



ネットワークにおける複数頂点組の力学的重要性に関する数値的検証

入江, 凜
小林, 照義
谷口, 隆晴

(Citation)

國民經濟雜誌, 214(5):39-49

(Issue Date)

2016-11-10

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/E0041008>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0041008>



ネットワークにおける複数頂点組の 力学的重要性に関する数値的検証

入 江 凜
小 林 照 義
谷 口 隆 晴

国民経済雑誌 第214巻 第5号 抜刷

平成28年11月

ネットワークにおける複数頂点組の 力学的重要性に関する数値的検証

入 江 凛
小 林 照
谷 口 隆 晴

近年、銀行間取引に潜在するリスクや社会ネットワーク上でのウイルスの拡散を防ぐ方法として、ネットワークの免疫化問題の研究が盛んに行われている。免疫化問題とは、ネットワーク上の各頂点について免疫化を行う優先順位を付ける問題であり、頂点の重要性を決める問題として考えることができる。Restrepo et al. (2006, 2008) は、ネットワーク現象の力学的安定性や連結性が隣接行列の最大固有値に影響されることに着目して各頂点の重要性を定義した。彼らの研究では各頂点の重要性が互いに独立に定義されているが、実際には複数の頂点が互いに連携して連結性に大きな影響を与えることもある。そこで本研究では、Restrepo らの重要性の定義を複数の頂点からなる組に拡張し、その性質を数値計算によって検証した。その結果、特にスケールフリー性をもつネットワークにおいて、複数の頂点が連携して重要性を高める場合が多いことが観察された。

キーワード ネットワーク, 中心性, 免疫化問題

1 はじめに

2000年代以降、複雑ネットワークあるいはネットワーク科学と呼ばれる研究領域では、電力網、インターネット、Facebook や Twitter などのウェブ上のネットワーク、および金融機関同士の取引で構成される金融ネットワークなど、あらゆるネットワークの解析が盛んに行われている。中でも重要な研究課題として、ネットワーク上の各頂点を重要度に応じて順位付けするアルゴリズムの研究は多く蓄積されてきており、これまでに様々な提案がなされている。頂点の重要性を順位付けすることで、例えば感染症の拡大を防ぐためにワクチン接種対象者の優先順位を付けたり、優先的に規制をかけるべき金融機関を同定することなどが可能になる。こうした問題は一般にネットワークの免疫化問題と呼ばれる。

ネットワーク上に N 個の頂点があるとき、取りうる順位の組み合わせは $N!$ 通りであり、一つ一つの組み合わせを検証・比較していく方法は現実的に実行不可能である。免疫化問題

は NP-困難と呼ばれるクラスに属する問題であることが知られており、正しい解を多項式時間で導くことは不可能であると考えられている (Altarelli et al. 2014)。そのため、次善の方法として各頂点の個別の重要性を数値化することで順位を付けるというヒューリスティクスがとられる。しかし、免疫化問題は本来複数の頂点の組み合わせ最適化問題であり、個別の頂点の重要性の大きさによって順位付けすることは精度を低下させる要因となりうる。例えば頂点 i と頂点 j は個別には重要度の低い頂点であっても、 (i, j) の組としてみるとネットワーク構造において大きな役割を担っているかもしれない。

本稿では、Restrepo et al. (2006, 2008) によって提案されたネットワークにおける各頂点の「力学的重要性 (dynamical importance)」を複数頂点組にも適用可能なように拡張し、その有用性について数値的に検証する。Restrepo らは、ネットワーク上の力学的モデルにおいてその安定性がネットワークから定まる隣接行列の最大固有値に影響されることに着目した。例えば、安定支配条件 (master stability condition) はネットワーク上で起こる様々な力学的現象の安定性に関する条件であるが、この条件式は隣接行列の最大固有値を用いて記述される (Porter and Gleeson 2016)。Restrepo らによる力学的重要性の定義では、ある頂点を取り除かれた際の最大固有値の変化量を計算し、その変化量の絶対値が取り除かれた頂点の重要度を表す。

