ワイルド・ブートストラップ法を用いた平均に関する検定のシミュレーション分析

難波，明生

(Citation)
国民経済雑誌,213(2):63-75

(Issue Date)
2016-02

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/E0040754

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0040754

ワイルド・ブートストラップ法を
用いた平均に関する検定の
シミュレーション分析

難　　波　　明　　生

国民経済雑誌　第 213 巻　第 2 号　抜刷
平 成 28 年 2 月

ワイルド・ブートストラップ法を用いた平均に関する検定のシミュレーション分析

難　波　明　生

本稿では，分散が均一ではない分布から得られた標本の平均に関する検定を考える。Liu（1988）はこのような場合でもブートストラップ法は利用可能であることを示している。さらに，Liu（1988）は，ワイルド・ブートストラップ法を用いれば，通常の検定よりも精度の高い検定を行える可能性を示唆している。ワイルド・ブートストラップ法は，計量経済学の様々なモデルにおいて近年応用されている手法の一つである。本稿では，通常のブートストラップ法とワイルド・ブートストラップ法を上記の検定に応用し，その特性をシミュレーションにより分析する。シミュレーションの結果から，本稿で用いたモデルにおいては，通常のブートストラップ法とワイルド・ブートストラップ法はほぼ同等のパフォーマンスを持つことが示される。

キーワード　ブートストラップ法，ワイルド・ブートストラップ法

1　はじめに

計量経済学・統計学においては様々な推定法および検定法が提案されているが，その多くについては漸近的な性質しか知られていない。したがって，実際の分析では，漸近的な近似が行えるほど大きな標本ではないにもかかわらず，漸近的な性質に基づいて，近似的な推定・検定が行われている場合が少なくない。このような状況においては，得られた推定量・検定統計量の小標本における分布が漸近分布から大きくかけ離れてしまい，望まれる精度の推定・検定が行うことができない可能性がある。このような場合に，統計量の分布を，従来の漸近理論よりも正確に近似することができる可能性がある方法として注目されているのが，Efron（1979）により提案されたブートストラップ法である。Beran（1987, 1988）は，統計量が漸近的にピボットである，つまり，統計量の漸近分布が未知パラメータに依存しない場合に，ブートストラップ法を用いることにより，漸近理論に基づく信頼区間や検定の精度を改善できる可能性があることを示している[1)]。このため，計量経済学・統計学において，ブート

ストラップ（Bootstrap）法は近年非常に重要な手法となっている。

漸近分布を用いる通常の推定・検定が，統計量の分布表を用いて行われるのに対して，通常のブートストラップ法では，手元にある標本から無作為標本を再度抽出（リサンプリング）し，得られた標本（ブートストラップ標本 ）を用いて計算した統計量の分布を用いて統計量の分布を近似する。ブートストラップ標本を用いた統計量の分布は，リサンプリングを繰り返し，得られた統計量の経験分布を用いて求めることになる。したがって，ブートストラップ法においては，リサンプリングによって得られる標本を用いた統計量の反復計算が必要となる。

このようなブートストラップ法において通常想定される仮定は，標本が同一の母集団から無作為抽出されたものである，あるいは，標本が同一の分布に従うというものである。しかしながら，計量経済学においては不均一分散はよく観測される事象であり，標本が同一の分布から得られたと必ずしも仮定できるわけではない。しかしながら，Liu（1988）は標本が同一の分布から得られていない場合，つまり，標本が分散不均一性を持つ場合でも，通常のブートストラップ法による推定・検定が有効であることを示した。さらに，Liu（1988）は Wu（1986）のアイデアを拡張し，分散不均一性が存在する場合でも，漸近理論に基づく通常の方法よりも精度の高い推定・検定が行える可能性のある方法を提案した。この方法は，ワイルド・ブートストラップ（Wild Bootstrap）法と呼ばれる。ワイルド・ブートストラップ法に関しては，分散不均一性が存在する場合でも有効な方法として，近年様々な研究が行われている。（たとえば，Flachaire [2005], Davidson and Flachaire [2008] を参照。）

本稿では，不均一な分散を持つ分布の平均に関する，漸近分布に基づく検定，通常のブートストラップ法を用いる検定，およびワイルド・ブートストラップ法による検定の特性をシミュレーションにより分析する。

2　検 定 方 法

2.1　漸近理論に基づく検定

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を共通な平均 μ，分散 σ_i^2 の分布から得られた互いに独立な標本とする。本稿では，帰無仮説 $H_0: \mu=0$ を対立仮説 $H_1: \mu>0$ に対して検定することを考えよう。帰無仮説 $H_0: \mu=\mu_0(\neq 0)$ を検定したい場合には，$Y_i=X_i-\mu_0$ として，Y_i の平均が 0 であるという帰無仮説を検定すればよいので，平均が 0 であるという帰無仮説のみを考えることにより一般性は失われない。

H_0 を検定するために t 統計量

$$T=\frac{\overline{X}}{s/\sqrt{n}} \tag{1}$$

を考えよう。ただし $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, s は s^2 の正の平方根である。この統計量は，$X_i \sim$ i.i.d. $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ であれば自由度 $n-1$ の t 分布に従う。また，いくつかの仮定の下で，H_0 が真のとき，$n\to\infty$ に従って $T\xrightarrow{D}\mathrm{N}(0,1)$ となる。T の漸近分布は未知パラメータに依存しないので，t 統計量は漸近的にピボットであるといえる。

z_α を正規分布の上側 $100\times\alpha$ % 点とすると，T の実現値が z_α より大きいとき，帰無仮説 H_0 は有意水準 $100\times\alpha$ % で棄却されることになる。この検定は T が漸近的に標準正規分布に従うことを利用している。しかしながら，標本の大きさが有限の場合は，T の分布は厳密には正規分布ではないので，この検定は近似的なものである。

