多変量GARCH型モデルに関する最近の展開

羽森, 茂之

(Citation)
国民経済雑誌,212(6):1-19

(Issue Date)
2015-12

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/E0040683

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0040683

多変量 GARCH 型モデルに関する最近の展開

羽　森　茂　之

国民経済雑誌　第 212 巻　第 6 号　抜刷
平 成 27 年 12 月

多変量 GARCH 型モデルに関する最近の展開

羽　森　茂　之

本稿は，MGARCH（multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity）モデルに関する最近の展開に関してサーベイを行う。全体の議論を行う前提として，まず，1 変量の GARCH 型モデル（ARCH モデル，GARCH モデル，EGARCH モデル）について紹介を行う。特に，VECH，BEKK，CCC という多変量 GARCH 型モデルの 3 つの基本モデルに関して整理を行う。その後，DCC，ADCC，DECO の 3 つの相関係数変動モデルに焦点をあて，それらの特徴に関して整理を行う。

キーワード　多変量 GARCH モデル，ボラティリティ，DCC，ADCC，DECO

1　は じ め に

ボラティリティは，資産運用を行う際に重要な情報である。いま，簡単化のために，収益率（r）を次のようにモデル化する。

$$r_t = \mu_t(\boldsymbol{\pi}) + \varepsilon_t \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{\pi}$ はパラメータのベクター，ε_t は誤差項である。$\mu_t(\boldsymbol{\pi})$ は収益率の平均部分の動きを定式化した部分であり，AR（autoregressive）モデルや ARMA（autoregressive-moving average）モデル等が用いられることが多い。たとえば，AR（q）モデル（次数 q の AR モデル）の場合には，（1）式は次のように定式化される。

$$r_t = \pi_0 + \pi_1 r_{t-1} + \cdots + \pi_q r_{t-q} + \varepsilon_t \tag{1a}$$

（1）式より，

$$E_{t-1}(r_t) = \mu_t(\boldsymbol{\pi}) \tag{2}$$

となるので，（1）式から（2）式をひいて両辺を自乗すると次式がえられる。

$$(r_t - E_{t-1}(r_t))^2 = \varepsilon_t^2 \tag{3}$$

（3）式より，ε_t^2 は 1 期先の収益率（r_t）を予測した際の予測誤差（$r_t - E_{t-1}(r_t)$）の自乗の値に等しいことが理解できる。

ここで，

$$V_{t-1}(r_t)=E_{t-1}[(r_t-E_{t-1}(r_t))^2]=E_{t-1}(\varepsilon_t^2) \tag{4}$$

となることから明らかなように，予測誤差の自乗の条件付き期待値は，収益率の条件付き分散に等しい。この t 期の収益率の条件付き分散 $V_{t-1}(r_t)$ を t 期の「ボラティリティ（volatility)」と呼び，以下では，h_t で表す[1)]。

ボラティリティの値は，その資産収益率のリスクの大きさを表している。なぜならば，この値が大きいほど収益率の将来予測が大きく外れる可能性が高いことを意味し，リスクが高いといえるからである。多くの投資家は，収益率の期待値が同じであれば，よりリスクの小さい資産を選択するであろう。つまり，ボラティリティの値は，ポートフォリオの選択を行う際に重要な情報となる[2)]。

2 ボラティリティの定式化[3)]

渡部（2000）を参考にしながら，1 変量のボラティリティ変動モデルについて整理を行う。

2.1 ARCH モデル

いま，ε_t^2 が AR (q) モデルにしたがっているものと仮定する。

$$\varepsilon_t^2=\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\alpha_2\varepsilon_{t-2}^2+\cdots+\alpha_q\varepsilon_{t-q}^2+\eta_t \tag{5}$$

このとき，

$$E_{t-1}(\varepsilon_t^2)=\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\alpha_2\varepsilon_{t-2}^2+\cdots+\alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 \tag{6}$$

が成立し，$E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ をボラティリティ（h_t）で置き換えると，

$$h_t=\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\alpha_2\varepsilon_{t-2}^2+\cdots+\alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 \tag{7}$$

をえる。

さらに，z_t を平均が 0，分散が 1 の互いに独立な正規分布にしたがう確率変数とすると，ε_t は次のように $\sqrt{h_t}$ と z_t の積として表すことができる[4)]。

$$\varepsilon_t=\sqrt{h_t}z_t,\ z_t\sim iid\ N(0,\ 1) \tag{8}$$

Engle（1982）は，（７)式と（８)式とからなるモデルを提案し，ARCH（q）モデル（次数 q の autoregressive conditional heteroscedasticity モデル）と呼んだ。なお，ボラティリティの非負性を保証するために，係数には $\omega>0,\ \alpha_i\geq 0$（$i=1,\ 2,\ \cdots q$）の制約が必要となる。

（１)式と（８)式から，モデルは次のようにまとめることができる。

$$r_t=\mu_t(\boldsymbol{\pi})+\sqrt{h_t}z_t \tag{9}$$

例として，AR(1)-ARCH(1) モデルは，（９)式から次のように書くことができる。

$$r_t=\pi_0+\pi_1r_{t-1}+\sqrt{\omega+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}z_t \tag{9a}$$

2.2　GARCH モデル

Bollerslev (1986) は，ボラティリティの説明変数に，過去の予測誤差の自乗の値だけでなく，過去のボラティリティの値を加えたモデルを提案した。これが，GARCH (generalized ARCH) モデルである。GARCH (p, q) モデルは次のように定式化される。

$$h_t=\omega+\sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}+\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2,\ \omega>0,\ \alpha_j,\ \beta_i\geq 0\ (j=1,2,\cdots q\ ;\ i=1,2,\cdots p) \quad (10)$$

(10)式において，右辺第 2 項が GARCH 項，第 3 項が ARCH 項と呼ばれ，p は GARCH 項の次数を示し，q は ARCH 項の次数を示している。(10)式から明らかなように，このモデルは ARCH モデルを一般化したものである。

いま，例として，次の GARCH (1, 1) モデルを考える。

$$h_t=\omega+\beta h_{t-1}+\alpha\varepsilon_{t-1}^2 \quad (11)$$

(11)式は,

$$(1-\beta L)h_t=\omega+\alpha\varepsilon_{t-1}^2 \quad (12)$$

となる。ただし，L はラグ演算子で，$Lx_t=x_{t-1}$ である。$|\beta|<1$ であれば，(12)式より

$$h_t=\frac{1}{(1-\beta L)}(\omega+\alpha\varepsilon_{t-1}^2)=\frac{\omega}{(1-\beta)}+\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\varepsilon_{t-1-i}^2 \quad (13)$$

がえられる。(13)式は，次数が無限大の ARCH モデルである。すなわち，(11)式で示される GARCH (1, 1) モデルは，次数が無限大の ARCH モデルに対応している。ARCH モデルと GARCH モデルの双方を用いて収益率の変動を分析した場合には，ARCH モデルでは長い次数が選択される傾向があるが GARCH モデルでは簡単な GARCH (1, 1) モデルが選択されることが多い。

