(\iota_m, w_m, R, e) \in [\underline{j}, \bar{j}]$ なので，よって，仮定 3.6 より，

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \pi(\iota_m, w_m) &= F\left(\int_{\underline{j}}^{\lim_{m\to\infty} j(\iota_m, w_m, R, e)} g(j)dj\right) - w \int_{\underline{j}}^{\lim_{m\to\infty} j(\iota_m, w_m, R, e)} g(j)dj \\ &\quad + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\underline{j}}^{\lim_{m\to\infty} j(\iota_m, w_m, R, e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\ &\leqslant \pi(\iota, w)\end{aligned}$$

となる． □

Theorem3.1 $\pi(\iota, w)$ の定義域を D に制限する．このとき利潤最大化問題 (3.6) の解 $(\iota(R, e), w(R, e))$ が存在する．

Proof. 任意の $(\iota, w) \in D$ について，

$$\begin{aligned}\pi(\iota, w) &= F\left(\int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj\right) - w \int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{S(\iota,w,R,e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\ &= F\left(\int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj\right) - w \int_{S(\iota,w,R,e)} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj - \frac{\iota}{R} w \int_{S(\iota,w,R,e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\ &\leqslant F\left(\int_{S(\iota,w,R,e)} g(j)dj\right) \\ &\leqslant F(n)\end{aligned}$$

となる．ただし，3 行目の不等号は仮定 3.1 より $g(j) > 0\ \forall j \in (\underline{j}, \bar{j})$ であり，仮定 3.2, 3.3 より $\frac{\alpha(j)}{\beta(j)} \in (0, 1)\ \forall j \in (\underline{j}, \bar{j})$ であることを用いている．また，4 行目の不等号は仮定 3.7 より F が増加関数であることを用いている．よって，$\{\pi(\iota, w) \in \mathbb{R} \mid (\iota, w) \in D\}$ は上に有界である．この集合は非空なので，よって，上限が存在する．それを s とか

く．命題 3.1 より，$s > 0$ である．

$s - 1/m, m = 1, 2, \ldots$ は $\{\pi(\iota, w) \in \mathbb{R} \mid (\iota, w) \in D\}$ の上界ではない．よって，ある $(\iota_m, w_m) \in D, m = 1, 2, \ldots$ が存在して，

$$s - 1/m < \pi(\iota_m, w_m)$$

である．

$y_m \equiv \int_{S(\iota_m, w_m, R, e)} g(j)dj, m = 1, 2, \ldots$ とおくと，$y_m \in [0, n], m = 1, 2, \ldots$ なので，$y_m, m = 1, 2, \ldots$ には収束する部分列 $y_{m(i)}, i = 1, 2, \ldots$ がある．$m_1(i) \equiv m(i), i = 1, 2, \ldots$ とおく． 対応する $(\iota_m, w_m) \in D, m = 1, 2, \ldots$ の部分列を $(\iota_{m_1(i)}, w_{m_1(i)}), i = 1, 2, \ldots$ とかく．$s - 1/m_1(i) < \pi(\iota_{m_1(i)}, w_{m_1(i)}) \leqslant s, i = 1, 2, \ldots$ であるから，

$$s = \lim_{i \to \infty} \pi(\iota_{m_1(i)}, w_{m_1(i)})$$

である．$\iota_{m_1(i)} \in (0, 1], i = 1, 2, \ldots$ なので，収束する部分列 $\iota_{m(i(k))}, k = 1, 2, \ldots$ がある．$m_2(k) \equiv m(i(k)), k = 1, 2, \ldots$ とおく．対応する $w_{m_1(i)}, i = 1, 2, \ldots$ の部分列を $w_{m_2(k)}, k = 1, 2, \ldots$ とかく．

$$w_{m_2(k)} \int_{S(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}, R, e)} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

かつ

$$\frac{\iota_{m_2(k)}}{R} w_{m_2(k)} \int_{S(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}, R, e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

である．

$w_{m_2(k)}, k = 1, 2, \ldots$ が発散するとする（背理法の仮定）．(a) $\iota_{m_2(k)} \to 0(\text{as } k \to \infty)$，あるいは (b) $\iota_{m_2(k)} \to \hat{\iota} \in (0, 1](\text{as } k \to \infty)$ のいずれかが成り立つ．

(a) $\iota_{m_2(k)} \to 0(\text{as } k \to \infty)$ のとき．(a-1) $\int_{S(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}, R, e)} g(j)dj \to 0(\text{as } k \to \infty)$，あるいは (a-2) $\int_{S(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}, R, e)} g(j)dj \to y \in (0, n](\text{as } k \to \infty)$ のいずれかが成り立つ．

(a-1) $\int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} g(j)dj \to 0(\text{as } k \to \infty)$ のとき．(4.10) と (4.11) より，

$$\begin{aligned}
&\pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \\
&= F\left(\int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} g(j)dj\right) - w_{m_2(k)} \int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj \\
&\quad - \frac{\iota_{m_2(k)}}{R} w_{m_2(k)} \int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\
&\leqslant F\left(\int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} g(j)dj\right),\ k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

である．仮定 3.7 より F は連続であり $F(0) = 0$ なので，よって，

$$0 < s = \lim_{k\to\infty} \pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant 0$$

となり，矛盾である．

(a-2) $\int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} g(j)dj \to y \in (0, n](\text{as } k \to \infty)$ のとき．(4.11) より，

$$\begin{aligned}
\pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant F&\left(\int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} g(j)dj\right) \\
&- w_{m_2(k)} \int_{S(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)},R,e)} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj,\ k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

である．よって，

$$s = \lim_{k\to\infty} \pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant -\infty$$

となり，矛盾である．

(b) $\iota_{m_2(k)} \to \hat{\iota} \in (0, 1](\text{as } k \to \infty)$ のとき．$\iota_{m_2(k)} w_{m_2(k)} \to \infty(\text{as } k \to \infty)$ である．列

$$\left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)} \iota_{m_2(k)} w_{m_2(k)}\right)^{\alpha(j)} \left(\frac{\beta(j) - \alpha(j)}{\beta(j)} w_{m_2(k)}\right)^{\beta(j)-\alpha(j)},\ k = 1, 2, \ldots$$

を考える．それは労働者 j が農村に残ることで得る効用の列である．任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，仮定 3.2 より $\alpha(j) > 0, \beta(j) > 0$，仮定 3.3 より $\beta(j) - \alpha(j) > 0$ なので，$k \to \infty$ とすれば，$\left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)} \iota_{m_2(k)} w_{m_2(k)}\right)^{\alpha(j)} \left(\frac{\beta(j)-\alpha(j)}{\beta(j)} w_{m_2(k)}\right)^{\beta(j)-\alpha(j)} \to \infty$ となる．一方，労働者 j が都市に行くことで得る期待効用の列は定数列である．よって，

$\int_{S(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}, R, e)} g(j)dj \to n(\text{as } k \to \infty)$ となる．よって，

$$s = \lim_{k \to \infty} \pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) = -\infty$$

となり，矛盾である．

したがって，$w_{m_2(k)}, k = 1, 2, \ldots$ は発散しない．したがって，ある $\hat{w} > 0$ が存在して，どのような番号 k を選んでも，k 以上のある番号 k' について，$w_{m_2(k')} < \hat{w}$ が成立する．したがって，どのような番号 t についても $w_{m(i(k(t)))} < \hat{w}$ となるような $w_{m_2(k)}, k = 1, 2, \ldots$ の部分列 $w_{m(i(k(t)))}, t = 1, 2, \ldots$ をとることができる．$m_3(t) \equiv m(i(k(t))), t = 1, 2, \ldots$ とおく．$w_{m_3(t)}, t = 1, 2, \ldots$ は有界なので，収束する部分列 $w_{m(i(k(t(l))))}, l = 1, 2, \ldots$ がある．$m_4(l) \equiv m(i(k(t(l)))), l = 1, 2, \ldots$ とおく．その極限を w^* とかく．(i) $\iota_{m_4(l)} \to 0(\text{as } l \to \infty)$，あるいは (ii) $\iota_{m_4(l)} \to \iota^* \in (0, 1](\text{as } l \to \infty)$ のいずれかが成り立つ．

(i) $\iota_{m_4(l)} \to 0(\text{as } l \to \infty)$ のとき．$\iota_{m_4(l)} w_{m_4(l)} \to 0(\text{as } l \to \infty)$ である．労働者 j が農村に残ることで得る効用の列

$$\left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)} \iota_{m_4(l)} w_{m_4(l)}\right)^{\alpha(j)} \left(\frac{\beta(j) - \alpha(j)}{\beta(j)} w_{m_4(l)}\right)^{\beta(j) - \alpha(j)}, \ l = 1, 2, \ldots$$

を考える．任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，仮定 3.2 より $\alpha(j) > 0, \beta(j) > 0$ なので，$l \to \infty$ とすれば，$\left(\frac{\alpha(j)}{\beta(j)} \iota_{m_4(l)} w_{m_4(l)}\right)^{\alpha(j)} \left(\frac{\beta(j) - \alpha(j)}{\beta(j)} w_{m_4(l)}\right)^{\beta(j) - \alpha(j)} \to 0$ となる．一方，労働者 j が都市に行くことで得る期待効用の列は正の定数列である．よって，$\int_{S(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)}, R, e)} g(j)dj \to 0(\text{as } l \to \infty)$ となる．よって，

$$0 < s = \lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)}) = 0$$

となり，矛盾である．

したがって，(ii) $\iota_{m_4(l)} \to \iota^* \in (0, 1](\text{as } l \to \infty)$ である．$\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} = 1$ かつ $\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_1} = e$ であれば，補題 3.4 から，

$$\lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)}) \leqslant \pi(\iota^*, w^*)$$

である．そうでなければ，$\pi(\iota,w),(\iota,w)\in D$ は連続なので，

$$\lim_{l\to\infty}\pi(\iota_{m_4(l)},w_{m_4(l)})=\pi(\iota^*,w^*)$$

である．したがって，

$$s=\lim_{l\to\infty}\pi(\iota_{m_4(l)},w_{m_4(l)})\leqslant\pi(\iota^*,w^*)$$

である．よって，$s=\pi(\iota^*,w^*)$ は (ι^*,w^*) によって達成される最大値である．　□

3.3　最適な連結契約での利子率と市場利子率の乖離

前節では地主の利潤を最大にするような連結契約 $(\iota(R,e),w(R,e))$ が存在することを示した．最適な連結契約で地主が設定する利子率は市場利子率より高くなるのか，低くなるのか，あるいは同じなのか．この節ではこれについて考察する．記号の節約のために，この節では，$\iota(R,e),w(R,e),j(\iota(R,e),w(R,e),R,e)$ をそれぞれ $\iota^*,w^*,\hat{j}^*$ とかく．

Lemma3.5　$\iota\in(0,1]$ を任意にえらんで固定する．$\iota\leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2\geqslant0$) であれば，任意の $w>\bar{w}(\iota)$ について $\pi(\iota,w)<\pi(\iota,\bar{w}(\iota))$ である．$\iota\geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2\geqslant0$) であれば，任意の $w>\underline{w}(\iota)$ について $\pi(\iota,w)<\pi(\iota,\underline{w}(\iota))$ である．

Proof. $\iota\in(0,1]$ を任意にえらんで固定する．$\iota\leqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1-a_1b_2\geqslant0$) であれば，補題 3.2 より，$S(\iota,\bar{w}(\iota),R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ であり，任意の $w>\bar{w}(\iota)$ について $S(\iota,w,R,e)=(\underline{j},\bar{j})$ が成り立つ．仮定 3.1 より $g(j)>0\ \forall j\in(\underline{j},\bar{j})$ であり，仮定 3.2, 3.3 より $\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\in(0,1)\ \forall j\in(\underline{j},\bar{j})$ なので，したがって，

$$\begin{aligned}\pi(\iota,w)&=F(n)-w\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj-\frac{\iota}{R}w\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj\\&<F(n)-\bar{w}(\iota)\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj-\frac{\iota}{R}\bar{w}(\iota)\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj\\&=\pi(\iota,\bar{w}(\iota))\end{aligned}$$

となる．$\iota \gtrless R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$) であれば，補題 3.2 より，$S(\iota, \underline{w}(\iota), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ であり，任意の $w > \underline{w}(\iota)$ について $S(\iota, w, R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ が成り立つ．仮定 3.1 より $g(j) > 0\ \forall j \in (\underline{j}, \bar{j})$ であり，仮定 3.2，3.3 より $\frac{\alpha(j)}{\beta(j)} \in (0,1)\ \forall j \in (\underline{j}, \bar{j})$ なので，したがって，

$$
\begin{aligned}
\pi(\iota, w) &= F(n) - w\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj - \frac{\iota}{R}w\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj \\
&< F(n) - \underline{w}(\iota)\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj - \frac{\iota}{R}\underline{w}(\iota)\int_{\underline{j}}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj \\
&= \pi(\iota, \underline{w}(\iota))
\end{aligned}
$$

となる．□

Lemma3.6 $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ であれば，任意の $x \in [\underline{j}, \bar{j})$ について，$\int_x^{\bar{j}} g(j)dj \lessgtr \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$ である．

Proof. $\phi(x) = \int_x^{\bar{j}} g(j)dj - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj, x \in [\underline{j}, \bar{j}]$ とおく．仮定 3.1 より g は連続なので，ϕ は微分可能であり，任意の $x \in (\underline{j}, \bar{j})$ について，

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) &= -g(x) - \frac{\beta'(x)\alpha(x) - \beta(x)\alpha'(x)}{(\alpha(x))^2}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \times \left(-\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}g(x)\right) \\
&= -\frac{b_2\alpha(x) - \beta(x)a_2}{(\alpha(x))^2}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj \\
&= \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{(\alpha(x))^2}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj
\end{aligned}
$$

である．仮定 3.1，3.2 より，$\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj > 0\ \forall x \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．よって，$a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ であれば，$\phi'(x) \gtrless 0\ \forall x \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．ϕ は連続なので，よって，$a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ であれば，任意の $x \in [\underline{j}, \bar{j})$ について，

$$
\int_x^{\bar{j}} g(j)dj - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj = \phi(x) \lessgtr \phi(\bar{j}) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{\bar{j}} g(j)dj \lessgtr \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\int_x^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj
$$

となる．□

Proposition3.2 $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，

$$\begin{cases} (\text{あ})\min(R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, 1) > \iota^* > R, \\ (\text{い})R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} > 1 = \iota^* > R, \\ (\text{う})R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} > 1 = \iota^* = R, \\ (\text{え})1 \geqslant \iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} > R, \\ (\text{お})1 \geqslant \iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} = R, \\ (\text{か})\min(1, R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) > \iota^* = R, \\ (\text{き})\min(1, R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \geqslant R > \iota^*, \end{cases}$$

のいずれかが成り立つ．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ のとき

$$\begin{cases} (\text{ア})1 \geqslant R > \iota^* > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, \\ (\text{イ})\iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} < R \leqslant 1, \\ (\text{ウ})\iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} = R \leqslant 1 \\ (\text{エ})1 > \iota^* > R \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, \\ (\text{オ})1 > \iota^* = R > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, \\ (\text{カ})1 = \iota^* > R \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, \\ (\text{キ})1 = \iota^* = R > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, \end{cases}$$