2.2　ブートストラップ法

上記の漸近理論に基づく検定が正規分布表を用いて行われるのに対し，ブートストラップ法では，統計分布表を用いず，手元にある標本からのリサンプリングにより検定を行う。具体的な手順は以下のように行うことができる。

A1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ から大きさ n の標本を復元抽出する。この過程をリサンプリングと呼ぶ。つまり，リサンプリングは $\mathrm{P}(X_i^*=X_j)=1/n$, $(i, j=1,2,\ldots,n)$ という分布から無作為標本を抽出することと同じことである。

A2. $\mathcal{X}=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ を所与としたときの X_i^* の条件付き期待値は

$$\mathrm{E}[X_i^*|\mathcal{X}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

であり，平均 0 という帰無仮説を満たさないので，$X_{bi}=X_i^*-\overline{X}$, $(i=1,2,\ldots,n)$ と変換する。この変換はリセンタリング (recentering) と呼ばれる。明らかに $\mathrm{E}[X_{bi}|\mathcal{X}]=0$ であるから，X_{bi} は帰無仮説を満たす。得られた標本 X_{bi} はブートストラップ標本と呼ばれる。

A3. ブートストラップ標本 X_{bi} を用いて t 統計量

$$T_b=\frac{\overline{X}_b}{s_b/\sqrt{n}}$$

を計算する。ただし，$\overline{X}_b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{bi}$, $s_b^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{bi}-\overline{X}_b)^2$, s_b は s_b^2 の正の平方根である。

A4. A1.-A3. を B 回繰り返す。b は何回目の反復計算かを表す添字であるとする（つまり $b=1,2,\ldots,B$）。得られた B 個の T_b の経験分布を用いて t 統計量の帰無仮説の下での

分布を近似し，検定を行う。そのために，ブートストラップ法によるＰ値として

$$p_B = \frac{\sum_{b=1}^{B} 1(T_b > T)}{B} \tag{2}$$

を計算する。ただし $1(A)$ は事象 A が起こったとき１，それ以外では０をとる指示関数（Indicator Function）であり T は通常の t 統計量の実現値である。通常のブートストラップ法による検定では，$p_B < \alpha$ であれば，有意水準 $100 \times \alpha$ ％で帰無仮説を棄却する。

実際の手順においては，A1. のリサンプリングと A2. のセンタリングを同時に行うために，$X_i - \overline{X}, (i=1,2,\ldots,n)$ からリサンプリングを行えばよい。特定の条件の下で，$n \to \infty$ のときに $T_b|\mathcal{X} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,1)$ となる。したがって，T の漸近分布を $\mathcal{X}$ を所与とした T_b の漸近分布で近似できることから，ブートストラップ法が漸近的に有効であることがわかる。B 回の繰り返し計算は，T_b の分布をシミュレーションするために行っていると考えることができる。本稿では，上記の方法を通常のブートストラップ法と呼ぶことにする。

この方法では，ブートストラップ標本 X_{bi} は同一の分布から独立に得られていることになる。したがって，通常のブートストラップ法は分散不均一性を考慮していない方法であるということになる。

2.3　ワイルド・ブートストラップ法

通常のブートストラップ法におけるリサンプリングでは，$X_1 - \overline{X}, X_2 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$ から大きさ n の標本を無作為抽出することによりブートストラップ標本を得た。これに対し，ワイルド・ブートストラップ法では，無作為抽出の代わりに選択分布（pick distribution）を利用することによりリサンプリングを行う。ワイルド・ブートストラップ法を用いた検定手順は以下のようになる。

B1. 通常のブートストラップ法と同様に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ にリセンタリングを行う。

B2. $i=1, 2, \ldots, n$ に対して

$$X_{wbi} = (X_i - \overline{X})\epsilon_i \tag{3}$$

を計算することによりリサンプリングを行い，ブートストラップ標本 X_{wbi} を得る。ただし ϵ_i は確率変数であり，ϵ_i の従う分布を選択分布と呼ぶ。

B3. ブートストラップ標本 X_{wbi} を用いて t 統計量

$$T_{wb}=\frac{\overline{X}_{wb}}{s_{wb}/\sqrt{n}}$$

を計算する。ただし，$\overline{X}_{wb}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{wbi}$, $s_{wb}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{wbi}-\overline{X}_{wb})^2$，$s_{wb}$ は s_{wb}^2 の正の平方根である。

B4. B1.-B3. を B 回繰り返し，得られた B 個の T_{wb} の経験分布を用いて t 統計量の帰無仮説の下での分布を近似し，検定を行う。ワイルド・ブートストラップ法による P 値として

$$p_{wb}=\frac{\sum_{b=1}^{B}1(T_{wb}>T)}{B} \qquad (4)$$

を計算し，$p_{wb}<\alpha$ であれば，有意水準 $100\times\alpha$ % で帰無仮説を棄却する。

Liu (1988) は，ϵ_i の従う分布である選択分布として，$\mathrm{E}[\epsilon_i]=0$, $\mathrm{E}[\epsilon_i^2]=1$ かつ $E[\epsilon_i^3]=1$ であるような分布を用いれば，ワイルド・ブートストラップ法により，漸近理論に基づく検定の精度を改善できる可能性があることを示した。Mammen (1993) は，Liu (1988) の条件を満たすような選択分布として

$$\begin{cases}\mathrm{P}\left(\epsilon_i=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\\[2ex]\mathrm{P}\left(\epsilon_i=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\end{cases} \qquad (5)$$

