



## 時変閾値自己回帰モデルについて

茂木, 快治

---

**(Citation)**

国民経済雑誌, 225(4):83-93

**(Issue Date)**

2022-04-10

**(Resource Type)**

departmental bulletin paper

**(Version)**

Version of Record

**(JaLCD0I)**

<https://doi.org/10.24546/E0042618>

**(URL)**

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/E0042618>



# 国民経済雑誌

時変閾値自己回帰モデルについて

茂 木 快 治

国民経済雑誌 第225巻 第4号 抜刷

2022年4月

神戸大学経済経営学会

# 時変閾値自己回帰モデルについて

茂 木 快 治<sup>a</sup>

時系列分析において、閾値効果のモデル化や検定は古くから研究されてきた。Tong（1978）の閾値自己回帰（threshold autoregressive; TAR）モデルでは、閾値  $\mu$  は時間を通じて一定であると仮定されている。一方、経済時系列の多くは時々刻々と変動する閾値  $\mu_t$  の上下で非対称性を有すると考えられる（時変閾値効果）。近年、TARモデルの閾値  $\mu$  を時間依存型に改良する試みが盛んに行われている。とりわけ、Motegi, Dennis, and Hamori（2021）は条件付き閾値自己回帰（conditional TAR; CoTAR）モデルを提案し、日米の新型コロナウイルス新規陽性者数に統計的に有意な時変閾値効果が存在することを示した。本稿では、CoTARモデルの理論と応用を解説し、今後の研究の展望を述べる。

キーワード 時系列分析，時変閾値効果，条件付き閾値自己回帰モデル，新型コロナウイルス，ブートストラップ

## 1 はじめに

非線形時系列分析において、閾値効果（threshold effect）のモデル化や検定は古くから研究されてきた。閾値効果とは、ある時系列  $x$  が何らかの閾値  $\mu$  を下回っているときと上回っているときで、ターゲットとなる変数  $y$  の時系列的性質が異なるという効果である。当該分野における最も古典的かつ標準的なモデルのひとつとして、Tong（1978）の閾値自己回帰（threshold autoregressive; TAR; タール）モデルが挙げられる。TARモデルでは、閾値  $\mu$  は時間を通じて一定であると仮定されている。一方、現実社会の時系列の多くは時々刻々と変動する閾値  $\mu_t$  の上下で非対称性を有すると考えられ、この性質は時変閾値効果（time-varying threshold effect）と呼ばれる。近年、TARモデルの閾値を時間依存型に改良する試みが盛んになされており、これまでに提案された様々なモデルは時変閾値自己回帰モデルと総称される。

既存研究における時変閾値自己回帰モデルは、時変閾値の定式化に応じていくつかのゲ

---

a 神戸大学大学院経済学研究科, motegi@econ.kobe-u.ac.jp

ループに分けられる。第一に、Bessec (2003) は Balke and Fomby (1997) の定数閾値を伴う自己励起型 TAR (self-exciting TAR; SETAR) モデルを拡張し、非確率かつ時変の閾値を許容した。第二に、Dueker, Psaradakis, Sola, and Spagnolo (2013) は定数閾値を伴う平滑移行型自己回帰 (smooth transition autoregressive; STAR) モデルを拡張し、観察可能な共変量の線形結合という形で時変閾値を導入した。第三に、Dueker, Owyang, and Sola (2010) は STAR モデルにおいて閾値が潜在型自己回帰過程 (latent autoregressive process) に従うことを許容した。第四に、Yang, Lee, and Chen (2021) は Hansen (2000) の閾値回帰モデルを拡張し、フーリエ変換に基づく時変閾値を導入した。第五に、Motegi, Cai, Hamori, and Xu (2020) は Corsi (2009) の非斉時的自己回帰 (heterogeneous autoregressive) モデルを拡張し、それぞれの観測頻度について、閾値変数の観測値の移動平均を時変閾値として用いた。