のいずれかが成り立つ．

Proof. $\iota^* \gtreqless R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtreqless 0$) だとする（背理法の仮定）．補題 3.2，3.3，3.5 より，$w^* \in (\bar{w}(\iota^*), \underline{w}(\iota^*)]$ である．

$w^* \in (\bar{w}(\iota^*), \underline{w}(\iota^*))$ のとき．仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，補題 3.1 より $\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} > \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\bar{w}(\iota^*)}{a}\right)^{b_2} > 1$ である．補題 3.2 より，$M(\iota^*, w^*, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ かつ $S(\iota^*, w^*, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ なので，$\hat{j}^* \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．すると，利潤最大化問題 (3.6) の解 (ι^*, w^*) は

$$\max_{(\iota,w)\in D_1} \pi(\iota, w) = F\left(\int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj\right) - w\int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j)dj + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

の解でもある．ただし $D_1 \equiv \{(\iota, w) \in D \mid \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > 1 \ \wedge \ \hat{j} \in (\underline{j}, \bar{j})\}$ である．仮定 3.1 より g は連続であり，仮定 3.7 より F は微分可能なので，π は微分可能であ

る．すると，$\iota^* \leqslant 1, w^*$ は1階条件

$$\frac{\partial \pi(\iota, w)}{\partial \iota} = \lambda \text{ かつ } \frac{\partial \pi(\iota, w)}{\partial w} = 0$$

を満たす．ただし $\lambda \geqslant 0$ はラグランジュ乗数である．$\iota^* < 1$ か $\iota^* = 1$ かで場合分けをする．

$\iota^* < 1$ のとき．相補スラック条件より，$\lambda = 0$ である．よって，1階条件を書き直すと，(ι^*, w^*) は

$$\frac{\partial \pi}{\partial \hat{j}} \times \frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} = \frac{1}{R} w \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj \text{ かつ } \frac{\partial \pi}{\partial \hat{j}} \times \frac{\partial \hat{j}}{\partial w} = \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} g(j) dj - \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) \int_{\hat{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj \tag{3.9}$$

を満たす．ここで，$\hat{j} \in (\underline{j}, \bar{j})$ より，

$$\log e = \alpha(\hat{j}) \log \frac{\iota}{R} + \beta(\hat{j}) \log \frac{Rw}{a}$$

である．これは ι に関する恒等式なので，微分すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha'(\hat{j}) \frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} \log \frac{\iota}{R} + \alpha(\hat{j}) \frac{1}{\iota} + \beta'(\hat{j}) \frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} \log \frac{Rw}{a} \\ \Leftrightarrow & \left(a_2 \log \frac{\iota}{R} + b_2 \log \frac{Rw}{a} \right) \frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} = -\frac{\alpha(\hat{j})}{\iota} \\ \Leftrightarrow & \left(\log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\} \right) \frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} = -\frac{\alpha(\hat{j})}{\iota} \end{aligned}$$

であるから，$\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \neq 1$ であれば，

$$\frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} = -\frac{\alpha(\hat{j})}{\iota \log \left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}}$$

である．$\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} > 1$ であり，仮定 3.1，3.2，3.3 より，$\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} g(j)dj - \left(1 - \frac{\iota^*}{R}\right) \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj > 0$ なので，(3.9) を書き直すと

$$\frac{-\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\iota^* \log \left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}}}{-\frac{\beta(\hat{j}^*)}{w^* \log \left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}}} = \frac{\frac{\partial j(\iota^*, w^*, R, e)}{\partial \iota}}{\frac{\partial j(\iota^*, w^*, R, e)}{\partial w}} = \frac{\frac{1}{R} w^* \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj}{\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} g(j) dj - \left(1 - \frac{\iota^*}{R}\right) \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj} \tag{3.10}$$

となる．

$\iota^* = 1$ のとき．$\lambda \geqslant 0$ なので，1 階条件を書き直すと

$$\frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial \iota} \geqslant 0 \text{ かつ } \frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} = 0$$

である．$\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} > 1$ であり，仮定 3.1，3.2，3.3 より $\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} g(j)dj - \left(1-\frac{1}{R}\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj >$ 0 なので，すぐ上の 1 階条件から

$$\frac{-\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\log\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}}}{-\frac{\beta(\hat{j}^*)}{w^* \log\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}}} \geqslant \frac{\frac{1}{R} w^* \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} g(j)dj - \left(1-\frac{1}{R}\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} \tag{3.11}$$

となる．

$w^* = \underline{w}(\iota^*)$ のとき．$\hat{j}^* = \underline{j}$ である．補題 3.1 より $\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} = \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{R\underline{w}(\iota^*)}{a}\right)^{b_2} >$ 1 である．すると，利潤最大化問題 (2.5) の解 (ι^*, w^*) は

$$\max_{(\iota,w)\in D_2} \pi(\iota, w) = F(n) - wn + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

の解でもある．ただし

$$\begin{aligned} D_2 &\equiv \left\{(\iota, w) \in D \;\middle|\; \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > 1 \;\wedge\; \hat{j} = \underline{j}\right\} \\ &= \left\{(\iota, w) \in D \;\middle|\; \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} > 1 \;\wedge\; \frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}} \leqslant \underline{j}\right\} \end{aligned}$$

である．ラグランジュ関数は

$$L(\iota, w) = \lambda_0 \pi(\iota, w) + \lambda_1(1 - \iota) + \lambda_2\left(\underline{j} - \frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)$$

である．1 階条件は

$$\lambda_0 \frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial \iota} - \lambda_1 - \lambda_2 \times \frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(\iota^*, w^*)}{\partial \iota} = 0$$

$$\lambda_0 \frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} - \lambda_2 \times \frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(\iota^*, w^*)}{\partial w} = 0$$

である．仮定 3.1，3.2，3.3 より，

$$\frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} = -n + \left(1 - \frac{\iota^*}{R}\right) \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j) dj < 0$$

なので，背理法を使って $\lambda_2 = 0$ だとすると，すぐ上で求めた 1 階条件より $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ である．乗数がオールゼロとなり，これは非ゼロ条件に矛盾である．したがって，$\lambda_2 > 0$ である．よって，相補スラック条件より，

$$\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}} = \underline{j}$$

である．すると，

$$\frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(\iota^*, w^*)}{\partial \iota} = -\frac{a_1 + a_2 \underline{j}}{\iota^* \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}} = -\frac{\alpha(\underline{j})}{\iota^* \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}} < 0$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(\iota^*, w^*)}{\partial w} = -\frac{b_1 + b_2 \underline{j}}{w^* \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}} = -\frac{\beta(\underline{j})}{w^* \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}} < 0$$

である．よって，1 階条件より $\lambda_0 > 0$ である．$\lambda_0 > 0$ なので $\lambda_0 = 1$ と設定して構わない．$\iota^* < 1$ か $\iota^* = 1$ かで場合分けをする．

$\iota^* < 1$ のとき．相補スラック条件より，$\lambda_1 = 0$ である．$\frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} < 0$ なので，した

がって，1 階条件を書き直すと，

$$\frac{\frac{\partial \pi(\iota^*,w^*)}{\partial \iota}}{\frac{\partial \pi(\iota^*,w^*)}{\partial w}} = \frac{\lambda_2 \times \frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(\iota^*,w^*)}{\partial \iota}}{\lambda_2 \times \frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(\iota^*,w^*)}{\partial w}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{R} w^* \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{-\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj - \frac{\iota^*}{R} \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} = \frac{-\frac{\alpha(\underline{j})}{\iota^* \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}}}{-\frac{\beta(\underline{j})}{w^* \log\left\{ \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}}} \tag{3.12}$$

となる．

$\iota^* = 1$ のとき．$\lambda_1 \geqslant 0$ なので 1 階条件を書き直すと，

$$\frac{\partial \pi(1,w^*)}{\partial \iota} - \lambda_2 \times \frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(1,w^*)}{\partial \iota} \geqslant 0$$

$$\frac{\partial \pi(1,w^*)}{\partial w} - \lambda_2 \times \frac{\partial \left(\frac{\log e - \log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1} \right\}}{\log\left\{ \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} \right\}} \right)(1,w^*)}{\partial w} = 0$$

である．$\frac{\partial \pi(1,w^*)}{\partial w} < 0$ なので，すぐ上の 1 階条件から，

$$\frac{-\frac{1}{R} w^* \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{-\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj - \frac{1}{R} \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} \leqslant \frac{-\frac{\alpha(\underline{j})}{\log\left\{ \left(\frac{1}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}}}{-\frac{\beta(\underline{j})}{w^* \log\left\{ \left(\frac{1}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} \right\}}} \tag{3.13}$$

となる．

したがって，$\iota^* < 1$ のとき，(3.10) と (3.12) より，

$$\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\beta(\hat{j}^*)} \left(\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj + \frac{\iota^*}{R} \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \right) = \frac{\iota^*}{R} \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

となる．ただし，$\hat{j}^* \in [\underline{j}, \bar{j})$ である．書き直すと，

$$\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj = \frac{\iota^*}{R} \left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)} - 1 \right) \int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

である．仮定 3.1，3.2，3.3 より，$\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj>0$ なので，よって，

$$\frac{\iota^*}{R}=\frac{\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}$$

となる．仮定 3.4 より $b_2>0$ なので，$a_2b_1-a_1b_2>0$ のとき $1>\iota^*>R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}\geqslant R$ である．$a_2b_1-a_1b_2<0$ のとき $\iota^*<R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}\leqslant R\leqslant 1$ である．よって，$a_2b_1-a_1b_2\gtrless 0$ のとき，すぐ上の等式の左辺 $\gtrless 1$，したがって右辺 $\gtrless 1$ である．$\hat{j}^*\in[\underline{j},\bar{j})$ より，補題 3.6 と併せて，

$$1\gtrless\frac{\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}\gtrless 1$$

となり，矛盾である．

$\iota^*=1$ のとき，(3.11) と (3.13) より，

$$\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\beta(\hat{j}^*)}\left(\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj+\frac{1}{R}\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj\right)\geqslant\frac{1}{R}\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$$

となる．ただし，$\hat{j}^*\in[\underline{j},\bar{j})$ である．書き直すと，

$$\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj\geqslant\frac{1}{R}\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$$

である．仮定 3.1，3.2，3.3 より，$\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj>0$ なので，よって，

$$\frac{\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}\geqslant\frac{1}{R}$$

となる．仮定 3.4 より $b_2>0$ なので，$1=\iota^*>R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}\geqslant R$(ただし $a_2b_1-a_1b_2>0$) となる．よって，すぐ上の不等式の右辺 >1，したがって左辺 >1 である．$\hat{j}^*\in[\underline{j},\bar{j})$ より，補題 3.6 と併せて，

$$1>\frac{\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\hat{j}^*}^{\bar{j}}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}>1$$

となり，矛盾である． □

Lemma3.7 $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ であれば，任意の $x \in (\underline{j}, \bar{j}]$ について，$\int_{\underline{j}}^{x} g(j)dj \gtrless \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$ である．

Proof. $\psi(x) = \int_{\underline{j}}^{x} g(j)dj - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj, x \in [\underline{j}, \bar{j}]$ とおく．仮定 3.1 より g は連続なので，ψ は微分可能であり，任意の $x \in (\underline{j}, \bar{j})$ について，

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= g(x) - \frac{\beta'(x)\alpha(x) - \beta(x)\alpha'(x)}{(\alpha(x))^2} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \times \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} g(x) \\
&= -\frac{b_2\alpha(x) - \beta(x)a_2}{(\alpha(x))^2} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\
&= \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{(\alpha(x))^2} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj
\end{aligned}$$

である．仮定 3.1，3.2 より，$\int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj > 0 \; \forall x \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．よって，$a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ であれば，$\psi'(x) \gtrless 0 \; \forall x \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．ψ は連続なので，よって，$a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ であれば，任意の $x \in (\underline{j}, \bar{j}]$ について，

$$\int_{\underline{j}}^{x} g(j)dj - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj = \psi(x) \gtrless \psi(\underline{j}) = 0 \Leftrightarrow \int_{\underline{j}}^{x} g(j)dj \gtrless \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \int_{\underline{j}}^{x} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

となる． □

Proposition3.3 $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，

$$\begin{cases}
(\text{あ}) \min(R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}}, 1) > \iota^* > R, \\
(\text{い}) R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} > 1 = \iota^* > R, \\
(\text{う}) R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} > 1 = \iota^* = R, \\
(\text{え}) 1 \geqslant \iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} > R, \\
(\text{お}) 1 \geqslant \iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} = R
\end{cases}$$

のいずれかが成り立つ．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ のとき，

$$\begin{cases} (\text{ア})1 \geqslant R > \iota^* > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, \\ (\text{イ})\iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} < R \leqslant 1, \\ (\text{ウ})\iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} = R \leqslant 1 \end{cases}$$

のいずれかが成り立つ．

Proof. 仮定 3.4 のもとで，$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，

$$(\min(1, R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) > \iota^* = R) \vee (\min(1, R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \geqslant R > \iota^*) \tag{3.14}$$

は成り立っているとする（背理法の仮定）．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ のとき，

$$\begin{cases} (1 > \iota^* > R \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \vee (1 > \iota^* = R > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \vee \\ (1 = \iota^* > R \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \vee (1 = \iota^* = R > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \end{cases} \tag{3.15}$$

が成り立たっているとする（背理法の仮定）．$\iota^* \lesseqgtr R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtreqless 0$) である．すると，補題 3.2，3.3，3.5 より，$w^* \in (\underline{w}(\iota^*), \bar{w}(\iota^*)]$ である．

$w^* \in (\underline{w}(\iota^*), \bar{w}(\iota^*))$ のとき．仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，補題 3.1 より $\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} < \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{R\bar{w}(\iota^*)}{a}\right)^{b_2} < 1$ である．また，補題 3.2 より，$M(\iota^*, w^*, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ かつ $S(\iota^*, w^*, R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ である．よって，$\hat{j}^* \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．すると，利潤最大化問題 (3.6) の解 (ι^*, w^*) は

$$\max_{(\iota,w)\in D_3} \pi(\iota, w) = F\left(\int_{\underline{j}}^{\hat{j}} g(j)dj\right) - w\int_{\underline{j}}^{\hat{j}} g(j)dj + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\underline{j}}^{\hat{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj,$$

の解でもある．ただし $D_3 \equiv \{(\iota, w) \in D \mid \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1 \ \wedge \ \hat{j} \in (\underline{j}, \bar{j})\}$ である．仮定 3.1 より g は連続であり，仮定 3.7 より F は微分可能なので，π は微分可能である．すると，$\iota^* \leqslant 1, w^*$ は 1 階条件

$$\frac{\partial \pi(\iota, w)}{\partial \iota} = \lambda \text{ かつ } \frac{\partial \pi(\iota, w)}{\partial w} = 0$$