であるような 2 項分布を用いることを提案している[2)]。

3　シミュレーション分析

本節では，前節で紹介した検定方法の検定力をシミュレーションにより分析する。シミュレーションの設定は以下の通りである。前節において説明したように，帰無仮説 H_0: $\mu=0$ を対立仮説 H_1: $\mu=\mu_1$ に対して検定することを考える。分析対象となる分布としては，正規分布 (N)，一様分布 (U)，自由度 3 の t 分布 (T3) および自由度 4 の t 分布 (T4) の乱数を用い[3)]，まず，すべての分布について平均が 0，分散が 1 になるように変換を行った。ここでは，X_i は異なる分散 σ_i^2 を持つので，後述する方法により σ_i を決定し，上で得られた乱数に σ_i をかけて μ_1 を加えたものを X_i とした。したがって，X_i は平均 μ_1，分散 σ^2 を持つ。

すべての分布について右側検定を行うことを考え，μ_1 については，0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8 を用いた。標本の大きさ n は 20, 30, 50, 100, 200 とした。ブートストラップ法における繰り返し回数 B については $B=1000$ とした。検定の有意水準は 10% (0.10)，5 % (0.05)，

１％（0.01）を用い，10000回の繰り返し計算を行い，帰無仮説 H_0 が棄却される割合を計算することにより，検定力を求めた。なお，第２節で説明した漸近理論に基づく検定では，正規分布を用いて棄却点を求めているが，標本抽出が行われた分布が正規分布の場合には t 統計量は厳密に t 分布に従うので，シミュレーションにおいてはすべての分布に対して t 分布の棄却点を用いた（表中では Normal Approximation と表記する）。標本の大きさが大きくなれば，t 分布と正規分布のどちらの棄却点を用いてもほとんど差はない。対立仮説として $H_1: \mu=\mu_1=0$ を用いた場合には，検定のサイズが検定力として求められていることになるため，この場合の検定力の値が有意水準に近い検定が，サイズ・ディストーションが少ないという意味で，正確な検定であるといえる。そこで，シミュレーションによって得られた検定のサイズが有意水準に等しいという帰無仮説を，２項分布の正規近似を用いて検定を行った。表中の＊，†，‡はこの帰無仮説がそれぞれ10％，５％，１％で棄却されたことを表している（つまり，これらの記号が全くついていない検定方法が理想的な方法である）。ここでは $n=30$ と $n=100$ の場合の結果のみを示すが，他の場合についても同様の傾向が得られる。

表１は，すべての i について $\sigma_i=1$，つまり均一な分散を持つ，同一な分布から得られた標本を用いた場合の結果である。この場合には，X_i が正規分布に従うとき，（１）式の t 統計量は，厳密に t 分布に従うことになる。また，分散不均一性は存在しないので，ワイルド・ブートストラップ法を用いなくとも，通常のブートストラップ法で検定サイズの改善が得られるはずである。表１の結果から，得られた標本が正規分布に従う場合には，どの検定を用いても，精度の高い検定を行うことができることがわかる。しかし，得られた標本が一様分布や t 分布に従う場合には，漸近理論に基づく検定についてはサイズ・ディストーションが比較的少ないが，ブートストラップ法を用いた検定の精度はあまり高くないようである。また，ワイルド・ブートストラップ法による検定と通常のブートストラップ法による検定の結果の間には，大きな差が無いようである。標本の大きさが30から100へと大きくなるに従って，ブートストラップ法による検定のサイズ・ディストーションに若干の改善が得られるものの，漸近理論に基づく検定ほど正確なサイズは得られていない。また，多くのケースにおいても，帰無仮説を棄却する確率は，ブートストラップ法による検定の方が漸近理論に基づく検定よりも高い，つまり，ブートストラップ法による検定の方が検定力が大きいという傾向が見られる。

表２，表３は分散不均一性が存在し，その不均一性を一様分布から発生させた場合の結果である。表２のシミュレーションでは，σ_i を（0, 1）上の一様分布から発生させ，表３では $i=1, \ldots, n/2$ については（0, 1）上の一様分布，$i=n/2+1, \ldots, 2$ については（1, 2）上の一様分布から発生させた。いずれの場合も，まず σ_i を発生させ，その値を固定した上で

