



モラルハザードと有限混合モデル

水田, 誠一郎

松井, 建二

(Citation)

國民經濟雜誌, 220(3):49-64

(Issue Date)

2019-09-10

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/E0041861>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0041861>



モラルハザードと有限混合モデル

水 田 誠 一 郎
松 井 建 二

国民経済雑誌 第 220 卷 第 3 号 抜刷

2019 年 9 月

モラルハザードと有限混合モデル

水 田 誠 一 郎^a
松 井 建 二^b

本稿では、チーム生産が行われる組織に関する1つの構造モデルを提示し、そのモデルの識別問題を考察する。チームにおけるエージェントの努力選択行動が観察できないモラルハザードの状況を考え、観察可能な結果変数の分布からエージェントの努力費用が識別できるかを考察した。観察可能な結果変数の分布が有限混合モデルとして定式化できることを示したうえで、観察可能な結果変数のパラメトリックな仮定などのいくつかの仮定のもとで、除外制約を利用してモデルが点識別できることを示した。この除外制約は、チーム生産の状況においては自然に想定できる仮定である。パラメトリックな仮定を置かない場合においても、有限混合モデルの背後にあるゲーム構造を利用したいくつかのノンパラメトリックな識別の仮定が導出でき、それを利用して識別集合を特徴づけられる可能性があることを指摘した。

キーワード 点識別，有限混合モデル，モラルハザード，チーム生産

1 はじめに

組織においてモラルハザード¹⁾は頻繁に現れる状況である。モラルハザードの状況においては、エージェントの行動が観察立証不可能であるために、観察立証可能であり、かつエージェントの行動と結びつきのある変数を用いて契約が設計される。典型的な契約としては、例えばボーナスが上げられる。店舗販売員などを想定するならば、「売り上げがある一定以上であればボーナスを支払う」といった契約が考えられる。売り上げの多寡は、店舗販売員の営業努力と密接に結びついているはずであり、売り上げをもとに契約を設計することで、エージェントである店舗販売員が努力費用を支払って行う営業努力に適切に報いることができる。

本稿では一貫して、モラルハザードのモデルをエージェントに努力を促す契約を設計するための規範的理論であるとする。ここで問題となるのは、契約を設計する際には、モデル

a 神戸大学大学院経営学研究科, mizuta.seiichiro@gmail.com（責任著者）

b 神戸大学大学院経営学研究科, kmatsui@b.kobe-u.ac.jp

を構成するいくつかのパラメータについてプリンシパルは知っていなければならないということである。例えば、経営者が労働者に適切な努力投入を行ってもらいたいならば、この労働者が努力するときどれだけ大変なのか、その金銭的費用を知っていなければならない。またモラルハザードの状況であるのだから、エージェントの行動を条件とした観察立証可能な変数の分布を知っていなければ、「十分な売り上げがあった理由は、労働者が十分な努力を行ったためである」といった推測ができず、適切にエージェントの努力に報いることはできないであろう。つまりモラルハザード理論を用いた契約設計を行いたいならば、モラルハザードの経済モデルに基づく統計モデルを設計し、構造パラメータを推定する必要があるということである。

本稿は上述したようなモデルのパラメータを、データから知ることができるのかという識別問題を扱う。特にそれをモラルハザードの状況において行う。すなわちエージェントの行動そのものは観察できないが、エージェントの行動と関連のある変数のみが観察できる状況において、エージェントの努力費用や、エージェントの行動で条件付けた結果の分布が識別できるのかという問題を扱う。

モラルハザードの状況における識別問題を扱った研究は少ないが⁵、例えば、D'Haultfœuille and Février (2016) や Chung et al. (2013) などがあげられる。D'Haultfœuille and Février (2016) は、シングルエージェントのモラルハザードモデルを扱っている。エージェントは、国勢調査を行うインタビュアーであり、割り当てられた家庭を訪問しインタビューを行う。エージェントが選択できるのは、各家庭を訪問する際にどれくらいの確率でインタビューを行うことができるかを表すインタビュー成功確率であり、この確率を上げるには何度も家庭を訪問するなど費用を投じなければならない。賃金は実際にインタビューを行うことのできた件数をもとに決定される。その賃金がインタビュアーが努力投入を行う、すなわちインタビュー成功確率を上げるインセンティブであり、実際にインタビューを行うことのできた件数が努力水準と関連があり観察可能な結果変数である。

チームでの生産活動は、普遍的な現象であるにもかかわらず、その構造モデルを構築した先行研究は存在しない。したがって本稿はチームでの生産モデルを考察の対象とする。エージェントが複数いる状況、特に2人である状況を扱う。特に2人の状況を扱うのには大きく分けて2つの理由がある。1つ目は、後にモデルを示すように、エージェントの数が増えるほどモデルが複雑になり扱いが難しいからである。2つ目は、比較的少ない人数でのチーム生産が観察されることは次のように経済理論との一貫性を持つからである。チームでの生産において報酬がチーム全体の業績に基づいて行われているとき、フリーライダー問題が発生する。そしてこの問題はチームの人数が増えるほど深刻になる (Holmstrom, 1982)。このためチームで生産が行われているとしても、その構成人数を少なくするインセンティブが組織

には存在し、結果として少ない人数のチームでの生産活動が行われていると想定するのは自然である。この2つの理由のためにまず2人のエージェントによるモラルハザードモデルを考察の対象とする。

チームは2人のメンバーによって構成されている。彼らは、自分の期待報酬と努力費用を考慮しながら努力水準を決定するが、同時に報酬体系と生産構造を通じてゲーム的な状況に置かれている。チームメンバーは同じチームの他のメンバーについて彼がどのような費用関数を持っているのか限定的にしか知らない。努力投入が行われた後、確率的に結果が定まる。経営者は、チームがどのような努力投入を行ったか見ることができず、その結果を見て報酬を支払う。多数のチームが生産活動に従事し、各チームがどのような環境のなかでどのような結果を生み出したかというデータが得られる。しかし各チームの各エージェントが実際に何を行ったのか、その行動は観察できない。