を満たす．ただし $\lambda \geqslant 0$ はラグランジュ乗数である．$\iota^* < 1$ か $\iota^* = 1$ で場合分けをす

る．

$\iota^* < 1$ のとき．相補スラック条件より，$\lambda = 0$ である．よって，1 階条件を書き直すと，(ι^*, w^*) は

$$\frac{\partial \pi}{\partial \hat{j}} \times \frac{\partial \hat{j}}{\partial \iota} = \frac{1}{R} w \int_{\underline{j}}^{\hat{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \text{ かつ } \frac{\partial \pi}{\partial \hat{j}} \times \frac{\partial \hat{j}}{\partial w} = \int_{\underline{j}}^{\hat{j}} g(j)dj - \Big(1 - \frac{\iota}{R}\Big) \int_{\underline{j}}^{\hat{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

を満たす．$\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} < 1$ であり，仮定 3.1，3.2，3.3 より $\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} g(j)dj - \left(1 - \frac{\iota^*}{R}\right) \int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj > 0$ なので，すぐ上の 1 階条件から，

$$\frac{-\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\iota^* \log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}}}{-\frac{\beta(\hat{j}^*)}{w^* \log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}}} = \frac{\frac{\partial j}{\partial \iota}(\iota^*, w^*, R, e)}{\frac{\partial j}{\partial w}(\iota^*, w^*, R, e)} = \frac{\frac{1}{R} w^* \int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} g(j)dj - \left(1 - \frac{\iota^*}{R}\right) \int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} \tag{3.16}$$

となる．

$\iota^* = 1$ のとき．$\lambda \geqslant 0$ なので，1 階条件を書き直すと

$$\frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial \iota} \geqslant 0 \text{ かつ } \frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} = 0$$

である．$\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} < 1$ であり，仮定 3.1，3.2，3.3 より $\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} g(j)dj - \left(1 - \frac{1}{R}\right) \int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj > 0$ なので，すぐ上の 1 階条件から，

$$\frac{-\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\log\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}}}{-\frac{\beta(\hat{j}^*)}{w^* \log\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}}} \geqslant \frac{\frac{1}{R} w^* \int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} g(j)dj - \left(1 - \frac{1}{R}\right) \int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} \tag{3.17}$$

となる．

$w^* = \bar{w}(\iota^*)$ のとき．$\hat{j}^* = \bar{j}$ である．補題 3.1 より $\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2} = \left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{R\bar{w}(\iota^*)}{a}\right)^{b_2} < 1$ である．すると，利潤最大化問題 (3.6) の解 (ι^*, w^*) は

$$\max_{(\iota, w) \in D_4} \pi(\iota, w) = F(n) - wn + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) w \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

の解でもある．ただし

$$\begin{aligned}D_4 &\equiv \left\{(\iota, w) \in D \;\middle|\; \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1 \;\wedge\; \hat{j} = \bar{j}\right\} \\ &= \left\{(\iota, w) \in D \;\middle|\; \left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2} < 1 \;\wedge\; \frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}} \geqslant \bar{j}\right\}\end{aligned}$$

である．ラグランジュ関数は

$$L(\iota, w) = \lambda_0 \pi(\iota, w) + \lambda_1(1-\iota) + \lambda_2\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}} - \bar{j}\right)$$

である．1階条件は

$$\lambda_0\frac{\partial\pi(\iota^*, w^*)}{\partial\iota} - \lambda_1 + \lambda_2 \times \frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(\iota^*, w^*)}{\partial\iota} = 0$$

$$\lambda_0\frac{\partial\pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} + \lambda_2 \times \frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(\iota^*, w^*)}{\partial w} = 0$$

である．仮定 3.1，3.2，3.3 より，$\frac{\partial\pi(\iota^*,w^*)}{\partial w} < 0$ なので，背理法を使って $\lambda_2 = 0$ だとすると，すぐ上で求めた1階条件より $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ である．乗数がオールゼロとなり，これは非ゼロ条件に矛盾である．したがって，$\lambda_2 > 0$ である．よって，相補スラック条件より，

$$\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}} = \bar{j}$$

である．すると，

$$\frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(\iota^*, w^*)}{\partial\iota} = -\frac{\alpha(\bar{j})}{\iota^*\log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}} > 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(\iota^*, w^*)}{\partial w} = -\frac{\beta(\bar{j})}{w^*\log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}} > 0$$

である．よって，1階条件より $\lambda_0 > 0$ である．$\lambda_0 > 0$ なので $\lambda_0 = 1$ と設定して構わ

ない．$\iota^* < 1$ か $\iota^* = 1$ かで場合分けをする．

$\iota^* < 1$ のとき．相補スラック条件より，$\lambda_1 = 0$ である．$\frac{\partial \pi(\iota^*, w^*)}{\partial w} < 0$ なので，したがって，1 階条件を書き直すと

$$\frac{\frac{\partial \pi(\iota^*,w^*)}{\partial \iota}}{\frac{\partial \pi(\iota^*,w^*)}{\partial w}} = \frac{-\lambda_2 \times \frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(\iota^*,w^*)}{\partial \iota}}{-\lambda_2 \times \frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(\iota^*,w^*)}{\partial w}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{R}w^* \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{-\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj - \frac{\iota^*}{R}\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} = \frac{-\frac{\alpha(\bar{j})}{\iota^* \log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}}}{-\frac{\beta(\bar{j})}{w^* \log\left\{\left(\frac{\iota^*}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}}} \tag{3.18}$$

となる．

$\iota^* = 1$ のとき．$\lambda_1 \geqslant 0$ なので 1 階条件を書き直すと，

$$\frac{\partial \pi(1,w^*)}{\partial \iota} + \lambda_2 \times \frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(1,w^*)}{\partial \iota} \geqslant 0$$

$$\frac{\partial \pi(1,w^*)}{\partial w} + \lambda_2 \times \frac{\partial\left(\frac{\log e - \log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_1}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_1}\right\}}{\log\left\{\left(\frac{\iota}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw}{a}\right)^{b_2}\right\}}\right)(1,w^*)}{\partial w} = 0$$

である．$\frac{\partial \pi(1,w^*)}{\partial w} < 0$ なので，すぐ上の 1 階条件から，

$$\frac{-\frac{1}{R}w^* \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj}{-\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj - \frac{1}{R}\int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj} \leqslant \frac{-\frac{\alpha(\bar{j})}{\log\left\{\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}}}{-\frac{\beta(\bar{j})}{w^* \log\left\{\left(\frac{1}{R}\right)^{a_2}\left(\frac{Rw^*}{a}\right)^{b_2}\right\}}} \tag{3.19}$$

となる．

したがって，$\iota^* < 1$ のとき，(3.16) と (3.18) より，

$$\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\beta(\hat{j}^*)}\left(\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj + \frac{\iota^*}{R}\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj\right) = \frac{\iota^*}{R}\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

となる．ただし，$\hat{j}^* \in (\underline{j}, \bar{j}]$ である．書き直すと．

$$\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1 - \frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right) g(j)dj = \frac{\iota^*}{R}\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)} - 1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj$$

である．仮定 3.1，3.2，3.3 より $\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj>0$ なので，よって，

$$\frac{\iota^*}{R}=\frac{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}$$

となる．$a_2b_1-a_1b_2>0$ のとき，(3.14) より $\iota^*\leqslant R$ なので，すぐ上の等式の左辺 $\leqslant 1$，したがって右辺 $\leqslant 1$ である．$\hat{j}^*\in(\underline{j},\bar{j}]$ より，補題 3.7 と併せて，

$$1<\frac{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}\leqslant 1$$

となり，矛盾である．$a_2b_1-a_1b_2<0$ のとき，(3.15) より $1>\iota^*\geqslant R$ なので，等式の左辺 $\geqslant 1$，したがって右辺 $\geqslant 1$ である．$\hat{j}^*\in(\underline{j},\bar{j}]$ より，補題 3.7 と併せて，

$$1>\frac{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}\geqslant 1$$

となり，矛盾である．

$\iota^*=1$ のとき，(3.17) と (3.19) より，

$$\frac{\alpha(\hat{j}^*)}{\beta(\hat{j}^*)}\left(\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj+\frac{1}{R}\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj\right)\geqslant\frac{1}{R}\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$$

となる．ただし，$\hat{j}^*\in(\underline{j},\bar{j}]$ である．書き直すと．

$$\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj\geqslant\frac{1}{R}\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj$$

である．仮定 3.1，3.2，3.3 より，$\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj>0$ なので，

$$\frac{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj}\geqslant\frac{1}{R}$$

となる．　$a_2b_1-a_1b_2<0$ のとき，(3.15) より $1=\iota^*\geqslant R$ なので，すぐ上の不等式の

右辺 $\geqslant 1$，したがって左辺 $\geqslant 1$ である．$\hat{j}^* \in (\underline{j}, \bar{j}]$ より，補題 3.7 と併せて，

$$1 > \frac{\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\left(1-\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}\right)g(j)dj}{\left(\frac{\beta(\hat{j}^*)}{\alpha(\hat{j}^*)}-1\right)\int_{\underline{j}}^{\hat{j}^*}\frac{\alpha(j)}{\beta(j)}g(j)dj} \geqslant 1$$

となり，矛盾である． □

先の 2 つの命題より，次の定理が成り立つ．つまり，$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，$e < 1$ つまり失業率が正である場合，最適な連結契約で地主が設定する利子率は，市場利子率が正ならそれよりも低くなる（無利子を含む）．市場利子率が無利子ならそれと同じで無利子である．$e = 1$ つまり完全雇用が達成される場合，最適な連結契約で地主は市場利子率と同じ利子率を設定する．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ のとき，失業率が正である場合，最適な連結契約で地主が設定する利子率は市場利子率よりも高くなる．完全雇用が達成される場合，最適な連結契約で地主は市場利子率と同じ利子率を設定する．

Theorem3.2　$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，$e = 1$ なら $\iota^* = R$ であり，$e < 1$ なら，

$$\begin{cases} R < 1 \text{ なら } 1 \geqslant \iota > R, \\ R = 1 \text{ なら} \iota^* = R \end{cases}$$

である．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ のとき，

$$\begin{cases} e < 1 \text{ なら} \iota^* < R, \\ e = 1 \text{ なら} \iota^* = R \end{cases}$$

である．

Proof. 仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，(あ) $\min(R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}, 1) > \iota^* > R$，(い) $R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} > 1 = \iota^* > R$，(う) $R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} > 1 = \iota^* = R$，(え) $1 \geqslant \iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} > R$ か (お) $1 \geqslant \iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} = R$ (か) $\min(1, R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) > \iota^* = R$，(き) $\min(1, R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}) \geqslant R > \iota^*$，(く) $\iota^* > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，のいずれかである．命題 3.2 より，(く) は成り立たない．命題 3.3 より，(か) と (き) のいずれも成り立たない．よって，(あ)〜(お) のいずれかが成り立つ．$e < 1$ であれば，$R < 1$ なら，(あ)，(い) か (え) のいずれかが成り立つので，$1 \geqslant \iota^* > R$ である．$R = 1$ なら，

(う) が成り立つので，$\iota^* = R$ である．$e = 1$ であれば，(お) が成り立つので，$\iota^* = R$ である．

$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，(ア) $1 \geqslant R > \iota^* > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，(イ) $\iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} < R \leqslant 1$ か，(ウ) $\iota^* = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}} = R \leqslant 1$ (エ) $1 > \iota^* > R \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，(オ) $1 > \iota^* = R > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，(カ) $1 = \iota^* > R \geqslant R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，(キ) $1 = \iota^* = R > R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，(ク) $\iota^* < R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$，のいずれかである．命題 3.2 より，(ク) は成り立たない．命題 3.3 より，(エ)〜(ケ) のいずれも成り立たない．よって，(ア)〜(ウ) のいずれかが成り立つ．$e < 1$ であれば，(ア) か (イ) が成り立つので，$\iota^* < R$ である．$e = 1$ であれば，(ウ) が成り立つので，$\iota^* = R$ である． □

3.4　失業への言及

第 1 期財の需給と第 2 期財の需給をバランスさせる $(R, e) \in (0, 1]^2$ を市場均衡と呼ぶ．この節では市場均衡で失業は存在するのかについて考察したい．また，市場均衡で地主が設定する利子率と市場利子率の乖離，農村に残る労働者のタイプについても考察する．

所与の $(R, e) \in (0, 1]^2$ に対して，もし $S(\iota(R, e), w(R, e), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ だとすると，$(\iota(R, e), w(R, e), R, e)$ のもとで都市に行く労働者の集合は $\{\underline{j}\}$ か $\{\bar{j}\}$ か $\emptyset$ である．よって，$M(\iota(R, e), w(R, e), R, e) = \emptyset$ となるので，$\int_{M(\iota(R,e),w(R,e),R,e)} g(j)dj = 0$ になる．すると，都市における第 1 期財の生産量はゼロである．しかし，第 1 期財の総需要 $\int_{S(\iota(R,e),w(R,e),R,e)} c_1^{\mathrm{r}}(j)g(j)dj$ は正なので，(R, e) は第 1 期財の市場をバランスさせない．したがって，(R, e) は市場均衡ではない．

次の命題より，(R, e) が市場均衡であれば，$\iota(R, e) \neq R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$) であることが分かる．

Proposition3.4　$\iota(R, e) = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$) であれば，$S(\iota(R, e), w(R, e), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

Proof. $\iota(R, e) = R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}$ (ただし $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$) だとする．仮定 3.4 より $b_2 > 0$ なので，$w(R, e) \in \left(0, \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}\right)$ か $w(R, e) \geqslant \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ のいずれかが成り立つ．

$w(R,e) \in \left(0, \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}\right)$ だとする．

$$w(R,e) < \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R} = \left(R \times \frac{e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}}{R}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R} = e^{\frac{a_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \frac{a}{R}$$

なので，任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について

$$\begin{aligned}
\alpha(j)\log\frac{\iota(R,e)}{R} + \beta(j)\log\frac{Rw(R,e)}{a} &< \alpha(j)\log\left(\frac{1}{R} \times \frac{R}{e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}}\right) + \beta(j)\log\left(\frac{R}{a} \times e^{\frac{a_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \frac{a}{R}\right) \\
&= \alpha(j)\log\frac{1}{e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}} + \beta(j)\log e^{\frac{a_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \\
&= \frac{a_2\beta(j) - b_2\alpha(j)}{a_2b_1 - a_1b_2}\log e \\
&= \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}\log e = \log e
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 1 行目の不等号 $(<)$ は仮定 3.2 より $\beta(j) > 0\ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ を用いている．よって，全員都市に行くので，$M(\iota(R,e), w(R,e), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．しかし，命題 3.1 と定理 3.1 より，$\pi(\iota(R,e), w(R,e)) > 0$ なので，$M(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ である．これは矛盾である．したがって，$w(R,e) \geqslant \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ である．