表1　$\sigma_i=1$ の場合

			Asymptotic Test			Usual Bootstrap			Wild Bootstrap		
n	Dist	μ_1	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %
30	N	0.00	0.1002	0.0495	0.0092	0.0994	0.0476	0.0095	0.0980	0.0506	0.0132‡
		0.10	0.1476	0.0828	0.0209	0.2285	0.1341	0.0348	0.2268	0.1372	0.0441
		0.20	0.2844	0.1835	0.0601	0.4222	0.2798	0.0952	0.4217	0.2881	0.1192
		0.40	0.6890	0.5606	0.3045	0.8077	0.6842	0.3934	0.8071	0.6936	0.4465
		0.80	0.9962	0.9891	0.9388	0.9983	0.9959	0.9593	0.9983	0.9966	0.9734
	U	0.00	0.0973	0.0483	0.0095	0.0885‡	0.0412‡	0.0040‡	0.0877‡	0.0421‡	0.0071‡
		0.10	0.1409	0.0798	0.0203	0.2116	0.1141	0.0218	0.2090	0.1163	0.0299
		0.20	0.2680	0.1719	0.0578	0.4031	0.2524	0.0697	0.4007	0.2574	0.0855
		0.40	0.6826	0.5454	0.2789	0.8152	0.6870	0.3554	0.8113	0.6899	0.3897
		0.80	0.9982	0.9931	0.9486	0.9998	0.9989	0.9814	0.9998	0.9988	0.9845
	T3	0.00	0.1036	0.0465	0.0072‡	0.1213‡	0.0682‡	0.0188‡	0.1174‡	0.0702‡	0.0235‡
		0.10	0.1692	0.0965	0.0221	0.2797	0.1824	0.0721	0.2757	0.1885	0.0852
		0.20	0.3465	0.2422	0.0916	0.4878	0.3659	0.1853	0.4901	0.3811	0.2145
		0.40	0.7580	0.6601	0.4251	0.8176	0.7380	0.5405	0.8325	0.7630	0.6052
		0.80	0.9801	0.9678	0.9267	0.9730	0.9568	0.9109	0.9858	0.9778	0.9566
	T4	0.00	0.0984	0.0460*	0.0085	0.1148‡	0.0615‡	0.0132‡	0.1136‡	0.0617‡	0.0170‡
		0.10	0.2154	0.1293	0.0351	0.3386	0.2271	0.0834	0.3386	0.2337	0.1031
		0.20	0.4953	0.3701	0.1620	0.6321	0.4974	0.2662	0.6370	0.5134	0.3117
		0.40	0.9137	0.8582	0.6883	0.9376	0.8894	0.7454	0.9470	0.9112	0.8061
		0.80	0.9977	0.9964	0.9897	0.9957	0.9920	0.9806	0.9982	0.9979	0.9951
100	N	0.00	0.0990	0.0489	0.0108	0.1027	0.0494	0.0096	0.1031	0.0476	0.0098
		0.10	0.2654	0.1712	0.0558	0.3858	0.2638	0.0915	0.3849	0.2625	0.0936
		0.20	0.6363	0.5044	0.2748	0.7625	0.6327	0.3575	0.7621	0.6316	0.3658
		0.40	0.9901	0.9765	0.9119	0.9964	0.9898	0.9429	0.9963	0.9901	0.9446
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	U	0.00	0.0955	0.0485	0.0097	0.0923†	0.0460*	0.0088	0.0918‡	0.0445*	0.0096
		0.10	0.2533	0.1634	0.0515	0.3795	0.2457	0.0761	0.3797	0.2445	0.0794
		0.20	0.6379	0.5047	0.2613	0.7676	0.6368	0.3405	0.7671	0.6356	0.3448
		0.40	0.9909	0.9792	0.9181	0.9972	0.9907	0.9510	0.9970	0.9914	0.9534
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	T3	0.00	0.0974	0.0490	0.0090	0.1089‡	0.0562‡	0.0158‡	0.1056*	0.0565‡	0.0178‡
		0.10	0.2952	0.1912	0.0627	0.4280	0.3085	0.1332	0.4285	0.3119	0.1432
		0.20	0.6866	0.5701	0.3421	0.7784	0.6755	0.4508	0.7822	0.6851	0.4778
		0.40	0.9795	0.9660	0.9107	0.9795	0.9651	0.9111	0.9861	0.9763	0.9382
		0.80	0.9996	0.9994	0.9983	0.9977	0.9968	0.9929	0.9998	0.9996	0.9993
	T4	0.00	0.0981	0.0486	0.0081*	0.1058*	0.0567‡	0.0141‡	0.1053*	0.0568‡	0.0163‡
		0.10	0.4279	0.3096	0.1302	0.5650	0.4281	0.2054	0.5644	0.4331	0.2193
		0.20	0.8784	0.8053	0.6075	0.9240	0.8639	0.6810	0.9269	0.8722	0.7053
		0.40	0.9991	0.9978	0.9925	0.9982	0.9959	0.9897	0.9996	0.9984	0.9946
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	1.0000	1.0000	1.0000