ネットワーク免疫化問題は、なるべく少ない頂点の除去によって効率的にネットワークを分断する問題であるが、Restrepo et al. (2008) に示されている通り、隣接行列の最大固有値とネットワークの連結性は密接な関係にあり、最大固有値が 1 となるまで頂点を取り除くとネットワーク上の最大連結成分は消滅すると予測されている。この結果を踏まえると、免疫化問題は隣接行列についての最大固有値の最小化問題として定式化でき、これを貪欲解法などのヒューリスティクス解法を用いて解くには、力学的重要性による頂点の順位付けが有用である。

他の多くの頂点の重要性の定義と同様、Restrepo らの力学的重要性の定義では単独の頂点に対する重要性のみを考えていたが、本稿では単独の頂点だけでなく複数の頂点からなる組の力学的重要性を定める。また、スケールフリー性やスモールワールド性といった現実のネットワークで観測される性質をもつネットワークモデルを用いた数値計算によって、導入した指標がどのような場合に有効であるのかを検証する。

2 Restrepo らによる力学的重要性

この節では、Restrepo らによって提案された力学的重要性について説明する。ネットワークは有向または無向グラフとして与えられているものとし、その頂点総数を N とする。隣接行列は A とし、有向グラフに対しては

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } i \text{ から頂点 } j \text{ への枝がある場合}) \\ 0 & (\text{頂点 } i \text{ から頂点 } j \text{ への枝がない場合}) \end{cases}$$

のように、無向グラフに対しては

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } i \text{ と頂点 } j \text{ の間に枝がある場合}) \\ 0 & (\text{頂点 } i \text{ と頂点 } j \text{ の間に枝がない場合}) \end{cases}$$

のように定める。自己ループは存在しないと仮定し、任意の i について $A_{ii} = 0$ とする。このように作成された行列 A は要素が全て 0 以上の行列となり、Perron-Frobenius の定理から、この行列の固有値のうち絶対値が最大のもので、正の実数となるもの λ_{\max} が存在する (MacCluer 2000)。本稿では λ_{\max} を最大固有値と呼ぶ。

Restrepo らは、感染症の伝搬などの現象をモデル化する多くのネットワーク上の時間発展モデルにおいて、隣接行列の最大固有値の大きさがその性質を左右することに着目した。実際、第 1 節で述べた安定支配条件の他にも、複数の力学系を結合した際、コヒーレンスが生じるための結合強度のしきい値に最大固有値が関係していることを Restrepo らは報告している (Restrepo et al. 2005)。これらを踏まえ、Restrepo らは、ネットワーク上の時間発展型現象における頂点や枝の重要性を、それらを取り除いたことによる最大固有値の変化量として定義し、それを力学的重要性 (dynamical importance) と呼んだ (Restrepo et al. 2005)。例えば、頂点 k の力学的重要性は以下のように定義される：

$$I_{(k)} := -\frac{\Delta\lambda_{(k)}}{\lambda_{\max}}. \quad (1)$$

ここで、 λ_{\max} は元の隣接行列の最大固有値を表し、 $\Delta\lambda_{(k)}$ は頂点 k を取り除いた後の隣接行列の最大固有値と λ_{\max} の差である。

3 複数頂点組に対する力学的重要性とその有用性の数値的検証

3.1 複数頂点組に対する力学的重要性

本節では、Restrepo らによる頂点の力学的重要性の定義を拡張し、複数の頂点に関する力学的重要性を定義する。Restrepo らによる力学的重要性の定義は、単独の頂点または枝に関する重要性についてのものであったが、個々の重要性は低くても、それらが連携することによってネットワークに大きな影響を与える場合も考え得る。そこで、Restrepo らによる単独頂点の重要性の自然な拡張として、ネットワーク上の頂点の組 (k_1, \dots, k_r) に対する力学的重要性を次のように定義する：

$$I_{(k_1, \dots, k_r)} := -\frac{\Delta\lambda_{(k_1, \dots, k_r)}}{\lambda_{\max}}. \quad (2)$$

