Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2026-11-19

Module d'Alexander des Noeuds Fibrés et Polynôme de Hosokawa des Lacements Fibrés

Kanenobu, Taizo

(Citation)
Mathematics Seminar Notes,9(1):75-84

(Issue Date)
1981

(Resource Type)
journal article

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/E0001590

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0001590

KOBE UNIVERSITY

MATHEMATICS SEMINAR NOTES
Vol. 9 (1981)

Module d'Alexander des Noeuds Fibrés et Polynôme de Hosokawa des Lacements Fibrés

Dédié à la mémoire de S. Kasahara

Par Taizo KANENOBU

1. Introduction

Soit l un lacement orienté à μ composantes et apprivoisé dans S^3. Son polynôme de Hosokawa [5] $\nabla_l(t)$ est un polynôme tel que:

(1) les coefficients soient entiers, ou $\nabla_l(t) \in Z[t]$;

(2) $\nabla_l(t) = t^{2n}\nabla_l(t^{-1})$, où $2n$ est le degré de $\nabla_l(t)$.

Si $\mu = 1$, c'est-à-dire l est un noeud, $\nabla_l(t)$ est un polynôme d'Alexander et satisfait à

(3) $\nabla_l(1) = \pm 1$.

D'autre part, si l est un lacement fibré sur S^1, on a

(4) $\nabla_l(0) = \pm 1$.

Burde [1] a construit un noeud fibré pour tout polynôme satisfaisant à (1), (2), (3) et (4), et Quach [9] a redémontré ce théorème de façon simple.

Morton, Stallings, Quach et Weber ([8], [12], [10], [9]) ont construit une infinité de noeuds fibrés ayant même polynôme d'Alexander. En outre,

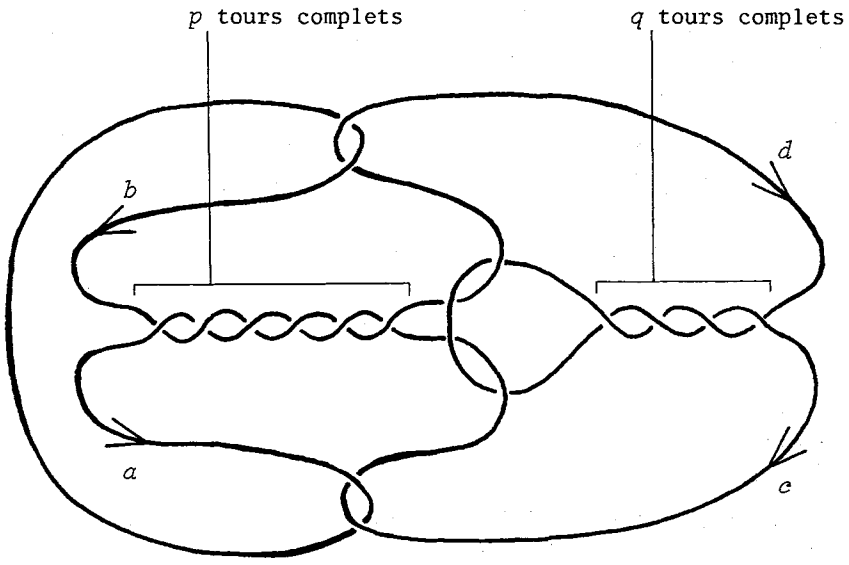


Figure 1.

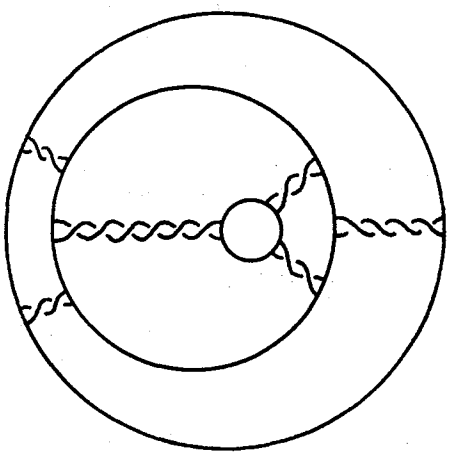


Figure 2.