観察可能な結果の分布は、ゲームでどのような均衡が実現したかに依存し、その均衡は観察不可能であるため、混合モデルとして定式化された。特に本稿では、エージェントの行動空間は有限集合であること、チームメンバーの間で互いに努力費用が部分的にしか分からないことを仮定したため、観察可能な結果変数の分布は、混合確率を不完備情報離散ゲームにおいて特定の努力行動の組が実現する確率とする、有限混合モデル²⁾として定式化された。

Bajari et al. (2013) および Pesendorfer and Schmidt-Dengler (2008) は、利得関数にある特定の変数が影響しないという除外制約 (Exclusion Restriction) の仮定の下で、条件付き選択確率から、不完備情報離散ゲームあるいは、動的離散選択モデルにおけるエージェントの利得関数が識別できることを示している。生産活動におけるエージェントの利得関数は、報酬と努力費用によって構成されると考えるのが自然である。各エージェントの努力費用は、他のエージェントの特徴を表す変数に影響を受けないと想定できるので、除外制約を満たす変数となっている。3節ではこの除外制約を用いた識別の結果を示す。

本稿で扱うモデルの識別は2段階になっている。まずモデルは、上で述べたように有限混合モデルとして表現できる。そして有限混合モデルの混合確率の関数としてベイジアンナッシュ均衡における条件付き選択確率が識別される。識別された条件付き選択確率から不完備離散ゲームのパラメータを識別する。したがって第1段階で有限混合モデルの識別を扱わなければならない。まず有限混合モデルのパラメータの識別を行い、次に不完備情報離散ゲームのパラメータの識別を行うという意味で2段階の識別である。

Yakowitz and Spragins (1968) はパラメトリックな有限混合モデルが識別されることの比較的調べやすい必要十分条件を与えている。Teicher (1963) は、パラメトリックな有限混合モデルが識別されるための十分条件を与えており、それを用いて構成分布が正規分布あるいはガンマ分布である有限混合モデルが識別可能であることを示している。また二項分布を構

成分分布とする有限混合モデルが識別されるための必要十分条件を与えている。本稿では、観察可能な努力行動の組で条件付けた結果の分布に対してパラメトリックな仮定を置く。Teicher (1963) の結果の直接的な適用により、結果の分布と混合確率が識別される。しかし混合確率の識別は、不完備情報ゲームの条件付き選択確率の識別を直接的には意味しないため、混合確率から、条件付き選択確率が識別される条件を与えた。

パラメトリックモデルの仮定は、契約設計者が事前に生産活動についてある程度の情報を知っているということに対応する。実際の分析では、そのような状況が必ずしも想定できるとは限らない。4節では、チーム生産の状況で構成分布に分布形の仮定を置かずにモデルが識別できるかという問題を考察する。具体的にはパネルデータの利用によってモデルが点識別されることを示す。これは Allman et al. (2009) や Bonhomme et al. (2016) などの結果を直接適用することによって得られる。

パネルデータが得られない場合かつ、混合モデルの構成分布にパラメトリックな仮定を置くことができない場合、有限混合モデルは一般に部分識別される。Henry et al. (2014) は、有限混合モデルの混合確率に除外制約を満たす変数が1つある場合に、混合確率と構成分布の識別集合を特徴づけた。4節では、チーム生産のモデルから導出される有限混合モデルが、報酬体系を除外制約を満たす変数とした Henry et al. (2014) と全く同一であることを示したうえで、背後にある不完備情報ゲームの構造から、有限混合モデルのパラメータの識別集合をより狭くすることのできる可能性のあるいくつかの識別の仮定を導くことができることを示す。

本稿の構成は以下の通りである。まず2節において2人のチームによる生産のモデルを導入する。そして観察可能な結果変数が有限混合モデルとして定式化できることを示す。またいくつかの仮定に関して注意する中で、なぜ一般的な人数でのチーム生産モデルの識別が難しいのかについて指摘する。3節では、チームの努力水準で条件付けた結果の出方の分布および努力費用の誤差項にパラメトリックな仮定を置くが、努力費用の平均にはパラメトリックな仮定を置かない場合を考察し、モデルが識別可能であることを示す。4節では、3節での仮定を弱められる可能性を示す。そのひとつとしてチームの生産モデルから導出される示唆が、有限混合モデルの識別の仮定となりうることを示す。5節は結論である。

2 モ デ ル

会社で複数の人がチームになって生産活動を行っている。チームの各メンバーには役割のようなものが存在する。もしチームメンバーが2人のチームを考えるならば、一方が「部下」であり他方が「上司」であるかもしれない。あるいは、一方は「営業」で他方が「技術者」かもしれない。そのようなチームでの生産が類似した環境の中で多く行われている状況を考

える。各チームメンバーはチームでの仕事に関してそれぞれ独立に意思決定を行う。具体的にはそれぞれの仕事をどれだけ頑張るかのような努力水準の決定を行うことを想定しており、以下ではこれを努力選択とも呼ぶ。努力選択は、例えば単に特定の作業を行うか行わないかのような二項選択かもしれないし、あるいは D'Haultfœuille and Février (2016) におけるインタビュー成功確率のような連続的な努力選択であるかもしれない。努力することにはもちろん費用を要する。各チームのメンバーは、自分のもらえる報酬と努力に関する費用に関して選好をもっている。しかし報酬体系および生産構造を通じてゲーム的な状況に置かれているため、その選好とチームメンバーの行う行動に関する予想をもとに意思決定を行う。チームのメンバーの努力水準の意思決定が行われると、売り上げやプロジェクトの成否といった観察立証可能な結果が確率的に定まる。³⁾ 結果の出方の分布は、チームメンバーの努力選択行動に依存し、チームメンバーが努力しているならば、高い売り上げが実現する確率は高くなり、逆に努力していないならば売り上げは少なくなることが予想されるだろう。売り上げが実現したのち、それに応じて賃金やボーナスが支払われる。このために、チームのメンバーは努力費用を支払い努力するインセンティブを持つことになる。以上のような状況をモデル化する。