これらの先行研究を踏まえ、Motegi, Dennis, and Hamori (2021, 以下 MDH2021 と略記) は条件付き閾値自己回帰 (conditional TAR; CoTAR; コタール) モデルを提案した。既存の時変閾値自己回帰モデルと比較して、CoTAR モデルは直観的な理解のしやすさや計算の容易さなどの利点を有する。MDH2021 は、提案の CoTAR モデルを用いて、日米の新型コロナウイルス新規陽性者数に統計的に有意な時変閾値効果が存在することを示した。本稿では、CoTAR モデルの理論と応用を解説し、今後の研究の展望を述べる。

本稿の構成は次のとおりである。第2節では、TAR モデルの概要を説明し、時変閾値導入の必要性を指摘する。第3節では、CoTAR モデルの定式化と直観的意義を説明する。第4節では、CoTAR モデルにおける統計的推測の方法と漸近的性質を説明する。第5節では、日米の新型コロナウイルス新規陽性者数に対する CoTAR モデルの応用例を紹介する。第6節では、結論と今後の展望を述べる。

## 2 TAR モデル

時点  $t \in \{1, \dots, n\}$  におけるターゲット変数 (target variable) を  $y_t$ 、閾値変数 (threshold variable) を  $x_t$  とする。Tong (1978) の TAR モデルは、次式のとおり定式化される。

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \sum_{k=1}^p \phi_{1k} y_{t-k} + u_t, & (x_{t-d} < \mu \text{ のとき}), \\ \alpha_2 + \sum_{k=1}^p \phi_{2k} y_{t-k} + u_t, & (x_{t-d} \geq \mu \text{ のとき}). \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $(\alpha_r, \phi_{r1}, \dots, \phi_{rp})$  は第  $r$  レジームにおける回帰係数、 $p$  はラグの長さ、 $d$  は遅延パラメータ、 $\mu$  は閾値パラメータ、レジームの番号は  $r \in \{1, 2\}$  である。誤差項  $u_t$  に課される仮定の詳細については本稿では省略するが、代表的なものとしてはマルティンゲール差分性 (すなわち  $E(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = 0$ ) や有限 2 次モーメント (すなわち  $E(u_t^2) < \infty$ ) などがあ

る。ターゲット変数と閾値変数が同一の場合、つまりすべての時点  $t \in \{1, \dots, n\}$  について  $y_t = x_t$  の場合、(1)式は SETAR モデルと呼ばれる。

TAR モデルの特徴は、閾値変数  $x$  が閾値  $\mu$  を下回っているときと上回っているときで、ターゲット変数  $y$  の自己回帰係数が変化するという点にある (閾値効果)。閾値効果は様々な経済時系列に存在すると考えられている。例えば、 $y_t$  および  $x_t$  を第  $t$  四半期における経済成長率と仮定すると、(1)式で表される SETAR モデルにおいて、第1レジームは経済成長率がある水準  $\mu$  を下回っているという意味で「不況」、第2レジームは「好況」と解釈される。別の例として、新型コロナウイルス新規陽性者数の変化率にも閾値効果は存在し得ると考えられる。具体的には、 $y_t$  および  $x_t$  を第  $t$  日における新型コロナウイルス新規陽性者数の前日比変化率と仮定すると、(1)式で表される SETAR モデルにおいて、第1レジームは「感染減速局面」、第2レジームは「感染加速局面」と解釈される。

TAR モデルの潜在的な課題として、閾値  $\mu$  が時間を通じて一定と仮定されている点が挙げられる。現実社会の時系列では、閾値はその時々々の社会情勢に依存して変化すると考えられる。例えば戦後日本の経済成長率を考えたとき、ある四半期の経済成長率が不況と好況のどちらに該当するかは、絶対的に決まるものではなく、直近数年間の実績値を踏まえて相対的に決まるものであろう。また別の例として、東京の新型コロナウイルス新規陽性者数を考えたとき、ある日の新規陽性者数の前日比変化率が感染減速局面と加速局面のどちらに該当するかは、やはり絶対的に決まるものではなく、直近数週間の実績値を踏まえて相対的に決まるものであろう。この点から、TAR モデルの閾値  $\mu$  を時間依存型に改良することにより、経済学的解釈、モデルの当てはまり、将来予測の精度などが向上する可能性がある。

