スタイン分散推定量へのブートストラップ法の応用に関する一考察

難波, 明生

(Citation)
国民経済雑誌,224(3):33-44

(Issue Date)
2021-09-10

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/E0042538

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0042538

ISSN 0387-3129

国民経済雑誌

スタイン分散推定量への
ブートストラップ法の応用に関する一考察

難　波　明　生

国民経済雑誌　第224巻　第３号　抜刷
2021年９月

神戸大学経済経営学会

『国民経済雑誌』第224巻第3号（2021年9月），33-44

スタイン分散推定量への
ブートストラップ法の応用に関する一考察

難　波　明　生[a]

本稿では，正規分布の分散の推定量であるスタイン分散推定量へのブートストラップ法の応用可能性について検証する。スタイン分散推定量の分布を近似する際には，ブートストラップ法が漸近的に有効であることが理論的に示される。また，ブートストラップ法によるスタイン分散推定量の分布の近似が小標本においても有効であることがシミュレーションにより示される。

キーワード　スタイン分散推定量，ブートストラップ法

1　は じ め に

多変量正規分布の平均の推定については，標本平均が最尤推定量であり，非常に優れた性質を持つことが知られている。しかしながら，Stein（1956）および James and Stein（1961）は，最尤推定量である標本平均を平均自乗誤差において優越する推定量を提案した。この推定量はスタイン型推定量（Stein-rule estimator）と呼ばれる。Stein（1956）および James and Stein（1961）を発端として，多くの推定量が提案され，その性質の分析が行われてきた。これらの推定量は，最小自乗推定量を原点に向かって縮小することにより得られるので，縮小推定量と呼ばれている。このように，正規分布の平均の推定については非常に多くの研究が行われている。

さらに，Stein（1964）は，正規分布の分散についても，通常の推定量を平均自乗誤差において優越する推定量を提案した。この推定量はスタイン分散推定量と呼ばれる。Stein（1964）以降，正規分布の分散についても多くの推定量が提案され，その性質が分析されている。［例えば，Brown（1968），Brewster and Zidek（1974），Rukhin（1987），Shorrock（1990），Goutis and Casella（1991），Ohtani（1991, 1993, 1994），Rukhin and Ananda（1992）等を参照。］特に，Ohtani（1993）はスタイン分散推定量の精緻な分布関数及び密度関数を導出した。しかしながら，Ohtani（1993）で示されている通り，スタイン分散推定量の分布は未知

a　神戸大学大学院経済学研究科，namba@econ.kobe-u.ac.jp

パラメータに依存しており，非常に複雑な関数となっている。

推定量の分布が未知であったり複雑である場合には，その推定量のモーメントを計算したり，信頼区間を構築するのは困難である。このように，ある統計量の分布が未知であったり，既知ではあるものの複雑である場合に近似を得る方法として有効なのが，Efron（1979）により提案されたブートストラップ法である。分布の平均に対するスタイン型推定量へのブートストラップ法の応用については，多くの研究が行われている。例えば，Chi and Judge（1985），Brownstone（1990），Yi（1991）および Kazimi and Brownstone（1999）はシミュレーション分析により，ブートストラップ法によるスタイン型推定量の分布の近似の有効性を示している。これに対し Beran（1997）は，通常のブートストラップ法によるスタイン型推定量の分布近似は一致性を持たないことを理論的に示した。さらに，Beran（1997）は予備検定を導入することにより，一致性を満たすブートストラップ法を提案した。また，Wei et al.（2016）は，m out of n ブートストラップ法と呼ばれる方法を用いることにより，一致性のある分布近似が得られることを示した。このように，平均に対するスタイン型推定量については，通常のブートストラップ法による分布近似は一致性を持たないために理論的に有効でなく，いくつかの改善策が提案されている。平均に関するスタイン型推定量に対してブートストラップ法が有効でないという事実を考えると，ブートストラップ法による分布近似は，スタイン分散推定量に対しても無効なのではないかという疑問が生じる。