プレイヤー：チームは2人のプレイヤーによって構成されている。プレイヤー集合を $P = \{1, 2\}$ で表す。チームは、働く環境や、プレイヤーの特性などによって特徴づけられている。それを $x = (\bar{x}, x_1, x_2)$ で表す。 $\bar{x}$ はチームの置かれた環境を表す観察可能な変数のベクトルであり、 (x_1, x_2) はそれぞれプレイヤー1とプレイヤー2の観察可能な特徴を表す変数である。

行動空間：各プレイヤーの行動集合は、有限集合であるとする。さらに簡単のため2人のプレイヤーは単に努力するか、努力しないかの選択を行うとする。各プレイヤーの行動集合を $A_1 = A_2 = \{H, L\}$ で表すことにする。 H は努力するという選択肢を表している。 $A = A_1 \times A_2$ は2人のプレイヤーの行動集合の直積集合である。

結果の分布：2人のプレイヤーの行動の組が定まると結果 y が確率的に定まる。行動の組 $a = (a_1, a_2) \in A$ で条件付けた結果 y の分布関数を $F_a(y|x)$ で表す。売り上げや事業の成否といった結果変数の分布は、単にチームの努力行動に依存するだけでなく、一般にはそのチーム自体にも依存すると想定される。したがって x はチームを特徴づける変数であり、それがチームごとに異なれば、たとえ努力水準の組が同一であったとしても、結果の分布は異なるということを許容している。一方で、チームあるいはチームメンバーの観察不可能な変数が、結果の分布に影響を与えることを許容していない。

努力費用関数：プレイヤーが努力を行うには費用が発生する。各プレイヤーは努力費用関数 $C_i : A_i \rightarrow R_+$ を持っている。これはプレイヤー1や2としてラベルづけているチーム

の役割ごとにも異なり、プレイヤーが異なればもちろん異なる。ここでは $A_i = \{H, L\}$ という行動集合を考えているが、努力選択のような行動集合は費用の大小に関して事前に順序づけ可能でありもっとも小さな努力水準に関して、一般性を失うことなく、その努力費用を 0 とする。したがって選択肢集合が $\{H, L\}$ の場合、 $C_i(L) = 0$ がすべてのプレイヤーについて成立するとする。したがってこの仮定の下では、努力費用関数は単に H を選ぶ時の費用だけによって特徴づけられる。それを単に $c_i = C_i(H)$ で表すことにする。

報酬体系：報酬体系は $w = (w_1, w_2)$ で表される。結果 y の取りうる値の範囲、つまりサポートを $\text{supp}(y)$ で表す。報酬体系は、結果から報酬（賃金）への関数であり、次で表される。

$$w_i : \text{supp}(y) \rightarrow R$$

例えば、 y は売り上げを表し、プレイヤー 1 と 2 はともにそのうちの 20% を得るという報酬体系であるならば、 $w_1(y) = w_2(y) = \frac{1}{5}y$ である。簡単化のため以下ではこのような線形の報酬体系を考える。つまり $\text{supp}(y) \subset R$ として次式を仮定する。

$$w_i(y) = w_i y, \quad i = 1, 2$$

効用関数：プレイヤーは報酬と努力選択行動の上に次のような vNM 型効用関数を持つものと仮定とする。

$$u_i(b, a_i) = b - c_i \times 1[a_i = H]$$

ここで $1[\cdot]$ は指示関数である。リスク中立的なプレイヤーを仮定し、さらに報酬と行動に関する評価が加法分離的であるとしている。個人によって努力費用が異なることを許容しているので、報酬に関する評価がすべての人で同じであることは一般性を失っていない。

情報構造：プレイヤー i の努力費用 c_i はプレイヤー i の私的情報であるとし、ゲームの初めに次のように決まるものと仮定する。

$$c_i = \bar{c}_i(x_i) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim F_i(\cdot | x_i)$$

$$E[\varepsilon_i | x_i] = 0$$

ここで $\bar{c}_i(x_i)$ は、 x_i という特徴をもつプレイヤー i の努力費用の平均である。 $F_i(\cdot | x_i)$ は ε_i の条件付き分布関数を表すとする。プレイヤーの特性や役割が異なれば、努力費用の分布が異なることを許容している。これらはすべて共有知識である。

行列表現：以上のゲームの利得構造を行列で表現すると次の表 1 のようになる。

表 1 ゲームの行列表現

$(P1, P2)$	H	L
H	$(w_1 E_{HH}[y] - \bar{c}_1(x_1) - \varepsilon_1, w_2 E_{HH}[y] - \bar{c}_2(x_2) - \varepsilon_2)$	$(w_1 E_{HL}[y] - \bar{c}_1(x_1) - \varepsilon_1, w_2 E_{HL}[y])$
L	$(w_1 E_{LH}[y], w_2 E_{LH}[y] - \bar{c}_2(x_2) - \varepsilon_2)$	$(w_1 E_{LL}[y], w_2 E_{LL}[y])$