### 3 CoTAR モデル

MDH2021 の CoTAR モデルは、次式のとおり定式化される。

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \sum_{k=1}^p \phi_{1k} y_{t-k} + u_t, & (x_{t-d} < \mu_{t-d-1}(c) \text{ のとき}), \\ \alpha_2 + \sum_{k=1}^p \phi_{2k} y_{t-k} + u_t, & (x_{t-d} \geq \mu_{t-d-1}(c) \text{ のとき}). \end{cases} \quad (2)$$

ただし、条件付き閾値  $\mu_t(c)$  は閾値変数  $x$  の直近  $m$  期の観測値  $X_{t-m+1}^t = \{x_{t-m+1}, \dots, x_t\}$  の中で  $mc$  番目に小さな値 (すなわち  $X_{t-m+1}^t$  の  $100c\%$  点) である。ここで、 $X_{t-m+1}^t$  は局所的記憶 (local memory)、 $m$  は記憶サイズ (memory size)、 $c$  はパーセント点を表し、 $mc$  が自然数であることを保証するために  $c \in \{1/m, 2/m, \dots, 1\}$  と仮定する。すべての  $t \in \{1, \dots, n\}$  について  $y_t = x_t$  のとき、(2)式は自己励起型 CoTAR (self-exciting CoTAR; SE-CoTAR) モデルと呼ばれる。

(1)式と(2)式の唯一の違いは、定数の閾値  $\mu$  が条件付き閾値  $\mu_t(c)$  に置き換わった点で

ある。最も単純な  $m=1$  の場合を考えると、定義により  $c=1$  かつ  $\mu_{t-d-1}(c)=x_{t-d-1}$  となる。このとき、(2)式は(1)式において  $\Delta x_{t-d}=x_{t-d}-x_{t-d-1}$  を閾値変数、 $\mu=0$  を既知の閾値としたものと一致する。また、 $m$  が奇数を取り  $c=(2m)^{-1}(m+1)$  である場合、 $\mu_{t-d-1}(c)$  は局所的記憶  $X_{t-d-1}^m$  の中央値と一致する。この場合、閾値変数  $x$  が局所的記憶を所与とする「正常値」を下回っているとき第1レジーム、上回っているとき第2レジームが実現する。なお、 $m$  が偶数の場合も同様の解釈が成り立つが、 $\mu_{t-d-1}(c)$  は  $X_{t-d-1}^m$  の中央値と完全に一致するとは限らない。

パーセント点パラメータ  $c$  が下限  $1/m$  もしくは上限  $1$  に近い値をとる場合、閾値変数  $x$  が局所的記憶を所与とする「異常値」を下回っているとき第1レジーム、上回っているとき第2レジームが実現する。この点を理解するために、新型コロナウイルス新規陽性者数の前日比変化率に  $m=14$ ,  $c=11/14=0.786$  の SE-CoTAR モデルを当てはめるという具体例を考える。なお、議論を単純化するため、新規陽性者数に通常存在している曜日効果は平滑化されていると仮定する。この具体例の下での条件付き閾値は、新規陽性者数の前日比変化率の直近14日分の実現値の78.6%点となる。したがって、第2レジームは(相対的な意味で)感染拡大の著しい危機的局面であると解釈される。人々が足元の感染状況を評価するときに基準とする値は、何らかの固定された値ではなく、直近の感染状況に基づく相対的な数値であると想定される。この点で、TAR モデルよりも CoTAR モデルの方が新型コロナウイルス新規陽性者数のモデル化に適していると考えられる。同様の議論は経済成長率、財政収支、資産価格など様々な経済変数にも当てはまると考えられる。

#### 4 CoTAR モデルにおける統計的推測

CoTAR モデルに関する統計的推測を議論するため、(2)式を行列形式で書き換える。まず、パラメータを次のとおりベクトル化する。

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1p} \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2p} \end{bmatrix}, \quad \underset{K \times 1}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

ただし、回帰係数の個数は  $K=2(p+1)$  である。ターゲットとなるパラメータ  $\theta$  は、回帰パラメータ  $\beta$  と局外パラメータ (nuisance parameter)  $\gamma$  に分割される。ラグの長さ  $p$  と記憶サイズ  $m$  は既知であると仮定する。