先に述べたように，ボラティリティ (h_t) は，予測誤差の自乗 (ε_t^2) の条件付き期待値である。いま，ボラティリティの予測誤差 ($\varepsilon_t^2-E_{t-1}(\varepsilon_t^2)=\varepsilon_t^2-h_t$) を η_t で表すと，

$$\varepsilon_t^2=h_t+\eta_t \quad (14)$$

となる。(14)式の関係を 1 期ずらすと

$$\varepsilon_{t-1}^2=h_{t-1}+\eta_{t-1} \quad (15)$$

となり，(15)式を(11)式に代入すると

$$h_t=\omega+(\alpha+\beta)h_{t-1}+\alpha\eta_{t-1} \quad (16)$$

となる。(16)式は，h_t に関する AR (1) モデルである。また，(16)式から GARCH (1, 1) モデルの分散の定常値 ($E(\varepsilon_t^2)$) は，$\omega/(1-\alpha-\beta)$ で与えられることがわかる[5)]。

(16)式において，ボラティリティと定常値との乖離を $u_t=h_t-\omega/(1-\alpha-\beta)$ とおくと，$h_t=u_t+\omega/(1-\alpha-\beta)$ となるので，これを(16)式に代入して，h_t を消去すると

$$u_t=(\alpha+\beta)u_{t-1}+\alpha\eta_{t-1} \quad (17)$$

と書け，(17)式は，さらに，

$$(1-(\alpha+\beta)L)u_t=\alpha\eta_{t-1} \qquad (18)$$

となるので，最終的に，次のように書くことができる。

$$u_t=\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)L}\eta_{t-1}=\alpha\Sigma_{i=1}^{\infty}(\alpha+\beta)^i\eta_{t-1-i} \qquad (19)$$

(19)式より明らかなように，ボラティリティのショック（η_t）の u_t への影響は，$\alpha+\beta$ の大きさによって把握することができることがわかる。もし $|\alpha+\beta|<1$ であれば，時間の経過とともに乖離（u_t）は 0 へと収束し，ボラティリティ（h_t）がその定常値である $\omega/(1-\alpha-\beta)$ に収束することを意味している。また，$|\alpha+\beta|$ の値が 1 に近いほど，ボラティリティのショックに対する影響が長期間にわたり持続することとなる。

ここで，GARCH モデルの定常値について例を示すと以下のとおりである。

（例１：GARCH (2, 1) モデル）

次の GARCH (2, 1) モデルを考える。

$$h_t=\omega+\beta_1h_{t-1}+\beta_2h_{t-2}+\alpha\varepsilon_{t-1}^2 \qquad (20)$$

いま，ボラティリティの予測誤差（$\varepsilon_t^2-E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$）を η_t で表すと，

$$\varepsilon_t^2=h_t+\eta_t \qquad (21)$$

となる。(21)式の関係を 1 期ずらすと

$$\varepsilon_{t-1}^2=h_{t-1}+\eta_{t-1} \qquad (22)$$

となり，(22)式を(20)式に代入すると

$$h_t=\omega+(\alpha+\beta_1)h_{t-1}+\beta_2h_{t-2}+\alpha\eta_{t-1} \qquad (23)$$

となる。(23)式は，h_t に関する AR (2) モデルである。

ここで，(23)式より，GARCH (2, 1) モデルの定常値（$E(\varepsilon_t^2)$）は，$\omega/(1-\alpha-\beta_1-\beta_2)$ で与えられることがわかる。

（例２： GARCH (2, 2) モデル）

次に，GARCH (2, 2) モデルを考える。

$$h_t=\omega+\beta_1h_{t-1}+\beta_2h_{t-2}+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 \qquad (24)$$

いま，ボラティリティの予測誤差（$\varepsilon_t^2-E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$）を η_t で表すと，

$$\varepsilon_t^2=h_t+\eta_t \qquad (25)$$

となる。(25)式の関係を 1 期ずらすと

$$\varepsilon_{t-1}^2=h_{t-1}+\eta_{t-1} \qquad (26)$$

となり，さらにもう 1 期ずらすと

$$\varepsilon_{t-2}^2 = h_{t-2} + \eta_{t-2} \tag{27}$$

がえられる。ここで，(26)式と(27)式を(24)式に代入すると

$$h_t = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)h_{t-1} + (\alpha_2 + \beta_2)h_{t-2} + \alpha_1\eta_{t-1} + \alpha_2\eta_{t-2} \tag{28}$$

となる。(28)式は，h_t に関する ARMA (2, 2) モデルである。

したがって，(28)式より，GARCH (2, 2) モデルの定常値（$E(\varepsilon_t^2)$）は，$\omega/(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2)$ で与えられることがわかる。

2.3　ボラティリティ変動の非対称性

GARCH 型モデルは，ボラティリティの変動を表すための優れたモデルであるが，欠点も併せ持っている。収益率のボラティリティは，資産価値が上がった良いニュースのあった次の期よりも資産価値が下がったという悪いニュースのあった次の期においてより上昇する傾向があることが経験的に知られており，こうしたボラティリティの変動の非対称性は GARCH 型モデルではとらえることができない。Nelson (1991) は，こうしたボラティリティ変動の非対称性を取り入れたモデルとして，EGARCH (exponential GARCH) モデルを提唱した。[6] EGARCH (p, q) モデルは次のように示される。

$$\ln(h_t) = \omega + \textstyle\sum_{i=1}^{p}\beta_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{j=1}^{q}\alpha_i[\theta z_{t-j} + \gamma(|z_{t-j}| - E(|z_{t-j}|))] \tag{29}$$

ただし，$z_t = \varepsilon_t/\sqrt{h_t}$ である。この EGARCH モデルに関しては，いくつか注意をする点がある。まず，(29)式において予測誤差（ε_t）をボラティリティの平方根（$\sqrt{h_t}$）で基準化した値を説明変数として用いている点である。次に，(29)式において，被説明変数がボラティリティの対数値となっているために，パラメータの非負制約を考慮する必要がなくなることが指摘できる。最後に，EGARCH モデルにおいては，ボラティリティの持続性を見る際には，β の値のみを見ればよいことがわかる。

例として，次の EGARCH (1, 1) モデルを考える。

$$\ln(h_t) = \omega + \beta\ln(h_{t-1}) + \theta z_{t-1} + \gamma(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)) \tag{30}$$

(30)式によると，良いニュース（$z_{t-1} > 0$）があったときは，

$$\ln(h_t) = \omega + \beta\ln(h_{t-1}) + (\gamma + \theta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|) \tag{31}$$

となり，悪いニュース（$z_{t-1} < 0$）があったときは，

$$\ln(h_t) = \omega + \beta\ln(h_{t-1}) + (\gamma - \theta)|z_{t-1}| - \gamma E(|z_{t-1}|) \tag{32}$$

となる。つまり，$\theta < 0$ であれば，良いニュースがあったときよりも，悪いニュースがあったときのほうが，翌日のボラティリティが上昇することがわかる。

3　多変量 GARCH に関する基本モデル

3.1　MGARCH モデル

一般的に，多変量 GARCH（multivariate GARCH: MGARCH）モデルは，次のように定式化される。

$$\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\pi})+\boldsymbol{\varepsilon}_\tau \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{z}_t,\ \boldsymbol{z}_t\sim iid N(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}_n) \tag{34}$$

ただし，$\boldsymbol{y}_t$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$, $\boldsymbol{z}_t$ は n 次の列ベクトルであり，$\boldsymbol{H}_t$ は $n\times n$ 次の対称行列である。

