



主観確率に関する覚書

清水, 玄彦

(Citation)

国民経済雑誌, 224(3):45-53

(Issue Date)

2021-09-10

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/E0042539>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0042539>



国民経済雑誌

主観確率に関する覚書

清 水 玄 彦

国民経済雑誌 第224巻 第3号 抜刷

2021年9月

神戸大学経済経営学会

主観確率に関する覚書

清 水 玄 彦^a

統計学のテキストを紐解くと多くの場合、確率の説明として古典的確率、経験的確率、主観確率が論じられ、その後はいずれの概念とも調和する公理的確率を中心とした議論が進められている。経済学や経営学では、たとえば意思決定理論において主観確率の果たす役割は非常に大きいと考えられる。また昨今、応用研究がますます増えているベイズ分析は、主観確率に立脚した統計理論である。しかしながら、主観確率そのものを詳細に説明しているテキストはあまり見当たらないのが現状である。本稿では、主観確率が公理を満たす条件等について検討し、併せてその意義について考察する。

キーワード 経験的確率、主観確率、関係、確率分布、条件付確率

1 はじめに

日常生活で身近な確率の一つは、天気予報の降水確率であろう。気象庁のウェブサイトで説明されているように「予報区内で1mm以上の雨の降る確率を、6時間毎に10%単位で発表」したもので、「例えば、18時から24時までの降水確率が20%というのは、その期間に1mm以上の雨の降る可能性が100回中20回ある¹⁾」ことを示している。これは相対頻度によって計算された経験的確率に他ならない。このほかにも、製品の故障率や、手術の成功率、男女の性比なども同様に経験的確率である。一般に身近な確率概念は、経験的確率であるということができる。

今でこそベイズ統計分析は様々な応用分析において利用されているものの、分析手法に主観確率を採用している点に関してかなりの批判がなされてきた。たとえば「科学研究に事前分布を導入する理由はどこにあるのか」、「事前分布の設定は恣意的である」等々、枚挙にいとまがない。何をもって「主観」とするかについては議論されるべき点であるものの、一般的に客観的分析を追求することは科学研究という観点からは望ましいことである。

経済学と経営学に共通する研究分野の一つに決定理論がある。その中でベイジアン決定理

a 神戸大学大学院経営学研究科, hshimizu@port.kobe-u.ac.jp

論は、ベイズの定理や主観確率に基づいている。古典的なベイズの定理における「原因の確率」は、「情報の追加による主観確率の修正」という概念に生まれ変わり、客観確率の存在しない繰り返しのない意思決定問題²⁾に関して、その中核をなしている。これは Neumann-Morgenstern 型効用関数を判断基準として分析する理論体系であり、ゲーム理論とならんで重要なテーマでもある。

一部の統計的意思決定の文献を除いて、主観確率がどのような条件のもとで公理的性質を満たしているか、論じられることはほとんどない。ベイズ統計学をはじめとして主観確率の果たす役割は少なくないことから、主観確率そのものを詳しく考察する意味はあると考えられる。2節では、主観確率がどのようにして確率分布と関連するかを明らかにする。3節で主観確率の意義について考察する。

2 主観確率の性質

本節では、主観確率がいかなる前提のもとで公理的確率として扱うことが可能になるかについて、DeGroot (1970) にしたがって検討してゆく³⁾。

2.1 確率分布の構築

任意の二つの事象 A, B の比較を考え、それぞれの事象に確率を付与することで、いずれの事象が生じやすいか、あるいは同程度に生じるかを決定できるものとする。

事象 A が事象 B よりも起こりやすいとき、 $A \succ B$ と表す。同程度に起きるときは、 $A \sim B$ と表す。さらに、事象 A が事象 B より起こりやすいか、あるいは同程度に起きるときは $A \succeq B$ と表す。したがって、 $A \succeq B$ のときは、 $A \succ B$ あるいは $A \sim B$ のいずれか一方が成り立つことを意味する。