ここで、 $\Delta\lambda_{(k_1, \dots, k_r)}$ は頂点 k_1, \dots, k_r を取り除いた後の隣接行列の最大固有値と λ_{\max} の差で

ある。以下では、単独の力学的重要性和複数頂点組の力学的重要性和を数値計算することで、各頂点の重要性の変化を調べ、複数頂点組の力学的重要性和の有効性を検証する。なお、本稿では頂点の組についてのみを考えるが、複数の枝の組や頂点と枝の両方からなる組についても同様にして重要性を定義することができる。

3.2 単独頂点に対する力学的重要性和と複数頂点組に対する力学的重要性和の比較

この節では、単独で計算した各頂点の力学的重要性和と、複数の頂点を組にして計算した重要性和でどの程度の差が生じるかを数値的に検証する。特に、ネットワークのモデルや平均次数を変えて計算し、どのような場合に複数頂点組の重要性和が有効となるかを考察する。

計算条件 まず、実験で用いたネットワークモデルについて説明する。現実に現れるネットワークの特徴として、スケールフリー性やスモールワールド性などがよく知られている。スケールフリー性とは次数分布が次数のべき乗に比例するという性質であり、

$$P(d_l) \propto d_l^{-\beta}, \quad l = \text{in, out}$$

と表されることを指す。ただし、 β はべき指数、 d_{in} は入次数、 d_{out} は出次数である。 $P(d_{\text{in}})$ 、 $P(d_{\text{out}})$ は次数分布を表し、入次数が d_{in} である頂点や出次数が d_{out} である頂点数を表す。この性質は World Wide Web をはじめとする多くの実ネットワークで観察されており、そのようなネットワークでは大半の頂点は少数の枝しかもたず、ごく一部の頂点が膨大な数の枝をもつ。一方のスモールワールド性とはネットワークのサイズに比べてその直径が著しく小さいという性質であり、これも多くの実ネットワークで確認される。一般的には、ネットワークの頂点数を N とするとき、直径が $\mathcal{O}(\log N)$ であるという性質を指す。

スケールフリー性は多くのネットワークで観測される性質であるが、一方で、この性質をもつネットワークからランダムに抽出した部分ネットワークは、多くの場合にそれをもたないことも知られている (Stumpf et al. 2005)。これは、ネットワーク全体の観測が難しく、その一部しか観測できないような場合に、観測されるネットワークがスケールフリー性をもたない可能性が高いことを意味する。そこで、本研究では両方の場合を想定し、ネットワークモデルとして Chung らによるモデル (Chung and Lu 2002, Chung et al. 2003) と Erdős-Rényi によるモデル (Erdős and Rényi 1959) を用いて数値計算を行う。どちらのモデルもスモールワールド性をもつモデルであるが、それに加えて Chung らによるモデルはスケールフリー性をもたせることができる。一方、Erdős-Rényi によるモデルはスケールフリー性をもたず、頂点数が十分大きい場合には、その次数分布はポワソン分布に従う。参考のために、Chung らによるモデルの生成アルゴリズムを Algorithm 1 に、Erdős-Rényi によるモデル

の生成アルゴリズムを Algorithm 2 に示す。

Algorithm 1: Chung らによるスケールフリーネットワーク生成アルゴリズム (Chung and Lu 2002, Chun et al. 2003)

Input : 頂点数 N , べき指数 β , 入次数 d_{in} の最大数 m , 平均次数 $\langle d \rangle$ 。
Output : ネットワークの接続行列 A 。
1 A_{ij} を 0 に初期化。 $\hat{i}_0 \leftarrow N[\langle d \rangle(\beta-2)/m(\beta-1)]^{\beta-1}$ 。
 $c \leftarrow [(\beta-2)/(\beta-1)]\langle d \rangle \cdot N^{1/(\beta-1)}$ 。
2 **for** $\hat{i} \in [\hat{i}_0, \hat{i}_0 + N]$ **do**
3 | $d_{in}(\hat{i}) \leftarrow c \hat{i}^{-1/(\beta-1)}$
4 **end**
5 出次数 d_{out} の次数分布を, 入次数の次数分布 d_{in} をランダムに置換することにより生成。
6 確率 $d_{out}(\hat{i})d_{in}(\hat{j})/N\langle d \rangle$ で $A_{ij} \leftarrow 1$ 。