ここで，次の関係が成立する。

$$\boldsymbol{E}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{0} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{V}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta})E_{t-1}(\boldsymbol{z}_t\boldsymbol{z}_t')\boldsymbol{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta})'=\boldsymbol{H}_t \tag{36}$$

(36)式から明らかなように，$\boldsymbol{H}_t$ は $\boldsymbol{y}_t$ の条件付き分散共分散行列であり，例として，２変数の場合には，次のように示される。

$$\boldsymbol{H}_t=\begin{bmatrix} E_{t-1}(\varepsilon_{1,\ t}^2) & E_{t-1}(\varepsilon_{1,\ t}\varepsilon_{2,\ t}) \\ E_{t-1}(\varepsilon_{2,\ t}\varepsilon_{1,\ t}) & E_{t-1}(\varepsilon_{2,\ t}^2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_{11,\ t} & h_{12,\ t} \\ h_{12,\ t} & h_{22,\ t} \end{bmatrix} \tag{37}$$

この $\boldsymbol{H}_t$ の定式化の相違によりいくつかのモデルに分けることができる。

3.2　VECH モデル

Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988) は VECH モデルを提唱した。その一般的な形は次のように表示される。

$$\mathrm{vech}(\boldsymbol{H}_t)=\boldsymbol{A}_0+\textstyle\sum_{j=1}^{q}\boldsymbol{A}_j\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}')+\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{B}_i\mathrm{vech}(\boldsymbol{H}_{t-i}) \tag{38}$$

ただし，$\boldsymbol{A}_0$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}\times 1$ 次の列ベクトルであり，$\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{B}_i$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次の係数行列である。また，vech は下三角行列の各要素を列ベクトルとしてスタックする演算子である[7)]。

例として，２変量の VECH (1, 1) モデルは，次のようになる。

$$\mathrm{vech}(\boldsymbol{H}_t)=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}')+\boldsymbol{B}_1\mathrm{vech}(\boldsymbol{H}_{t-1}) \tag{39}$$

これを要素表示すると，次式がえられる。

$$\begin{bmatrix} h_{11,\ t} \\ h_{21,\ t} \\ h_{22,\ t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0^{11} \\ a_0^{21} \\ a_0^{21} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1^{11} & a_1^{12} & a_1^{13} \\ a_1^{21} & a_1^{22} & a_1^{23} \\ a_1^{31} & a_1^{32} & a_1^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,\ t-1}^2 \\ \varepsilon_{21,\ t-1} \\ \varepsilon_{2,\ t-1}^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} & b_1^{13} \\ b_1^{21} & b_1^{22} & b_1^{23} \\ b_1^{31} & b_1^{32} & b_1^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{11,\ t-1} \\ h_{21,\ t-1} \\ h_{22,\ t-1} \end{bmatrix} \tag{39a}$$

このVECHモデルは柔軟性のあるモデルであるが，その問題点として，推定すべきパラメータの数が，次数の拡大に伴い急速に増加することがあげられる。たとえば，$n=2$ の VECH (1, 1) モデルのパラメータ数は21個であるが，$n=3$ の VECH (1, 1) モデルのパラメータ数は，78となり，変数の数をある一定数以上に増やすことは困難となる。

そこで，Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988) は，$\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{B}_i$ を対角行列 (diagonal matrix) とする diagonal VECH (DVECH) モデルを提唱した。

例として，2変量の DVECH (1, 1) モデルは，次のようになる。

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} a_0^{11} \\ a_0^{21} \\ a_0^{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1^{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{21,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_1^{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_1^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix} \tag{40}$$

このモデルの特徴は，(40)式から明らかなように，非対角要素が0となっているため，推定すべきパラメータの数が大幅に減少している点である。たとえば，$n=2$ の DVECH (1, 1) モデルのパラメータ数は9個であるが，$n=3$ の VECH (1, 1) モデルのパラメータ数は18個となる。しかし，他方，あるマーケットのボラティリティが他のマーケットのボラティリティからは影響を受けないという問題点も指摘できる (DVECH モデルは，各要素に1変量の GARCH モデルを用いたモデルとみなすことができる)。したがって，DVECH モデルは，ボラティリティの相互依存関係を分析する際には必ずしも適切なモデルとはいえない。

3.3　BEKK モデル

Baba et al. (1987) および Engle and Kroner (1995) によって提唱された BEKK (Baba, Engle, Kraft, Kroner) モデルは次のように定式化される。

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{A}_0 + \textstyle\sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{A}_j (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j}) \boldsymbol{A}'_j + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{H}_{t-i} \boldsymbol{B}'_i \tag{41}$$

ただし，$\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{B}_i$ は $n \times n$ 次の係数行列である。また，$\boldsymbol{A}_0$ は $n \times n$ 次の対称行列である。例として2変量の BEKK (1, 1) モデルは次のようになる。

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1}) \boldsymbol{A}'_1 + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{H}_{t-1} \boldsymbol{B}'_1 \tag{42}$$

ただし，

$$\boldsymbol{H}_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{12,t} & h_{22,t} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} a_0^{11} & a_0^{21} \\ a_0^{21} & a_0^{22} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a_1^{11} & a_1^{12} \\ a_1^{21} & a_1^{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} \\ b_1^{21} & b_1^{22} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}$$

である。したがって，(42)式を要素表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} h_{11,\,t} & h_{12,\,t} \\ h_{12,\,t} & h_{22,\,t} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_0^{11} & a_0^{21} \\ a_0^{21} & a_0^{22} \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} (a_1^{11}\varepsilon_{1,\,t-1}+a_1^{12}\varepsilon_{2,\,t-1})^2 & a_1^{11}a_1^{21}\varepsilon_{1,\,t-1}^2+(a_1^{12}a_1^{21}+a_1^{11}a_1^{22})\varepsilon_{1,\,t-1}\varepsilon_{2,\,t-1}+a_1^{12}a_1^{22}\varepsilon_{2,\,t-1}^2 \\ a_1^{11}a_1^{21}\varepsilon_{1,\,t-1}^2+(a_1^{12}a_1^{21}+a_1^{11}a_1^{22})\varepsilon_{1,\,t-1}\varepsilon_{2,\,t-1}+a_1^{12}a_1^{22}\varepsilon_{2,\,t-1}^2 & (a_1^{21}\varepsilon_{1,\,t-1}+a_1^{22}\varepsilon_{2,\,t-1})^2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} (b_1^{11})^2h_{11,\,t-1}+2b_1^{11}b_1^{12}h_{12,\,r-1}+(b_1^{12})^2h_{22,\,t-1} & b_1^{11}b_1^{21}h_{11,\,t-1}+(b_1^{12}b_1^{21}+b_1^{11}b_1^{22})h_{12,\,t-1}+b_1^{12}b_1^{22}h_{22,\,t-1} \\ b_1^{11}b_1^{21}h_{11,\,t-1}+(b_1^{12}b_1^{21}+b_1^{11}b_1^{22})h_{12,\,t-1}+b_1^{12}b_1^{22}h_{22,\,t-1} & (b_1^{21})^2h_{11,\,t-1}+2b_1^{21}b_1^{22}h_{12,\,r-1}+(b_1^{22})^2h_{22,\,t-1} \end{bmatrix} \quad \text{(42a)}$$