$w(R,e) > \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ のとき．$w(R,e) > e^{\frac{a_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \frac{a}{R}$ なので，任意の $j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ について，

$$\begin{aligned}
\alpha(j)\log\frac{\iota(R,e)}{R} + \beta(j)\log\frac{Rw(R,e)}{a} &> \alpha(j)\log\left(\frac{1}{R} \times \frac{R}{e^{\frac{b_2}{a_2b_1-a_1b_2}}}\right) + \beta(j)\log\left(\frac{R}{a} \times e^{\frac{a_2}{a_2b_1-a_1b_2}} \frac{a}{R}\right) \\
&= \log e
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 1 行目の不等号 $(>)$ は仮定 3.2 より $\beta(j) > 0\ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ を用いている．よって，全員農村に残るので，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．

$w(R,e) = \left(\frac{R}{\iota(R,e)}\right)^{\frac{a_2}{b_2}} \frac{a}{R}$ のとき．

$$\log e = \alpha(j)\log\frac{\iota(R,e)}{R} + \beta(j)\log\frac{Rw(R,e)}{a},\ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$$

が成り立つ．ここで，$w(R,e)$ を $w'(w' > w(R,e))$ にすると，仮定 3.2 より $\beta(j) >$

$0\ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$ なので，

$$\log e < \alpha(j) \log \frac{\iota(R,e)}{R} + \beta(j) \log \frac{Rw'}{a},\ \forall j \in [\underline{j}, \bar{j}]$$

が成り立つ．よって，全員農村に残るので，$S(\iota(R,e), w', R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である．しかし，$(\iota(R,e), w(R,e))$ は利潤最大化問題の解なので，

$$\begin{aligned}
\pi(\iota(R,e), w') &= F(n) - w'n + \left(1 - \frac{\iota(R,e)}{R}\right) w' \int_{\underline{j}}^{\bar{j}} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\
&\leqslant F\left(\int_{S(\iota(R,e),w(R,e),R,e)} g(j)dj\right) - w(R,e) \int_{S(\iota(R,e),w(R,e),R,e)} g(j)dj \\
&\quad + \left(1 - \frac{\iota(R,e)}{R}\right) w(R,e) \int_{S(\iota(R,e),w(R,e),R,e)} \frac{\alpha(j)}{\beta(j)} g(j)dj \\
&= \pi(\iota(R,e), w(R,e))
\end{aligned}$$

が任意の $w' \in (w(R,e), \infty)$ について成り立つ．したがって，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) = (\underline{j}, \bar{j})$ である． □

前の節の 2 つの命題と命題 3.4 より，次の定理が成り立つ．(R,e) が市場均衡であれば，完全雇用は達成されないことが分かる．さらに，市場均衡では農村には j がより小さい労働者が残る．つまり，$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ であれば，第 2 財の消費をより高く評価する労働者が農村に残る．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ であれば，第 1 財の消費をより高く評価する労働者が残るといえる．市場均衡で完全雇用は達成されないので，前節の定理 3.2 より，$a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ であれば，市場利子率が正なら，最適な連結契約で地主が設定する利子率はそれよりも低くなる（無利子を含む）．市場利子率が無利子なら，最適な連結契約で地主が設定する利子率はそれと同じで無利子である．$a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ であれば，最適な連結契約で地主が設定する利子率は市場利子率よりも高くなる．

Theorem3.3 $a_2b_1 - a_1b_2 \gtrless 0$ のとき，(R,e) が市場均衡であれば，$e < 1$ であり，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) = (\underline{j}, j(\iota(R,e), w(R,e), R, e))$，$j(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．

Proof. $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ のとき，命題 3.2，3.3，3.4 より，(R,e) が市場均衡であれば，$\min(R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}}, 1) > \iota(R,e) > R$，$R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} > 1 = \iota(R,e) > R$ か $R/e^{\frac{b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} >$

$1 = \iota(R,e) = R$ のいずれかである．したがって，$e < 1$ である．(R,e) は市場均衡なので，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ であり，命題 3.1 と定理 3.1 より，$\pi(\iota(R,e), w(R,e)) > 0$ なので，$M(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ である．$\iota(R,e) < R/e^{\frac{b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}$ なので，よって，補題 3.2 より，$w(R,e) \in (\underline{w}(\iota(R,e)), \bar{w}(\iota(R,e)))$ である．よって，仮定 3.4 と補題 3.1 より，$\left(\frac{\iota(R,e)}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{Rw(R,e)}{a}\right)^{b_2} < \left(\frac{\iota(R,e)}{R}\right)^{a_2} \left(\frac{R\bar{w}(\iota(R,e))}{a}\right)^{b_2} < 1$ である．したがって，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) = (\underline{j}, j(\iota(R,e), w(R,e), R, e))$，$j(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．

$a_2 b_1 - a_1 b_2 < 0$ のとき，命題 3.2，3.3，3.4 より，(R,e) が市場均衡であれば，$1 \geqslant R > \iota(R,e) > R/e^{\frac{b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}$ である．したがって，$e < 1$ である．$\iota(R,e) > R/e^{\frac{b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}$，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ かつ $M(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \neq (\underline{j}, \bar{j})$ なので，補題 3.2 より $w(R,e) \in (\underline{w}(\iota(R,e)), \bar{w}(\iota(R,e)))$ である．よって，仮定 3.4 と補題 3.1 より，$S(\iota(R,e), w(R,e), R, e) = (\underline{j}, j(\iota(R,e), w(R,e), R, e))$，$j(\iota(R,e), w(R,e), R, e) \in (\underline{j}, \bar{j})$ である．　$\square$

第 4 章　連結取引の理論:初期保有量が異なる場合

4.1　モデル

ある農村を考える．そこには独占地主と多くの労働者がいる．期間は農閑期と農繁期の 2 期間である．第 1 期が農閑期である．地主は第 1 期には生産を行わず，第 2 期に労働者を雇って生産をする．労働者は初期保有量が異なるとする．したがって，第 1 期の消費を地主からの借り入れによって賄う労働者もいれば，借りずに初期保有量で賄う労働者もいる．地主はどの労働者にも同じ利子率で貸し，第 2 期には前の期に借りた労働者もそうでない労働者もみな同じ賃金率で雇うとする．つまり，地主は労働取引と信用取引を連結させた取引を労働者とするが，異質な労働者を区別しない．したがって，どの労働者にも同じ契約をただ一つだけ提示する．契約は賃金率と利子率の組である．各労働者は地主のもとで働くか働かないか，働くのであれば借りるかどうかを選択する．地主のもとで働かない場合，簡単化のため，第 1 期にのみなにかしらの仕事があるとする．

4.1.1　労働者の効用最大化

農村に住んでいる労働者を考える．労働者の総数を n とする．労働者が地主のもとで働く場合，賃金が支払われるのは農繁期である第 2 期である．先行研究では，どの労働者も地主からの借り入れによって農閑期である第 1 期の消費を賄うと想定する．しかし，現実には，労働者全員が借りるわけではないだろう．労働者の持つ資産の量はさまざまで，借りずに自分の資産で賄う労働者もいる．本稿ではこうした労働者の違いを考慮に入れる．それを労働者の初期保有量の違いによって表す．労働者 j の初期保有量を j とかく．j は $\mathbb{R}_+$ 上に分布し，その分布は密度関数 g で表現されるとする．g について，

Assumption4.1 g は $\mathbb{R}_+$ 上で連続であり，$g(j) > 0\ \forall j \in \mathbb{R}_{++}$ である．

を仮定する．

労働者の効用関数はみな同じで，$u(c_1, c_2) = c_1^\alpha c_2^\beta, \alpha, \beta > 0$ である．c_1, c_2 はそれぞれ第 1 期の財の消費量，第 2 期の財の消費量である．

労働者 $j \in \mathbb{R}_+$ が地主のもとで働く場合の効用最大化問題を

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2_+} c_1^\alpha c_2^\beta \tag{4.1}$$

$$\text{subject to } c_1 + \iota c_2 = j + \iota w \quad \text{if } c_1 > j$$

$$c_1 + c_2 = j + w \quad \text{if } c_1 \leqslant j$$

と表現する[1]．ただし，$\iota \equiv 1/(1+i) \in (0,1]$ である．i は地主が労働者に貸すときの利子率である．予算制約は第 1 期首の時点で表現されている．労働者 j が第 1 期に $c_1 - j > 0$ 単位の財 1 を地主から借りるのであれば，第 2 期に元利合計 $(1+i)(c_1 - j)$ を支払わなければならない．第 2 期には労働者は地主のもとで賃金率 w で働くので，財 2 は $w - (1+i)(c_1 - j)$ だけ消費することができる．一方，労働者 j が第 1 期に地主から借りないのであれば，$j - c_1 \geqslant 0$ 単位の財 1 をタンス預金して，第 2 期に消費する．第 2 期には地主のもとで賃金率 w で働くので，結局財 2 は $w + (j - c_1)$ だけ消費することができる．労働者 j は第 1 期に地主から借りても借りなくても，第 2 期には同じ賃金率 w で働く．また，利子率 i や賃金率 w は労働者によらずみな同じである．問題 (4.1) の解を $c_1^{\mathrm{r}}(\iota, w, j), c_2^{\mathrm{r}}(\iota, w, j)$ とかく．r は rural の頭文字である．

$c_1 + \iota c_2 = j + \iota w$ と $c_1 \geqslant j$ という 2 つの制約のもとでの労働者 j の効用最大化問題の解は，

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j + \iota w), \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{j+\iota w}{\iota}\right) & \text{if } j < \frac{\alpha}{\beta}\iota w \\ (j, w) & \text{if } j \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\iota w \end{cases}$$

である．他方，$c_1 + c_2 = j + w$ と $c_1 \leqslant j$ という 2 つの制約のもとでの労働者 j の効用

[1] 問題 (4.1) の予算集合を図示すると，それが凸集合だということは簡単に確かめることができる．

最大化問題の解は，

$$\begin{cases} (j,w) & \text{if } j \leqslant \frac{\alpha}{\beta}w \\ \\ (\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+w), \frac{\beta}{\alpha+\beta}(j+w)) & \text{if } j > \frac{\alpha}{\beta}w \end{cases} \tag{4.2}$$

である．あわせると，労働者 j の効用最大化問題 (4.1) の解は

$$(c_1^{\mathrm{r}}(\iota,w,j), c_2^{\mathrm{r}}(\iota,w,j)) = \begin{cases} (\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+\iota w), \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{j+\iota w}{\iota}) & \text{if } j < \frac{\alpha}{\beta}\iota w \\ \\ (j,w) & \text{if } j \in [\frac{\alpha}{\beta}\iota w, \frac{\alpha}{\beta}w] \\ \\ (\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+w), \frac{\beta}{\alpha+\beta}(j+w)) & \text{if } j > \frac{\alpha}{\beta}w \end{cases} \tag{4.3}$$

となる．$j < \frac{\alpha}{\beta}\iota w$ であれば借りる．$j > \frac{\alpha}{\beta}\iota w$ であれば借りない．

労働者 j が地主のもとで働かない場合，第 1 期にのみ何かしらの仕事があって，a だけの所得を得るとする．a は正値で，労働者によらずみな同じである．また貸借は行えないものとする．この場合の彼女の効用最大化問題は

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}_+^2} c_1^{\alpha}c_2^{\beta} \quad \text{subject to} \quad c_1+c_2=j+a$$

と表現することができる．労働者の予算制約は第 1 期首の時点で表現されている．この問題の解を $c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j)$ とかく．o は outside の頭文字である．$c_1^{\mathrm{o}}(j) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+a), c_2^{\mathrm{o}}(j) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(j+a)$ である．

労働者 j が地主のもとで働くことで得る効用は $u(c_1^{\mathrm{r}}(\iota,w,j), c_2^{\mathrm{r}}(\iota,w,j))$ である．地主のもとで働かないことで得る効用は $u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j))$ である．労働者 j は，地主の提示する組 $(\iota,w) \in (0,1] \times \mathbb{R}_+$ を所与として，この 2 つの効用を比較することによってどこで働くかを決定する．前者が後者を上回れば，労働者 j は地主のもとで働く．下回れば，地主のもとで働かず他で働く．

(ι,w) のとき，地主のもとで働く労働者の集合に含まれる最大の開集合を $L(\iota,w)$ とかく．地主のもとで働いて借りる労働者の集合に含まれる最大の開集合を $B(\iota,w)$ とかく．地主のもとで働かない労働者の集合に含まれる最大の開集合を $O(\iota,w)$ とかく．L，B，O はそれぞれ Landlord，Borrower，Outsider の頭文字である．ここで，最大の開集合を考えるのは，次の項でみるように地主の利潤に関係するのは面積 $\int_{L(\iota,w)} g(j)dj$，

$\int_{B(\iota,w)}(c_1^r(\iota,w,j)-j)g(j)dj$ だけだからである．また，その集合に含まれる最大の開集合の代わりに，その集合を含む最小の閉集合を考えたとしても面積は同じなので，以下の議論に影響はない．

4.1.2　地主の利潤最大化

農村の独占地主を考える．地主は農閑期である第 1 期には生産を行わず，農繁期である第 2 期に労働者を雇って生産する．労働者に賃金が支払われるのは第 2 期である．前の項でみたように，労働者は初期保有量が異なる．したがって，第 1 期の消費を賄うために借りる労働者もいれば，借りずに初期保有量だけで賄う労働者もいるかもしれない．借りる場合は，雇用主である地主以外に借りる当てはないものとする．農村では返済を履行させる法的な手段がない．土地などの担保をもつ地主は銀行などから借りることができるが，担保をもたない労働者は借りることができない．雇用主である地主が貸し手を兼ねるのは，賃金から差し引くという形で確実に労働者に返済をさせることができるためである．

地主は，労働取引と信用取引を連結させて，労働者と取引をすると想定する．したがって，地主は生産利潤と利子利潤を個別に勘案して，賃金率と利子率を別々にえらばない．むしろその和を最大にするように利子率と賃金率の組をえらぶ．地主は組を労働者に提示するが，労働者が異質であるとき，その提示の仕方は現実にはさまざまだろう．個別に異なる組を提示する地主もいれば，いくつかの組を用意して労働者に選ばせる地主もいるかもしれない．本稿では，労働者を区別せずに，どの労働者にも同じ組をただ一つだけ提示するような地主を想定する．したがって，地主は総生産利潤と総利子利潤の和を最大にするように組を一つえらぶ．もし労働者が組を受け入れれば，彼女は第 2 期に賃金率 w で働かなければならない．しかし利子率 i で第 1 期に好きなだけ（ゼロを含む）借りることができる．第 1 期に借りる労働者も借りない労働者も，第 2 期にはみな同じ賃金率で働く．

すると地主の利潤最大化行動は

$$\max_{(\iota,w)\in(0,1]\times\mathbb{R}_+}\pi(\iota,w)=F\left(\int_{L(\iota,w)}g(j)dj\right)-w\int_{L(\iota,w)}g(j)dj$$
$$+\frac{1}{\iota}\int_{B(\iota,w)}(c_1^{\mathrm{r}}(\iota,w,j)-j)g(j)dj-\frac{1}{R}\int_{B(\iota,w)}(c_1^{\mathrm{r}}(\iota,w,j)-j)g(j)dj \tag{4.4}$$

と表現することができる．ただし，関数 $F:[0,n]\to\mathbb{R}_+$ は地主の生産技術を表す．F について，

Assumption4.2　生産関数 F は $(0,n)$ で微分可能で，$[0,n]$ で増加的かつ連続である．また $F(0)=0$ である．

を仮定する．また，$R\equiv 1/(1+r)\in(0,1]$，ただし r は市場利子率である．

地主の目的関数は第 2 期首の時点で書かれている．第 2 期に労働者を雇って地主は第 2 財を生産する．それを表しているのが目的関数の第 1 項である．第 2 項は彼の労働者に支払わなければならない賃金総額である．すなわち最初の 2 つの項は総生産利潤を表している．第 1 期に地主は $c_1^{\mathrm{r}}(\iota,w,j)-j>0$ 単位の財 1 を利子率 r で市場から借りる．それを彼の労働者のなかで消費信用を必要とする j に利子率 i で貸す．地主が消費信用を与えた労働者から受け取る元利合計の総額を述べているのが第 3 項である．地主が市場に支払う元利合計の総額を表しているのが第 4 項である．すなわち，最後の 2 項は総利子利潤を表している．利潤最大化問題 (4.4) の解を $(\iota(R),w(R))$ とかく．

Assumption4.3　ある $(\iota,w)\in(0,1]\times[a,\infty)$ が存在して，$\pi(\iota,w)>0$ である．

を仮定する．利潤最大化問題の解の存在は次節で証明するが，この仮定により，正の最大利潤が保証される．$w\geqslant a$ としているのは，$(\iota,w)\in(0,1]\times[0,a)$ であれば利潤はゼロになることが証明できるからである（証明は次節を参照せよ）.