ここで,

$$E_{a_1 a_2}[y] = \int y dF_{a_1 a_2}(y|x)$$

である。⁴⁾

均衡概念：ベイジアンナッシュ均衡 (Bayesian Nash Equilibrium, 以下 BNE) を考える。プレイヤー i の戦略は, 努力費用ショック ε_i から行動への関数であり, $\sigma_i: \text{supp}(\varepsilon_i) \rightarrow A_i$ と表される。 $\sigma_{-i}(\varepsilon_{-i})$ をプレイヤー i 以外のプレイヤーの戦略を表すものとする, 戦略の組 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ が BNE であるとは,

$$E[\Pi_i(\sigma_i^*(\varepsilon_i), \sigma_{-i}^*(\varepsilon_{-i}))] \geq E[\Pi_i(a_i, \sigma_{-i}^*(\varepsilon_{-i}))] \quad \text{for all } a_i \in A_i, \varepsilon_i \in \text{supp}(\varepsilon_i), i \in \{1, 2\}$$

が成り立つことをいう。ただし,

$$\Pi_i(a) = w_i E_a[y] - (\bar{c}_i(x_i) + \varepsilon_i) \times 1[a_i = H]$$

$$E[\Pi_i(a_i, \sigma_{-i}(\varepsilon_{-i}))] = \int \Pi_i(a_i, \sigma_{-i}(\varepsilon_{-i})) dF(\varepsilon_{-i})$$

である。

次にプレイヤー 1 が相手の戦略を $\sigma_2(\varepsilon_2)$ であると予想しているとする。このとき, プレイヤー 1 は

$$p_2 = \int 1[\sigma_2(\varepsilon_2) = H] dF(\varepsilon_2)$$

の確率で, プレイヤー 2 が H を選ぶと思っている。このときプレイヤー 1 が H を選ぶのは,

$$\begin{aligned} p_2 w_1 E_{LH}[y] + (1-p_2) w_1 E_{LL}[y] &< p_2 w_1 E_{HH}[y] + (1-p_2) w_1 E_{HL}[y] - \bar{c}_1(x_1) - \varepsilon_1 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_1 < w_1 \{p_2 G_1(H) + (1-p_2) G_1(L)\} - \bar{c}_1(x_1) \end{aligned}$$

のときであるので, プレイヤー 1 が ε_1 の私的情報を受け取る前の段階で, H を選ぶ確率は⁵⁾

$$\begin{aligned} p_1 &= F_1(w_1 \{p_2 G_1(H) + (1-p_2) G_1(L)\} - \bar{c}_1(x_1)) \\ &= F_1(w_1 \{G_1(L) + (G_1(H) - G_1(L)) p_2\} - \bar{c}_1(x_1)) \end{aligned} \quad (1)$$

である。ただし,

$$G_1(H) = E_{HH}[y] - E_{LH}[y]$$

$$G_1(L) = E_{HL}[y] - E_{LL}[y]$$

であり, それぞれプレイヤー 2 が努力しているときに自分が努力することによる結果変数の期待値の増分と, プレイヤー 2 が努力していないときに自分が努力することによる結果変数の期待値の増分である。 $G_i(\cdot)$ をプレイヤー i が努力することの利得と呼ぶ。また

$$G_i(H) > G_i(L)$$

である場合に, 相手の努力行動は自分の努力行動に補完的であると呼ぶことにする。全く同様にプレイヤー 1 が H を選ぶ確率が p_1 であるとプレイヤー 2 が思っているとき, プレイヤー 2 が ε_2 の私的情報を受け取る以前に, H を選択する確率は

$$p_2 = F_2(w_2\{G_2(L) + (G_2(H) - G_2(L))p_1\} - \bar{c}_2(x_2)) \quad (2)$$

である。 (p_1, p_2) を条件付き選択確率 (Conditional Choice Probability, 以下 CCP) という。⁶⁾
(1)式, (2)式における右辺をそれぞれ, p_2 と p_1 の関数としてみると, BNE では次の関係が成立する。

$$(p_1^*, p_2^*) = \Phi(p_1^*, p_2^*) = (\Phi_1(p_2^*), \Phi_2(p_1^*))$$

ただし, $\Phi_i(\cdot)$ は, 相手が努力する確率の予想から自分が努力する確率を定める関数であり

$$\Phi_1(p_2) = F_1(w_1\{G_1(L) + (G_1(H) - G_1(L))p_2\} - \bar{c}_1(x_1))$$

$$\Phi_2(p_1) = F_2(w_2\{G_2(L) + (G_2(H) - G_2(L))p_1\} - \bar{c}_2(x_2))$$

である。BNE における条件付き選択確率 (p_1^*, p_2^*) は, $\Phi(\cdot)$ 関数の不動点となっている。 $\Phi: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ であり, (F_1, F_2) が連続であるとき, ブラウワーの不動点定理より, 不動点の存在は保証される。つまり努力選択の不完備情報ゲームの均衡の存在は保証される。

変数の分布: 結果変数 y の分布は次のように表される。

$$F(y|x, w) = \sum_{(a_1, a_2) \in A} \lambda_{a_1 a_2}(x, w) F_{a_1 a_2}(y|x) \quad (3)$$

$$\lambda_{a_1 a_2} \geq 0, \text{ for all } (a_1, a_2) \in A$$

$$\sum \lambda_{a_1 a_2} = 1$$

ここで $\lambda_{a_1 a_2}$ は, 努力選択のゲームにおいて, プレイヤー 1 および 2 がそれぞれ, (a_1, a_2) の努力選択を行う確率である。結果変数 y の分布は, ゲームにおいて (a_1, a_2) が選択される確率を混合確率, 努力水準で条件付けた結果の分布を構成分布とした有限混合モデルとして表されている。さらに努力選択の不完備情報ゲームの均衡が一意であるか, または複数均衡である場合においても, 共変量 (x, w) で条件付けて, 常に同じ均衡が選択されると仮定するとき, 努力選択確率 $\lambda_{a_1 a_2}$ に関して次が成立する。