事象の確率は数値として表されるので、確率分布 P は以下の性質を有する必要がある：

$$P(A) \leq P(B) \iff A \preceq B.$$

このとき、確率分布 P は関係 $\preceq$ と一致 (agree) するという。これより、一意な確率分布が存在するために、関係 $\preceq$ が満たすべき条件を考察することになる。

はじめに、基本となる仮定は次のものである。

仮定 1 任意の二つの事象 A と B について、次の三つの関係のうち一つは必ず成立する：

$$A \prec B, A \succ B, A \sim B.$$

次に述べる仮定は、直観的にももっともらしく、簡単に理解できるものである。

仮定 2 四つの事象 A_1, A_2, B_1, B_2 が、 $A_1 A_2 = B_1 B_2 = \emptyset$ 、および $A_i \preceq B_i, i=1, 2$ を満たすものとする⁴⁾。このとき、 $A_1 \cup A_2 \preceq B_1 \cup B_2$ が成り立つ。さらに、 $A_1 \prec B_1$ または $A_2 \prec B_2$ のいずれか一方が成り立つならば、 $A_1 \cup A_2 \prec B_1 \cup B_2$ となる。

これら二つの仮定より、幾つかの性質を導くことができる。そのうちの一つに、関係 $\preceq$ の推移性がある。このことを説明するために、次の補題を示す。

補題 1 三つの事象 A, B, C が $AC=BC=\emptyset$ を満たすとする。このとき

$$A \preceq B \iff A \cup C \preceq B \cup C$$

証明. $A \preceq B$ と仮定する。このとき、仮定 2 より $A \cup C \preceq B \cup C$ となる。逆に $A \succ B$ と仮定すると、同様に仮定 2 より $A \cup C \succ B \cup C$ が得られる。■

以上の結果より、次の定理が得られる。

定理 1 三つの事象 A, B, C が $A \preceq B$ と $B \preceq C$ を満たすとする。このとき、 $A \preceq C$ が成立する。

証明. 図 1 のように七つの互いに排反な事象を考える。 $A \preceq B$ とであるから、補題 1 より

$$AB^cC^c \cup AB^cC \prec A^cBC^c \cup A^cBC \quad (1)$$

であることがわかる。⁵⁾ 同様に $B \preceq C$ から

$$ABC^c \cup A^cBC^c \prec AB^cC \cup A^cB^cC \quad (2)$$

となる。(1)式および(2)式の左辺は互いに排反であり、右辺も同様に排反であるので、仮定 2 より

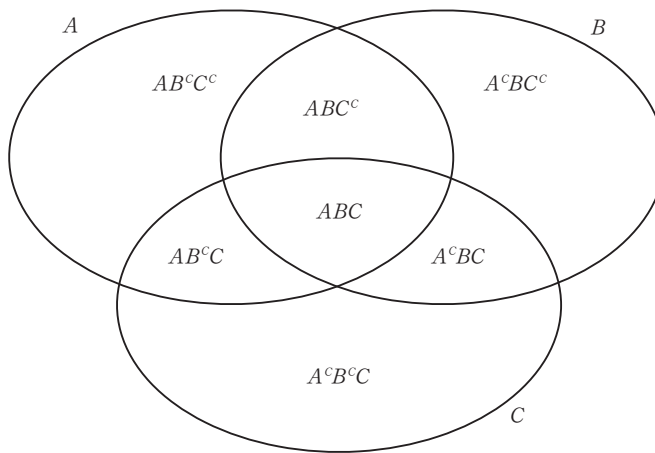
$$AB^cC^c \cup AB^cC \cup ABC^c \cup A^cBC^c \prec A^cBC^c \cup A^cBC \cup AB^cC \cup A^cB^cC \quad (3)$$