Algorithm 2: Erdős-Rényi によるネットワーク生成アルゴリズム (Erdős and Rényi 1959)

Input : 頂点数 N , 平均次数 $\langle d \rangle$ 。
Output : ネットワークの接続行列 A 。
1 A_{ij} を 0 に初期化。 $p \leftarrow \langle d \rangle / (N-1)$ 。
2 各 $i \neq j$ について, 確率 p で $A_{ij} \leftarrow 1$ 。

以下に示す数値計算例では, 頂点数が $N=1000$ である有向ネットワークを用いた。また, 両モデルに対する結果を比較するにあたって, 共通するモデルパラメータである平均次数 $\langle d \rangle$ については $\langle d \rangle=3, 9$ の二通りの場合を計算した。Chung らのモデルについては, べき指数を $\beta=2.5$, 入次数の最大次数を $m=50$ とした。複数頂点組の力学的重要性については $r=1, 2, 3$ 個の頂点からなる組についての重要性を計算した。なお, 力学的重要性の計算結果は有効数字 4 桁で示す。

計算結果 Chung らのネットワークモデルに対する計算結果を表 1 に, Erdős-Rényi モデルに対する結果を表 2 に示す。ただし, それぞれ, (a) は頂点の平均次数 $\langle d \rangle$ が 3 である場合の, (b) は 9 である場合の結果である。

まず表 1 に示した Chung らのモデルに対する結果についてであるが, $\langle d \rangle=3$ とした場合, 単独頂点での力学的重要性と複数頂点組での重要性で, 順位付けした結果が異なっており, また重要性の値そのものにも大きな差が生じている。例えば, 単独頂点での重要性で順位付けしたときの上位 2 位までの頂点番号は (65, 400) であったが, 2 つの頂点を組にした場合に 1 位であったのは (17, 65) の組であった。同様に, 3 つの頂点を組にしたときに 1 位であったのは (53, 400, 733) の組であったが, これらは単独頂点での重要性で上位となった

表 1 Chung らのネットワークモデルに対する力学的重要性による頂点の順位付け結果

(a) $\langle d \rangle = 3$ の場合。

順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性
1	65	0.04564	1	(17, 65)	0.08952	1	(53, 400, 733)	0.1100
2	400	0.04561	2	(17, 400)	0.04561	2	(53, 400, 966)	0.1071
3	17	0.03389	3	(53, 65)	0.03389	3	(53, 400, 829)	0.1042
4	22	0.03209	4	(53, 400)	0.03209	4	(53, 400, 723)	0.1037
5	53	0.03196	5	(65, 709)	0.03196	5	(65, 400, 798)	0.1027
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			<u>1376</u>	(65, 400)	0.04564	<u>1587</u>	(17, 65, 400)	0.02663
			⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(b) $\langle d \rangle = 9$ の場合。

順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性
1	26	0.02524	1	(4, 26)	0.03881	1	(4, 23, 26)	0.05137
2	149	0.01487	2	(23, 26)	0.03820	2	(4, 26, 149)	0.05131
3	23	0.01397	<u>3</u>	(26, 149)	0.03776	3	(21, 23, 26)	0.04989
4	4	0.01225	4	(21, 26)	0.03633	4	(4, 21, 26)	0.04908
5	21	0.01024	5	(8, 26)	0.03552	5	(4, 8, 26)	0.04882
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
						<u>176</u>	(23, 26, 149)	0.04239
						⋮	⋮	⋮

(a) は平均次数が 3 の場合の、(b) は 9 の場合の結果をそれぞれ示している。また、頂点数が 2, 3 の場合の結果の中で下線が引いてあるものは、単独頂点の場合に上位であった頂点からなる組の順位を表す。