4.2　最適な連結契約の存在

この節では地主の利潤を最大にするような組 (ι,w) があることを証明する．まず，地主の提示する組を所与として，労働者の最適選択を考察する．

4.2.1 労働者の最適な選択

地主の提示する組 $(\iota, w) \in (0,1] \times \mathbb{R}_+$ を所与として，$\frac{\alpha}{\beta}\iota w \in \mathbb{R}_+$ を j_b とかく．b は borrow の頭文字である．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_\mathrm{b}$ であれば，$j < \frac{\alpha}{\beta}\iota w$ なので (4.3) より，j は地主のもとで働くのであれば借りる．言い換えると，j は働いて借りないという選択をしない．$j > j_\mathrm{b}$ であれば，$j > \frac{\alpha}{\beta}\iota w$ なので (4.3) より，j は地主のもとで働くのであれば借りない．言い換えると，地主のもとで働いて借りるという選択はしない．ただし，いずれの場合も j は地主のもとで働くとは限らない．というのは j が地主のもとで働くかどうかは働く場合の効用と働かない場合の効用の比較によって決まるからである．各 $(\iota, w) \in (0,1] \times \mathbb{R}_+$ に対して j_b を割り当てる関数を $j_\mathrm{b}(\iota, w)$ とかく．

所与の組 $(\iota, w) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+$ に対して，$\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1} \in \mathbb{R}$ と 0 の大きい方を j_o とかく．o は outside の頭文字である．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_\mathrm{o}$ であれば，

$$j < \frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1} \ \Leftrightarrow\ \left(\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1\right)j < a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w \ \Leftrightarrow\ (j+\iota w)\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} < j+a$$

となるので,

$$\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\alpha^\alpha\beta^\beta(j+\iota w)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\iota}\right)^\beta < \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\alpha^\alpha\beta^\beta(j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^\mathrm{o}(j), c_2^\mathrm{o}(j))$$

となる．左辺は，(4.3) より，もし $\iota \in (0,1)$ のときに地主のもとで働いて借りるのであれば労働者 j が得る効用である．右辺は地主のもとで働かないことで得る効用である．したがって，労働者 j は $\iota \in (0,1)$ のときに地主のもとで働いて借りるという選択をしない．ただし，働かないことを選択するとは限らない．働いて借りないことを選択するかもしれない．$j > j_\mathrm{o}$ であれば，$j > \frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}$ となるので,

$$\begin{aligned} u(c_1^\mathrm{r}(\iota, w, j), c_2^\mathrm{r}(\iota, w, j)) &\geqslant \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\alpha^\alpha\beta^\beta(j+\iota w)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\iota}\right)^\beta \\ &> \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\alpha^\alpha\beta^\beta(j+a)^{\alpha+\beta} \\ &= u(c_1^\mathrm{o}(j), c_2^\mathrm{o}(j)) \end{aligned}$$

となる．ただし 1 行目の不等号は (4.3) を用いている．したがって，地主のもとで働くことで得る効用が働かないことで得る効用を上回るので，地主のもとで働く．各 $(\iota, w) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+$ に対して j_{o} を割り当てる関数を $j_{\mathrm{o}}(\iota, w)$ とかく．

$w \in \mathbb{R}_+$ が与えられているとする．

$$H(j) = \begin{cases} j^\alpha w^\beta & \text{if } j \leqslant \frac{\alpha}{\beta} w \\ \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+w)^{\alpha+\beta} & \text{if } j > \frac{\alpha}{\beta} w \end{cases}$$

と定義する．もし労働者 j が地主のもとで働いて借りないのであれば，各期の需要量は (4.2) となるので，$H(j)$ はそのときの効用である．まず，任意の $(\iota, w) \in (0,1] \times [0,a)$ について，$L(\iota, w) = \emptyset$ となることを示す．

Lemma4.1 $w \in \mathbb{R}_+$ を任意にえらんで固定する．

$$j^\alpha w^\beta \leqslant \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+w)^{\alpha+\beta} \quad \forall j > 0$$

である．ただし，等号は $j = \frac{\alpha}{\beta} w$ のときのみ成立する．

Proof. $w \in \mathbb{R}_+$ を任意にえらんで固定する．$\zeta(j) = j^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (j + w), j \geqslant 0$ とおくと，

$$\begin{aligned} \zeta\left(\frac{\alpha}{\beta} w\right) &= \left(\frac{\alpha}{\beta} w\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} w + w\right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w - \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \frac{1}{\beta} w = 0 \end{aligned}$$

である．また，任意の $j > 0$ について，

$$\zeta'(j) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} j^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\alpha+\beta} j^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \times \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} w\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - j^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right]$$

なので，$j \lesseqgtr \frac{\alpha}{\beta} w$ であれば $\zeta'(j) \gtreqless 0$ となる．よって，任意の $j > 0$ について，

$$\begin{aligned} \zeta(j) \leqslant 0 \ &\Leftrightarrow \ j^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (j+w) \\ &\Leftrightarrow \ j^\alpha w^\beta \leqslant \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+w)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

となる．ただし，等号は $j = \frac{\alpha}{\beta}w$ のときのみ成立する．　□

Lemma4.2　任意の $\iota \in (0,1)$ について，

$$\frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota} > a$$

である．

Proof. $\xi(\iota) = \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}, \iota \in (0,1]$ とおく．

$$\xi'(\iota) = -\beta a((\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota)^{-2}\alpha(\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} - 1) < 0 \quad \forall\iota \in (0,1)$$

であり，ξ は連続なので，

$$\frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota} = \xi(\iota) > \xi(1) = \frac{\beta a}{(\alpha+\beta) - \alpha} = a \quad \forall\iota \in (0,1)$$

となる．　□

Lemma4.3　$\iota \in (0,1)$ を任意にえらんで固定する．任意の $w \in \left[0, \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}\right)$ について，$B(\iota, w) = \emptyset$ である．

Proof. $\iota \in (0,1)$ を任意にえらんで固定する．$\phi(w) = \frac{\alpha}{\beta}\iota w - \frac{a - \iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1}, w \geqslant 0$ とおく．$\phi\left(\frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}\right) = 0$ である．また，

$$\phi'(w) = \frac{\alpha}{\beta}\iota + \frac{\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1} > 0 \quad \forall w > 0$$

である．ϕ は連続なので，よって，任意の $w \in \left[0, \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}\right)$ について，

$$\phi(w) < 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant \frac{\alpha}{\beta}\iota w < \frac{a - \iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1}$$

となる．つまり，$j_{\mathrm{b}}(\iota, w) < j_{\mathrm{o}}(\iota, w)$ となる．したがって，任意に $j \in \mathbb{R}_+$ をえらぶと，(i) $j \leqslant j_{\mathrm{b}}(\iota, w) < j_{\mathrm{o}}(\iota, w)$，(ii) $j \in (j_{\mathrm{b}}(\iota, w), j_{\mathrm{o}}(\iota, w))$，(iii) $j \geqslant j_{\mathrm{o}}(\iota, w) > j_{\mathrm{b}}(\iota, w)$ のいずれかが成り立つ．(i) あるいは (ii) であれば，$j < j_{\mathrm{o}}(\iota, w)$ が成り立つので，j は

地主のもとで働いて借りるという選択をしない．(iii) であれば，$j > j_{\mathrm{b}}(\iota, w)$ が成り立つので，j は働いて借りるという選択をしない．したがって，地主のもとで働いて借りる労働者の集合は空となるので，$B(\iota, w) = \emptyset$ である． □

Proposition4.1　任意の $(\iota, w) \in (0,1] \times [0,a)$ について，$L(\iota, w) = \emptyset$ である．

Proof. $(\iota, w) \in (0,1] \times [0,a)$ を任意にえらんで固定する．$\iota \in (0,1)$ であれば，補題 4.2 より，$w < a < \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}$ である．よって，補題 4.3 より，$B(\iota, w) = \emptyset$ である．また，補題 4.1 より，

$$j^{\alpha} w^{\beta} \leqslant \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(j+w)^{\alpha+\beta} \quad \forall j \in \mathbb{R}_{+}$$

なので，H の定義から

$$H(j) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(j+w)^{\alpha+\beta} \quad \forall j \in \mathbb{R}_{+}$$

である．$w < a$ なので，よって，

$$H(j) < \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j)) \quad \forall j \in \mathbb{R}_{+}$$

となるので，どの労働者も働いて借りないという選択をしない．したがって，地主のもとで働くのであればどの労働者も借りるので，地主のもとで働く労働者の集合と働いて借りる労働者の集合は同じになる．よって，$L(\iota, w) = B(\iota, w)$ になる．$B(\iota, w) = \emptyset$ なので，したがって，$L(\iota, w) = \emptyset$ となる．

$\iota = 1$ であれば，

$$\begin{aligned} u(c_1^{\mathrm{r}}(1,w,j), c_2^{\mathrm{r}}(1,w,j)) &= \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(j+w)^{\alpha+\beta} \\ &< \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(j+a)^{\alpha+\beta} \\ &= u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j)) \quad \forall j \in \mathbb{R}_{+} \end{aligned}$$

となる．ただし1行目の等号は任意の $j \in \mathbb{R}_{+}$ について (4.3) より $(c_1^{\mathrm{r}}(1,w,j), c_2^{\mathrm{r}}(1,w,j)) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+w), \frac{\beta}{\alpha+\beta}(j+w)\right)$ となることを用いている．よって，どの労働者も地主のも

とで働かない．したがって，$L(1, w) = \emptyset$ となる．

□

任意の $(\iota, w) \in (0, 1] \times [0, a)$ について，命題 4.1 より $L(\iota, w) = \emptyset$ となるので，$\pi(\iota, w) = 0$ となる．したがって，仮定 4.3 より，地主の利潤 π を最大にする組 (ι, w) は $(0, 1] \times [a, \infty)$ にあることが分かる（その存在については次の項で証明する）．よって，以下では，地主の提示する組 (ι, w) を $(0, 1] \times [a, \infty)$ に限定して，労働者の最適選択について考察する．

Proposition4.2 $w > a$ のとき，ある $\hat{j}(w) \in (0, \frac{\alpha}{\beta} w)$ が存在して，$j \lesseqgtr \hat{j}(w)$ であれば，$H(j) \lesseqgtr \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta}$ である．

Proof. $w > a$ を任意にえらんで固定する．$\psi(j) = j^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (j + a), j \geqslant 0$ とする．

$$\psi(0) = -\frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} a < 0$$

である．また，$w > a$ なので，

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{\alpha}{\beta} w\right) &= \left(\frac{\alpha}{\beta} w\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} w + a\right) \\ &> \left(\frac{\alpha}{\beta} w\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} w + w\right) = 0 \end{aligned}$$

である．また，

$$\psi'(j) = \frac{1}{\alpha+\beta} j^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \times \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} w\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - j^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right]$$

なので，$j < \frac{\alpha}{\beta} w$ であれば，$\psi'(j) > 0$ である．ψ は連続なので，よって，中間値の定理から，ある $\hat{j}(w) \in (0, \frac{\alpha}{\beta} w)$ が存在して

$$\begin{aligned} \psi(\hat{j}(w)) = 0 &\Leftrightarrow \hat{j}(w)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\alpha+\beta} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\hat{j}(w) + a) \\ &\Leftrightarrow H(\hat{j}(w)) = \hat{j}(w)^\alpha w^\beta = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (\hat{j}(w) + a)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{cases} \psi(j) < 0 \ \Leftrightarrow \ H(j) = j^\alpha w^\beta < \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} & \text{if } j \in [0, \hat{j}(w)), \\ \psi(j) > 0 \ \Leftrightarrow \ H(j) = j^\alpha w^\beta > \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} & \text{if } j \in (\hat{j}(w), \frac{\alpha}{\beta} w] \end{cases}$$

である．さらに，$w > a$ なので，$j > \frac{\alpha}{\beta} w$ であれば，

$$H(j) = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+w)^{\alpha+\beta} > \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta}$$

である．□

$w > a$ のとき，$\hat{j}(w) \in (0, \frac{\alpha}{\beta} w)$ を j_{h} とかく．h は hoarded money の頭文字である．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{h}}$ であれば，$j < \hat{j}(w)$ なので命題 4.2 より，

$$H(j) < \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j))$$

となる．よって，労働者 j が地主のもとで働いて借りないことで得る効用が働かないことで得る効用を下回る．よって，労働者 j は地主のもとで働いて借りないという選択をしない．ただし，働かないことを選択するとは限らない．働いて借りるという選択をするかもしれない．$j > j_{\mathrm{h}}$ であれば，$j > \hat{j}(w)$ なので命題 4.2 より，

$$u(c_1^{\mathrm{r}}(\iota, w, j), c_2^{\mathrm{r}}(\iota, w, j)) \geqslant H(j) > \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j))$$

となる．ただし最初の不等号は (4.3) を用いている．よって，地主のもとで働く．

$w = a$ のとき，$\lim_{\substack{w \to a \\ w > a}} \hat{j}(w)$ を j_{h} とかく．$\lim_{\substack{w \to a \\ w > a}} \hat{j}(w) = \frac{\alpha}{\beta} a$ である．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{h}}$ であれば，$j < \frac{\alpha}{\beta} a$ なので $H(j)$ の定義と補題 4.1 から，

$$H(j) = j^\alpha a^\beta < \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j))$$