そこで本稿では，ブートストラップ法をスタイン分散推定量へ応用することを考え，その特性を分析する。

2　スタイン分散推定量

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ，分散 σ^2 の正規母集団からの無作為標本であるとする。この時，

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \tag{1}$$

は σ^2 の不偏推定量となる。ただし $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ は標本平均である。これに対し，

$$s_1^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/a_1 \tag{2}$$

という σ^2 の推定量を考えよう。この時，$a_1=n+1$ を用いれば，s_1^2 は $\hat{\sigma}^2$ より小さな平均自乗誤差（Mean Squared Error; MSE）を持つ。そこで，今後は $a_1=n+1$ を用いることにする。

上述のように s_1^2 は $\hat{\sigma}^2$ よりも小さな MSE を持つが，Stein（1964）で示されているように，

$$\tilde{\sigma}^2=\min[s_1^2, s_2^2] \tag{3}$$

で定義されるスタイン分散推定量は s_1^2 よりもさらに小さな MSE を持つ。ただし

$$s_2^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2/a_2 \tag{4}$$

$a_2=n+2$ で μ_0 は任意の定数である。

Ohtani（1993）は $\tilde{\sigma}^2$ の分布関数が

$$\begin{aligned}F(c)&=\Pr(\tilde{\sigma}^2\leqq c)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{w_i(\lambda)}{B(m/2,\,1/2+i)}\int_0^{a_0}t_1^{m/2-1}(1-t_1)^{i-1/2}P((m+1)/2+i,\,c_1^*/(2t_1))dt_1\\&\quad+\sum_{i=0}^{\infty}w_i(\lambda)[1-I_{a_0}(m/2,\,1/2+i)]P((m+1)/2+i,\,c_2^*/2)\end{aligned} \tag{5}$$

であることを示した。ただし $a_0=a_1/a_2$, $w_i(\lambda)=\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^i/i$, $\lambda=n(\mu-\mu_0)^2/\sigma^2$, $c_j^*=a_jc/\sigma^2$ ($j=1, 2$), $P(\bullet,\bullet)$ は不完全ガンマ関数，$I_y(\bullet,\bullet)$ は不完全ベータ関数である［$P(\bullet,\bullet)$ と $I_y(\bullet,\bullet)$ の定義と性質について，例えば Abramowitz and Stegun（1972）を参照］。また，(5)を微分することにより，$\tilde{\sigma}^2$ の確率密度関数

$$\begin{aligned}f(c)&=\sum_{i=0}^{\infty}w_i(\lambda)\left(\frac{a_1}{2\sigma^2}\right)^{(m+1)/2+i}\frac{c^{(m+1)/2+i-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(1/2+i)}\\&\quad\times\int_0^{a_0}t_1^{-(i+3/2)}(1-t_1)^{i-1/2}\exp\left[\frac{-a_1c}{2\sigma^2t_1}\right]dt_1\\&\quad+\sum_{i=0}^{\infty}w_i(\lambda)\left(\frac{a_2}{2\sigma^2}\right)^{(m+1)/2+i}\frac{[1-I_{a_0}(m/2,\,1/2+i)]c^{(m+1)/2+i-1}}{\Gamma((m+1)/2+i)}\exp\left[\frac{-a_2c}{2\sigma^2}\right]\end{aligned} \tag{6}$$

が得られる。

(5)式および(6)式からわかるように，スタイン分散推定量の分布関数と密度関数は未知パラメータを含んでおり，複雑なものとなっている。このため，スタイン分散推定量にもとづいて σ^2 の信頼区間を求めたり，推定量のモーメントを計算することは容易ではない。推定量の分布が未知，あるいは複雑なものである場合に分布を近似する方法としてしばしば有効であるのが，Efron（1979）により提案されたブートストラップ法である。そこで，本稿でも，スタイン分散推定量の分布を近似する方法としてブートストラップ法を利用することを考える。次節では，ブートストラップ法の概要について説明する。