頂点 (65, 400, 17) とは異なる。また、重要性の値も、これら 3 つからなる組との間には大きな開きがある。(b) に示した平均次数が 9 の場合についても、平均次数が 3 の場合ほどではないものの、同様の傾向が見られる。

一方で、表 2 の結果については、平均次数 3 の場合、9 の場合ともに、単独頂点での重要性で上位であった頂点が複数の頂点を組にした場合でも上位になっている。これは、Erdős-Rényi モデルでは、全ての頂点が同程度の次数をもちやすく、頂点ごとの違いが現れにくいいため、ネットワーク中に複数の頂点が連携することで重要性を高められるような特別な構造が現れにくいことが原因ではないかと考えられる。

次に、単独頂点での力学的重要性と複数の頂点での力学的重要性をより定量的に比較する。 r 個の頂点を組にした場合の重要性に基づいた順位付けで最上位の組の番号を (l_1, \dots, l_r) とし、単独頂点での上位 r 個の頂点番号を (k_1, \dots, k_r) とする。このとき、両者の頂点組の重要性の比を

表2 Erdős-Rényi モデルに対する力学的重要性による頂点の順位付け結果

(a) $\langle d \rangle = 3$ の場合。

順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性
1	368	0.006735	<u>1</u>	(368, 761)	0.01357	1	(368, 598, 761)	0.01930
2	761	0.006541	2	(368, 598)	0.01262	<u>2</u>	(368, 761, 835)	0.01922
3	835	0.005813	3	(761, 835)	0.01255	3	(90, 368, 761)	0.01922
4	598	0.005644	4	(368, 835)	0.01222	4	(368, 761, 896)	0.01915
5	90	0.005741	5	(90, 761)	0.01220	5	(368, 443, 761)	0.01905
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(b) $\langle d \rangle = 9$ の場合。

順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性	順位	頂点	重要性
1	671	0.003359	<u>1</u>	(384, 671)	0.006599	<u>1</u>	(312, 382, 671)	0.009684
2	384	0.003263	2	(312, 671)	0.006484	2	(384, 511, 671)	0.009627
3	312	0.003151	3	(188, 671)	0.006439	3	(188, 312, 671)	0.009599
4	188	0.003029	4	(511, 671)	0.006394	4	(384, 627, 671)	0.009551
5	627	0.002992	5	(312, 384)	0.006374	5	(188, 511, 671)	0.009508
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(a) は平均次数が3 の場合の、(b) は9 の場合の結果をそれぞれ示している。また、頂点数が2, 3 の場合の結果の中で下線が引いてあるものは、単独頂点の場合に上位であった頂点からなる組の順位を表す。

表3 表1, 表2 に示した各結果に対する $R(r)$ の計算結果

	Chung らのモデル		Erdős-Rényi モデル	
	$R(2)$	$R(3)$	$R(2)$	$R(3)$
$\langle d \rangle = 3$	1.961	4.131	$\langle d \rangle = 3$	1.000 1.004
$\langle d \rangle = 9$	1.028	1.212	$\langle d \rangle = 9$	1.000 1.000

$$R(r) = \frac{I_{(l_1, \dots, l_r)}}{I_{(k_1, \dots, k_r)}} \tag{3}$$

と表す。 $R(r)$ が1 より大きいほど、複数の頂点を組にすることで重要性が高まったといえる。

表1, 表2 に示した各結果に対して計算した $R(r)$ を表3 に示す。表3 からは次のような傾向が読み取れる；a) ネットワークモデルや平均次数を変えない場合、 $R(3)$ の方が $R(2)$ に比べて大きい、b) ネットワークモデルや組の頂点数を変えない場合、 $\langle d \rangle = 3$ の場合の R の方が $\langle d \rangle = 9$ の場合に比べて大きい、c) Chung らのモデルでは R の値は1 よりかなり大きい、Erdős-Rényi ネットワークではほぼ1 となっており、複数の頂点を組にして考えることの効果は薄い。