となる．よって，労働者 j は地主のもとで働いて借りないという選択をしない．ただし，働かないとは限らない．働いて借りることを選択するかもしれない．$j > j_{\mathrm{h}}$ であ

れば，$j > \frac{\alpha}{\beta}a$ なので $H(j)$ の定義から，

$$H(j) = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j))$$

となる．よって，地主のもとで働いて借りないことと働かないことが無差別になる．その場合，j は地主のもとで働くと仮定する．つまり，

Assumption4.4　$w = a$ のとき，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j > j_{\mathrm{h}}$ であれば，j は地主のもとで働く

と仮定する．

各 $w \geqslant a$ に対して，j_{h} を割り当てる関数を $j_{\mathrm{h}}(w)$ とかく．$\lim_{\substack{w \to a \\ w > a}} j_{\mathrm{h}}(w) = j_{\mathrm{h}}(a)$ となるので，関数 $j_{\mathrm{h}}(w)$ は $w = a$ で連続である．この連続性と仮定 4.4 は次の項で $\pi(\iota, w), (\iota, w) \in (0,1] \times [a, \infty)$ の $\iota \in (0,1)$，$w = a$ での連続性を証明するときに必要になる．

$\iota = 1, w > a$ であれば，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，(4.3) より，

$$\begin{aligned} u(c_1^{\mathrm{r}}(1,w,j), c_2^{\mathrm{r}}(1,w,j)) &= \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+w)^{\alpha+\beta} \\ &> \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} \\ &= u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j)) \end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．よって，どの労働者も地主のもとで働く．

$(\iota, w) = (1, a)$ であれば，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，(4.3) より，

$$u(c_1^{\mathrm{r}}(1,a,j), c_2^{\mathrm{r}}(1,a,j)) = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta (j+a)^{\alpha+\beta} = u(c_1^{\mathrm{o}}(j), c_2^{\mathrm{o}}(j))$$

となる．よって，どの労働者も地主のもとで働くことと働かないことが無差別になる．その場合，どの労働者も地主のもとで働くと仮定する．つまり，

Assumption4.5　$(\iota, w) = (1, a)$ のとき，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，地主のもとで働く

と仮定する．この仮定は次の項で π の $(\iota, w) = (1, a)$ での連続性を証明するときに必要になる．

4.2.2　利潤最大化問題の解の存在

前の項で示した命題 4.1 より，任意の組 $(\iota, w) \in (0,1] \times [0,a)$ について $\pi(\iota, w) = 0$ である．よって，仮定 4.3 より，地主の利潤最大化問題の解 (ι, w) は $(0,1] \times [a, \infty)$ にあることが分かる．したがって，$\pi(\iota, w)$ の定義域を $(0,1] \times [a, \infty)$ に限定して，解の存在を証明する．

前の項でみたように，$w = a$ を所与として，$j \in (j_{\mathrm{h}}(a), \infty)$ は地主のもとで働いて借りないことと働かないことが無差別になる．$(\iota, w) = (1, a)$ を所与として，どの労働者も地主のもとで働くことと働かないこととが無差別になる．したがって，まず $\iota \in (0,1], w = a$ での π の連続性を示す.

Lemma4.4　$\hat{\iota}$ を $(0,1)$ 内の任意の点とする．$\displaystyle\lim_{\substack{\iota \to \hat{\iota} \\ \iota \in (0,1) \\ w \to a \\ w > a}} \pi(\iota, w) = \pi(\hat{\iota}, a)$ である．

Proof. $\iota \in (0,1)$，$w = a$ のとき．$\iota \in (0,1)$ なので，補題 4.2 より $w = a < \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}$ である．よって，補題 4.3 より，$B(\iota, a) = \emptyset$ である．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{h}}(a)$ であれば，働いて借りないという選択をしない．したがって，地主のもとで働くのであれば借りるので，地主のもとで働く労働者の集合と働いて借りる労働者の集合は同じになる．よって，$L(\iota, a) = B(\iota, a)$ である．$B(\iota, a) = \emptyset$ なので，$L(\iota, a) = \emptyset$ となる．$j > j_{\mathrm{h}}(a)$ であれば，仮定 4.4 より，j は地主のもとで働く．$B(\iota, a) = \emptyset$ なので，したがって，$\iota \in (0,1), w = a$ のときの地主の利潤は,

$$\pi(\iota, a) = F\left(\int_{j_{\mathrm{h}}(a)}^{\infty} g(j)dj\right) - a\int_{j_{\mathrm{h}}(a)}^{\infty} g(j)dj \equiv \Pi(a) \tag{4.6}$$

となる．

$(\iota, w) \in (0,1) \times \left(a, \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}\right)$ であれば，補題 4.3 より，$B(\iota, w) = \emptyset$ である．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{h}}(w)$ であれば，働いて借りないという選択をしない．したがって，地主のもとで働くのであれば借りるので，地主のもとで働く労働者の集合と働いて借りる労働者の集合は同じになる．よって，$L(\iota, w) = B(\iota, w) = \emptyset$ である．$j > j_{\mathrm{h}}(w)$ であれば，地主のもとで働く．$B(\iota, w) = \emptyset$ なので，したがって，

$(\iota, w) \in (0,1) \times \left(a, \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}\right)$ のときの地主の利潤は

$$\pi(\iota, w) = F\left(\int_{j_{\mathrm{h}}(w)}^{\infty} g(j)dj\right) - w\int_{j_{\mathrm{h}}(w)}^{\infty} g(j)dj \equiv \Pi(w) \tag{4.7}$$

となる.

　したがって，$\hat{\iota}$ を $(0,1)$ の任意の点とすれば,

$$\lim_{\substack{\iota\to\hat{\iota}\\ \iota\in(0,1)\\ w\to a\\ w>a}} \pi(\iota, w) = \lim_{\substack{\iota\to\hat{\iota}\\ \iota\in(0,1)\\ w\to a\\ a<w<\frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}-\alpha\iota}}} \pi(\iota, w) = \lim_{\substack{w\to a\\ a<w<\frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}-\alpha\iota}}} \Pi(w) = \Pi(a) = \pi(\hat{\iota}, a)$$

となる．3 番目の等号は j_{h} が $w = a$ で連続であり，仮定 4.1，4.2 より g と F が連続であることから，Π が $w = a$ で連続になることを用いている. □

Lemma4.5 $\lim_{\substack{\iota\to 1\\ \iota\in(0,1]\\ w\to a\\ w>a}} \pi(\iota, w) = \pi(1, a)$ が成り立つ.

Proof. $\iota = 1, w = a$ のとき，仮定 4.5 より，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，地主のもとで働く．よって，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{b}}(1, a)$ であれば j は働いて借りる. $j > j_{\mathrm{b}}(1, a)$ であれば j は働いて借りない．したがって，$\iota = 1, w = a$ のときの地主の利潤は

$$\pi(1, a) = F(n) - an + \left(1 - \frac{1}{R}\right)\int_0^{j_{\mathrm{b}}(1,a)} (c_1^{\mathrm{r}}(1, a, j) - j)g(j)dj$$

となる.

　$\iota = 1, w > a$ であれば，(4.5) より，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，地主のもとで働く．よって，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{b}}(1, w)$ であれば j は働いて借りる．$j > j_{\mathrm{b}}(1, w)$ であれば j は働いて借りない．よって，$\iota = 1, w > a$ のときの地主の利潤は,

$$\pi(1, w) = F(n) - wn + \left(1 - \frac{1}{R}\right)\int_0^{j_{\mathrm{b}}(1,w)} (c_1^{\mathrm{r}}(1, w, j) - j)g(j)dj$$

となる．仮定 4.1 より g が連続なので，したがって，

$$\lim_{\substack{\iota\to 1\\ \iota=1\\ w\to a\\ w>a}} \pi(\iota,w) = \lim_{\substack{w\to a\\ w>a}} \pi(1,w) = F(n) - an + \left(1-\frac{1}{R}\right)\int_0^{j_{\mathrm{b}}(1,a)} (c_1^{\mathrm{r}}(1,a,j)-j)g(j)dj = \pi(1,a) \tag{4.8}$$

となる．

$\iota \in (0,1), w > \frac{a}{\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}$ であれば，$\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1} < 0$ となるので，$j_{\mathrm{o}}(\iota,w)=0$ である．したがって，$j > j_{\mathrm{o}}(\iota,w)=0$ は地主のもとで働く．よって，任意の $j \in \mathbb{R}_{++}$ について，$j < j_{\mathrm{b}}(\iota,w)$ であれば j は働いて借りる．$j > j_{\mathrm{b}}(\iota,w)$ であれば j は働いて借りない．よって，$\iota \in (0,1), w > \frac{a}{\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}$ のときの地主の利潤は，

$$\pi(\iota,w) = F(n) - wn + \left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{R}\right)\int_0^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} (c_1^{\mathrm{r}}(\iota,w,j)-j)g(j)dj$$

となる．仮定 4.1 より g が連続なので，したがって，

$$\lim_{\substack{\iota\to 1\\ \iota\in(0,1)\\ w\to a\\ w>a}} \pi(\iota,w) = \lim_{\substack{\iota\to 1\\ \iota\in(0,1)\\ w\to a\\ w>\frac{a}{\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}}} \pi(\iota,w) = F(n) - an + \left(1-\frac{1}{R}\right)\int_0^{j_{\mathrm{b}}(1,a)} (c_1^{\mathrm{r}}(1,a,j)-j)g(j)dj = \pi(1,a) \tag{4.9}$$

となる．

(4.8) と (4.9) より，$\lim_{\substack{\iota\to 1\\ \iota\in(0,1]\\ w\to a\\ w>a}} \pi(\iota,w) = \pi(1,a)$ を得る．　□

以上より，$\pi(\iota,w)$ の定義域を $(0,1]\times[a,\infty)$ に制限すれば，地主の利潤を最大にする利子率と賃金率の組があることを証明することができる．

Theorem4.1　$\pi(\iota,w)$ の定義域を $(0,1]\times[a,\infty)$ に制限する．このとき利潤最大化問題 (4.4) に解 $(\iota(R),w(R))$ が存在する．

Proof. 任意の $(\iota, w) \in (0,1] \times [a, \infty)$ について,

$$
\begin{aligned}
\pi(\iota, w) &= F\left(\int_{L(\iota,w)} g(j)dj\right) - w\int_{L(\iota,w)} g(j)dj + \left(\frac{1}{\iota} - \frac{1}{R}\right)\int_{B(\iota,w)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+\iota w) - j\right) g(j)dj \\
&= F\left(\int_{L(\iota,w)} g(j)dj\right) - w\left(\int_{L(\iota,w)} g(j)dj - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{B(\iota,w)} g(j)dj\right) \\
&\quad - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{\iota}\int_{B(\iota,w)} jg(j)dj - \frac{1}{R}\int_{B(\iota,w)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+\iota w) - j\right) g(j)dj \\
&\leqslant F\left(\int_{L(\iota,w)} g(j)dj\right) \\
&\leqslant F(n)
\end{aligned}
$$

となる．ただし 3 行目の不等号は仮定 4.1 より $g(j) > 0 \ \forall j \in \mathbb{R}_{++}$ を，4 行目の不等号は仮定 4.2 より F が増加関数であることを用いている．よって，集合 $\{\pi(\iota, w) \in \mathbb{R} \mid (\iota, w) \in (0,1] \times [a, \infty)\}$ は上に有界である．この集合は非空なので，上限が存在する．それを s とかく．仮定 4.3 より，$s > 0$ である．

$s - 1/m, m = 1, 2, \ldots$ は $\{\pi(\iota, w) \in \mathbb{R} \mid (\iota, w) \in (0,1] \times [a, \infty)\}$ の上界ではない．よって，ある $(\iota_m, w_m) \in (0,1] \times [a, \infty), m = 1, 2, \ldots$ が存在して，

$$
s - 1/m < \pi(\iota_m, w_m)
$$

である．

$y_m \equiv \int_{L(\iota_m, w_m)} g(j)dj, m = 1, 2, \ldots$ とおくと，$y_m \in [0, n], m = 1, 2, \ldots$ なので，$y_m, m = 1, 2, \ldots$ には収束する部分列 $y_{m(i)}, i = 1, 2, \ldots$ がある．$m_1(i) \equiv m(i), i = 1, 2, \ldots$ とおく．対応する $(\iota_m, w_m) \in (0,1] \times [a, \infty), m = 1, 2, \ldots$ の部分列を $(\iota_{m_1(i)}, w_{m_1(i)}), i = 1, 2, \ldots$ とかく．$s - 1/m_1(i) < \pi(\iota_{m_1(i)}, w_{m_1(i)}) \leqslant s, i = 1, 2, \ldots$ であるから，

$$
s = \lim_{i \to \infty} \pi(\iota_{m_1(i)}, w_{m_1(i)})
$$

である．$\iota_{m_1(i)} \in (0, 1], i = 1, 2, \ldots$ は有界なので，収束する部分列 $\iota_{m(i(k))}, k = 1, 2, \ldots$ がある．$m_2(k) \equiv m(i(k)), k = 1, 2, \ldots$ とおく．対応する $w_{m_1(i)}, i = 1, 2, \ldots$ の部分列

を $w_{m_2(k)}, k=1,2,\ldots$ とかく．

$$w_{m_2(k)}\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj\right) \geqslant 0,\ k=1,2,\ldots, \tag{4.10}$$

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{\iota_{m_2(k)}}\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} jg(j)dj \geqslant 0,\ k=1,2,\ldots, \tag{4.11}$$

および

$$\frac{1}{R}\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+\iota_{m_2(k)}w_{m_2(k)})-j\right)g(j)dj \geqslant 0,\ k=1,2,\ldots \tag{4.12}$$

である．

$w_{m_2(k)}, k=1,2,\ldots$ が発散するとする（背理法の仮定）．(a) $\iota_{m_2(k)} \to 0(\text{as } k\to\infty)$ あるいは (b) $\iota_{m_2(k)} \to \hat{\iota} \in (0,1](\text{as } k\to\infty)$ のいずれかが成り立つ．

(a) $\iota_{m_2(k)} \to 0(\text{as } k\to\infty)$ のとき．(a-1) $\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj \to 0(\text{as } k\to\infty)$，あるいは (a-2) $\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj \to y \in (0,n](\text{as } k\to\infty)$ のいずれかが成り立つ．

(a-1) $\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj \to 0(\text{as } k\to\infty)$ のとき．$\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj \to 0(\text{as } k\to\infty)$ である．(4.10)，(4.11) と (4.12) より，

$$\begin{aligned}
&\pi(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})\\
&=F\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj\right) - w_{m_2(k)}\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj\right)\\
&\quad -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{\iota_{m_2(k)}}\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} jg(j)dj - \frac{1}{R}\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j+\iota_{m_2(k)}w_{m_2(k)})-j\right)g(j)dj\\
&\leqslant F\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj\right),\ k=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

である．仮定 4.2 より F は連続であり $F(0)=0$ なので，よって，

$$0 < s = \lim_{k\to\infty}\pi(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)}) \leqslant 0$$