表２　σ_i～U(0, 1)（i＝1, ..., n）の場合

			Asymptotic Test			Usual Bootstrap			Wild Bootstrap		
n	Dist	μ_1	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %
30	N	0.00	0.1029	0.0488	0.0081*	0.1159‡	0.0642‡	0.0188‡	0.1139‡	0.0677‡	0.0232‡
		0.10	0.1373	0.0702	0.0149	0.2247	0.1417	0.0483	0.2263	0.1476	0.0562
		0.20	0.2338	0.1392	0.0362	0.3773	0.2599	0.1087	0.3778	0.2705	0.1249
		0.40	0.5564	0.4181	0.1742	0.7100	0.5910	0.3516	0.7110	0.6053	0.3924
		0.80	0.9724	0.9347	0.7688	0.9884	0.9737	0.8936	0.9892	0.9775	0.9196
	U	0.00	0.1016	0.0455†	0.0081*	0.1010	0.0517	0.0102	0.1022	0.0553†	0.0137‡
		0.10	0.1263	0.0651	0.0125	0.2058	0.1190	0.0323	0.2062	0.1241	0.0412
		0.20	0.2186	0.1276	0.0309	0.3641	0.2344	0.0810	0.3595	0.2412	0.0934
		0.40	0.5367	0.3951	0.1467	0.7114	0.5752	0.3026	0.7082	0.5800	0.3389
		0.80	0.9763	0.9409	0.7639	0.9950	0.9849	0.9200	0.9946	0.9860	0.9323
	T3	0.00	0.0937†	0.0403‡	0.0047‡	0.1377‡	0.0764‡	0.0209‡	0.1311‡	0.0788‡	0.0256‡
		0.10	0.1524	0.0760	0.0133	0.2829	0.1928	0.0716	0.2775	0.1942	0.0881
		0.20	0.2975	0.1925	0.0533	0.4620	0.3520	0.1851	0.4611	0.3617	0.2118
		0.40	0.6634	0.5477	0.2929	0.7674	0.6850	0.5017	0.7825	0.7064	0.5486
		0.80	0.9589	0.9315	0.8355	0.9619	0.9417	0.8894	0.9755	0.9614	0.9242
	T4	0.00	0.0943*	0.0396‡	0.0060‡	0.1247‡	0.0719‡	0.0199‡	0.1224‡	0.0732‡	0.0233‡
		0.10	0.1845	0.1011	0.0219	0.3204	0.2234	0.0900	0.3185	0.2300	0.1052
		0.20	0.4024	0.2782	0.0970	0.5608	0.4511	0.2541	0.5688	0.4673	0.2832
		0.40	0.8306	0.7393	0.4879	0.8880	0.8302	0.6727	0.8999	0.8507	0.7240
		0.80	0.9932	0.9878	0.9598	0.9926	0.9874	0.9707	0.9960	0.9935	0.9847
100	N	0.00	0.0990	0.0476	0.0092	0.1042	0.0531	0.0119*	0.1032	0.0527	0.0132‡
		0.10	0.2189	0.1341	0.0389	0.3379	0.2204	0.0784	0.3361	0.2207	0.0847
		0.20	0.5225	0.3925	0.1806	0.6639	0.5302	0.2782	0.6633	0.5288	0.2916
		0.40	0.9568	0.9196	0.7732	0.9818	0.9573	0.8523	0.9807	0.9584	0.8611
		0.80	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	U	0.00	0.0967	0.0504	0.0091	0.1000	0.0477	0.0092	0.0991	0.0481	0.0106
		0.10	0.2141	0.1333	0.0361	0.3336	0.2152	0.0686	0.3332	0.2149	0.0709
		0.20	0.5174	0.3858	0.1741	0.6665	0.5259	0.2674	0.6667	0.5248	0.2733
		0.40	0.9603	0.9236	0.7756	0.9862	0.9640	0.8632	0.9869	0.9643	0.8690
		0.80	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	T3	0.00	0.0963	0.0449†	0.0084	0.1122‡	0.0639‡	0.0191‡	0.1102‡	0.0646‡	0.0211‡
		0.10	0.2451	0.1512	0.0488	0.3755	0.2700	0.1178	0.3745	0.2731	0.1277
		0.20	0.5804	0.4555	0.2400	0.6981	0.5843	0.3732	0.7045	0.5959	0.3958
		0.40	0.9563	0.9251	0.8195	0.9631	0.9386	0.8561	0.9707	0.9523	0.8878
		0.80	0.9985	0.9977	0.9932	0.9963	0.9942	0.9889	0.9992	0.9987	0.9966
	T4	0.00	0.0985	0.0441‡	0.0082*	0.1097‡	0.0619‡	0.0154‡	0.1079‡	0.0622‡	0.0164‡
		0.10	0.3541	0.2434	0.0869	0.5015	0.3680	0.1777	0.5000	0.3743	0.1879
		0.20	0.7879	0.6914	0.4568	0.8616	0.7828	0.5857	0.8662	0.7905	0.6117
		0.40	0.9953	0.9918	0.9722	0.9947	0.9912	0.9733	0.9966	0.9944	0.9846
		0.80	0.9999	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9991	1.0000	0.9999	0.9998

表 3　$\sigma_i \sim U(0, 1)$ $(i=1, \ldots, n/2)$ かつ $\sigma_i \sim U(1, 2)$ $(i=n/2+1, \ldots, 2)$ の場合