$$\lambda_{HH}(x, w) = p_1^*(x, w) p_2^*(x, w) \quad (4)$$

$$\lambda_{HL}(x, w) = p_1^*(x, w) (1 - p_2^*(x, w)) \quad (5)$$

$$\lambda_{LH}(x, w) = (1 - p_1^*(x, w)) p_2^*(x, w) \quad (6)$$

$$\lambda_{LL}(x, w) = (1 - p_1^*(x, w)) (1 - p_2^*(x, w)) \quad (7)$$

この関係が示唆するのは, もし有限混合モデルが識別できたのであれば, 均衡における CCP (p_1^*, p_2^*) を上の連立方程式の解として識別できるということである。

有限混合モデルでは, ラベルの交換までは識別されない。したがって識別された混合確率を値の小さい順に $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ と並べたとき, どの確率が $(\lambda_{HH}, \lambda_{HL}, \lambda_{LH}, \lambda_{LL})$ と対応するのか分からないという問題が存在するが, 例えば,

$$E_{LL}[y] < E_{LH}[y] < E_{HL}[y] < E_{HH}[y]$$

を仮定することによって, 識別された構成分布との対応から $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ と $(\lambda_{HH}, \lambda_{HL},$

$\lambda_{LH}, \lambda_{LL})$ との対応づけを行うことができる。

2.1 Remark

以上ではいくつかの仮定を置きながらモデルを説明した。具体的には、プレイヤーの数および行動集合の要素の数を固定した。さらに、プレイヤーが互いの費用関数を完全に知っている完備情報の場合も考えられるが、情報構造に関しては不完備情報であることを仮定した。また複数均衡がある場合の均衡選択メカニズムについて、共変量 (x, w) で条件付けたとき、ある 1 つの均衡が実現し、したがってある 1 つの CCP (p_1^*, p_2^*) が実現することを仮定した。それらについていくつか注意点を述べる。

第 1 に、プレイヤーおよび行動集合の要素数についてである。プレイヤーの数が一般の N であり各プレイヤーの行動集合が一般の A_i であるとき、CCP の数はすべてで、 $\sum_{i=1}^N (\#A_i - 1)$ であり、一方混合確率は、 $\sum_{i=1}^N C_N$ だけ存在する。プレイヤー数が 2 人、行動が 2 つの場合に $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ と $(\lambda_{HH}, \lambda_{HL}, \lambda_{LH}, \lambda_{LL})$ との対応づけを行ったように同じことができるならば、各プレイヤーの CCP を連立方程式を解くことによって識別することができる。しかし上で対応づけを行う際に仮定が必要であったように、うまく対応づけを行うことのできる仮定を置くことは、努力選択行動で条件付けた結果の分布に、順序づけを行うことができるということなので、一般には難しいと考えられる。これがプレイヤー数および行動の数が増えたときの問題点である。

第 2 に、情報構造についてである。チーム生産のゲームを完備情報モデルとしてモデルを定式化した場合、均衡概念はナッシュ均衡を用いることになる。特に実証的産業組織論における静学参入ゲームでは、純粋戦略ナッシュ均衡を均衡概念として用いることが多い。静学ゲームの推定で問題となるのは、モデルの不完備性 (Incompleteness) と矛盾性 (Incoherency) である。不完備性は、複数均衡のためにモデルが結果を一意に予測しないことをいい、矛盾性は、均衡の非存在のためにモデルが結果を確率的にも予測しないことをいう (Lewbel, 2019)。Bresnahan and Reiss (1991) は参入ゲームにおけるモデルの矛盾性について指摘している。2 節で取り上げた努力選択モデルは完備情報の仮定を置いた場合、

$$\begin{cases} G_1(H) < G_1(L) \\ G_2(H) > G_2(L) \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} G_1(H) > G_1(L) \\ G_2(H) < G_2(L) \end{cases} \quad (8)$$

が成立するとき、つまり相手の努力行動の自身の努力行動に対する補完性がプレイヤー間で非対称である場合に、 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ の値によって純粋戦略ナッシュ均衡が存在しなくなる。参入ゲームでは、このような非対称性が起こることは、あるプレイヤーについては、相手プレイヤーの参入が自分の利得を減少させるが、もう一方のプレイヤーについては、相手の参入行

動が自分の利得を増加させるということに対応している。このような状況は、参入ゲームについては考えにくく、したがってモデルの矛盾性は問題とはならない。他方で努力選択モデルでは、上の意味での非対称性は一般的に生起する状況であり、モデルの仮定として事前に補完性に関してプレイヤー間での対称性を課すことは難しい。それが不完備情報として定式化した大きな理由である。

最後に複数均衡についてである。不完備情報モデルの設定において(8)式の条件が成り立っているとき、均衡は必ず一意である。他方そうでない場合、つまり補完性がプレイヤー間で対称である場合は、均衡が一意とは限らない。その場合、上で行ったように、共変量で条件付けたとき、複数均衡のうちどれかが常に選択されると仮定することは一般的である(例えば、Aradillas-Lopez, 2010)。他方で均衡のどれかが確率的に選択されると仮定し、ベイジアンナッシュ均衡における条件付き選択確率を有限混合モデルとして定式化するものも存在する(Xiao, 2015; Aguirregabiria and Mira, 2019)。しかしその場合モデルが複雑になるため、単純化のために一意均衡を仮定した。

3 識 別

ここではモデルが実際に特定の仮定の下で識別可能であることを示す。

仮定1 (分布形の仮定) 努力水準の組 $a \in A$ で条件付けた結果の分布 $F_a(y|x)$ はその関数形までは既知であり、有限個のパラメータによって特徴づけられている。