次に、レジームを規定する二項変数を次のとおり定義する。

$$I_{1t}(c) = \mathbf{1}\{x_t < \mu_{t-1}(c)\}, \quad I_{2t}(c) = \mathbf{1}\{x_t \geq \mu_{t-1}(c)\}. \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{1}(A)$  は事象  $A$  が起こったとき 1、起こらなかったとき 0 をとる指示関数である。

(3)式を用いて、説明変数を次のとおりベクトル化する。

$$\underbrace{\mathbf{z}_{t-1}}_{(p+1) \times 1} = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})^\top, \quad \underbrace{\mathbf{Z}_{t-1}(\gamma)}_{K \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{t-1} I_{1, t-d}(c) \\ \mathbf{z}_{t-1} I_{2, t-d}(c) \end{bmatrix}.$$

以上より、(2)式は次のとおり行列形式で書き換えられる。

$$y_t = \mathbf{Z}_{t-1}(\gamma)^\top \beta + u_t. \quad (4)$$

以下、第 4.1 節ではパラメータ  $\theta$  の推定、第 4.2 節では条件付き閾値効果 (conditional threshold effect) の有無の検定について論じる。

#### 4.1 パラメータの推定

CoTAR モデルのパラメータ  $\theta$  の推定は、TAR モデルと同様にして実行可能である。回帰パラメータ  $\beta$  の空間を  $B \subseteq \mathbb{R}^K$  とする。遅延パラメータ  $d$  の空間を  $D = \{\underline{d}, \dots, \bar{d}\}$  とし、下限  $\underline{d}$  と上限  $\bar{d}$  は分析者が定めるものとする。記憶サイズ  $m$  を所与とすると、パーセント点パラメータ  $c$  の空間  $C$  は、最も大きい場合で  $\bar{C} = \{1/m, 2/m, \dots, 1\}$  となる。ここで、第  $r$  レジームのサンプル全体に占めるシェアを  $\delta_r(c) = n^{-1} \sum_{t=1}^n I_{rt}(c)$  と表す。ある  $c \in \bar{C}$  と  $r \in \{1, 2\}$  について  $\delta_r(c)$  が極端に小さな値をとるとき、有限標本における第  $r$  レジームの識別は困難となる。この実用上の問題を避けるため、MDH2021 は TAR 関連の先行研究にならって  $C$  を次式のように設定し、両方のレジームが少なくとも 15% のシェアを有することを保証した。

$$C = \{c \in \bar{C} \mid \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\} > 0.15\}. \quad (5)$$

局外パラメータ  $\gamma = (d, c)^\top$  の空間は、デカルト積を用いて  $\Gamma = D \times C$  と表される。定義上、局外パラメータの空間  $\Gamma$  は有限であり、その分だけ漸近理論や数値演算は簡素化される。最後に、パラメータ  $\theta$  の空間は  $\Theta = B \times \Gamma$  と表される。

パラメータ  $\theta$  の最小二乗推定量  $\hat{\theta}$  は、プロファイリング (profiling) と呼ばれる二段階推定法によって求められる。局外パラメータ  $\gamma$  の値を固定すると、(4)式における説明変数  $\mathbf{Z}_{t-1}(\gamma)$  は標本から計算可能である。したがって、 $\gamma$  を所与とする  $\beta$  の条件付き最小二乗推定量は次式で与えられる。

$$\hat{\beta}(\gamma) = \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_{i-1}(\gamma) \mathbf{Z}_{i-1}(\gamma)^\top \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_{i-1}(\gamma) y_i \right\}. \quad (6)$$

また、条件付き残差は次式で与えられる。

$$\hat{u}_i(\gamma) = y_i - \mathbf{Z}_{i-1}(\gamma)^\top \hat{\beta}(\gamma). \quad (7)$$

次式のとおり、 $\gamma$  の最小二乗推定量は、すべての  $\gamma \in \Gamma$  の中で条件付き残差の二乗和を最小化するものとして与えられる。

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i(\gamma)^2. \quad (8)$$

(8)式を(6)式に代入して、 $\beta$  の最小二乗推定量  $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\hat{\gamma})$  を得る。最後に、 $\theta$  の最小二乗推定量は、 $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^\top, \hat{\gamma}^\top)^\top$  で与えられる。