BEKK モデルの第１のメリットは，推定すべきパラメータの数が少なくて済むことである。たとえば，$n=2$ の BEKK (1, 1) モデルのパラメータ数は11個であるが，$n=3$ の BEKK (1, 1) モデルのパラメータ数は，24個である。これは，VECH (1, 1) モデルのパラメータの数（$n=2$ のとき21，$n=3$ のとき78）と比べてかなり少なくなっている。

BEKK モデルの第２のメリットは，ボラティリティの相互依存関係を明示的にモデル化できる点があげられる。(40)式の DVECH (1, 1) モデルと(42a)式の BEKK (1, 1) モデルを比べると明らかなように，DVECH (1, 1) モデルでは，$h_{11,\,t}$ に影響を与えるのは $\varepsilon_{1,\,t-1}^2$，$h_{11,\,t-1}$ であるのに対して，BEKK (1, 1) モデルでは $h_{11,\,t}$ に影響を与えるのは $\varepsilon_{1,\,t-1}^2$，$\varepsilon_{2,\,t-1}^2$，$\varepsilon_{1,\,t-1}\varepsilon_{2,\,t-1}$，$h_{11,\,t-1}$, $h_{12,\,t-1}$, $h_{22,\,t-1}$ である。つまり，BEKK モデルは推定すべきパラメータの数が少ないうえに，ボラティリティの変動に関する相互依存関係が明示的にモデル化されている便利なモデルであることがわかる。

3.4 CCC モデル

Bollerslev (1990) は相関係数を直接モデル化することのできる CCC (constant conditional correlation) モデルを提唱した。このモデルの特徴は，条件付き相関係数が時間を通じて一定と仮定されている点である。

一般に，n 次の分散共分散行列 $\boldsymbol{H}$ は，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{DRD}$ と分解することが可能である。ただし，$\boldsymbol{R}$ は相関行列（一定と仮定）であり，$\boldsymbol{D}=diag(\sqrt{h_{11}},\ \sqrt{h_{22}},\ \cdots\sqrt{h_{nn}})$ は対角要素として

$\sqrt{h_{ii}}$（$i=1, 2, \cdots, n$），非対角要素として 0 をもつ対角行列である。[8] したがって，次のように定式化できる。

$$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_t \tag{43}$$

CCC モデルでは，まず，$\boldsymbol{H}_t$ の対角成分に関しては，1 変量 GARCH（p, q）モデルを用いてモデル化する。

$$h_{ii,\,t}=\omega+\textstyle\sum_{j=1}^{p}\beta_{ii,\,j}h_{ii,\,t-j}+\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ii,\,j}\,\varepsilon_{ii,\,t-j}^2 \tag{44}$$

次に，$\boldsymbol{H}_t$ の非対角（i, j）成分に関しては，一定である相関係数行列（$\boldsymbol{R}$）の（i, j）成分である ρ_{ij} を用いて，次のように定式化を行う。

$$h_{ij,\,t}=\rho_{ij}\sqrt{h_{ii,\,t}}\sqrt{h_{jj,\,t}} \quad (i\neq j) \tag{45}$$

例として，2 変量の場合は，(43)式は

$$\boldsymbol{H}_t=\begin{bmatrix} h_{11,\,t} & h_{12,\,t} \\ h_{12,\,t} & h_{22,\,t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,\,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,\,t}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,\,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,\,t}} \end{bmatrix} \tag{46}$$

となり，各ボラティリティが GARCH (1, 1) モデルにしたがう場合には，(44)式および(45)式より，CCC モデルは次のように示される。

$$h_{11,\,t}=\omega_{11}+\beta_{11}h_{11,\,t-1}+\alpha_{11}\varepsilon_{11,\,t-1}^2 \tag{47}$$

$$h_{22,\,t}=\omega_{22}+\beta_{22}h_{22,\,t-1}+\alpha_{22}\varepsilon_{22,\,t-1}^2 \tag{48}$$

$$h_{12,\,t}=\rho_{12}\sqrt{h_{11,\,t}}\sqrt{h_{22,\,t}} \tag{49}$$

GARCH (1, 1)－CCC モデルでは，$n=2$ の場合，推定すべきパラメータの数は 7 個であり，$n=3$ の場合，推定すべきパラメータの数は12個である。したがって，VECH モデル，BEKK モデルと比べて，推定すべきパラメータの数が少なくて済むことがわかる（表 1 を参照)。

表 1　推定すべきパラメータの数

	$n=2$	$n=3$
VECH (1, 1)	21	78
DVECH (1, 1)	9	18
BEKK (1, 1)	11	24
GARCH (1, 1)－CCC	7	12

4　条件付き相関係数変動モデル

4.1　DCC モデル

Engle (2002) は，相関係数が時間とともに変化する DCC (dynamic conditional correlation) モデルを提唱した。[9] まず，CC モデルの(43)式の $\boldsymbol{R}$ が時間に依存するため，次のように書く

ことができる。

$$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t \tag{50}$$

例として，２変量の場合は，(50)式は次のように表現できる。

$$\boldsymbol{H}_t=\begin{bmatrix} h_{11,\,t} & h_{12,\,t} \\ h_{12,\,t} & h_{22,\,t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,\,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,\,t}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,\,t} \\ \rho_{12,\,t} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,\,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,\,t}} \end{bmatrix} \tag{51}$$

また，CCC モデルの場合と同様に，各ボラティリティの変動は，１変量の GARCH モデルにしたがうと仮定される。

$$h_{ii,\,t}=\omega_{ii}+\textstyle\sum_{j=1}^{p}\beta_{ii,\,j}h_{ii,\,t-j}+\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ii,\,j}\varepsilon_{ii,\,t-j}^{2},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{52}$$

ここで，$z_{i,\,t}=\varepsilon_{i,\,t}/\sqrt{h_{ii,\,t}}$ と基準化し，それらを要素とするベクトル $\boldsymbol{z_t}=(z_{1,\,t},\ z_{2,\,t},\ \cdots,\ z_{n,\,t})'$ を考え，その条件付き分散 $\boldsymbol{Q_t}=E_{t-1}(\boldsymbol{z_t z_t'})$ を定義する。すると，相関係数行列の変動は次のように定式化される。

$$\boldsymbol{R_t}=diag(\sqrt{q_{11,\,t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\,t}})^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t diag(\sqrt{q_{11,\,t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\,t}})^{-1/2} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{Q_t}=(1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}}+a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}_{t-1}'+b\boldsymbol{Q}_{t-1} \tag{54}$$

ただし，$\overline{\boldsymbol{Q}}=E(\boldsymbol{z_{t-1}z_{t-1}'})$ で，$a>0,\ b>0,\ a+b\leq 1$ である。

２変数の場合は，(53)式および(54)式は，それぞれ，次のように示される。

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,\,t} \\ \rho_{12,\,t} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{q_{11,\,t}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{q_{22,\,t}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11,\,t} & q_{12,\,t} \\ q_{12,\,t} & q_{22,\,t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{q_{11,\,t}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{q_{22,\,t}} \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11,\,t} & q_{12,\,t} \\ q_{12,\,t} & q_{22,\,t} \end{bmatrix}=(1-a-b)\begin{bmatrix} 1 & \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{12} & 1 \end{bmatrix}+a\begin{bmatrix} z_{1,\,t-1}^{2} & z_{1,\,t-1}z_{2,\,t-1} \\ z_{1,\,t-1}z_{2,\,t-1} & z_{2,\,t-1}^{2} \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} q_{11,\,t-1} & q_{12,\,t-1} \\ q_{12,\,t-1} & q_{22,\,t-1} \end{bmatrix} \tag{56}$$