仮定2 (正規分布の仮定) 共変量 x および努力水準 (a_1, a_2) で条件付けたとき結果 y は正規分布に従う。つまり $y \sim N(\mu_{a_1 a_2}(x), \sigma_{a_1 a_2}^2(x))$ である。

仮定3 (順序に関する仮定) 任意の $x \in \text{supp}(x)$ について、結果の分布の集合 $\{F_a(y|x)\}_{a \in A}$ には順序が存在し、その順序は既知である。

観察可能な変数 (y, x, w) の関係は(3)式のように有限混合モデルとして表される。仮定1, 2が意味するのは、結果変数 y が有限混合正規分布に従うということである。Teicher (1963) は、パラメトリックな有限混合モデルが識別されるための十分条件を導出した。そしてその十分条件が満たされることを、有限混合正規分布の場合において証明している。したがって Teicher (1963) の結果を直接適用することによって(3)式において構成分布および混合確率が識別されることが保証される。正規分布だけでなく、ポアソン分布、ガンマ分布、あるいは二項分布⁷⁾においても識別は可能である。仮定3は、混合確率が識別されたとき、その混合確率と均衡における努力選択確率 $(\lambda_{HH}, \lambda_{HL}, \lambda_{LH}, \lambda_{LL})$ との対応づけを可能にするための仮定である。例えば

$$E_{LL}[y] < E_{LH}[y] < E_{HL}[y] < E_{HH}[y]$$

といった順序が事前に分かっているという仮定である。この順序に基づいて、識別された構

成分のうちの最も期待値が高いものに対応する混合確率が λ_{HH} であり、次に期待値が高いものに対応する混合確率が λ_{HL} であるといったように、識別された混合確率と $(\lambda_{HH}, \lambda_{HL}, \lambda_{LH}, \lambda_{LL})$ との対応づけを可能にしている。

以上により有限混合モデルが識別できたので、 $\{\lambda_a(x, w), F_a(y|x)\}_{a \in A}$ がすべての (y, x, w) について識別できていると考えて良い。

仮定 4 (SBNE の仮定) 共変量 (x, w) で条件付けたとき、複数均衡がある場合において、どれかただひとつの均衡だけが実現する。

仮定 4 のもとで、(4)式から(7)式が成立する。 $\{\lambda_a(x, w)\}_{a \in A}$ は識別されているので、この連立方程式の解として BNE における各プレイヤーの CCP $(p_1^*(x, w), p_2^*(x, w))$ を識別することができる。

仮定 5 (費用の分布の正規性) プレイヤー i の費用は、正規分布に従う。

$$\begin{aligned} c_i &= \bar{c}_i(x_i) + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i &\sim N(0, \sigma_i^2(x_i)) \end{aligned}$$

これは、努力費用 $c_i(x)$ の分布は、その分布形までは既知であるという仮定である。

次にプレイヤー 1 の均衡における努力選択行動について、

$$G(x, w) = p_2^*(x, w)G_1(H) + (1 - p_2^*(x, w))G_1(L)$$

を BNE におけるプレイヤー 1 が努力した時の結果の増分、 D_i を努力したかどうかを表すダミー変数として次が成り立つ。

$$\begin{aligned} D_i &= 1[c_i < w_1 \times G(x, w)] \\ &= 1[\varepsilon_i < w_1 G(x, w) - \bar{c}_i(x_i)] \end{aligned}$$

よって均衡におけるプレイヤー 1 の努力選択確率は、次のように表される。

$$p_1^*(x, w) = \Phi\left(\frac{w_1 G(x, w) - \bar{c}_1(x_1)}{\sigma_1(x_1)}\right)$$

これを $w_1 G(x, w)$ について解いて、次式が得られる。

$$c_1(x_1) + \Phi^{-1}(p_1^*(x, w))\sigma_1(x_1) = w_1 G(x, w) \quad (9)$$

ここで $x = (\bar{x}, x_1, x_2)$ であり、 x_1 のみを固定して別の共変量 $x' = (\bar{x}', x_1, x_2')$, w' をとると(9)式と同様の式を得る。この 2 本の方程式を行列表記で書くと、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \Phi^{-1}(p_1^*(x, w)) \\ 1 & \Phi^{-1}(p_1^*(x', w')) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1(x_1) \\ \sigma_1(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 G(x, w) \\ w'_1 G(x', w') \end{bmatrix}$$

この連立方程式の解として、プレイヤー 1 の努力費用の平均と誤差項の分散が識別されることになる。プレイヤー 2 についても同様である。プレイヤー 1 の費用にプレイヤー 2 の特徴を表す変数は影響を与えないという除外制約の仮定を用いた識別になっている。D'Haultfoeulle

and Février (2016) は重要な識別の仮定として、インセンティブ体系の外生的な変動を必要としたが、チームのモデルにおいては必ずしもそれは必要ではない。2人のチームの場合、プレイヤー2の特徴を表す変数はプレイヤー1の努力費用に影響を与えるとは考えにくい。しかしゲーム構造を通じて、プレイヤー2の特徴を表す変数 x_2 は、プレイヤー1の相手の努力費用に関する信念を変え、それが均衡における CCP の変動を生む。このことを利用してプレイヤー1の努力費用を識別することができる。

4 今後の研究課題

3節で示した識別の結果は、主に次の3つの仮定に強く依存している。第1に結果変数の分布形が既知であること、第2に均衡は常に一意であるという SBNE の仮定、第3に費用関数の分布形が既知であることである。これらの仮定はいずれも強い仮定であるが、本節ではそれらが緩められるかということについて議論する。