3　ブートストラップ法

本節では，ブートストラップ法について説明する。ブートストラップ法は，以下のような手順でスタイン分散推定量に応用される。

1. はじめに，以下の方法によりブートストラップ標本 $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ を抽出する。
   (a) パラメトリック・ブートストラップの場合には，X_i^* は $X_i^*=\bar{X}+\hat{\sigma}Z_i$ により求められる。ただし，$i=1, 2, \ldots, n$，であり，Z_i は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ からの無作為標本である［つまり，X_i^* は $\mathrm{N}(\bar{X}, \hat{\sigma}^2)$ からの無作為標本である］。
   (b) ノンパラメトリック・ブートストラップの場合には，元の標本である $X_1, X_2, \ldots, X_n$ から復元抽出を行うことにより，大きさ n の標本 $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ を得る。
2. 1. で得られたブートストラップ標本を用い，以下のようにブートストラップ版の σ^2 の推定値を計算する。

$$\tilde{\sigma}^{*2}=\min[s_1^{*2}, s_2^{*2}], \tag{7}$$

ただし

$$s_1^{*2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i^*-\bar{X}^*)^2/a_1,\ \ s_2^{*2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i^*-\mu_0)^2/a_2 \tag{8}$$

であり，$\bar{X}^*$ は X_i^* の標本平均である。
3. 上の 1. ～ 2. を B 回繰り返すことにより，B 個の σ^2 の推定値を得る。j 回目の繰り返しで得られた推定値を $\tilde{\sigma}_j^{*2}$ で表すことにすると，ブートストラップ法による推定量とその標準誤差は以下の式で求めることができる。

$$\tilde{\sigma}^{2B}=\frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\tilde{\sigma}_j^{*2},\ \ \mathrm{Se}(\tilde{\sigma}^{2B})=\sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\tilde{\sigma}_j^{*2}-\tilde{\sigma}^{2B})^2} \tag{9}$$

$\tilde{\sigma}_j^{*2}$ を昇順に並べ，c_L と c_U をそれぞれ $B\times(\alpha/2)$ 番目と $B\times(1-\alpha/2)$ 番目の値とすれば，σ^2 の $100\times(1-\alpha)$% 信頼区間 (c_L, c_U) が求まる。

上記の手順からわかるように，ブートストラップ法を用いる場合には，未知パラメータの値は必要ない。

4　漸　近　分　布

本節では，(3)式のスタイン分散推定量とそのブートストラップ版である(7)式の漸近分布を求めて比較することにより，ブートストラップ法の有効性を検証する。

まず，(3)式のスタイン分散推定量の漸近分布を求めよう。仮定により X_i は互いに独立に $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うので，$Y_i=(X_i-\mu)^2$ とすれば $Y_i/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$ であり，Y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ は互いに独立である。$\mathrm{E}[Y_i]=\sigma^2$, $\mathrm{E}[Y_i^2]=3\sigma^4$, $\mathrm{V}[Y_i]=2\sigma^4$ であるから，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2, \kappa=\sqrt{\mathrm{V}[Y_i]}$ とすると，中心極限定理により

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{Y}-\sigma^2)}{\kappa}\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1) \tag{10}$$

が成立する。そこで $\sqrt{n}\,(\bar{Y}-\sigma^2)\xrightarrow{d}Z$ と表すことにする。ただし，$Z\sim\mathrm{N}(0,\kappa)$ である。

ここで，

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2 \tag{11}$$

であるから

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}-\sigma^2\right)=\sqrt{n}\,(\bar{Y}-\sigma^2)-\frac{[\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)]^2}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

が成立する。$\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)=O_p(1)$ であるから

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}-\sigma^2\right)\xrightarrow{d}Z \tag{13}$$

が成立する。このことから，$\sqrt{n}\,(s_1^2-\sigma^2)\xrightarrow{d}Z$ となる。

同様に，s_2^2 についても考えよう。

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\mu_0-\mu)n(\bar{X}-\mu)+n(\mu_0-\mu)^2 \tag{14}$$