したがって，動学的相関係数は次のように与えられる。[10]

$$\rho_{12,\,t}=\frac{(1-a-b)\bar{q}_{12}+az_{1,\,t-1}z_{2,\,t-1}+bq_{12,\,t-1}}{\sqrt{(1-a-b)\bar{q}_{11}+az_{1,\,t-1}^{2}+bq_{11,\,t-1}}\sqrt{(1-a-b)\bar{q}_{22}+az_{2,\,t-1}^{2}+bq_{22,\,t-1}}} \tag{57}$$

4.2　ADCC モデル

Cappiello, Engle and Sheppard (2006) は，DCC モデルに非対称性を考慮した ADCC (asymmetric DCC) モデルを提唱した。

まず，各ボラティリティの変動は，１変量の GARCH モデルにしたがうと仮定される。

$$h_{ii,\,t}=\omega_{ii}+\textstyle\sum_{j=1}^{p}\beta_{ii,\,j}h_{ii,\,t-j}+\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ii,\,j}\varepsilon_{ii,\,t-j}^{2},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{58}$$

ここで，$z_{i,\,t}=\varepsilon_{i,\,t}/\sqrt{h_{ii,\,t}}$ と基準化し，それらを要素とするベクトル $\boldsymbol{z_t}=(z_{1,\,t},\ z_{2,\,t},\ \cdots,\ z_{n,\,t})'$ を考え，その条件付き分散 $\boldsymbol{Q_t}=E_{t-1}(\boldsymbol{z_t z_t'})$ を定義する。すると，相関係数行列の変動は次

のように定式化される。

$$\boldsymbol{R}_t = diag(\sqrt{q_{11,t}}, \cdots, \sqrt{q_{nn,t}})^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t diag(\sqrt{q_{11,t}}, \cdots, \sqrt{q_{nn,t}})^{-1/2} \tag{59}$$

$$\boldsymbol{Q}_t = (1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}} - g\overline{\boldsymbol{N}} + a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1} + b\boldsymbol{Q}_{t-1} + g\boldsymbol{n}_{t-1}\boldsymbol{n}'_{t-1} \tag{60}$$

ただし，$\overline{\boldsymbol{Q}} = E(\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1})$，$\overline{\boldsymbol{N}} = E(\boldsymbol{n}_t\boldsymbol{n}'_t)$ である。また，$\boldsymbol{n}_t = I[\boldsymbol{z}_t < 0] \circ \boldsymbol{z}_t$（$I[\boldsymbol{z}_t < 0]$ は $\boldsymbol{z}_t < 0$ であれば 1 をとり，そうでなければ 0 をとる $N \times 1$ のインデケーター関数，$\circ$ は Hadamard 積）である。[11)12)]

また，$\boldsymbol{Q}_t$ が正値定符号となるための条件は

$$a + b + \delta g < 1 \tag{61}$$

である。ただし，δ は，$\boldsymbol{Q}_t^{-1/2}\overline{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{Q}_t^{-1/2}$ の最大固有値である。[13)]

4.3　DECO モデル

Engle and Kelly（2012）は複数の相関係数の変動を同時に考慮に入れる DECO（dynamic equicorrelation）モデルを提唱した。

まず，各ボラティリティの変動は，1 変量の GARCH モデルにしたがうと仮定される。

$$h_{ii,t} = \omega_{ii} + \textstyle\sum_{j=1}^{p}\beta_{ii,j}h_{ii,t-j} + \sum_{j=1}^{q}\alpha_{ii,j}\varepsilon_{ii,t-j}^2, \; i=1, 2, \cdots, n \tag{62}$$

ここで，$z_{i,t} = \varepsilon_{i,t}/\sqrt{h_{ii,t}}$ と基準化し，それらを要素とするベクトル $\boldsymbol{z}_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \cdots, z_{n,t})'$ を考え，その条件付き分散 $\boldsymbol{Q}_t = E_{t-1}(\boldsymbol{z}_t\boldsymbol{z}'_t)$ を定義する。すると，相関係数行列の変動は次のように定式化される。

$$\boldsymbol{R}_t^{DECO} = (1-\bar{\rho}_t)\boldsymbol{I}_n + \bar{\rho}_t\boldsymbol{J}_n \tag{63}$$

$$\bar{\rho}_t = \frac{2}{n(n-1)}\textstyle\sum_{i \neq j}\rho_{ij,t} \quad \text{where} \quad \rho_{ij,t} = \dfrac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}}, \; i, j=1, 2, \cdots, n \tag{64}$$

$$\boldsymbol{Q}_t^{DECO} = (1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}}^{DECO} + a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1} + b\boldsymbol{Q}_{t-1}^{DECO} \tag{65}$$

ただし，$\boldsymbol{I}_n$ は n 次の単位行列，$\boldsymbol{J}_n$ は $n \times n$ 次の要素がすべて 1 の行列である。また，$\bar{\rho}_t$ は時点 t における equicorrelation であり，時点 t における $2/n(n-1)$ 個の動学的相関係数の平均値として計算される。さらに，$q_{ij,t}$ は $\boldsymbol{Q}_t^{DECO}$ の ij 要素である。[14)]

（例 1 ： 2 変数の場合）

例として 2 変数の場合を考える。その場合，(63)式は次のようになる。

$$\boldsymbol{R}_t^{DECO} = (1-\bar{\rho}_t)\boldsymbol{I}_2 + \bar{\rho}_t\boldsymbol{J}_2 = (1-\bar{\rho}_t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \bar{\rho}_t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \bar{\rho}_t\\ \bar{\rho}_t & 1\end{pmatrix} \tag{66}$$

ここで(49)式の相関係数の部分に注目すると，2 変数の場合には(47)式より

表２　可変的相関係数モデル

DCC モデル
$\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\pi})+\boldsymbol{\varepsilon}_\tau,$
$\quad\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{z}_t,\ z_t\approx iid(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I})$
$\quad\boldsymbol{E}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{V}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{H}_t$
$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t$
$\boldsymbol{R}_t=diag(\sqrt{q_{11,\ t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\ t}})^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t diag(\sqrt{q_{11,\ t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\ t}})^{-1/2}$
$\boldsymbol{Q}_t=(1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}}+a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1}+b\boldsymbol{Q}_{t-1}$
ADCC モデル
$\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\pi})+\boldsymbol{\varepsilon}_\tau,$
$\quad\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{z}_t,\ z_t\approx iid(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I})$
$\quad\boldsymbol{E}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{V}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{H}_t$
$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t$
$\boldsymbol{R}_t=diag(\sqrt{q_{11,\ t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\ t}})^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t diag(\sqrt{q_{11,\ t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\ t}})^{-1/2}$
$\boldsymbol{Q}_t=(1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}}-g\overline{\boldsymbol{N}}+a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1}+b\boldsymbol{Q}_{t-1}+g\boldsymbol{n}_{t-1}\boldsymbol{n}'_{t-1}$
DECO モデル
$\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\pi})+\boldsymbol{\varepsilon}_\tau,$
$\quad\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{z}_t,\ z_t\approx iid(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I})$
$\quad\boldsymbol{E}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{V}_{t-1}(\varepsilon_t)=\boldsymbol{H}_t$
$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t$
$\boldsymbol{R}_t=diag(\sqrt{q_{11,\ t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\ t}})^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t diag(\sqrt{q_{11,\ t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\ t}})^{-1/2}$
$\boldsymbol{R}_t^{DECD}=(1-\bar{\rho}_t)\boldsymbol{I}_n+\bar{\rho}_t\boldsymbol{J}_n$
$\bar{\rho}_t=\dfrac{2}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\rho_{ij,\ t}\quad\text{where}\quad\rho_{ij,\ t}=\dfrac{q_{ij,\ t}}{\sqrt{q_{ii,\ t}q_{jj,\ t}}},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$
$\boldsymbol{Q}_t^{DECO}=(1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}}^{DECD}+a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1}+b\boldsymbol{Q}_{t-1}^{DECO}$

$$\bar{\rho}_t=\frac{2}{2(2-1)}\sum_{i\neq j}\rho_{ij,\ t}=\rho_{12,\ t} \tag{67}$$