Quach [9] a montré abstraitement qu'il existe une infinité de noeuds fibrés ayant même module d'Alexander.

Au §2 nous réalisons une famille de noeuds fibrés, tous distincts, ayant même module d'Alexander.

Par Hosokawa [5], tout polynôme satisfaisant à (1) et (2) est le polynôme de Hosokawa d'un lacement à μ composantes pour tout $\mu \geq 2$. Au §3 nous monterons que les conditions (1), (2) et (4) sont suffisantes pour qu'un polynôme $\nabla(t)$ soit un polynôme de Hosokawa d'un lacement fibré, en modifiant légèrement la construction de Quach [9]. Au §4 nous donnons un exemple d'un infinité de lacements fibrés ayant pour polynôme de Hosokawa $(1 - t)^2$.

Dans cet article, pour démontrer qu'un lacement se fibre, on montre qu'il est le bord d'une p-surface [6].

2. Module d'Alexander des noeuds fibrés

Soit $K_{p,q}$ $(p,q \in \mathbb{Z})$ un noeud représenté sur la figure 1. Le cas où $p = 3$ et $q = -2$ y est illustré. $K_{p,q}$ est une union symétrique généralisée de "figure-eight knot" au sens de [7] p.136. $K_{p,0}$ et $K_{0,q}$ sont contenus dans une famille de noeuds que Quach [9] a construite. Comme $K_{p,q}$ est le bord de la p-surface sur la figure 2, on a, d'abord,

Proposition 1. *$K_{p,q}$ est un noeud fibré.*

Ensuite on obtient:

Proposition 2. *Le module d'Alexander de $K_{p,q}$ admet $A_{p,q}$ comme matrice de présentation, où*

$$A_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 - 3t + t^2 & (p - q)t \\ 0 & 1 - 3t + t^2 \end{pmatrix}.$$

Par suite le polynôme d'Alexander de $K_{p,q}$ est $(1 - 3t + t^2)^2$. Si $p - q = p' - q'$, alors $A_{p,q} = A_{p',q'}$, et donc $K_{p,q}$ et $K_{p',q'}$ ont le même module d'Alexander. Malgré cela, nous pouvons démontrer le

Théorème 1. *Les noeuds* $K_{p,p+1}$ $(p = 0, 1, 2, \cdots)$ *sont distincts.*

Démonstration. Soit S_5 le groupe symétrique de degré 5. Le groupe diédral d'ordre 10 est un sous-groupe de S_5 engendré par (01234) et (14)(23), et noté D_{10}.

Posons $G_p = \pi_1(S^3 - K_{p,p+1})$ et choisissons a, b, c et d sur la figure 1 pour les générateurs de G_p. Soit $\phi_p: G_p \to D_{10}$ un homomorphisme surjectif défini par $\phi_p(a) = \phi_p(b) = (14)(23)$ et $\phi_p(c) = \phi_p(d) = (01)(24)$. Remarquons que pour tout homomorphisme surjectif $\psi_p: G_p \to D_{10}$, il existe un automorphisme ω de D_{10} tel que $\psi_p = \omega\phi_p$. (cf. [3] p.163)

ϕ_p détermine le revêtement ramifié sur $K_{p,p+1}$:

$$f_p: X_p \to S^3.$$

En appliquant la méthode de [11] 10F ou [4] §7, on peut obtenir $H_1(X_p) = Z/2 \oplus Z/10P^2 + 10P + 2$. Alors $K_{p,p+1}$ est distinct de $K_{q,q+1}$ si $p \neq q$. *C.q.f.d.*

3. Polynôme de Hosokawa des lacements fibrés

Théorème 2. *Soit* $\nabla(t)$ *un polynôme satisfaisant à* (1), (2) *et* (4), *et* μ *un entier* ≥ 2. *Alors il existe un lacement fibré à* μ *composantes dont le polynôme de Hosokawa est* $\nabla(t)$.