特に三つ目の結果から、複数の頂点を組にすることの重要性は、スケールフリー性をもつネットワークで顕著に現れるのではないかと予想される。これについては、より多くの数値実験を行うなど、今後さらに詳細に調べていく必要がある。

4 力学的重要性の近似計算

r 個の頂点からなる組に対して、本稿で定義した力学的重要性に基づいて重要性の高い組を列挙するためには、素朴に考えると N 個の頂点から r 個の頂点を取り出す組み合わせ数 $\binom{N}{r}$ と同じ数の行列に対して最大固有値を計算する必要がある、計算量が膨大となる。そこでこの節では、Restrepo らによって提案された近似計算法 (Restrepo et al. 2006) の複数頂点組の場合への応用について考える。

4.1 Restrepo らによる力学的重要性の近似計算法

まず、Restrepo らによる力学的重要性の近似計算法 (Restrepo et al. 2006) について説明する。頂点を取り除く前の隣接行列 A の最大固有値 λ_{\max} に対応する右固有ベクトルを $u = (u_1 \cdots u_N)^\top$ とする。また、頂点 k を取り除いた後の隣接行列を $A + \Delta A$ 、 λ_{\max} の変化後の値を $\lambda_{\max} + \Delta \lambda_k$ 、対応する右固有ベクトルを $u + \Delta u$ とする。ここで $u + \Delta u$ の第 k 成分はゼロとなることに注意して、 $\Delta u = \delta u - u_k e_k$ と書くことにする。ただし、 e_k は第 k 成分のみに 1 をもつ単位ベクトルであり、 δu は微小なベクトルである。また、 ΔA や $\Delta \lambda_k$ も微小量とみなす。ここで、

$$(A + \Delta A)(u + \Delta u) = (\lambda_{\max} + \Delta \lambda_k)(u + \Delta u) \quad (4)$$

に $\Delta u = \delta u - u_k e_k$ を代入し、左から A の λ_{\max} に対応する左固有ベクトル $v = (v_1 \cdots v_N)$ をかけると

$$v(A + \Delta A)(u + \delta u - u_k e_k) = (\lambda_{\max} + \Delta \lambda_k)v(u + \delta u - u_k e_k)$$

となる。さらに高次の微小量を無視すると、近似式

$$\Delta \lambda_k \approx \frac{v \Delta A u - u_k v \Delta A e_k}{v u - v_k u_k}$$

を得る。ここで ΔA の (i, j) 成分が $\Delta A_{ij} = -A_{ij}(\delta_{ik} + \delta_{jk})$ と書けることに注意すると $v \Delta A u = -2\lambda_{\max} v_k u_k$ 、 $u_k v \Delta A e_k = -\lambda_{\max} v_k u_k$ となるので

$$I_k = -\frac{\Delta \lambda_k}{\lambda_{\max}} \approx \frac{v_k u_k}{v u - v_k u_k} \quad (5)$$

と、 I_k の近似値を得ることができる。以下ではこの近似値を \hat{I}_k と書く。

この近似計算法は、直ちに複数頂点組に対する重要性の計算に応用できる。実際、 r 個の

頂点 k_1, \dots, k_r を同時に取り除いた場合,

$$\Delta A_{ij} = -A_{ij} \sum_{l \in \{k_1, \dots, k_r\}} (\delta_{il} + \delta_{jl}), \quad \Delta u = \delta u - \sum_{l \in \{k_1, \dots, k_r\}} u_l e_l$$

となるので, (4) に代入して同様に計算を行うと $I_{(k_1, \dots, k_r)}$ の近似値 $\hat{I}_{(k_1, \dots, k_r)}$ が⁵

$$\hat{I}_{(k_1, \dots, k_r)} = \frac{1}{vu - \sum_{l \in \{k_1, \dots, k_r\}} u_l e_l} \left(\sum_{l \in \{k_1, \dots, k_r\}} u_l e_l - \sum_{j \in \{k_1, \dots, k_r\}} \sum_{\substack{l \in \{k_1, \dots, k_r\} \\ l \neq j}} \frac{A_{jl} v_j u_l}{\lambda_{\max}} \right) \quad (6)$$