となり，DECO モデルと CCC モデルとは一致し，$\bar{\rho}_t$ は $\rho_{12,\ t}$ と一致することがわかる。

（例２：３変数の場合）

３変数の場合には，(63)式は次のようになる。

$$\boldsymbol{R}_t^{DECO}=(1-\bar{\rho}_t)\boldsymbol{I}_3+\bar{\rho}_t\boldsymbol{J}_3=(1-\bar{\rho}_t)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\bar{\rho}_t\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\bar{\rho}_t&\bar{\rho}_t\\\bar{\rho}_t&1&\bar{\rho}_t\\\bar{\rho}_t&\bar{\rho}_t&1\end{pmatrix} \tag{68}$$

ここで(68)式の相関係数の部分に注目すると，３変数の場合には(64)式より

$$\bar{\rho}_t = \frac{2}{3(3-1)} \sum_{i \neq j} \rho_{ij,\, t} = \frac{1}{3}(\rho_{12,\, t} + \rho_{13,\, t} + \rho_{23,\, t}) \tag{69}$$

となり，$\bar{\rho}_t$ は各相関係数の平均値として与えられることがわかる。(68)式からわかるように，各相関係数が同一の値をとることが，DECO の特徴となっている。

今 後 の 課 題

本稿では，多変量 GARCH モデルに関する最近の議論について，整理を行った。特に，相関係数変動モデルとして，DCC，ADCC，DECO の 3 つのモデルを取り上げ，それらの特徴について整理を行った。

この延長線上での研究課題としては，コピュラ（copula）の応用が考えられる[15]。コピュラは，Sklar（1959）によって提唱された概念であり，周辺分布の間の複雑な依存構造を理解するために用いることができる分析手法である。たとえば，株式の収益率の間の関係を分析するためにも用いることができる。多変量 GARCH モデルとコピュラとを組み合わせて資産価格の変動について分析をすることは，今後の発展が期待される[16]。

付録Ａ　ARCH モデルの無条件平均と無条件分散

ARCH モデルの平均と分散について簡単な例を用いて計算を行う。いま，次のモデルを考える。

$$r_t = \pi + \varepsilon_t = \pi + \sqrt{h_t}\, z_t, \tag{A1}$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \tag{A2}$$

ただし，z_t は，平均が 0 で分散が 1 の互いに独立な確率変数である。このとき，r_t の無条件平均は，次式でえられる。

$$E(r_t) = E(\pi + \varepsilon_t) = \pi \tag{A3}$$

次に，無条件分散は，

$$V(r_t) = E[(r_t - E(r_t))^2] = E(\varepsilon_t^2) = \omega + \alpha E(\varepsilon_{t-1}^2) \tag{A4}$$

より，無条件分散を $S = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ で示すと，

$$S = \frac{\omega}{1-\alpha} \tag{A5}$$

となる。つまり，ARCH モデルにおいては，条件付き分散は時間とともに変動するが，無条件分散（定常値）は一定である。

付録Ｂ　ARCH モデルの推定方法

ここでは，渡部（2007）を参考にしながら，GARCH (1, 1) モデルの推定方法についてまとめる。いま，次のモデルを考える。

$$r_t = \pi_0 + \pi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \tag{B1}$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t}\, z_t,\ z_t \approx iid,\ E(z_t) = 0,\ E(z_t^2) = 1 \tag{B2}$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \quad \omega > 0,\ \alpha,\ \beta \geq 0 \tag{B3}$$

ただし，z_t は標準正規分布にしたがうと仮定する。推定すべきパラメータは平均方程式に含まれる未知パラメータ（π_0, π_1）と分散方程式に含まれる未知パラメータ（ω, α, β）である。実際の推定では，平均方程式と分散方程式を別に行う 2 段階推定法と平均方程式と分散方程式を一緒に推定する同時推定法の 2 つがあるが，ここでは比較的よく用いられる 2 段階推定法について説明を行う。

まず，2 段階推定では，まず，平均方程式のパラメータを推定し，次に，えられた残差（e_t）を誤差（e_t）とみなして分散方程式を推定する。未知パラメータのベクトルを $\boldsymbol{\theta}$ で示す。いま，$\boldsymbol{\theta}$, h_0, ε_0^2 が与えられたもとで，$\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$ の結合密度関数（$f(\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T | h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta})$）は次のように示される。

$$f(\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T | h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta}) = f(\varepsilon_1 | h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta}) \times \prod_{s=2}^{T} f(\varepsilon_s | \{\varepsilon_t\}_{t=1}^{s-1},\ h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta}) \tag{B4}$$

GARCH (1, 1) モデルでは，$\boldsymbol{\theta}$, h_0, ε_0^2 が与えられると，(B3)式より h_1 がえられる。これは，(B4)式の右辺第 1 項

$$f(\varepsilon_1 | h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta})$$

の分散である。また，その平均は 0 で，仮定より z_1 が標準正規分布にしたがうので，

$$f(\varepsilon_1 | h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta})$$

は，平均 0，分散 h_1 の正規分布の確率密度関数を表す。

さらに，ε_1 の値が与えられると，(A3)式より，h_2 がえられる。これは，

$$f(\varepsilon_2 | \varepsilon_1,\ h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta})$$

の分散である。また，その平均は 0 で，仮定より z_2 が標準正規分布にしたがうので，

$$f(\varepsilon_2 | \varepsilon_1,\ h_0,\ \varepsilon_0^2,\ \boldsymbol{\theta})$$

は，平均 0，分散 h_2 の正規分布の確率密度関数を表す。

これを繰り返していくと，(A4)式の右辺の条件付き密度関数がすべて求まり，尤度関数は，未知パラメータ（$\boldsymbol{\theta}$）に対する推定量（$\hat{\boldsymbol{\theta}}$）の関数として

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right) \tag{B5}$$

と表され，その対数をとった対数尤度関数は次のように与えられる[17)]。

$$\ln(L(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = -\frac{1}{2}\Sigma_t\left(\ln(2\pi) + \ln(h_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}\right) \tag{B6}$$

(B6)式を最大化するように，未知パラメータの推定量（$\hat{\boldsymbol{\theta}}$）を求めればよい。

付録Ｃ　DCC モデルの推定方法

Engle (2002) に基づき，DCC モデルの推定方法について説明を行う。次のモデルを考える。いま，平均方程式を次のように定式化する。

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{D}_t \boldsymbol{z}_t,\ \boldsymbol{z}_t \approx iid(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}),$$

$$E_{t-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \boldsymbol{0},\ V_{t-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \boldsymbol{H}_t \tag{C1}$$