Démonstration. Le polynôme $\nabla(t)$ du théorème peut s'écrire:

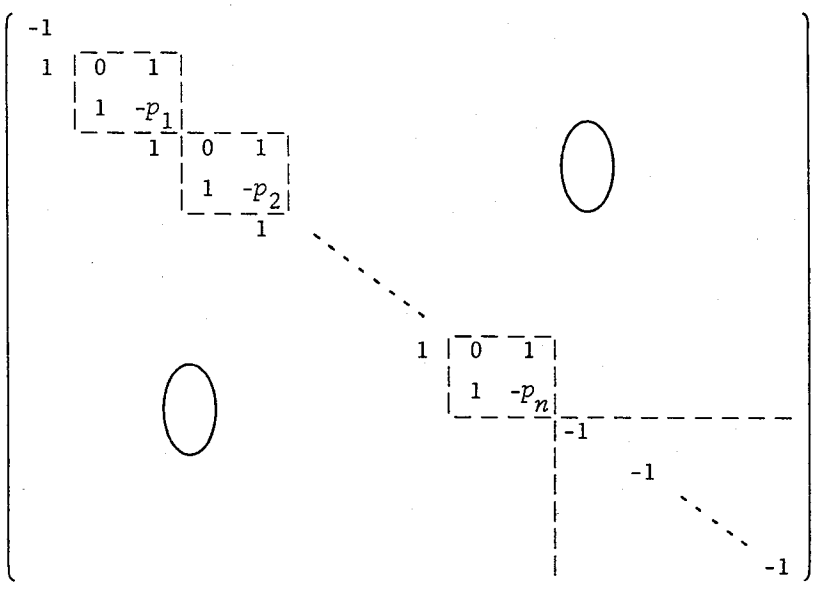
$$\nabla(t) = \nabla(0)\left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(-t)^i(1-t)^{2(n-i)} + (1-t)^{2n} \right\}$$

où $p_i \in Z$. (cf. [2] p.144)

Nous représentons sur la figure 3 une surface orientable F de genre n et une base $\{ a_1, a_2, \cdots, a_{2n+\mu-1} \}$ du groupe d'homologie $H_1(F)$. Soit L un lacement à μ composantes qui est le bord de F. Puisque L est aussi le bord de la p-surface de la figure 4, il se fibre.

Soit $i_+ : H_1(F) \to H_1(S^3 - F)$ l'homomorphisme obtenu en poussant F normalement dans $S^3 - F$. Soit v_{ij} le nombre d'enlacement de a_i avec $i_+(a_j)$. Notons $V = (v_{ij})$ la $(2n + \mu - 1)$-matrice carée. On trouve:

$V =$



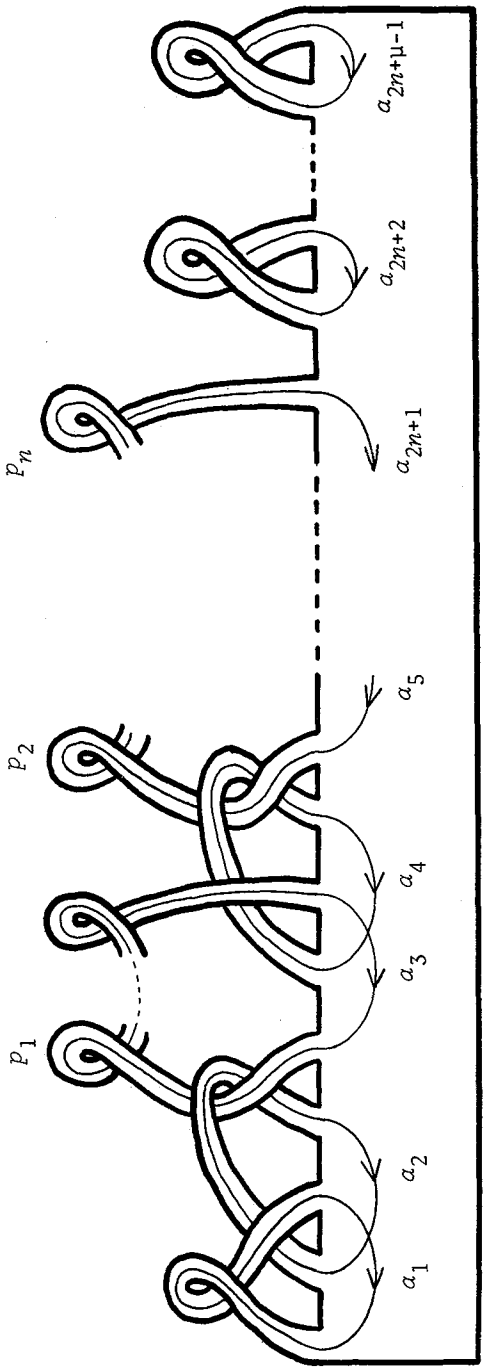


Figure 3.

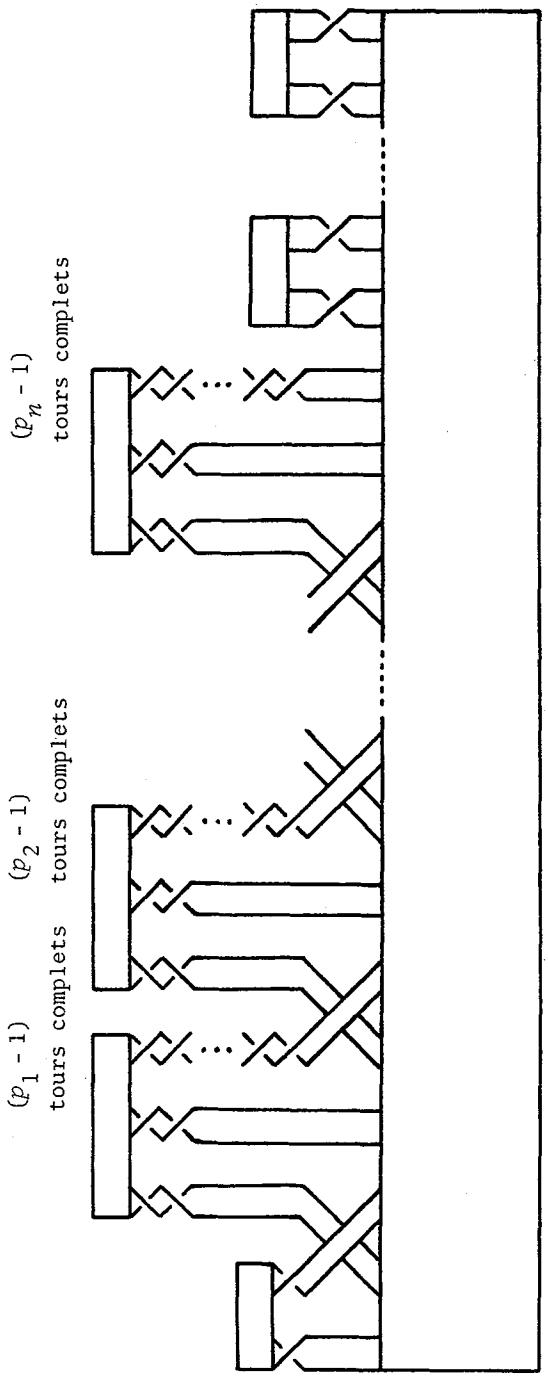


Figure 4.

Alors le polynôme de Hosokawa $\nabla_L(t)$ de L peut s'écrire de la forme:

$$(1 - t)^{\mu-1}\nabla_L(t) = \pm d\acute{e}t(V - tV^*)$$

où $*$ indique la transposée.