となり，矛盾である．

(a-2) $\int_{L(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj \to y \in (0,n](\text{as } k\to\infty)$ のとき．$\int_{B(\iota_{m_2(k)},w_{m_2(k)})} g(j)dj \to$

$y' \in [0, y]$(as $k \to \infty$) である．(4.11) と (4.12) より，

$$\pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant F\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj\right) - w_{m_2(k)}\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{B(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj\right),\ k = 1, 2, \ldots$$

である．よって，

$$s = \lim_{k\to\infty} \pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant -\infty$$

となり，矛盾である．

(b) $\iota_{m_2(k)} \to \hat{\iota} \in (0, 1]$(as $k \to \infty$) のとき．列

$$\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta \left(\frac{1}{\iota_{m_2(k)}}\right)^\beta (j + \iota_{m_2(k)} w_{m_2(k)})^{\alpha+\beta},\ k = 1, 2, \ldots$$

を考える．それは，$\iota_{m_2(k)} \in (0, 1)$ であれば，そのときに労働者 j が地主のもとで働いて借りるのであれば得る効用である．$\iota_{m_2(k)} = 1$ であれば，労働者 j が地主のもとで働くときに得る効用である．$k \to \infty$ とすれば，$\iota_{m_2(k)} w_{m_2(k)} \to \infty$ となるので，$\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta \left(\frac{1}{\iota_{m_2(k)}}\right)^\beta (j + \iota_{m_2(k)} w_{m_2(k)})^{\alpha+\beta} \to \infty$ となる．一方，労働者 j が地主のもとで働かないことで得る効用の列は定数列である．したがって，$\int_{L(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj \to n(\mathrm{as}\, k \to \infty)$ となる．$\int_{B(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj \to b \in [0, n](\mathrm{as}\, k \to \infty)$ なので，(4.11) と (4.12) より，

$$\pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant F\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj\right) - w_{m_2(k)}\left(\int_{L(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{B(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)})} g(j)dj\right),\ k = 1, 2, \ldots$$

である．よって，

$$s = \lim_{k\to\infty} \pi(\iota_{m_2(k)}, w_{m_2(k)}) \leqslant -\infty$$

となり，矛盾である．

したがって，$w_{m_2(k)}, k = 1, 2, \ldots$ は発散しない．したがって，ある $\hat{w} > 0$ が存在して，どのような番号 k を選んでも，k 以上のある番号 k' について，$a \leqslant w_{m_2(k')} < \hat{w}$ が成立する．したがって，どのような番号 t についても $w_{m(i(k(t)))} < \hat{w}$ となるような

$w_{m_2(k)}, k = 1, 2, \ldots$ の部分列 $w_{m(i(k(t)))}, t = 1, 2, \ldots$ をとることができる．$m_3(t) \equiv m(i(k(t))), t = 1, 2, \ldots$ とおく．$w_{m_3(t)}, t = 1, 2, \ldots$ は有界なので，収束する部分列 $w_{m(i(k(t(l))))}, l = 1, 2, \ldots$ がある．$m_4(l) \equiv m(i(k(t(l)))), l = 1, 2, \ldots$ とおく．その極限を w^* とかく．(i) $\iota_{m_4(l)} \to 0(\text{as } l \to \infty)$，あるいは (ii) $\iota_{m_4(l)} \to \iota^* \in (0, 1](\text{as } l \to \infty)$ のいずれかが成り立つ．

(i) $\iota_{m_4(l)} \to 0(\text{as } l \to \infty)$ のとき．$l \to \infty$ とすれば，$\frac{\alpha}{\beta}\iota_{m_4(l)} w_{m_4(l)} \to 0$ となるので，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，(4.3) より，地主のもとで働くのであれば借りない．

$w^* = a$ のとき．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{h}}(a)$ であれば，借りないという選択をしない．したがって，地主のもとで働かない．$j > j_{\mathrm{h}}(a)$ であれば，仮定 4.4 より j は地主のもとで働く．働くのであれば借りないので，したがって，

$$\lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)}) = F\left(\int_{j_{\mathrm{h}}(a)}^{\infty} g(j) dj\right) - a \int_{j_{\mathrm{h}}(a)}^{\infty} g(j) dj = \Pi(a)$$

となる．(4.6) より，$\pi(\iota, a) = \Pi(a) = \lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)})$ となる $\iota \in (0, 1)$ が存在する．

$w^* > a$ のとき．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{h}}(w^*)$ であれば，借りないという選択をしない．したがって，地主のもとで働かない．$j > j_{\mathrm{h}}(w^*)$ であれば，地主のもとで働く．働くのであれば借りないので，したがって，

$$\lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)}) = F\left(\int_{j_{\mathrm{h}}(w^*)}^{\infty} g(j) dj\right) - w^* \int_{j_{\mathrm{h}}(w^*)}^{\infty} g(j) dj = \Pi(w^*)$$

となる．(4.7) より，$\pi(\iota, w^*) = \Pi(w^*) = \lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)})$ となる $(\iota, w^*) \in (0, 1) \times \left(a, \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota}\right)$ が存在する．

したがって，(ii) $\iota_{m_4(l)} \to \iota^* \in (0, 1](\text{as } l \to \infty)$ の場合のみを考えればよい．補題 4.4 と補題 4.5 より，$\pi(\iota, w), (\iota, w) \in (0, 1] \times [a, \infty)$ は連続なので，

$$s = \lim_{l \to \infty} \pi(\iota_{m_4(l)}, w_{m_4(l)}) = \pi(\iota^*, w^*)$$

である．$s = \pi(\iota^*, w^*)$ は (ι^*, w^*) によって達成される最大値である．　□

4.3　最適な連結契約での利子率と市場利子率の乖離

前の節では地主の利潤を最大にするような連結契約 $(\iota(R), w(R))$ が存在することを示した．最適な連結契約で地主が設定する利子率は市場利子率より低くなるのか．この節ではこれについて考察したい．記号の節約のために，以下では，$\iota(R), w(R), j_{\mathrm{b}}(\iota(R), w(R)), j_{\mathrm{o}}(\iota(R), w(R))$ をそれぞれ $\iota^*, w^*, j_{\mathrm{b}}^*, j_{\mathrm{o}}^*$ とかく．

まず，最適な連結契約での利子率がゼロつまり $\iota^* = 1$ の場合を考える．この場合，市場利子率が正なら，最適な連結契約で地主が設定する利子率はそれよりも低くなるといえる．というのは，$R \in (0, 1]$ なので，$\iota^* = 1 \geqslant R$ である．したがって，$R < 1$ なら $\iota^* > R$ となるからである．

次に，最適な連結契約での利子率が正つまり $\iota^* < 1$ の場合を考える．$0 \leqslant j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ であれば，最適な連結契約での利子率は市場利子率より低くなることを示したのが，次の補題である．$0 \leqslant j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ は $j \in [0, j_{\mathrm{o}}^*)$ は地主のもとで働かず，$j \in (j_{\mathrm{o}}^*, j_{\mathrm{b}}^*)$ は働いて借りて，$j \in (j_{\mathrm{b}}^*, \infty)$ は働いて借りない，ということをいっている．

Lemma4.6　$\iota^* < 1$ かつ $0 \leqslant j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ であれば，$\iota^* > R$ である．

Proof. $\iota^* < 1 \ \wedge \ 0 \leqslant j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ だとする．

$j_{\mathrm{o}}^* = 0$ のとき．$j > j_{\mathrm{o}}^* = 0$ は地主のもとで働く．よって，任意の $j \in \mathbb{R}_{++}$ について，$j < j_{\mathrm{b}}^*$ は働いて借りる．$j > j_{\mathrm{b}}^*$ は働いて借りない．すると利潤最大化問題の解 (ι^*, w^*) は

$$
\begin{aligned}
\max_{(\iota,w)\in D_1} \pi(\iota, w) &= F(n) - wn + \left(\frac{1}{\iota} - \frac{1}{R}\right) \int_0^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(j + \iota w) - j\right) g(j)dj \\
&= F(n) - wn - \left(\frac{1}{\iota} - \frac{1}{R}\right) \frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_0^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} jg(j)dj + \left(1 - \frac{\iota}{R}\right) \frac{\alpha}{\alpha+\beta} w \int_0^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} g(j)dj
\end{aligned}
$$

の解でもある．ただし

$$
\begin{aligned}
D_1 &\equiv \{(\iota, w) \in (0,1] \times [a, \infty) \mid \iota < 1 \ \wedge \ j_{\mathrm{o}}(\iota, w) = 0 \ \wedge \ j_{\mathrm{b}}(\iota, w) > 0\} \\
&= \left\{(\iota, w) \in (0,1] \times [a, \infty) \ \middle| \ \frac{a - \iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1} \leqslant 0 \ \wedge \ \frac{\alpha}{\beta}\iota w > 0\right\}
\end{aligned}
$$

である．仮定 4.1 より g は連続なので，π は微分可能である．すると，(ι^*, w^*) は 1 階

条件

$$\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial\iota}=\lambda\times\frac{\partial\left(\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)(\iota,w)}{\partial\iota}\quad\text{かつ}\quad\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w}=\lambda\times\frac{\partial\left(\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)(\iota,w)}{\partial w}$$

を満たす．ただし $\lambda\geqslant 0$ はラグランジュ乗数である．$j_{\mathrm{b}}^*=\frac{\alpha}{\beta}\iota^*w^*$ より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi}{\partial j_{\mathrm{b}}}(\iota^*,w^*)&=-\left(\frac{1}{\iota^*}-\frac{1}{R}\right)\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{\alpha}{\beta}\iota^*w^*g(j_{\mathrm{b}}^*)+\left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^*g(j_{\mathrm{b}}^*)\\&=-\left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^*g(j_{\mathrm{b}}^*)+\left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^*g(j_{\mathrm{b}}^*)=0\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi(\iota^*,w^*)}{\partial w}&=\frac{\partial\pi(\iota^*,w^*)}{\partial j_{\mathrm{b}}}\frac{\partial j_{\mathrm{b}}(\iota^*,w^*)}{\partial w}-n+\left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*}g(j)dj\\&=-n+\left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*}g(j)dj<0\end{aligned}$$

である．$\frac{\partial\left(\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)(\iota^*,w^*)}{\partial w}<0$ なので，よって，1 階条件の右側の式より $\lambda>0$ である． したがって，相補スラック条件より，$\frac{a-\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^*}{\left(\frac{1}{\iota^*}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}=0$ である．1 階条件を書き直すと，

$$\frac{\frac{\partial\left(\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)(\iota^*,w^*)}{\partial\iota}}{\frac{\partial\left(\frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)(\iota^*,w^*)}{\partial w}}=\frac{\frac{\partial\pi(\iota^*,w^*)}{\partial\iota}}{\frac{\partial\pi(\iota^*,w^*)}{\partial w}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-\frac{\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-2}\frac{\beta}{\alpha+\beta}}{\left(\frac{1}{\iota^*}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\iota^*w^*-\frac{a-\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^*}{\left(\frac{1}{\iota^*}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)}{-\frac{\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{\left(\frac{1}{\iota^*}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}}=\frac{\frac{1}{\iota^{*2}}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*}jg(j)dj-\frac{1}{R}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^*\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*}g(j)dj}{-n+\left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*}g(j)dj}$$

である．$\frac{\alpha}{\beta}\iota^* w^* = j_{\mathrm{b}}^*, \frac{a-\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^*}{\left(\frac{1}{\iota^*}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1} = 0$ なので，書き直すと，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\iota^{*2}}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*} jg(j)dj - \frac{1}{R}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^*\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*} g(j)dj \\
&= \frac{1}{\iota^{*2}}\frac{\beta}{\alpha+\beta}(j_{\mathrm{b}}^* - 0)\left(-n + \left(1-\frac{\iota^*}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^{j_{\mathrm{b}}^*} g(j)dj\right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

となる．

$j_{\mathrm{o}}^* > 0$ のとき．任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j < j_{\mathrm{o}}^*$ であれば，$j < j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ なので j は地主のもとで働かない．$j \in (j_{\mathrm{o}}^*, j_{\mathrm{b}}^*)$ であれば地主のもとで働いて借りる．$j > j_{\mathrm{b}}^*$ であれば，$j > j_{\mathrm{b}}^* > j_{\mathrm{o}}^*$ なので地主のもとで働いて借りない．すると利潤最大化問題の解 (ι^*, w^*) は

$$\begin{aligned}
\max_{(\iota,w)\in D_2} \pi(\iota,w) = {}& F\left(\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{\infty} g(j)dj\right) - w\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{\infty} g(j)dj \\
&- \left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{R}\right)\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} jg(j)dj + \left(1-\frac{\iota}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} g(j)dj
\end{aligned}$$

の解でもある．ただし

$$\begin{aligned}
D_2 &\equiv \{(\iota,w) \in (0,1]\times[a,\infty) \mid \iota < 1 \ \wedge\ j_{\mathrm{o}}(\iota,w) > 0 \ \wedge\ j_{\mathrm{b}}(\iota,w) > 0 \ \wedge\ j_{\mathrm{b}}(\iota,w) > j_{\mathrm{o}}(\iota,w)\} \\
&= \left\{(\iota,w) \in (0,1]\times[a,\infty) \ \middle|\ \frac{a-\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w}{\left(\frac{1}{\iota}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1} > 0 \ \wedge\ \frac{\alpha}{\beta}\iota w > 0 \ \wedge\ \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota} < w\right\}
\end{aligned}$$

である．仮定 4.1 より g は連続で，仮定 4.2 より F は微分可能なので，π は微分可能である．すると，(ι^*, w^*) は 1 階条件

$$\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial\iota} = 0 \text{ かつ } \frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial w} = 0$$

つまり

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial j_{\mathrm{o}}}\frac{\partial j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}{\partial\iota} + \frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial j_{\mathrm{b}}}\frac{\partial j_{\mathrm{b}}(\iota,w)}{\partial\iota} &= -\frac{1}{\iota^2}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} jg(j)dj + \frac{1}{R}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} g(j)dj, \\
\frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial j_{\mathrm{o}}}\frac{\partial j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}{\partial w} + \frac{\partial\pi(\iota,w)}{\partial j_{\mathrm{b}}}\frac{\partial j_{\mathrm{b}}(\iota,w)}{\partial w} &= \int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{\infty} g(j)dj - \left(1-\frac{\iota}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}(\iota,w)}^{j_{\mathrm{b}}(\iota,w)} g(j)dj
\end{aligned}$$