となることがわかる。ここで両辺で共通する $AB^cC \cup A^cBC^c$ を削除すると、補題 1 より

$$AB^cC^c \cup ABC^c \prec A^cBC \cup A^cB^cC \quad (4)$$

となる。図 1 および補題 1 より $A \prec C$ が得られる。■

図 1 $A \cup B \cup C$ の分割



次の定理は、仮定 2 を任意の有限個の排反事象の和に拡張したものである。

定理2 $A_1, A_2, \dots, A_n$ および $B_1, B_2, \dots, B_n$ が、それぞれ n 個の排反事象であり、 $A_i \preceq B_i, i = 1, 2, \dots, n$ とする。このとき、 $\bigcup_{i=1}^n A_i \preceq \bigcup_{i=1}^n B_i$ である。さらに、少なくとも一つの i について $A_i \prec B_i$ ならば、 $\bigcup_{i=1}^n A_i \prec \bigcup_{i=1}^n B_i$ となる。

証明は帰納法を用いて行うことができる（省略）。また、次の定理も成立する。

定理3 任意の事象 A, B について

$$A \preceq B \iff A^c \succeq B^c$$

が成立する。

証明. $A \preceq B$ より $P(A) \leq P(B)$ である。したがって、 $1 - P(A) \geq 1 - P(B)$ となり、これは $A^c \succeq B^c$ であることを表している。■

ここで、いかなる事象も空事象より起こりにくいことはないとする。また、標本空間 S は $\emptyset$ より起こりやすいと仮定する。すなわち

仮定3 A を任意の事象とすると、 $\emptyset \preceq A$ となる。また、 $\emptyset \prec S$ である。

この仮定より、次の基本的な性質が導かれる。

定理4 事象 A, B が $A \subset B$ であるとき、 $A \preceq B$ となる。また、 A を任意の事象とすると、 $\emptyset \preceq A \preceq S$ が成り立つ。

次に、事象の無限系列に関する仮定をおく。

仮定4 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ を事象の減少系列とし、 B は $A_i \succeq B, i = 1, 2, \dots$ を満たす事象とする。このとき、 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \succeq B$ が成立する。

次の定理は仮定4と双対の関係にあり、仮定4も定理と見なすことができることを示している。

定理5 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ を事象の増加系列とし、 B は $A_i \preceq B, i = 1, 2, \dots$ を満たす事象とする。このとき、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \preceq B$ が成立する。

証明. この定理の前提および定理3より、 $A_1^c \supset A_2^c \supset \dots$ は減少系列であり、 $A_i^c \succeq B^c, i = 1, 2, \dots$ を満たす。したがって、仮定4より

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \succeq B^c$$

となる。定理3を再び適用して、結果を得る。■

以下の定理は定理2を排反事象の無限系列の和に拡張したものである。

定理6 $A_1, A_2, \dots$ および $B_1, B_2, \dots$ が、それぞれ排反事象の無限系列であり、 $A_i \preceq B_i, i = 1, 2, \dots, n$ とする。このとき、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \preceq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ である。さらに、少なくとも一つの i について $A_i \prec B_i$ ならば、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \prec \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ となる。

確率分布の存在を示すためには、関係 $\preceq$ は上述の仮定1から仮定4を満たす必要がある。しかし、これら4つの仮定からは、確率分布が一意に存在を示すことができないため、もう一つの仮定が必要となる。

数直線上のある区間 I の両端の点 $a, b (a \leq b)$ に対して $\lambda(I) = b - a$ とする。確率変数 X は、すべての $s \in S$ について $0 \leq X(s) \leq 1$ であるとする。 $[0, 1]$ 上の任意の二つの区間 I_1, I_2 があり、 $\{X \in I_1\} \preceq \{X \in I_2\} \iff \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ を満たすならば、 X は $[0, 1]$ 上の一様分布にしたがうと言われる。ここで次の仮定をおくことによって、事象に確率を付与することができるようになる。

仮定 5 区間 $[0, 1]$ 上の一様分布にしたがう確率変数が存在する。

以下では、関係 $\preceq$ が仮定 1 から仮定 5 まで全て満たすものとする。このとき、関係 $\preceq$ に一致する確率分布 P が一意に存在することが示される。