Par récurrence sur n, on a $\nabla_L(t) = \nabla(t)$. *C.q.f.d.*

4. Exemple

Dans ce paragraphe, nous construisons une famille de lacements à 2 composantes L_m $(m \in Z)$.

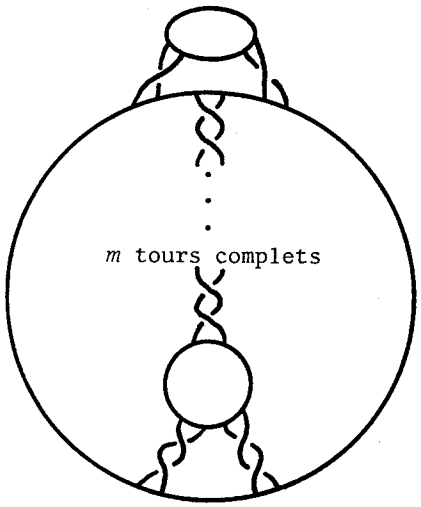


Figure 5.

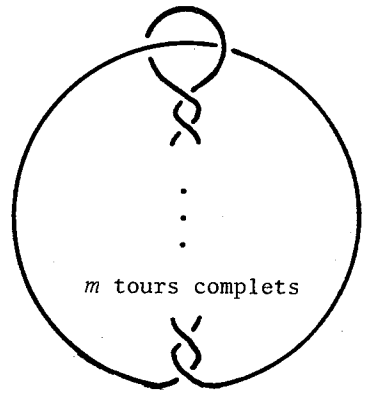


Figure 6.

Considérons la p-surface de genre 1 sur la figure 5 dont le bord est L_m, qui donc se fibre. Son polynôme d'Alexander est égal à $(1-x)(1-y)$ et donc celui de Hosokawa est égal à $(1-t)^2$. Puisqu'une de ces composantes de L_m est un "twist knot" (cf. [11] p.112) représenté sur la figure 6, L_m est distinct de $L_{m'}$, si $m \neq m'$. (cf. [11] p.166)

Il est facile de voir que $L_1 = 8^2_{15}$, $L_0 = 5^2_1$, $L_{-1} = 7^2_8$ et $L_{-2} = 9^2_{47}$ de la table de Rolfsen [11].

Bibliographie

[1] G. Burde: Alexanderpolynome Neuwirthscher Knoten, Topology, 5 (1966), 321-330.

[2] R. H. Crowell et R. H. Fox: Introduction to Knot Theory, Ginn and Co., Boston, 1963.

[3] R. H. Fox: A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics (M.K.Fort,Jr. (ed.)), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962, 120-167.

[4] R. Hartley et K. Murasugi: Covering linkage invariants, Can. J. Math., 29 (1977), 1312-1339.

[5] F. Hosokawa: On V-polynomials of links, Osaka Math. J., 10 (1958), 273-282.

[6] T. Kanenobu: The augmentation subgroup of a pretzel link, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 7 (1979), 363-384.

[7] S. Kinoshita et H. Terasaka: On unions of knots, Osaka Math. J., 9 (1957), 131-153.

[8] H. Morton: Infinitely many fibered knots having the same Alexander polynomial, Topology, 17 (1978), 101-104.

[9] C. V. Quach: Polynôme d'Alexander des noeuds fibrés, C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A, 289 (1979), 375-377.

[10] C. V. Quach et C. Weber: Une famille infinie de noeuds fibrés cobordants à zéro et ayant même polynôme d'Alexander, Comment. Math. Helv., 54 (1979), 562-566.

[11] D. Rolfsen: Knots and Links, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.

[12] J. Stallings: Constructions of fibred knots and links, Proc. Symp. Pure Math., 32, A.M.S., Providence, R.I., 1978, 55-60.

Département de mathématique
Université de Kobé
Nada, Kobé, 657
Japon

Received June 10, 1981.