であるから

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{n}-\sigma^2\right)=\sqrt{n}\,(\bar{Y}-\sigma^2)-2(\mu_0-\mu)\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)+\sqrt{n}\,(\mu_0-\mu)^2 \tag{15}$$

となる。したがって，$n\to\infty$ の時の s_2^2 の極限は，次のようになる。

1. $\mu_0-\mu=o(n^{-1/4})$ の時
   $\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)=O_p(1)$ であるから，(15)式の右辺第 2 項は 0 に収束する。また，右辺第 3 項も 0 に収束する。このことから

   $$\sqrt{n}\,(s_2^2-\sigma^2)\xrightarrow{d}Z \tag{16}$$

   となる。

2. $\mu_0-\mu=O(n^{-1/4})$ の時
   $\mu_0-\mu=n^{-1/4}\eta,\eta\neq0$ とする。この時，(15)式の右辺第 2 項は 0 に収束する。また，右辺第 3 項については $\sqrt{n}\,(\mu_0-\mu)^2=\eta^2$ が成立する。このことから

   $$\sqrt{n}\,(s_2^2-\sigma^2)\xrightarrow{d}Z+\eta^2 \tag{17}$$

   となる。

3. $\mu_0-\mu=O(n^{-1/4+\delta})$ の時（ただし $0<\delta\leq 1/4$）
   (15)式の右辺第2項は $O_p(n^{-1/4+\delta})$，右辺第3項は正の値で $O(n^{2\delta})$ であるから，$\sqrt{n}(s_2^2-\sigma^2)$ は無限大に発散する。

上記の結果から，μ_0 にどのような値を用いても，スタイン分散推定量 $\tilde{\sigma}^2$ について

$$\sqrt{n}(\tilde{\sigma}^2-\sigma^2)\xrightarrow{d}Z \tag{18}$$

が成立する。

次に，ブートストラップ版である(7)式の漸近分布を求めよう。ブートストラップ標本 X_i^* については，一般的な想定のもとで

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n(X_i^*-\bar{X})^2}{n}-\sigma^2\right)=\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^{*2}}{n}-\sigma^2\right)=\sqrt{n}(\bar{Y}^*-\sigma^2)\xrightarrow{d}Z^*\sim \mathrm{N}(0,\kappa) \tag{19}$$

が成立する。ただし $Y_i^*=(X_i^*-\bar{X})^2$, $\bar{Y}=\sum_{i=1}^n Y_i^*/n$ である。このことから s_1^2 の場合と同様の方法により $s_1^{*2}\xrightarrow{d}Z^*$ となる。

次に s_2^{*2} について考えよう。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n(X_i^*-\mu_0)^2&=\sum_{i=1}^n[(X_i^*-\bar{X})-(\bar{X}-\mu_0)]^2\\&=\sum_{i=1}^n(X_i^*-\bar{X})^2-2(\bar{X}-\mu_0)\sum_{i=1}^n(X_i^*-\bar{X})+n(\bar{X}-\mu_0^2)^2\end{aligned} \tag{20}$$

であるから

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n(X_i^*-\mu_0)^2}{n}-\sigma^2\right)=\sqrt{n}(\bar{Y}^*-\sigma^2)-2(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}(\bar{X}^*-\bar{X})+\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)^2 \tag{21}$$

となる。このことから以下のような結果が得られる。

1. $\mu_0-\mu=o(n^{-1/4})$ の時
   $\sqrt{n}(\bar{X}^*-\bar{X})=O_p(1)$ であるから，

$$\bar{X}-\mu_0=(\bar{X}-\mu)+(\mu-\mu_0) \tag{22}$$

   ここで $\bar{X}-\mu=O_p(n^{-1/2})$ であることと $\mu_0-\mu=o(n^{-1/4})$ であることを用いると(21)式の右辺第2項は0に収束する。また，$\bar{X}-\mu_0$ のオーダーを用いることにより，右辺第3項は0に確率収束する。このことから