仮定 5 より、区間 $[0, 1]$ 上の一様分布にしたがう確率変数 X が存在する。この区間内に任意の区間 (a, b) をとり、 $G(a, b)$ を確率変数 X が区間 (a, b) の中にあることを示す事象とする。このとき、任意の二つの区間 (a_1, b_1) と (a_2, b_2) に対し (ただし $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1, i=1, 2$),

$$G(a_1, b_1) \preceq G(a_2, b_2) \iff b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2$$

が成立する。また

$$G(a_1, b_1) \sim G(a_1, b_1] \sim G[a_1, b_1) \sim G[a_1, b_1]$$

である。

定理 7 任意の事象 A に対し、 $A \sim G[0, a^*]$ となる $a^* (0 \leq a^* \leq 1)$ がただ一つ存在する。

証明. 任意の事象 A に対し、区間 $[0, 1]$ の部分集合 $U(A)$ を以下のように定義する。

$$U(A) = \{a : G[0, a] \succeq A\}. \quad (5)$$

$G[0, 1] = S \succeq A$ であるから、 1 は $U(A)$ に属する。したがって、 $U(A)$ は空集合ではない。 $a^* = \inf \{a : a \in U(A)\}$ とおく。もし $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ が a^* に収束する $U(A)$ からの減少列ならば、 $G[0, a^*] = \bigcap_{i=1}^{\infty} G[0, a_i]$ となる。したがって、仮定 4 より

$$G[0, a^*] \succeq A. \quad (6)$$

$a^* = 0$ ならば、 $G[0, 0] \sim \emptyset \preceq A$ となるので、この不等式と (6) 式から $G[0, 0] \sim A$ となる。

$a^* > 0$ とおく。 a^* の定義より、 $0 \leq a < a^*$ となる a は $G[0, a] \prec A$ を満たす。もし $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ が a^* に収束する増加列ならば、 $G[0, a^*) = \bigcup_{i=1}^{\infty} G[0, a_i]$ となる。定理 5 より、 $G[0, a^*] \sim G[0, a^*) \preceq A$ が得られる。この不等式と (6) 式より $G[0, a^*] \sim A$ となる。

$a_1 < a^* < a_2$ とすると、 $G[0, a_1] \prec G[0, a^*] \prec G[0, a_2]$ となるが、このうちの一つだけが事象 A と同じになるので、 a^* の値はただ一つしか存在しない。■

この定理より、確率分布は定義されることになる。 A を任意の事象とすると、 $P(A)$ は定理 7 によって得られる a^* で定義される。すなわち

$$A \sim G[0, P(A)] \quad (7)$$

この定義によって定まる確率分布 P は、関係 $\preceq$ と一致することが次の定理で示される。

定理 8 A と B を二つの任意の事象とする。このとき、

$$A \preceq B \iff P(A) \leq P(B).$$

証明. (7)式より

$$A \preceq B \iff G[0, P(A)] \preceq G[0, P(B)]. \quad (8)$$

一様分布の定義より、(8)式が成り立つための必要十分条件は、 $P(A) \leq P(B)$ である。■

2.2 確率分布の性質

ここまでの議論において、確率分布を構築し、その一意性について検討してきた。次に、得られた確率分布が満たすべき性質を有しているかについて考察してゆく。

確率分布 P の定義より任意の事象 A に対して $P(A) \geq 0$ となるのは明らかである。また、 $S = G[0, 1]$ であることから、 $P(S) = 1$ が得られる。したがって、互いに排反な事象 $A_1, A_2, \dots$ に対して

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (9)$$

が成り立つことを確認すれば十分である。

はじめに、少なくとも二つの排反事象の和について(9)式が成り立つことを示す。

定理 9 任意の二つの事象 A, B が $AB = \emptyset$ を満たすとする。このとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

証明. (7)式より $A \sim G[0, P(A)]$ および $A \cup B \sim G[0, P(A \cup B)]$ となる。 $A \preceq A \cup B$ より $P(A) \leq P(A \cup B)$ が得られる。以下では

$$B \sim G(P(A), P(A \cup B)) \quad (10)$$

であることを示す。 $B \prec G(P(A), P(A \cup B))$ とする。このとき仮定 2 より

$$A \cup B \prec G[0, P(A)] \cup G(P(A), P(A \cup B)) = G[0, P(A \cup B)] \quad (11)$$