ただし，$\boldsymbol{r}_t = (r_{1,t},\ r_{2,t},\ \cdots,\ r_{n,t})'$ は n 個の収益率のベクトルである。

ここで，(B1)式に関しては，線形の関係を仮定し，その関係を最小二乗法で推定すると，残差ベクトル（$\boldsymbol{e}_t$）がえられる。この残差ベクトルを誤差のベクトル（$\boldsymbol{\varepsilon}_t$）とみなして分散および相関係数の推定を行う。

$$\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t \tag{C2}$$

$$\boldsymbol{R}_t=diag(\sqrt{q_{11,\,t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\,t}})^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t\,diag(\sqrt{q_{11,\,t}},\ \cdots,\ \sqrt{q_{nn,\,t}})^{-1/2} \tag{C3}$$

$$\boldsymbol{Q}_t=(1-a-b)\overline{\boldsymbol{Q}}+a\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1}+b\boldsymbol{Q}_{t-1} \tag{C4}$$

ここで，$\boldsymbol{z}_t$ について正規分布の仮定をおくと，対数尤度関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
l&=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+\ln|\boldsymbol{H}_t|+(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu}_t)'\boldsymbol{H}_t^{-1}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu}_t))\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+\ln|\boldsymbol{H}_t|+\boldsymbol{\varepsilon}'_t(\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+\ln|\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t|+\boldsymbol{\varepsilon}'_t\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+\ln|\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{D}_t|+\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{z}_t)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+2\ln|\boldsymbol{D}_t|+\ln|\boldsymbol{R}_t|+\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{z}_t)
\end{aligned}$$

ここで，同じ値（$\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{\varepsilon}'_t\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$）を足してひくと，対数尤度関数は次のように書くことができる。

$$l=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+2\ln|\boldsymbol{D}_t|+\boldsymbol{\varepsilon}'_t\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t-\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{z}_t+\ln|\boldsymbol{R}_t|+\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{z}_t)$$

これより，対数尤度は，ボラティリティに関する部分（l_v）と相関係数に関する部分（l_c）の和として書き直すことができる。

$$l(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\varphi})=l_v(\boldsymbol{\theta})+l_c(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\varphi})$$

ただし，

$$l_v(\boldsymbol{\theta})=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(n\ln(2\pi)+2\ln|\boldsymbol{D}_t|+\boldsymbol{\varepsilon}'_t\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{D}_t^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t)$$

$$l_c(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\varphi})=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(-\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{z}_t+\ln|\boldsymbol{R}_t|+\boldsymbol{z}'_t\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{z}_t)$$

対数尤度関数のボラティリティの部分は，明らかに，個々の GARCH モデルの合計に他ならない。

$$l_v(\widehat{\boldsymbol{\theta}})=-\frac{1}{2}\sum_t\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(2\pi)+\ln(h_{i,\,t})+\frac{\varepsilon_{i,\,t}^2}{h_{i,\,t}}\right)$$

したがって，２段階法は，次のようなプロセスからなる。

まず，次の問題の最適解を求める。

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}=\arg\max l_v(\boldsymbol{\theta})$$

次に，第 1 段階でえられた $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ を所与として，次の第 2 段階の最適解を求める。

$$\max_{\varphi} l_v(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\ \boldsymbol{\varphi})$$

注

1）ボラティリティ変動モデルには，GARCH 型モデルと確率的ボラティリティモデル（stochastic volatility model）の２種類がある。両者の相違点は，前者がボラティリティを既知の情報に基づき定式化することに対して，後者はボラティリティ自体が独自の確率的ショックに依存すると考える点である。後者に関しては，渡部（2000）を参照のこと。

2）VaR（value at risk）を用いたリスク管理の分析においても，ボラティリティは重要な役割を果たす。ここで，VaR とは市場リスクの予想最大損失額を算出する指標をいう。

3）ARCH 型モデルに関する日本語で書かれた文献としては，たとえば，渡部（2000，2007），沖本（2010）等が参考になる。

4）ここで，$V_{t-1}(r_t)=E_{t-1}[\{r_t-E_{t-1}(r_t)\}^2]=E_{t-1}(\varepsilon_t^2)=h_tE_{t-1}(z_t^2)=h_t$ となることに注意。

5）(16)式は次のように書ける。$E_{t-1}(\varepsilon_t^2)=\omega+(\alpha+\beta)E_{t-2}(\varepsilon_{t-1}^2)+\alpha\eta_{t-1}$。この両辺の期待値をとると，$E(E_{t-1}(\varepsilon_t^2))=E(\omega+(\alpha+\beta)E_{t-2}(\varepsilon_{t-1}^2)+\alpha\eta_{t-1})$ となり，$E(\varepsilon_t^2)=\omega+(\alpha+\beta)E(\varepsilon_{t-1}^2)$ となる。ここで，無条件分散を $S=E(\varepsilon_t^2)=E(\varepsilon_{t-1}^2)$ とおくと，次の結果がえられる。$S=\dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta}$。

6）Glosten, Jagannathan and Runkle（1993）による GJR モデルも参照のこと。

7）たとえば，$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{vech}(\boldsymbol{H})=\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix}$ である。

8）*diag* 演算子は，次のようになる。$diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

9）Tse and Tsui（2002）は若干異なった形の DCC モデルを提唱している。Caporin and McAleer（2011）は，統計学的な見地から，BEKK モデルと DCC モデルの比較検討を行っている。

10）DCC モデルを用いた実証研究の例としては，Akhtaruzzaman, Shamsuddin and Easton（2014），Antonakakis（2012），Apostolakis and Papadopoulos（2014），Chiang, Jeon and Li（2007），Kinkyo and Hamori（2014），Lahrech and Sylwester（2011），Savva（2009），Tamakoshi and Hamori（2013a），Toyoshima, Nakajima and Hamori（2013），Turhan, Sensoy and Hacihasanoglu（2014）等があげられる。特に，Antonakakis（2012）と Apostolakis and Papadopoulos（2014）は DCC の分析とスピルオーバーの分析を組み合わせている点に特徴がある。

11）Hadamard 積は，次のとおりである。いま，３行３列の行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ が次のように与えられている。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

このとき，次の関係が成立する。

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

12）例として 2 変数の場合には，$\boldsymbol{n}_{t-1}\boldsymbol{n}'_{t-1}$ は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{n}_{t-1}\boldsymbol{n}'_{t-1}=\begin{pmatrix} I(z_{1,\,t-1})z_{1,\,t-1} \\ I(z_{2,\,t-1})z_{2,\,t-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I(z_{1,\,t-1})z_{1,\,t-1} & I(z_{2,\,t-1})z_{2,\,t-1} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} I(z_{1,\,t-1})z^2_{1,\,t-1} & I(z_{1,\,t-1})z_{1,\,t-1}I(z_{2,\,t-1})z_{2,\,t-1} \\ I(z_{1,\,t-1})z_{1,\,t-1}I(z_{2,\,t-1})z_{2,\,t-1} & I(z_{2,\,t-1})z^2_{2,\,t-1} \end{pmatrix}$$

13）ADCC モデルを用いた実証研究の例としては，Kenourgios, Samitas and Paltalidis（2011），Toyoshima, Tamakoshi and Hamori（2012），Tamakoshi and Hamori（2013b），Tamakoshi and Hamori（2013c），Toyoshima and Hamori（2013），Toyoshima, Nakajima and Hamori（2013），Yang and Hamori（2013a），Tamakoshi and Hamori（2013d），Tamakoshi and Hamori（2014）等があげられる。

14）表 2 は可変的相関係数モデルをまとめたものである。

15）コピュラに関して日本語で書かれた文献としては，戸坂・吉羽（2005）を参照。

16）たとえば，Yang and Hamori（2013b）および Yang and Hamori（2014）を参照。

17）Bollerslev（1986, p. 316）は，初期値として必要な ε_0^2 と h_0 の推定値として，$T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2$ を用いることを提唱している。

参　考　文　献

Akhtaruzzaman, M., Shamsuddin, A., and Easton, S.（2014）“Dynamic correlation analysis of spill-over effects of interest rate risk and return on Australian and US financial firms,” *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 31, pp. 378–396.