$$\sqrt{n}\,(s_2^{*2}-\sigma^2) \xrightarrow{d} Z^* \tag{23}$$

となる。

2. $\mu_0-\mu=O(n^{-1/4})$ の時
   $\mu_0-\mu=n^{-1/4}\eta, \eta\neq 0$ とする。この時，1. の場合と同様に(21)式の右辺第 2 項は 0 に収束する。また，右辺第 3 項については

   $$n^{1/4}(\bar{X}-\mu_0)=n^{1/4}(\bar{X}-\mu)+n^{1/4}(\mu-\mu_0) \xrightarrow{p} \eta \tag{24}$$

   であるから

   $$\sqrt{n}\,(s_2^{*2}-\sigma^2) \xrightarrow{d} Z^*+\eta^2 \tag{25}$$

   となる。

3. $\mu_0-\mu=O(n^{-1/4+\delta})$ の時（ただし $0<\delta\leq 1/4$）
   (21)式の右辺第 2 項は $O_p(n^{-1/4+\delta}), \delta=1/4$ であれば $O_p(1)$，それ以外では $o_p(1)$ となる。また，右辺第 3 項は正の値で $O_p(n^{2\delta})$ である。したがって，$\sqrt{n}\,(s_2^{*2}-\sigma^2)$ は無限大に発散する。

上記の結果から，μ_0 にどのような値を用いても，ブートストラップ版のスタイン分散推定量 $\tilde{\sigma}^{*2}$ について

$$\sqrt{n}\,(\tilde{\sigma}^{*2}-\sigma^2) \xrightarrow{d} Z^* \tag{26}$$

が成立する。

Z と Z^* は同一の分布に従うので，$\sqrt{n}\,(\tilde{\sigma}^{*2}-\sigma^2)$ と $\sqrt{n}\,(\tilde{\sigma}^{2}-\sigma^2)$ は同一の漸近分布を持つ。したがって，スタイン分散推定量については，平均のスタイン型推定量の場合とは異なり，ブートストラップ法が有効であるということになる。

また，上記の 1. ～3. のそれぞれのケースにおいて，s_2^2 と s_2^{*2} が同様の漸近分布を持つため，小標本においてもブートストラップ法の近似が良好である可能性があると推測される。

そこで次節では，小標本におけるブートストラップ法の精度をコンピュータ・シミュレーションにより分析する。

5　シミュレーション分析

本節では，ブートストラップ法をスタイン分散推定量に応用して得られるブートストラップ推定量と信頼区間の特性を分析するために，コンピュータを用いたモンテカルロ実験を行

う。シミュレーションの設定は以下の通りである。

1. （5）式からわかるように，スタイン分散推定量の分布関数は未知パラメータ λ に依存する。同様に，（6）式からわかるように，スタイン分散推定量の確率密度関数は未知パラメータ σ^2 と λ に依存する。また，μ_0 は分析者により選択される任意の定数である。そこで，シミュレーションにおいては $\sigma^2=1, \mu_0=0, \mu=\sqrt{\lambda/n}, n=20$, 30, 40, 50 とする。$\lambda$ には様々な値を用いる。
2. 第3節で説明したブートストラップ法を用い，ブートストラップ推定量，標準偏差及び信頼係数95％の信頼区間を求める。ブートストラップにおける繰り返しの回数は1000回とする（つまり $B=1000$ である）。
3. 上のステップ2を100000回繰り返し，ブートストラップ推定量，標準誤差，信頼限界の平均値を繰り返すことにより，モンテカルロ実験による推定値を求める。さらに，（5）式と（6）式を用いて，スタイン分散推定量の精緻な平均，標準誤差，信頼限界を求める。

モンテカルロ実験は Fortran を用いて，パーソナル・コンピュータ上で行った。数値計算においては，積分についてはシンプソンの方法を用いた数値積分を行い，無限級数については増分が 10^{-12} より小さくなった時に収束したものと判断した。