のように得られる。

4.2 近似精度の数値的検証

前節の近似計算法を実際に利用するにあたり, 近似精度について事前に調べておくことは重要である。そこで, 近似精度の理論解析に向けて, 生じ得る近似誤差の大きさを数値計算によって確かめる。なお, 計算対象とするネットワークとしては, 解析的に扱いやすい Erdős-Rényi ネットワークを用いた。近似誤差の指標としては, べき乗法によって計算した結果と前節の近似計算によって計算した結果の差から算出した相対誤差の, 頂点の組み合わせに対する平均値

$$\overline{E_R(r)} = \frac{1}{\binom{N}{r}} \left(\sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_r=1}^N \frac{|I_{(k_1, \dots, k_r)} - \hat{I}_{(k_1, \dots, k_r)}|}{I_{(k_1, \dots, k_r)}} \right)$$

を用いて評価した。

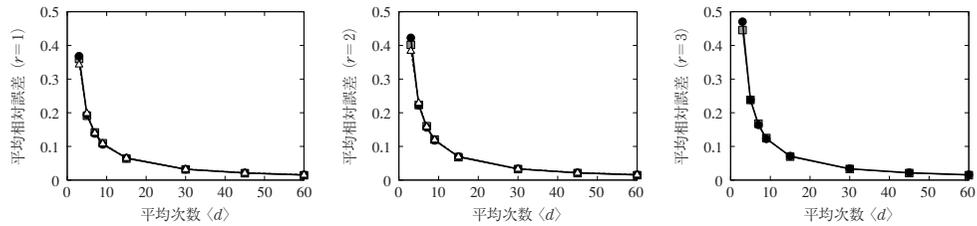
図 1 に, 頂点の総数 N , 平均次数 $\langle d \rangle$, 有向性の有無を変えた場合の計算結果を示す。平均次数 $\langle d \rangle$ が小さい無向ネットワークの場合, 頂点数 r に拘わらず相対誤差はかなり大きく, 40%ほどにまでなる場合もあった。一方, 平均次数 $\langle d \rangle$ が大きくなるほど相対誤差は小さくなっており, 平均次数が十分に大きいときには, この近似計算法は有効であると予想される。また, 有向ネットワークの方が無向ネットワークに比べて相対誤差が小さくなる傾向も見られる。ただし, これらの結果は頂点の組み合わせについての平均値に関するものであり, 個別の頂点や組に対する誤差についても同様とは限らない。

5 おわりに

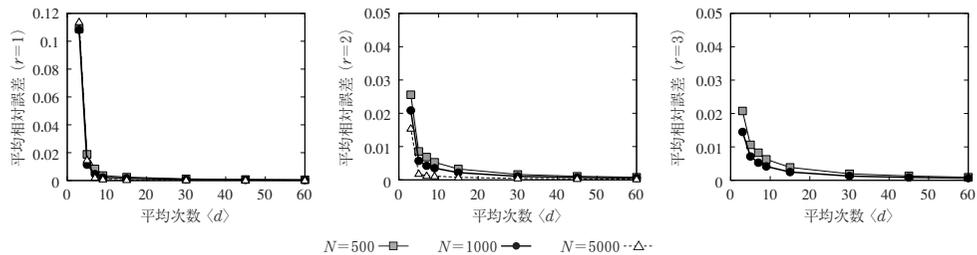
本稿では, ネットワーク上の各頂点に重要度の順位付けを行う手法として Restrepo et al. (2006, 2008) によって提案された「力学的重要性」を, 複数の頂点にも適用可能な形に拡張した。また, その性質や近似計算法について数値計算による検証を行った。数値計算では, 現実世界に頻繁に現れる特徴的な性質としてスケールフリー性に注目し, この性質をもつネットワークモデルと, もたないモデルの二通りについて計算した。その結果, スケールフリーネットワークのように幅広い裾野をもつ次数分布をもつ方が, 複数の頂点が連携して重要性