			Asymptotic Test			Usual Bootstrap			Wild Bootstrap		
n	Dist	μ_1	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %
30	N	0.00	0.0994	0.0501	0.0108	0.1029	0.0512	0.0112	0.1026	0.0520	0.0139‡
		0.10	0.1481	0.0803	0.0197	0.2276	0.1361	0.0378	0.2275	0.1435	0.0475
		0.20	0.2812	0.1809	0.0573	0.4153	0.2783	0.1001	0.4149	0.2892	0.1239
		0.40	0.6804	0.5519	0.2921	0.7923	0.6752	0.3956	0.7952	0.6861	0.4457
		0.80	0.9948	0.9852	0.9252	0.9978	0.9940	0.9553	0.9978	0.9952	0.9688
	U	0.00	0.1014	0.0492	0.0090	0.0949*	0.0412‡	0.0059‡	0.0942*	0.0449†	0.0084
		0.10	0.1435	0.0790	0.0179	0.2199	0.1199	0.0227	0.2167	0.1253	0.0327
		0.20	0.2698	0.1705	0.0549	0.4034	0.2622	0.0754	0.4007	0.2646	0.0960
		0.40	0.6647	0.5324	0.2684	0.8014	0.6740	0.3613	0.8008	0.6734	0.3952
		0.80	0.9975	0.9882	0.9346	0.9995	0.9985	0.9750	0.9995	0.9982	0.9783
	T3	0.00	0.0967	0.0432‡	0.0065‡	0.1224‡	0.0678‡	0.0179‡	0.1197‡	0.0685‡	0.0213‡
		0.10	0.1654	0.0944	0.0213	0.2886	0.1944	0.0693	0.2853	0.1971	0.0827
		0.20	0.3490	0.2393	0.0868	0.4940	0.3727	0.1956	0.4985	0.3875	0.2235
		0.40	0.7570	0.6583	0.4224	0.8169	0.7362	0.5468	0.8310	0.7657	0.6163
		0.80	0.9792	0.9679	0.9234	0.9735	0.9597	0.9139	0.9864	0.9783	0.9575
	T4	0.00	0.0996	0.0463*	0.0079†	0.1174‡	0.0653‡	0.0164‡	0.1166‡	0.0672‡	0.0193‡
		0.10	0.2124	0.1280	0.0351	0.3383	0.2281	0.0901	0.3382	0.2350	0.1079
		0.20	0.4862	0.3562	0.1576	0.6125	0.4937	0.2714	0.6193	0.5107	0.3118
		0.40	0.9072	0.8490	0.6657	0.9318	0.8853	0.7364	0.9434	0.9074	0.8006
		0.80	0.9976	0.9959	0.9883	0.9951	0.9909	0.9803	0.9985	0.9975	0.9936
100	N	0.00	0.1001	0.0481	0.0094	0.0971	0.0501	0.0086	0.0955	0.0509	0.0099
		0.10	0.2574	0.1607	0.0537	0.3836	0.2511	0.0861	0.3826	0.2527	0.0887
		0.20	0.6209	0.4977	0.2592	0.7467	0.6197	0.3501	0.7445	0.6205	0.3582
		0.40	0.9875	0.9744	0.8936	0.9955	0.9871	0.9315	0.9956	0.9871	0.9348
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	U	0.00	0.0977	0.0482	0.0087	0.0974	0.0463*	0.0085	0.0945*	0.0472	0.0080†
		0.10	0.2511	0.1591	0.0515	0.3757	0.2444	0.0776	0.3736	0.2437	0.0809
		0.20	0.6240	0.4942	0.2514	0.7521	0.6263	0.3315	0.7511	0.6276	0.3402
		0.40	0.9889	0.9746	0.9014	0.9965	0.9892	0.9432	0.9962	0.9890	0.9452
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	T3	0.00	0.0954	0.0453†	0.0087	0.1085‡	0.0596‡	0.0164‡	0.1067†	0.0585‡	0.0180‡
		0.10	0.2855	0.1853	0.0642	0.4174	0.2996	0.1293	0.4170	0.3009	0.1410
		0.20	0.6666	0.5556	0.3219	0.7661	0.6587	0.4404	0.7704	0.6666	0.4640
		0.40	0.9785	0.9656	0.9051	0.9791	0.9631	0.9111	0.9850	0.9752	0.9367
		0.80	0.9996	0.9993	0.9974	0.9973	0.9958	0.9930	0.9996	0.9996	0.9994
	T4	0.00	0.0978	0.0461*	0.0071‡	0.1053*	0.0557‡	0.0156‡	0.1053*	0.0561‡	0.0148‡
		0.10	0.4187	0.3030	0.1204	0.5531	0.4226	0.2041	0.5524	0.4262	0.2183
		0.20	0.8714	0.7976	0.5864	0.9222	0.8577	0.6729	0.9235	0.8672	0.7007
		0.40	0.9988	0.9976	0.9931	0.9978	0.9956	0.9889	0.9991	0.9984	0.9950
		0.80	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9997	0.9994	1.0000	1.0000	1.0000