表1，2は，パラメトリック・ブートストラップとノンパラメトリック・ブートストラップによって得られるブートストラップ推定量の平均（Mean），標準誤差（S.E.），信頼限界（下限 c_L と上限 c_U）のモンテカルロ実験の平均値を表している。また，Exact は（5）と（6）に基づいて平均，標準誤差，信頼限界を計算した値を表している。Coverage は，表に記載されている信頼区間が真の母数を覆う確率を（5）に基づいて計算した結果を表し，c_L と c_U の下の括弧内の数字はそれぞれ $\tilde{\sigma}^2 \leq c_L$ となる確率と $\tilde{\sigma}^2 \leq c_U$ となる確率を（5）に基づいて計算した結果を表している。したがって，括弧内の数字は 0.025 と 0.975 に近いことが理想的である。

表1は $n=20$ の場合の結果をまとめたものである。表1から，パラメトリック・ブートストラップにより得られる平均，標準誤差，信頼限界は精緻な値（表中で Exact が表す値）のかなり正確な推定値となることがわかる。さらに，パラメトリック・ブートストラップによって得られた信頼区間の Coverage はほぼ 0.950 である。このことから，パラメトリック・ブートストラップを用いれば，未知パラメータに関する情報がない場合でも，非常に正確な信頼区間を得ることができることがわかる。また，$n=20$ の場合に通常の推定量を用いて求められる信頼区間が［0.424, 1.564］であることを踏まえると，スタイン分散推定量とパラメ

表１　モンテカルロ実験の結果（n＝20 の場合）

λ	Method	Mean	S.E.	c_L	c_U	Coverage
0.0	Exact	0.885	0.285	0.417	1.525	
	Parametric	0.890	0.287	0.418 (0.025)	1.531 (0.976)	0.951
	Non－Parametric	0.846	0.249	0.406 (0.021)	1.367 (0.940)	0.919
0.5	Exact	0.889	0.287	0.419	1.532	
	Parametric	0.890	0.287	0.418 (0.025)	1.531 (0.950)	0.950
	Non－Parametric	0.846	0.249	0.405 (0.021)	1.367 (0.938)	0.918
1.0	Exact	0.892	0.288	0.420	1.538	
	Parametric	0.893	0.288	0.419 (0.025)	1.537 (0.975)	0.950
	Non－Parametric	0.849	0.250	0.407 (0.021)	1.371 (0.938)	0.917
2.0	Exact	0.896	0.290	0.421	1.546	
	Parametric	0.895	0.289	0.420 (0.025)	1.541 (0.974)	0.950
	Non－Parametric	0.851	0.251	0.408 (0.021)	1.376 (0.937)	0.917
5.0	Exact	0.902	0.292	0.423	1.559	
	Parametric	0.901	0.291	0.422 (0.024)	1.552 (0.974)	0.950
	Non－Parametric	0.856	0.253	0.408 (0.020)	1.385 (0.937)	0.917
10.0	Exact	0.904	0.293	0.424	1.564	
	Parametric	0.904	0.293	0.423 (0.025)	1.559 (0.974)	0.950
	Non－Parametric	0.859	0.254	0.410 (0.021)	1.390 (0.937)	0.917
20.0	Exact	0.905	0.294	0.424	1.564	
	Parametric	0.906	0.294	0.424 (0.025)	1.562 (0.975)	0.950
	Non－Parametric	0.860	0.255	0.410 (0.021)	1.393 (0.938)	0.917

トリック・ブートストラップによって得られる信頼区間は，通常の推定量から得られる信頼区間よりも短く，かつ Coverage についても高い精度を持つ信頼区間であると言うことができる。また，ノンパラメトリック・ブートストラップによって得られた結果は，ある程度の精度は持つものの，パラメトリック・ブートストラップに比べると若干低い精度であることがわかる。

表 2 は n＝100 の場合の結果である。表 2 より，n＝100 の場合にもパラメトリック・ブートストラップは非常に精度が高いことがわかる。また表 1 と表 2 を比較すると，n が大きくなるにしたがって，ノンパラメトリック・ブートストラップの精度も改善していることがわ