となり、矛盾する。 $B \succ G(P(A), P(A \cup B))$ とした場合にも、同様に矛盾が生じる。したがって、(11)式は正しい。

$$G(P(A), P(A \cup B)) \sim G[0, P(A \cup B) - P(A)] \quad (12)$$

であり、定義より $B \sim G[0, P(B)]$ であるので、(11)式および(13)式より

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B). \quad (13)$$

が得られる。■

この定理を有限個の排反事象の和に拡張すれば、帰納法を用いて以下の系が証明できる。

系 1 $A_1, A_2, \dots, A_n$ を任意の排反事象とすると、

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

定理 10 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ は $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ を満たす事象の減少列とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0. \quad (14)$$

証明. $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ より $P(A_1) \geq P(A_2) \geq \cdots$ となるので、 $n \rightarrow \infty$ のときに $P(A_n)$ は非負の極限值 b に収束しなければならない。 $P(A_i) \geq b, i=1, 2, \cdots$ であるので、 $A_i \succeq G[0, b], i=1, 2, \cdots$ となる。仮定 4 より

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \succeq G[0, b]. \quad (15)$$

b を任意の正の定数とすると、

$$G[0, b] \succeq G\left[0, \frac{b}{2}\right] \succeq \emptyset \quad (16)$$

が成り立つ。しかし、これは(15)式と矛盾するので $b=0$ となり(14)式が示される。■

以下の定理により、(9)式が証明される。

定理 11 関数 P は確率分布である。

証明. $A_1, A_2, \cdots$ を任意の排反事象の系列とする。系 1 より

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right), n=1, 2, \cdots \quad (17)$$

が得られる。 $A_i (i=1, 2, \cdots)$ は排反事象であるので、 $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ は $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$ となるような減少列である。したがって、定理10より $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0$ となる。これより、(17)式の右辺の極限をとることにより、(9)式が得られる。■

P が定理 8 を満たすただ一つの確率分布であることを示すにあたり、次の定理を与える。

定理 12 関係 $\preceq$ が仮定 1 から仮定 5 を満たすとする。このとき、(7)式で定義された関数 P は、関係 $\preceq$ と一致するただ一つの確率分布である。

証明. 関係 $\preceq$ と一致する任意の確率分布 P' を考える。一様分布の性質より、 $G[0, a]$ となる任意の事象について $P'\{G[0, a]\} = a$ が成り立つ。 A を任意の事象とすると、定理 7 より $A \sim G[0, a^*]$ なる a^* が存在する。 P' は関係 $\preceq$ と一致しているので、

$$P'(A) = P'\{G[0, a^*]\} = a^* = P(A) \quad (18)$$

となり、 $P'(A) = P(A)$ が得られる。これより P の一意性が示された。■

2.3 条件付確率の構築

前節でも簡単に述べたように、主観確率に基づくベイズ統計学では、たとえば事後確率の導出などで条件付確率を用いた議論が行われる。ベイズ統計学に限らず、一般の統計分析は条件付確率を扱っていることから、これまで検討してきた確率分布 P が条件付確率分布として扱えることが必要となる。

関係 $\preceq$ が仮定 1 から仮定 5 まで満たしており、関数 P は定理12で述べられているように、

ただ一つの確率分布であるとする。ここでの目的は、関係 $\preceq$ が $A \preceq B$ だけでなく、任意の事象 C を含めて $(A|C) \preceq (B|C)$ についても成り立つ条件について検討することである。すなわち、

$$(A|C) \preceq (B|C) \iff P(A|C) \leq P(B|C)$$

となるような条件について考えてゆく。ただし、条件付確率の定義より $P(C) > 0$ を想定する。

$P(C) > 0$ を満たす任意の事象 C に対して、 $P(A|C) \leq P(B|C)$ という不等式は $P(AC) \leq P(BC)$ と同値である。さらに、この不等式は $AC \preceq BC$ という関係とも同値である。したがって、次の仮定をおくことになる。