表４ $\sigma_i = |X_i|$ ($i = 1, \ldots, n$) の場合

			Asymptotic Test			Usual Bootstrap			Wild Bootstrap		
n	Dist	μ_1	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %	10%	5 %	1 %
30	N	0.00	0.0995	0.0433‡	0.0057‡	0.1297‡	0.0771‡	0.0234‡	0.1262‡	0.0769‡	0.0260‡
		0.10	0.1425	0.0700	0.0110	0.2628	0.1765	0.0671	0.2598	0.1815	0.0760
		0.20	0.2620	0.1564	0.0338	0.4462	0.3295	0.1579	0.4446	0.3353	0.1791
		0.40	0.6390	0.4898	0.1971	0.7980	0.7035	0.4800	0.7997	0.7149	0.5212
		0.80	0.9904	0.9723	0.8402	0.9959	0.9913	0.9662	0.9968	0.9939	0.9763
	U	0.00	0.0934†	0.0480	0.0081*	0.0969	0.0477	0.0097	0.0980	0.0502	0.0126‡
		0.10	0.1655	0.0923	0.0230	0.2716	0.1637	0.0481	0.2723	0.1685	0.0569
		0.20	0.3586	0.2338	0.0740	0.5453	0.3894	0.1570	0.5414	0.3952	0.1752
		0.40	0.8346	0.7102	0.3940	0.9416	0.8811	0.6466	0.9395	0.8818	0.6712
		0.80	1.0000	0.9995	0.9784	1.0000	1.0000	0.9996	1.0000	1.0000	0.9996
	T3	0.00	0.0715‡	0.0244‡	0.0013‡	0.1912‡	0.1055‡	0.0236‡	0.1581‡	0.1051‡	0.0390‡
		0.10	0.1105	0.0457	0.0058	0.3142	0.2050	0.0771	0.2834	0.2080	0.1043
		0.20	0.2183	0.1196	0.0221	0.4532	0.3449	0.1721	0.4330	0.3532	0.2149
		0.40	0.5088	0.3764	0.1540	0.6958	0.6152	0.4436	0.6924	0.6336	0.5102
		0.80	0.8529	0.7965	0.6311	0.8957	0.8759	0.8132	0.9108	0.8952	0.8603
	T4	0.00	0.0799‡	0.0282‡	0.0025‡	0.1773‡	0.0969‡	0.0232‡	0.1571‡	0.0979‡	0.0325‡
		0.10	0.1569	0.0771	0.0105	0.3541	0.2532	0.1031	0.3371	0.2552	0.1324
		0.20	0.3417	0.2149	0.0554	0.5619	0.4633	0.2662	0.5544	0.4719	0.3151
		0.40	0.7418	0.6246	0.3559	0.8392	0.7956	0.6618	0.8473	0.8113	0.7175
		0.80	0.9653	0.9467	0.8740	0.9708	0.9641	0.9429	0.9782	0.9738	0.9621
100	N	0.00	0.1021	0.0494	0.0084	0.1126‡	0.0615‡	0.0158‡	0.1116‡	0.0625‡	0.0175‡
		0.10	0.2444	0.1551	0.0428	0.3789	0.2655	0.1136	0.3764	0.2672	0.1211
		0.20	0.5808	0.4495	0.2165	0.7232	0.6039	0.3707	0.7247	0.6101	0.3902
		0.40	0.9747	0.9500	0.8468	0.9894	0.9756	0.9210	0.9906	0.9783	0.9284
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	U	0.00	0.0965	0.0482	0.0099	0.0958	0.0469	0.0103	0.0962	0.0468	0.0101
		0.10	0.3468	0.2330	0.0835	0.5012	0.3530	0.1437	0.4987	0.3544	0.1464
		0.20	0.8153	0.7134	0.4470	0.9069	0.8291	0.5886	0.9062	0.8284	0.5950
		0.40	0.9994	0.9986	0.9905	1.0000	0.9995	0.9974	1.0000	0.9996	0.9975
		0.80	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	T3	0.00	0.0795‡	0.0303‡	0.0036‡	0.1727‡	0.0902‡	0.0248‡	0.1472‡	0.0913‡	0.0353‡
		0.10	0.1526	0.0771	0.0143	0.3419	0.2373	0.1025	0.3216	0.2435	0.1298
		0.20	0.3315	0.2258	0.0819	0.5237	0.4291	0.2630	0.5172	0.4390	0.3079
		0.40	0.6962	0.6059	0.4072	0.7721	0.7217	0.6100	0.7895	0.7473	0.6652
		0.80	0.9235	0.8993	0.8386	0.9263	0.9144	0.8839	0.9474	0.9372	0.9203
	T4	0.00	0.0883‡	0.0366‡	0.0038‡	0.1524‡	0.0862‡	0.0266‡	0.1400‡	0.0864‡	0.0326‡
		0.10	0.2513	0.1508	0.0420	0.4359	0.3287	0.1695	0.4262	0.3324	0.1931
		0.20	0.5762	0.4642	0.2391	0.6955	0.6221	0.4690	0.7034	0.6357	0.5039
		0.40	0.9159	0.8775	0.7683	0.9239	0.9016	0.8479	0.9397	0.9247	0.8824
		0.80	0.9888	0.9843	0.9720	0.9835	0.9809	0.9747	0.9919	0.9902	0.9869

10000回の繰り返し実験を行った。いずれの場合においても，表 1 の結果と同様に，漸近理論に基づく検定の精度は比較的良好である。いくつかのケースにおいてサイズ・ディストーションが検出されているものの，ブートストラップ法による検定よりもサイズ・ディストーションの度合いは小さいようである。また，通常のブートストラップ法による結果とワイルド・ブートストラップ法による結果に大きな差がない点，標本が大きくなるに従ってどの検定の精度も向上している点，およびブートストラップ法による検定の方が漸近理論による検定よりも検定力が大きい傾向があるという点も表 1 の結果と同様である。

表 4 は，$\sigma_i = |X_i|$，つまり標本の分散が観測値の絶対値に依存する場合の結果である。表 4 の結果によれば，標本が正規分布および一様分布に従うとき，漸近理論に基づく検定は $n=30$ では深刻なサイズ・ディストーションを持つが，$n=100$ の場合にはかなり正確な検定が行える。また，ブートストラップ法による検定は，標本が正規分布の場合は深刻なサイズ・ディストーションを持つが，標本が一様分布の場合にはかなり正確な検定が行えるようである。標本が t 分布の場合には，どの検定もかなり深刻なサイズ・ディストーションを持ち，漸近理論に基づく検定とブートストラップ法による検定は，反対方向のサイズ・ディストーションを持っている。また，有意水準10%の検定については，ワイルド・ブートストラップ法による検定の方が，通常のブートストラップ法による検定よりもサイズ・ディストーションの小さい検定を行えるようである。いずれの検定においても，n が大きくなるに従ってサイズ・ディストーションが小さくなる点は同様である。また，この場合も，漸近理論による検定よりもブートストラップ法による検定の方が検定力が大きいようである。

4　結　　論

本稿では，ワイルド・ブートストラップ法を用いた平均に関する検定の検定力を，漸近理論に基づく正規近似による検定，および通常のブートストラップ法に基づく検定の検定力とシミュレーションにより比較した。シミュレーションの結果によれば，本稿で取りあげたシンプルなケースにおいては，漸近理論に基づく検定の結果は，検定のサイズの面で相対的に良好である。本稿のケースにおいては，ブートストラップ法による検定の精度はあまり高いとはいえなかった。しかしながら，検定力に関しては，ブートストラップ法による検定は漸近理論による検定よりも全般に高い傾向があるようである。また，多くのケースにおいては，通常のブートストラップ法による結果とワイルド・ブートストラップ法による結果には大きな差が無いようではあったが，いくつかのケースにおいては，ワイルド・ブートストラップ法の方が通常のブートストラップ法よりも名目サイズに近い検定を行えているようであった。