表2 モンテカルロ実験の結果（n=100 の場合）

λ	Method	Mean	S.E.	c_L	c_U	Coverage
0.0	Exact	0.976	0.138	0.723	1.264	
	Parametric	0.976	0.138	0.723 (0.025)	1.265 (0.975)	0.950
	Non−Parametric	0.967	0.134	0.719 (0.023)	1.243 (0.966)	0.944
0.5	Exact	0.977	0.138	0.724	1.266	
	Parametric	0.976	0.139	0.723 (0.025)	1.265 (0.975)	0.950
	Non−Parametric	0.967	0.134	0.718 (0.022)	1.244 (0.966)	0.944
1.0	Exact	0.977	0.138	0.724	1.267	
	Parametric	0.978	0.139	0.724 (0.025)	1.266 (0.975)	0.950
	Non−Parametric	0.968	0.134	0.720 (0.023)	1.245 (0.966)	0.944
2.0	Exact	0.978	0.139	0.725	1.267	
	Parametric	0.979	0.139	0.725 (0.025)	1.268 (0.975)	0.950
	Non−Parametric	0.969	0.135	0.720 (0.023)	1.246 (0.966)	0.943
5.0	Exact	0.980	0.139	0.726	1.271	
	Parametric	0.979	0.139	0.725 (0.024)	1.268 (0.974)	0.950
	Non−Parametric	0.969	0.135	0.720 (0.022)	1.246 (0.965)	0.943
10.0	Exact	0.980	0.139	0.726	1.271	
	Parametric	0.980	0.139	0.725 (0.025)	1.270 (0.974)	0.950
	Non−Parametric	0.970	0.135	0.721 (0.022)	1.248 (0.966)	0.943
20.0	Exact	0.980	0.139	0.726	1.272	
	Parametric	0.981	0.139	0.726 (0.025)	1.271 (0.975)	0.950
	Non−Parametric	0.971	0.135	0.722 (0.023)	1.250 (0.966)	0.943

かる。

これらの結果から，パラメトリック・ブートストラップを用いれば，n があまり大きくない場合でも，スタイン分散推定量の分布を高い精度で近似することができることがわかる。

6 結論と考察

本稿では，スタイン分散推定量にブートストラップ法を応用することを考え，その性質を分析した。平均のスタイン型推定量に対しては，ブートストラップ法は理論的に有効ではないことが知られている。これに対し，スタイン分散推定量に対してブートストラップ法によ

る分布の近似が漸近的に有効であることが示された。また，小標本におけるブートストラップ法の特性を分析するために，コンピュータを用いたモンテカルロ実験を行った。モンテカルロ実験からは，(1) パラメトリック・ブートストラップ法の精度が非常に高いこと，(2) ノンパラメトリック・ブートストラップ法の精度は低くはないものの，パラメトリック・ブートストラップ法に劣ること，(3) 標本が大きくなるにつれて，ノンパラメトリック・ブートストラップ法の精度も改善していくことが確認された。前にも述べた通り，スタイン分散推定量の分布の近似にブートストラップ法を利用する際には，未知パラメータの値を仮定する必要がない。したがって，パラメトリック・ブートストラップ法を用いれば，高精度の上に長さも短い信頼区間を，未知パラメータの情報を必要とせず構築できる可能性があり，実際の応用上も非常に有益であると考えられる。

本稿のモデルでは，Stein (1956) に基づき，正規分布からの標本を仮定している。このため，パラメトリック・ブートストラップ法において必要となる平均と分散の推定値が高い精度を持っているため，パラメトリック・ブートストラップの精度も非常に高いのではないかと推察される。しかし，ブートストラップ法は，その性質上，標本がどのような分布から得られた場合でも有効である。したがって，正規分布以外の分布から得られた標本に対して同様の分析を行った場合には，ノンパラメトリック・ブートストラップの方が高い精度を持つ可能性もある。これらは本稿の分析対象を超えるものであり，今後の研究課題である。