を満たす．ここで，$j_{\mathrm{b}}^{*}=\frac{\alpha}{\beta}\iota^{*}w^{*}$ なので，$\frac{\partial\pi(\iota^{*},w^{*})}{\partial j_{\mathrm{b}}}=0$ である．また，仮定 4.1 より $\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{\infty}g(j)dj-\left(1-\frac{\iota^{*}}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj>0$ である．よって，1 階条件を書き直すと，

$$\frac{-\frac{\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-2}\frac{\beta}{\alpha+\beta}}{\left(\frac{1}{\iota^{*}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\iota^{*}w^{*}-\frac{a-\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{*}}{\left(\frac{1}{\iota^{*}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}\right)}{-\frac{\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{\left(\frac{1}{\iota^{*}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}}=\frac{\frac{\partial j_{\mathrm{o}}(\iota^{*},w^{*})}{\partial\iota}}{\frac{\partial j_{\mathrm{o}}(\iota^{*},w^{*})}{\partial w}}=\frac{-\frac{1}{\iota^{*2}}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}jg(j)dj+\frac{1}{R}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj}{\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{\infty}g(j)dj-\left(1-\frac{\iota^{*}}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj}$$

である．$\frac{\alpha}{\beta}\iota^{*}w^{*}=j_{\mathrm{b}}^{*}$，$\frac{a-\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{*}}{\left(\frac{1}{\iota^{*}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}-1}=j_{\mathrm{o}}^{*}$ なので，書き直すと，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\iota^{*2}}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}jg(j)dj-\frac{1}{R}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}w^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj\\&=\frac{1}{\iota^{*2}}\frac{\beta}{\alpha+\beta}(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\left(-\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{\infty}g(j)dj+\left(1-\frac{\iota^{*}}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj\right)\end{aligned}\tag{4.14}$$

となる．

したがって，(4.13) と (4.14) より，

$$\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}jg(j)dj-\frac{\iota^{*}}{R}\frac{\alpha}{\beta}\iota^{*}w^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj=(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\left(-\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{\infty}g(j)dj+\left(1-\frac{\iota^{*}}{R}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj\right)$$

である．ただし $j_{\mathrm{o}}^{*}\geqslant 0$ である．$\frac{\alpha}{\beta}\iota^{*}w^{*}=j_{\mathrm{b}}^{*}$ なので，書き直すと，

$$\begin{aligned}&\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}jg(j)dj+(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\left(\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{\infty}g(j)dj-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj\right)\\&=\frac{\iota^{*}}{R}\left(j_{\mathrm{b}}^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj-(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj\right)\end{aligned}$$

である．仮定 4.1 より $j_{\mathrm{b}}^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj-(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj>0$ なので，よって

$$\begin{aligned}\frac{\iota^{*}}{R}&=1+\frac{\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}jg(j)dj+j_{\mathrm{b}}^{*}\int_{j_{\mathrm{b}}^{*}}^{\infty}g(j)dj-j_{\mathrm{o}}^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{\infty}g(j)dj}{j_{\mathrm{b}}^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj-(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj}\\&=1+\frac{\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}(j-j_{\mathrm{o}}^{*})g(j)dj+(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\int_{j_{\mathrm{b}}^{*}}^{\infty}g(j)dj}{j_{\mathrm{b}}^{*}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj-(j_{\mathrm{b}}^{*}-j_{\mathrm{o}}^{*})\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{j_{\mathrm{o}}^{*}}^{j_{\mathrm{b}}^{*}}g(j)dj}>1\end{aligned}$$

つまり $\iota^{*}>R$ となる．　□

この補題より，次の定理が成り立つ．つまり，最適な連結契約で地主が設定する利

子率が正の場合，借りる労働者の割合（測度）がゼロでなければ，その利子率は市場利子率より低くなると結論付けることができる．

Theorem4.2 $\iota^* < 1$ かつ $B(\iota^*, w^*) \neq \emptyset$ であれば，$\iota^* > R$ である．

Proof. $\iota^* < 1$ かつ $B(\iota^*, w^*) \neq \emptyset$ だとする．$j_{\mathrm{o}}^* > j_{\mathrm{b}}^*$，$j_{\mathrm{o}}^* = j_{\mathrm{b}}^*$ か $j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ のいずれかが成り立つ．$j_{\mathrm{o}}^* > j_{\mathrm{b}}^*$ であれば，$\frac{a - \iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^*}{\left(\frac{1}{\iota^*}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1} > \frac{\alpha}{\beta}\iota^* w^*$ なので，$w^* < \frac{\beta a}{(\alpha+\beta)\iota^{*\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \alpha\iota^*}$ である．よって，補題 4.3 より，$B(\iota^*, w^*) = \emptyset$ となり，矛盾である．$j_{\mathrm{o}}^* = j_{\mathrm{b}}^*$ であれば，任意の $j \in \mathbb{R}_+$ について，$j > j_{\mathrm{o}}^* = j_{\mathrm{b}}^*$ であれば働いて借りない．$j < j_{\mathrm{o}}^* = j_{\mathrm{b}}^*$ であれば働かない．したがって，働いて借りる労働者の集合は空か 1 点集合 $\{j_{\mathrm{o}}^*\} = \{j_{\mathrm{b}}^*\}$ である．よって，$B(\iota^*, w^*) = \emptyset$ となり，矛盾である．したがって，$j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ である．$0 \leqslant j_{\mathrm{o}}^* < j_{\mathrm{b}}^*$ なので，補題 4.6 より，$\iota^* > R$ である． □

参考文献

[1] Banerjee, B. (1983), *Rural to Urban Migration and the Urban Labour Market: A Case Study of Delhi*, Himalaya Publishing House, Bombay.

[2] Banerji, S. (1995), "Interlinkage, Investment and Adverse Selection," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 28, 11–21.

[3] Bardhan, P. K. (1984), *Land, Labor, and Rural Poverty*, Columbia University Press, New York, Chapter 6.

[4] Bardhan, P. K. (1989), *The Economic Theory of Agrarian Institutions*, Clarendon University Press, Oxford.

[5] Bardhan, P. K. and Rudra, A. (1978), "Interlinkage of Land, Labour and Credit," *Ecnomic and Political Weekly*, 13, 367–384.

[6] Bardhan, P. K. and Udry, C. (1999), *Development Microeconomics*, Oxford University Press, New York.

[7] Basu, K. (1980), "Optimal Policies in Dual Economies," *Quarterly Journal of Economics*, 95, 187–196.

[8] Basu, K. (1983), "The Emergence of Isolation and Interlinkage in Rural Markets," *Oxford Economic Papers*, 35, 262–280.

[9] Basu, K. (1987), "Disneyland Monopoly, Interlinkage and Usurious Interest Rates," *Journal of Public Economics*, 34, 1–7.

[10] Basu, K. (1997), *Analytical Development Economics*, MIT Press, Cambridge, MA.

[11] Basu, P. (2006), *Improving Access to Finance for India's Rural Poor*, The World Bank, Washington, D. C.

[12] Bell, C. (1988), "Credit Markets, Contracts, and Interlinked Transactions," in H. B. Chenery and T. N. Srinivasan, eds., *Handbook of Development Economics*, vol.1, North-Holland, Amsterdam, pp.763–830.

[13] Bagnori, M. and Bergstrom, T. (2005), "Log–concave probability and its applications," *Economic Theory*, 26, 445–469.

[14] Bhagwati, J. N. and Srinivasan, T. N. (1974), "On Reanalyzing the Harris–Todaro Model: Policy Rankings in the Case of Sector-Specific Sticky Wages," *American Economic Review*, 64, 502–508.

[15] Bhaumik, S. K. and Rahim, A. (1999), "Interlinked Credit Transactions in Rural West Bengal," *Indian Journal of Agricultural Economics*, 54, 169–184.

[16] Bhaumik, S. K. and Rahim, A. (2004), "Structure and Operation of Rual Credit Markets: Some Results Based on Filed Surveys in West Bengal," *Journal of Rural Development*, 23, 1–30.

[17] Braverman, A. and Guasch, J. L. (1984), "Capital Requirements, Screening and Interlinked Sharecropping and Credit Contracts," *Journal of Rural Development*, 14, 359–374.

[18] Calvo, G. A. (1978), "Urban Unemployment and Wage Determination in LDC'S: Trade Unions in the Harris–Todaro Model," *International Economic Review*, 19, 65–81.

[19] Chaudhuri, T. D. (1982), "The Role of Institutions in Rural-Urban Migration and Urban Unemployment in LDCs: With and Without Changing Level of Indebtedness of the Peasantly," *The Pakistan Development Review*, 21, 127–147.

[20] Corden, W. M. (1974), *Trade Policy and Economic Welfare*, Clarendon Press, Oxford, Chapter.6.

[21] Corden, W. M. and Findlay, R. (1975), "Urban Unemployment, Intersectoral Capital Mobility and Development Policy," *Economica*, 42, 59–78.

[22] Fields, G. S. (1975), "Rural-Urban Migration, Urban Unemployment and Underemployment, and Job-Search Activity in LDCs," *Journal of Development Economics*, 2, 165–187.

[23] Fields, G. S. (2004), "A Guide to Multisector Labor Market Models," Working Paper No. 86, Cornell University ILR School.

[24] Floro, S. L. and Yotopoulos, P. A. (1991), *Informal Credit Markets and the New Institutional Economics: The Case of Phillipine Agriculture*, Westview Press, Inc, Boulder.

[25] Gangopadhyay, S. and Sengupta, K. (1987), "Small Farmers, Moneylenders and Trading Activity," *Oxford Economic Papers*, 39, 333–342.

[26] Gill, A. (2000), *Rural Credit Markets: Financial Sector Reforms and the Informal Lenders*, Deep and Deep Publications, New Delhi.

[27] Harris, J. R. and Todaro, M. P. (1970), "Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis," *American Economic Review*, 60, 126–142.

[28] Keshri, K. and Bhagat, R. B. (2010), "Temporary and Seasonal Migration in India," *Genus*, 66, 25–45.

[29] Keshri, K. and Bhagat, R. B. (2012), "Temporary and Seasonal Migration: Regional Pattern, Characteristics and Associated Factors," *Economic and Political Weekly*, 47, 81–88.

[30] Khan, M. A. (1979), "Differential Wages and Unemployment in the LDC's: A Multisectoral Harris–Todaro Model with Endogeneous Wages," Working Paper No. 45, Johns Hopkins University, Baltimore, MD.

[31] Khan, M. A. (1980), "The Harris–Todaro Hypothesis and the Heckscher–Ohlin–Samuelson Trade Model: A Synthesis," *Journal of International Economics*, 10, 527–547.

[32] Khan, M. A. (1980), "Dynamic Stability, Wage Subsidies and the Generalized Harris–Todaro Model," *The Pakistan Development Review*, 19, 1–24.

[33] Khan, M. A. (2008), "Harris–Todaro Hypothesis," in S. N. Durlauf and L. E. Blume, eds., *The New Palgrave*, Macmillan, New York, pp.830-836.

[34] Khan, M. A. and Chaudhuri, T. D. (1984), "Development Policies in LDC's with Several Ethnic Groups—A Theoretical Analysis," Working Paper No. 1090, Department of Economics, University of Illinois at Urbana-Campaign.

[35] Iritani, J. and Sumino, K. (2001), "On the existence of unemployment equilibria under wage rigidity," *The Economic Review*, 51, 271–294.

[36] Lall, S. V., Selod, H. and Shalizi, Z. (2006), "Rural-Urban Migration in Developing Countries: A Survey of Theoretical Predictions and Empirical Findings," World Bank Policy Research Working Paper 3915.

[37] Mishra, D. K. (2004), *Market Interlinkages in an Agrarian Economy: Extent, Pattern and Determinants*, Ph.D thesis, CSRD, Jawaharlal Nehru University, New Delhi.

[38] Mishra, D. K. (2008), "Structural Inequalities and Interlinked Transactions in Agrarian Markets: Results of a Field Survey," in S. K. Bhaumik, ed., *Reforming Indian Agriculture: Towards Employment Generation and Poverty Reduction*, Sage Publications, New Delhi, pp.231–268.

[39] Mishra, D. K. (2011), "Behind Dispossession: State, Land Grabbing and Agrarian Change in Rural Orissa," Paper presented at the *International Conference on Global Grapping*, Institute of Development Studies, University of Sussex, 6–8 April.

[40] Oberai, A. S. and Singh, H. K. Manmohan (1983), *Causes and Consequences of Internal Migration: A Study in the Indian Punjab*, Oxford University Press, Delhi.

[41] Oberai, A. S., Prasad, H. Pradhan, and Sardana, M. G. (1989), *Determinants and Consequences of Internal Migration in India*, Oxford University Press, Delhi.

[42] Oi, W. Y. (1971), "A Disneyland Dilenma: Two-Part Tariffs for a Mickey Mouse Monopoly," *Quaterly Journal of Economics*, 85, 77–96.

[43] Ray, D. (1998), *Development Economics*, Princeton University Press, Princeton, Chapter 14.

[44] Sarap, K. (1991), *Interlinked Agrarian Markets in Rural India*, Sage Publications, New Delhi.

[45] Sharma, H. R. and Kumar, V. (2003), "Functioning of Agricultural Labour Market: Micro Evidence from an Agriculturally Developed Region of Himachal Pradesh," *Indian Journal of Agricultural Economics*, 58, 695–714.

[46] Sohi, R. S. and Chahal, S. S. (2004), "Interlinked Credit Transactions in Rural Punjab," *Indian Journal of Agricultural Economics*, 59, 105–120.

[47] Stiglitz, J. E. (1974), "Alternative Theories of Wage Determination and Unemployment in LDC's: The Labor Turnover Model," *Quarterly Journal of Economics*, 88, 194–227.

[48] Stiglitz, J. E. (1976), "The Efficiency Wage Hypothesis, Surplus Labour, and the Distribution of Income in L.D.C.s," *Oxford Economic Papers*, 28, 185–207.

[49] Todaro, M. P. and Smith, S. C. (2009), *Economic Development*, Tenth edition, Addison-Wesley, New York, Chapter 7.

[50] Williamson, J. (1988), "Migration and Urbanization," in H. B. Chenery and T. N. Srinivasan, eds., *Handbook of Development Economics*, vol.1, North-Holland, Amsterdam, pp.426–461.

謝辞

本学位論文の作成のみならず，日頃より時間を惜しまず，熱心で心暖まるご指導をいただいている宮川栄一先生（神戸大学）と入谷純先生（福山大学）には心より感謝申し上げます．その学恩は他にたとえることができないほど深いものがあります．

本学位論文の審査委員である加茂知幸先生（京都産業大学）からは，審査過程のみならず，神戸大学・大阪大学ジョイント・セミナーや日本経済学会，六甲フォーラムなどで報告した際にも，数多くの建設的なコメントをいただきました．ここに記して感謝申し上げます．審査委員である畳谷整克先生と中西訓嗣先生（いずれも神戸大学）からは，お忙しいなか論文を精読していただき，中間セミナーや最終審査で，数多くの有益なコメントをいただきました．心より感謝申し上げます．本学位論文の第 2 章の作成において，西島章次先生（神戸大学）から開発経済学の視点から鋭いコメントをいくつもいただきました．ここに記して感謝申し上げます．なお，本稿のありうべき誤謬はすべて筆者の責任に帰するものです．

最後に，本学位論文の第 1 章の作成において，数多くの文献を国内外から入手するにあたり，神戸大学社会科学系図書館の社会科学系情報サービス係の有馬さんと杉原さんには大変お世話になりました．ここに記して感謝申し上げます．