近年の研究では，ワイルド・ブートストラップ法の様々なモデルへの応用が提案されている。本稿で扱った，不均一分散の下での平均に関する検定は，非常に単純化されたものであ

り，漸近理論に基づく検定の結果が良好であったことでも示されるとおり，正規近似が非常に上手く作用する検定であるともいえる。したがって，本稿のモデルにおいて漸近理論に基づく検定の結果が良好であったからといって，ワイルド・ブートストラップ法の利用は否定されるものではない。また，Booth and Hall（1994），Caers and Dyck（1998），Davidson and MacKinnon（2002, 2007），DiCiccio et al.（1992），Letson and McCullough（1998），McCullough and Vinod（1998），McKnight et al.（2000），Nankervis（2005），Vinod（1995），Vinod and McCullough（1995）等は，ダブル・ブートストラップと呼ばれる，２段階のブートストラップ法を行うことにより，通常のブートストラップ法よりもさらに高い精度の推定・検定を行うことのできる方法を提案している。本稿のケースにおいても，このような方法を応用することにより，ブートストラップ法による検定の精度をより高いものに改善することも可能かもしれない。このような方法は，今後さらなる研究が期待される手法であると考えられる。

注

本研究はJSPS科研費23243038，26780136の助成を受けている。

1）Hall（1992）も参照。

2）Mammen の選択分布に対し，Davidson and Flachaire（2008）は，よりシンプルな２項分布である

$$P(\epsilon_i=1)=P(\epsilon_i=-1)=\frac{1}{2}$$

を用いることを提案している。この分布については $E[\epsilon_i^3]=0$ であるため Liu（1988）の条件を満たさないが，Davidson and Flachaire（2008）のシミュレーション結果によると，Mammen（1993）による選択分布を用いた場合の差はあまり無いようである。

3）ブートストラップ法の理論的分析においては，エッジワース展開を用いるために，高次のモーメントの存在が必要とされる。本稿で扱う片側検定においては，ブートストラップ法が正規近似よりも正確であるという結論を解析的に得るには，３次のモーメントの存在が必要であることが知られている。ここでは，t 分布においては自由度より小さい次数のモーメントしか存在しないという性質を利用して，３次のモーメントの存在の影響を見るために自由度３および自由度４の t 分布を用いた。

参　考　文　献

Beran, R., 1987, “Prepivoting to Reduce Level Error of Confidence Sets,” *Biometrika,* 74, 457-468.

Beran, R., 1988, “Prepivoting Test Statistics: a Bootstrap View of Asymptotic Refinements,” *Journal of the American Statistical Association,* 83, 687-697.

Booth, J. G., and P. Hall, 1994, “Monte Carlo Approximation and the Iterated Bootstrap,” *Biometrika,* 81, 331-340.

Caers, J., and J. V. Dyck, 1998, “Nonparametric Tail Estimation Using a Double Bootstrap Method,” *Computational Statistics & Data Analysis,* 29, 191-211.

Davidson, R., and E. Flachaire, 2008, "The Wild Bootstrap, Tamed at Last," *Journal of Econometrics,* 146, 162-169.

Davidson, R., and J. G. MacKinnon, 2002,"Fast Double Bootstrap Tests of Nonnested Linear Regression Models," *Econometric Reviews,* 21, 419-429.

Davidson, R., and J. G. MacKinnon, 2007,"Improving the Reliability of Bootstrap Tests with the Fast Double Bootstrap," *Computational Statistics & Data Analysis,* 51, 3259-3281.

DiCiccio, T. J., M. A. Martin, and G. A. Young, 1992, "Fast and Accurate Approximate Double Bootstrap Confidence Intervals," *Biometrika*, 79, 285-295.

Efron, B., 1979, "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife," *Annals of Statistics,* 7, 1-26.

Flachaire, E., 2005, "Bootstrapping Heteroskedastic Regression Models: Wild Bootstrap vs. Pairs Bootstrap," *Computational Statistics & Data Analysis,* 49, 361-376.

Hall, P., 1992, *The Bootstrap and Edgeworth Expansion,* Springer-Verlag Inc.

Letson, D., and B. McCullough, 1998, "Better Confidence Intervals: the Double Bootstrap with No Pivot," *American Journal of Agricultural Economics,* 80, 552-559.

Liu, R. Y., 1988, "Bootstrap Procedures under Some Non-i.i.d. Models," *Annals of Statistics,* 16, 1696-1708.

Mammen, E., 1993, "Bootstrap and Wild Bootstrap for High Dimensional Linear Models," *Annals of Statistics,* 21, 255-285.

McCullough, B., and H. D. Vinod, 1998, "Implementing the Double Bootstrap," *Computational Economics,* 12, 79-95.

McKnight, S. D., J. W. McKean, and B. E. Huitema, 2000, "A Double Bootstrap Method to Analyze Linear Models with Autoregressive Error Terms," *Psychological Methods,* 5, 87-101.

Nankervis, J. C., 2005, "Computational Algorithms for Double Bootstrap Confidence Intervals," *Computational Statistics & Data Analysis,* 49, 461-475.

Vinod, H., and B. McCullough, 1995, "Estimating Cointegration Parameters: an Application of the Double Bootstrap," *Journal of Statistical Planning and Inference,* 43, 147-156.

Vinod, H. D., 1995, "Double Bootstrap for Shrinkage Estimators," *Journal of Econometrics,* 68, 287-302.

Wu, C. F. J., 1986, "Jackknife, Bootstrap and Other Resampling Methods in Regression Analysis," *Annals of Statistics,* 14, 1261-1295.