本研究はJSPS科研費18K01546の助成を受けたものです。

また，本研究は故大谷一博神戸大学名誉教授とのDiscussion PaperであるNamba and Ohtani (2002) における着想をもとに理論的分析を拡張し，シミュレーション・数値計算による再分析を行ったものです。大谷先生には筆者が学部生の頃の研究指導から始まり，就職してからも研究のみならず多くの面で多大な助言・支援をいただきました。その感謝の意は到底書き尽くせるものではございませんが，記して感謝申し上げます。

参考文献

Abramowitz, M. and I. Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York.

Beran, R. (1997). “Diagnosing Bootstrap Success”. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 49, pp. 1–24.

Brewster, J.-F., J. Zidek, et al. (1974). “Improving on Equivariant Estimators”. *The Annals of Statistics* 2(1), pp. 21–38.

Brown, L. (1968). “Inadmissibility of the Usual Estimators of Scale Parameters in Problems with Unknown Location and Scale Parameters”. *The Annals of Mathematical Statistics* 39(1), pp. 29–48.

Brownstone, D. (1990). “Bootstrapping Improved Estimators for Linear Regression Models”. *Journal of Econometrics* 44(1), pp. 171–187.

Chi, X. W. and G. Judge (1985). "On Assessing the Precision of Stein's Estimator". *Economics Letters* 18(2-3), pp. 143-148.

Efron, B. (1979). "Bootstrap Methods: Another Look At the Jackknife". *Annals of Statistics* 7, pp. 1-26.

Goutis, C. and G. Casella (1991). "Improved Invariant Confidence Intervals for a Normal Variance". *The Annals of Statistics*, pp. 2015-2031.

James, W. and C. Stein (1961). "Estimation With Quadratic Loss". *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Ed. by J. Neyman. Vol. 1. University of California Press, Berkeley, pp. 361-379.

Kazimi, C. and D. Brownstone (1999). "Bootstrap Confidence Bands for Shrinkage Estimators". *Journal of Econometrics* 90, pp. 99-127.

Namba, A. and K. Ohtani (2002). "Bootstrapping the Stein Variance Estimator". 神戸大学経済学研究科 Discussion Paper, 201.

Ohtani, K. (1991). "Estimation of the Variance in a Normal Population after the One-Sided Pre-Test for the Mean". *Communications in statistics-theory and methods* 20(1), pp. 219-234.

Ohtani, K. (1993). "The Exact Distribution and Density Functions of the Stein-Type Estimator for Normal Variance". *Communications in Statistics-Theory and Methods* 22(10), pp. 2863-2876.

Ohtani, K. (1994). "Risk Behavior of a Pre-Test Estimator for Normal Variance with the Stein-Type Estimator". *Statistical Papers* 35(1), pp. 163-168.

Rukhin, A. L. (1987). "How Much Better are Better Estimators of a Normal Variance". *Journal of the American Statistical Association* 82(399), pp. 925-928.

Rukhin, A. L. and M. M. Ananda (1992). "Risk Behavior of Variance Estimators in Multivariate Normal Distribution". *Statistics & Probability Letters* 13(2), pp. 159-166.

Shorrock, G. (1990). "Improved Confidence Intervals for a Normal Variance". *The Annals of Statistics*, pp. 972-980.

Stein, C. (1956). "Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution". *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 1. University of California Press, Berkeley, pp. 197-206.

Stein, C. (1964). "Inadmissibility of the Usual Estimator for the Variance of a Normal Distribution with Unknown Mean". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 16(1), pp. 155-160.

Wei, B., S. M. Lee, and X. Wu (2016). "Stochastically Optimal Bootstrap Sample Size for Shrinkage-Type Statistics". *Statistics and Computing* 26(1-2), pp. 249-262.

Yi, G. (1991). "Estimating the Variability of the Stein Estimator by Bootstrap". *Economics Letters* 37(3), pp. 293-298.