図 1 Erdős-Rényi モデルに対する力学的重要性の相対誤差の平均値 $\overline{E_R(r)}$

(a) 無向ネットワークの場合。



(b) 有向ネットワークの場合。



(a) に無向ネットワーク, (b) に有向ネットワークの場合の計算結果を示す。頂点の総数は $N=500, 1000, 5000$ の3通り, 平均次数は $\langle d \rangle=3, 5, 7, 9, 15, 30, 45, 60$ の8通りの場合に対して計算を行った。ただし, 3頂点の場合の $N=5000$ の結果は, 計算時間が膨大となるため, 省略した。

を高める傾向があることが分かった。

力学的重要性を定義通りに計算しようとする大量の固有値計算が必要となってしまう, 今日の大規模計算機を用いても現実的な時間では計算を終えることができない。そこで, Restrepo らによって提案された近似計算法を本稿で提案した複数頂点組の力学的重要性に応用した。実際に近似計算とべき乗法による直接計算の結果を比較してみたところ, 平均次数が小さい場合には大きな近似誤差が生じ得るものの, 十分に平均次数が大きければ重要度を良い精度で計算できることが分かった。

一方, 本稿で報告したこれらの性質は, ある特定のネットワークに対する数値計算結果として観察されたものである。他のネットワークや実際の金融ネットワークに対しても同様の傾向が観察されるか, あるいは, これらの性質に対して理論的な説明が可能であるのかなどについては分かっていない。また, 複数頂点組の重要度を計測する上で問題となる組み合わせ最適化問題を近似的に解く方法として, 半正定値計画法を用いるアプローチも考えられる (e.g., Masuda et al. 2013)。これらについては今後の研究課題としたい。

本研究は科研費基盤研究 (C) 16K03551 および基盤研究 (S) 15H05729 (代表: 上東貴志神戸大教授) の助成を受けている。なお, 本論文の作成に際しては増田直紀氏に有用なコメントを頂

いた。

† 神戸大学大学院システム情報学研究科

‡ 神戸大学大学院経済学研究科

参 考 文 献

- Altarelli, F., Braunstein, A., Dall'Asta, L., Wakeling, J. R., and Zecchina, R. 2014. "Containing epidemic outbreaks by message-passing techniques," *Phys. Rev. X*, **4**, 021024.
- Chung, F. and Lu, L. 2002. "The average distances in random graphs with given expected degrees," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **99**, 15879-15882.
- Chung, F., Lu, L. and Vu, V. 2003. "Spectra of random graphs with given expected degrees," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **100**, 6313-6318.
- Erdős, P. and Rényi, A. 1959. "On random graphs I," *Publ. Math.*, **6**, 290-297.
- MacCluer, C. R. 2000. "The many proofs and applications of Perron's Theorem," *SIAM Rev.*, **42**, 487-498.
- Masuda, N., Fujie, T. and Murota, K. 2013. "Application of semidefinite programming to maximize the spectral gap produced by node removal," In *Complex Networks IV, Studies in Computational Intelligence*, **476**, Springer Berlin Heidelberg, 155-163.
- Porter, M. A. and Gleeson, J. P. 2016. *Dynamical Systems on Networks: A Tutorial*, Springer International Publishing.
- Restrepo, J. G., Ott, E. and Hunt, B. R. 2005. "Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators," *Phys. Rev. E*, **71**, 036151.
- Restrepo, J. G., Ott, E. and Hunt, B. R. 2006. "Characterizing the dynamical importance of network nodes and links," *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 094102.
- Restrepo, J. G., Ott, E. and Hunt, B. R. 2008. "Weighted percolation on directed graphs," *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 058701.
- Stumpf, M. P. H., Wiuf, C. and May, R. M. 2005. "Subnets of scale-free networks are not scale-free: Sampling properties of networks," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **102**, 4221-4224.