結果変数 y の分布形を定めることは強い仮定である。これを緩めることは、パラメトリックな有限混合モデルではなく、ノンパラメトリックな有限混合モデルを考えるということである。ノンパラメトリックな有限混合モデルの識別にしばしば使われる仮定は、タイプで条件付けたとき互いに独立となる変数が複数観察できるという仮定である。これは次式で表される。

$$F(y_1, y_2, \dots, y_k) = \sum_{m=1}^M \lambda_m F_m(y_1, y_2, \dots, y_k) = \sum_{m=1}^M \lambda_m \prod_{i=1}^k F_m^i(y_i) \quad (10)$$

ここで $F(y_1, \dots, y_k)$ は観察される変数の分布関数、 $F_m(y_1, y_2, \dots, y_k)$ は第 m 番目の構成分布、 λ_m は混合確率である。タイプで条件付けたとき、それぞれの変数は独立であるという仮定は $F_m(y_1, y_2, \dots, y_k) = \prod_{i=1}^k F_m^i(y_i)$ で表されている。チームでの生産ということに関して、努力水準の組で条件づけたとき独立な結果変数が複数観察できる状況としてもっとも現実的であるのは、パネルデータが得られる状況である。(10)式において、

$$F_m^i(y) = F_m^j(y) \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, k)$$

とした場合がパネルデータが得られる状況に相当する。これは同じチームでの生産活動が複数回行われる状況に対応している。Bonhomme et al. (2016) は、 $k \geq 3$ の場合、つまり3回以上同じチームによる生産活動が行われる場合に、構成的なモデルの識別結果を示した。そしてその識別結果に基づいた推定方法を提案している。

構成分布の分布形が既知であるという仮定を弱める代替的な方法として考えられるのは、点識別の結果を得ることを目的とせず、部分識別の結果を得ることである。Henry et al. (2014) は、次のようなモデルを考察した。

$$F(y|x, z) = \sum_{i=1}^M \lambda_m(x, z) F_m(y|x) \quad (11)$$

ここで x は、構成分布にも混合確率にも影響を与えるが、 $z \in R$ は構成分布には影響を与えない変数である。

Henry et al. (2014) のモデル(11)式と、努力選択モデルから導出された混合モデル(3)式は全く同じ形をしていることが分かる。報酬体系 $w = (w_1, w_2)$ は構成分布には影響を与えず除外制約を満たす変数となっている。したがって Henry et al. (2014) の結果を直接適用することによって、それぞれのパラメータについて識別集合を得ることができる。

本稿で考察している有限混合モデルは、2人のチームの努力選択モデルから導出されるため、 w が除外制約を満たす変数であるという仮定に加えて、例えば次の2つの仮定を置くことができる。

- $E_{LL}[y] \leq E_a[y] \leq E_{HH}[y] \forall a \in A$
- $\lambda_{HH}(w_i, w_j, x) (\lambda_{LL}(w_i, w_j, x))$ は、 (w_i, w_j) に関して増加(減少)関数である。

1つ目の仮定は、努力水準が高くなるほど結果変数の期待値は大きくなるという仮定であり、構成分布に対する追加的な仮定となっている。2つ目の仮定は、インセンティブを強くすれば努力する確率は上がるという仮定である。これは現実的に成立しそうな仮定である。この2つの仮定を追加的に置くことで、Henry et al. (2014) が特徴づけた有限混合モデルのパラメータの識別集合よりも範囲の狭い識別集合を得られる可能性がある。

次に複数均衡がある場合に、そのうちの1つが必ず実現するというSBNEの仮定について考える。この仮定は、特にプレイヤーの戦略的依存関係が対称である場合に問題となる。このとき一般に均衡は一意ではない。複数均衡を考慮した場合、均衡におけるCCPは、

$$p_i^*(x, w) = \sum_{j=1}^k \lambda_j p_i^{*j}(x, w)$$

のように書き表される。 k は均衡の数、つまり $\Phi(p_1, p_2)$ 関数の不動点の数であり、一般には奇数個存在する。 λ_j は j 番目の均衡が選択される確率を表しており、 $p_i^{*j}(x, w)$ は j 番目の均衡における努力選択確率である。このような可能性を許した場合、有限混合モデルにおける混合確率自体が例えば、

$$\lambda_{HH} = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j p_1^{*j}(x, w) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j p_2^{*j}(x, w) \right\}$$

のように表される。識別しなければならないパラメータがSBNEのときの場合と比べ急激に増えており、単に連立方程式の解として、CCPを識別できなくなってしまう。ここに複数均衡が問題を複雑にする要因がある。

最後に、費用の分布形が既知であることを仮定した。これを仮定することによってプレイヤーの費用分布は完全に識別できることが分かったが、反実仮想を行うにあたって、賃金体

系を変動させた場合に売り上げが「平均的に」どうなるかといったことだけを問題とするならば、単に $(\bar{c}_1(x_1), \bar{c}_2(x_2))$ が識別されれば問題ないように予想される。その場合に例えば

$$E[\varepsilon_i | x_i] = 0$$

のような平均独立の仮定が平均費用を識別するのに十分であるか考えることは重要である。あるいは別のモデリング可能性として、

$$c_i = x_i b + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim F_i(\cdot | x_i)$$

$$E[\varepsilon_i | x_i] = 0$$

のように費用の条件付き期待値に線形関数の仮定を置くが、誤差項には仮定を置かないという可能性も考えられる。この場合にモデルが識別されるかを考えることも今後の課題としたい。