Antonakakis, N.（2012）“Exchange return co-movements and volatility spillovers before and after the introduction of euro,” *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 22, Issue 5, pp. 1091–1109.

Apostolakis, G. and Papadopoulos, A. P.（2014）“Financial stress spillovers in advanced economies,” *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 32, pp. 128–149.

Baba, Y., Engle, R. F., Kraft, D., and Kroner, K. F.（1987）“Multivariate simultaneous generalized ARCH,” Unpublished manuscript, Department of Economics, University of California, San Diego.

Bollerslev, T.（1986）“Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity,” *Journal of Econometrics,* Vol. 31, pp. 307–327.

Bollerslev, T.（1990）“Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model,” *Review of Economics and Statistics,* Vol. 72, pp. 498–505.

Bollerslev, T., Engle, R. F., and Wooldridge, J. M.（1988）“A capital asset pricing model with time-varying covariances,” *Journal of Political Economy,* Vol. 96, pp. 116–131.

Caporin, M. and McAleer, M.（2011）“Do we really need both BEKK and DCC? A tale of two multivariate GARCH models,” *Journal of Economic Survey,* Vol. 26, pp. 736–751.

Cappiello, L., Engle, R. F., and Sheppard, K.（2006）“Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns,” *Journal of Financial Econometrics,* Vol. 4, pp. 537–572.

Chiang, T. C., Jeon, B. N., and Li, H.（2007）“Dynamic correlation analysis of financial contagion: Evidence from Asian markets,” *Journal of International Money and Finance,* Vol. 26, pp. 1206–1228.

Engle, R. (1982) "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation," *Econometrica,* Vol. 50, pp. 987-1007.

Engle, R. (2002) "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models," *Journal of Business & Economic Statistics,* Vol. 20, pp. 339-350.

Engle, R. and Kelly, B. (2012) "Dynamic equicorrelation," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 30, pp. 212-228.

Engle, R. and Kroner, F. (1995) "Multivariate simultaneous generalized ARCH," *Econometric Theory,* Vol. 11, pp. 122-150.

Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E, (1993) "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks," *Journal of Finance,* Vol. 48, pp. 1779-1801.

Kenourgios, D., Samitas, A., and Paltalidis, N. (2011) "Financial crises and stock market contagion in a multivariate time-varying asymmetric framework," *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 21, Issue 1, pp. 92-106.

Kinkyo, T. and Hamori, S. (2014) "Exchange rate flexibility and the integration of the securities market in East Asia," *Journal of Reviews on Global Economics,* Vol. 3, pp. 293-309.

Lahrech, A. and Sylwester, K. (2011) "U.S. and Latin American stock market linkages," *Journal of International Money and Finance,* Vol. 30, pp. 1341-1357.

Nelson, D. B. (1991) "Conditional heteroscedasticity in asset returns: A new approach," *Econometrica,* Vol. 59, pp. 347-370.

Savva, C. S. (2009) "International stock markets interactions and conditional correlations," *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 19, Issue 4, pp. 645-661.

Sklar, M. (1959) "Fonctions de répartitionán dimensions marges," *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris,* Vol. 8, pp. 229-231.

Tamakoshi, G. and Hamori, S. (2013a) "Dynamic linkages among cross-currency swap markets under stress," *Applied Economics Letters,* Vol. 20, No. 4, pp. 404-409.

Tamakoshi, G. and Hamori, S. (2013b) "An asymmetric DCC analysis of correlations among bank CDS indices," *Applied Financial Economics,* Vol. 23, No. 6, pp. 475-481.

Tamakoshi, G. and Hamori, S. (2013c) "On Time-varying linkages among LIBOR rates for major European currencies," *International Journal of Financial Research,* Vol. 4, No. 1, pp. 46-53.

Tamakoshi, G. and Hamori, S. (2013d) "An asymmetric dynamic conditional correlation analysis of linkages of European financial institutions during the Greek sovereign debt crisis," *European Journal of Finance,* Vol. 19, No. 10, pp. 939-950.

Tamakoshi, G. and Hamori, S. (2014) "Co-movements among major European exchange rates: A multivariate time-varying asymmetric approach," *International Review of Economics and Finance,* Vol. 31, pp. 105-113.

Toyoshima, Y. and Hamori, S. (2013) "Asymmetric dynamics in stock market correlations: Evidence from Japan and Singapore," *Journal of Asian Economics,* Vol. 24, pp. 117-123.

Toyoshima, Y., Nakajima, T., and Hamori, S. (2013) "Crude oil hedging strategy: New evidence from the data of the financial crisis," *Applied Financial Economics,* Vol. 23, No. 12, pp. 1033-1041.

Toyoshima, Y., Tamakoshi, G., and Hamori, S. (2012) "Asymmetric dynamics in correlations of treasury and swap markets: Evidence from the US market," *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 22, Issue 2, pp. 381-394.

Tse, Y. and Tsui, A. K. C. (2002) "A multivariate GARCH model with time-varying correlations," *Journal of Business & Economic Statistics,* Vol. 20, pp. 351-362.

Turhan, M. I., Sensoy, A., and Hacihasanoglu, E. (2014) "A comparative analysis of the dynamic relationship between oil prices and exchange rates," *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money,* Vol. 32, pp. 397-414.

Yang, L. and Hamori, S. (2013a) "EU accession, financial integration, and contagion effects: Dynamic correlation analysis of CEEC-3 bond markets," *Transition Studies Review,* Vol. 20, Issue 2, pp. 179-189.

Yang, L. and Hamori, S. (2013b) "Dependence structure among international stock markets: A GARCH-copula analysis," *Applied Financial Economics,* Vol. 23, No. 23, pp. 1805-1817.

Yang, L. and Hamori, S. (2014) "Gold prices and exchange rates: A time-varying copula analysis", *Applied Financial Economics,* Vol. 24, No. 1, pp. 41-50.

沖本竜義（2010）『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』朝倉書店.

戸坂凡展・吉羽要直（2005）「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」『金融研究』(http://www.imes.boj.or.jp/japanese/kinyu/2005/kk24-b2-3.pdf).

渡部敏明（2000）『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.

渡部敏明（2007）『時系列分析（４）―ARCH―』蓑谷千凰彦・縄田和満・和合肇編『計量経済学ハンドブック』朝倉書店 pp. 592-620.