仮定 6 任意の事象 A, B, C に対して、

$$(A|C) \preceq (B|C) \iff AC \preceq BC$$

この仮定と定理12とを組み合わせることで、以下の定理を得ることができる。

定理 13 関係 $\preceq$ が仮定1から仮定6まで満たすとき、(7)式で定義される関数 P は次の性質を有するただ一つの確率分布である：任意の事象 A, B, C に対して、 $P(C) > 0$ であるとき、 $(A|C) \preceq (B|C) \iff P(A|C) \leq P(B|C)$ が成立する。

以上で主観確率は確率の公理を満たすとともに、条件付確率を用いた推論を行うことも可能であることが示された。

3 主観確率の意義

ところで、われわれは主観確率をどのように意識しているのだろうか。この点について、大森(1981)に「確率と人生」と題した興味深い論考がある。そこでは日常生活における確率について、次のように述べられている。

要するに、一回きりの事件では、前もってその確率を云々しても、その予言の当たり外れを言うことは意味をなさないのである。確率いくらいくらということが正しかったか誤っていたかを定める方法がないからである。だがわれわれの日常生活で確率を問題にしたいのは大抵は一回きりの事件の確率なのである。明日の天気、来月の株価、⁶⁾(中略)といった一回きりの事件の確率がわれわれの生活での緊急事なのである。

たとえば天気予報に関して、気象統計はあくまで参考でしかない指摘している。

続けて、一回きりの事件の確率を考察する意味について、以下のように述べている。

一回きりの事件についての確率的予言は未来に対する心構えの表現なのであり、それについては程度を含んでの成功失敗を言うことだけではできるものなのである。簡単に⁷⁾いってしまえば、それらは来るべき人生への賭けの表現なのである。

確率論の源流の一つが賭け事であったことを想起すると、その適用範囲が人生にまで拡張

されている点は非常に興味深い。たとえば公共交通機関による移動を例に考えてみる。電車、バス、タクシー、飛行機などが候補としてあげられるが、事故率を考えると飛行機は非常に低いことが知られている。これは経験的確率による評価である。しかしながら、実際に問題となるのは、これから自分が搭乗する飛行機が安全か否かであって、ある意味で命を賭けた選択になる。もし安全であると考えらるならば、事故に遭う確率はゼロに近くなるであろうし、逆に危険と判断すれば確率は1に近くなるであろう。この確率は信念の度合であって、主観確率に他ならない。

はじめに述べたように、科学研究においては客観性が重要であり、経験的確率を用いることが望ましいことになる。しかし、研究において主観が全く介入しないことは稀であり、ベイズ統計学では事前確率に主観が含まれているだけである。むしろ、研究者が有している情報を駆使しているという点で、標本理論より優れていると考えるのが妥当である。

統計学における議論が帰納的であるのに対し、確率論の議論は演繹的である。主観確率は演繹的に確率分布と関連させられているが、実際にはベイズの定理によって情報の更新という帰納的推論も行われている。帰納と演繹の両方の性質を有する主観確率が、科学研究において果たす役割は、ますます増えていくことであろう。

注

- 1) <https://www.jma.go.jp/jma/kishou/known/kurashi/yoho.html> (2021年5月5日閲覧) より引用。
- 2) 宮川 (1969) 208ページ。
- 3) 以下の内容は、DeGroot (1970) 第6章からの抜粋である。
- 4) ここで AB は積事象 $A \cap B$ を示してる。以下同様。
- 5) A^c は A の余事象を示す。以下同様。
- 6) 大森 (1981) 12ページ。
- 7) 同上, 14-15ページ。

参考文献

- Bernardo, J.M. and Smith, A.F.M. (1994) *Bayesian Theory*, Wiley.
DeGroot, M.H. (1970) *Optimal Statistical Decisions*, Wiley.
Savage, L.J. (1972) *The Foundations of Statistics*, Second Revised Edition, Dover.
大森莊蔵 (1981) 『流れとよどみ』産業図書
宮川公男 (1969) 『OR入門』日本経済新聞社