5 結 論

本稿では、チームの努力選択モデルが有限混合モデルとして記述できることを示したうえで、モラルハザードの状況、つまりチームメンバーの努力選択行動が観察不可能な場合に、努力選択モデルが識別可能かという問題を考察した。そしてあるパラメトリックモデルを仮定したときの識別の結果を示した。識別の結果は、構成分布の関数形の仮定、構成分布に順序がつけられること、単一均衡からのデータ生成、費用分布の仮定、費用における除外制約に依存していた。特に報酬体系の変動のような想定できそうにない操作変数の利用可能性だけでなく、チームメンバーの特徴といった一般的に得られやすく、容易に変動する変数が操作変数として用いられていることを強調した。

パネルデータの取得が、構成分布の関数形の仮定を弱められる可能性があること、さらにその上で先行研究のうえにゲームのモデルから導出される追加的な仮定を置くことができることを示した。部分識別の結果がどうなるかについては今後の課題とした。

注

- 1) ここでモラルハザードとは、単に「隠れた行動」のことを指すのであって、プリンシパル・エージェント理論において、プリンシパルがエージェントの行動を直接観察できない、あるいは観察できるが立証できない状況のことを指している。モラルハザードという言葉を用いて、上で述べた意味での情報の非対称性から生じる非効率性のことを指す場合もあるが、ここでは単にエージェントの行動が観察できないあるいは立証できない状況を指すことにする。
- 2) 有限混合モデルは、 y を確率変数として、その分布関数が次のように表される統計モデルのことを言う。

$$F(y) = \sum_{j=1}^J \lambda_j F_j(y), \sum_{j=1}^J \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j$$

λ_j は混合確率 (mixture weight, mixture proportion) と呼ばれ, $F_j(y)$ は構成分布 (component distribution) と呼ばれる。また $J(\geq 2)$ は構成要素数と呼ばれる。それぞれの j をタイプと呼ぶこともある。有限混合モデルにおける識別問題とは $F(y)$ が既知であるときに、混合確率および構成分布がどのような仮定の下で一意に定まるかという問題である。

- 3) 分布が退化することを含めれば決定的な結果の決まり方を排除するものではない。
- 4) 本来であれば、結果 y の条件付き期待値は共変量 x に依存するので $E_{\theta_{1\theta_2}}[y|x]$ と書くべきだが、煩雑性回避のために、上のような記法とした。
- 5) ε_i に関して、平均独立 $E[\varepsilon_i|x_i]=0$ の仮定のみをおいているので、(1) に関して $F_1(w_1\{G_1(L) + (G_1(H) - G_1(L))p_2\} - \bar{c}_1(x_i)|x_i)$ と書くのが正確であるが、煩雑さを回避するため共変量 x での条件付けは明示していない。
- 6) 「条件付き」というのは、共変量 (x, w) で条件付けたという意味である。
- 7) 二項分布は、成功確率が p である独立なベルヌーイ試行を N 回行うときの成功回数の分布である。混合分布における構成分布の数を K として、 $N \geq 2K - 1$ のとき識別可能である。

参 考 文 献

- Aguirregabiria, V., Mira, P. 2019. "Identification of Games of Incomplete Information with Multiple Equilibria and Unobserved Heterogeneity." *Quantitative Economics*, forthcoming.
<http://qeconomics.org/ojs/forth/666/666-5.pdf>
- Allman, E. S., Matias, C., Rhodes, J. A. 2009. "Identifiability of Parameters in Latent Structure Models with Many Observed Variables." *The Annals of Statistics*, 37, 3099-3132.
- Aradillas-Lopez, A. 2010. "Semiparametric Estimation of a Simultaneous Game with Incomplete Information." *Journal of Econometrics*, 157, 409-431.
- Bajari, P., Hong, H., Nekipelov, D. 2013. "Game Theory and Econometrics: A Survey of Some Recent Research." In D. Acemoglu, M. Arellano, E. Dekel eds. *Advances in Economics and Econometrics*, Cambridge, Cambridge University Press, 3-52.
- Bonhomme, S., Jochmans, K., Robin, J.-M. 2016. "Non-parametric Estimation of Finite Mixtures from Repeated Measurements." *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 78, 211-229.
- Bresnahan, T. F., Reiss, P. C. 1991. "Empirical Models of Discrete Games." *Journal of Econometrics*, 48, 57-81.
- Chung, D. J., Steenburgh, T., Sudhir, K. 2013. "Do Bonuses Enhance Sales Productivity? A Dynamic Structural Analysis of Bonus-Based Compensation Plans." *Marketing Science*, 33, 165-187.
- D'Haultfoeuille, X., Février, P. 2016. "The Provision of Wage Incentives: A Structural Estimation Using Contracts Variation." Working Paper.
http://www.crest.fr/ckfinder/userfiles/files/pageperso/xdhaultfoeuille/dhault_fev_revision_QE2.pdf
- Henry, M., Kitamura, Y., Salanié, B. 2014. "Partial Identification of Finite Mixtures in Econometric Models." *Quantitative Economics*, 5, 123-144.
- Holmstrom, B. 1982. "Moral Hazard in Teams." *The Bell Journal of Economics*, 13, 324-340.
- Lewbel, A. 2019. "The Identification Zoo: Meanings of Identification in Econometrics." *Journal of*

- Economic Literature*, forthcoming. <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.20181361>
- Pesendorfer, M., Schmidt-Dengler, P. 2008. "Asymptotic Least Squares Estimators for Dynamic Games." *Review of Economic Studies*, 75, 901-928.
- Teicher, H. 1963. "Identifiability of Finite Mixtures." *The Annals of Mathematical Statistics*, 34, 1265-1269.
- Xiao, R. 2015. "Identification and Estimation of Incomplete Information Games with Multiple Equilibria." *Journal of Econometrics*, 203, 328-343.
- Yakowitz, S. J., Spragins, J. D. 1968. "On the Identifiability of Finite Mixtures." *The Annals of Mathematical Statistics*, 39, 209-214.