MDH2021 は、いくつかの標準的な前提条件の下で、最小二乗推定量  $\theta$  の漸近的性質を導出した。第一に、 $\hat{\beta}$  は真の値  $\beta_0$  の一致推定量 (consistent estimator) である。第二に、 $\beta_1 = \beta_2$  のとき、 $\hat{\beta}$  は一般に漸近正規性 (asymptotic normality) を満たさない。第三に、 $\beta_1 \neq \beta_2$  のとき、 $\hat{\beta}$  は漸近正規性を満たす。詳細については MDH2021 の Theorem 1 に譲る。

#### 4.2 条件付き閾値効果の有無の検定

CoTAR モデルに関する仮説検定のうち、最も重要度が高いもののひとつは、条件付き閾値効果の有無の検定である。条件付き閾値効果とは、時変閾値効果の一種であり、CoTAR モデルによって含意される閾値効果である。次の帰無仮説  $H_0$  および対立仮説  $H_1$  を考える。

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2, \quad H_1 : \beta_1 \neq \beta_2. \quad (9)$$

帰無仮説  $H_0$  の下で、(4)式は閾値変数  $x$  の値によらず通常の AR( $p$ ) モデルへと退化し、局外パラメータ  $\gamma$  は識別されない。一方、対立仮説  $H_1$  の下では、(4)式は退化せず、 $\gamma$  は識別される。したがって、帰無仮説  $H_0$  は条件付き閾値効果が存在しないという仮説に対応し、対立仮説  $H_1$  は条件付き閾値効果が存在するという仮説に対応する。

(9)式をパラメータの線形制約の一種として書き換えると、次式を得る。

$$H_0 : \mathbf{R}\beta = \mathbf{q}, \quad H_1 : \mathbf{R}\beta \neq \mathbf{q}. \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{R} = (\mathbf{I}_{p+1}, -\mathbf{I}_{p+1})$ 、 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  であり、 $\mathbf{I}_{p+1}$  は  $p+1$  次元の単位行列である。

帰無仮説  $H_0$  の下で  $\gamma$  は識別されないため、通常のカイ二乗検定は漸近的に望ましい性質を満たさない。局外パラメータが対立仮説の下でのみ識別される場合、Hansen (1996) のワイルド・ブートストラップ (wild bootstrap) を用いた検定が有効であることはよく知られ

ている。MDH2021は、Hansen (1996) のブートストラップ検定を利用して、条件付き閾値効果の有無の検定を確立した。その手順を説明するために、 $\gamma$ を所与とするいくつかの統計量を導入する。まず、(4)式に対応する回帰スコア (regression score) は次式で与えられる。

$$s_i(\gamma) = \mathbf{Z}_{t-1}(\gamma) u_i.$$

対立仮説  $H_1$  の下で推定された回帰スコアは次式で与えられる。

$$\hat{s}_i(\gamma) = \mathbf{Z}_{t-1}(\gamma) \hat{u}_i(\gamma). \quad (11)$$

ただし、 $\hat{u}_i(\gamma)$  は(7)式で与えられる条件付き残差である。

(10)式と対応する条件付きワルド検定統計量は次式で与えられる。

$$\mathcal{W}_n(\gamma) = n \{ \mathbf{R} \hat{\beta}(\gamma) - q \}^\top \{ \mathbf{R} \hat{\mathbf{V}}_n(\gamma) \mathbf{R}^\top \}^{-1} \{ \mathbf{R} \hat{\beta}(\gamma) - q \}.$$

ここで、 $\hat{\beta}(\gamma)$  は(6)式、 $\mathbf{R}$  は(10)式で与えられる。不均一分散に対して頑健な共分散行列推定量  $\hat{\mathbf{V}}_n(\gamma)$  は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{V}}_n(\gamma) = \mathbf{M}_n(\gamma)^{-1} \hat{\mathbf{S}}_n(\gamma) \mathbf{M}_n(\gamma)^{-1}. \quad (12)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{S}}_n(\gamma)$  と  $\mathbf{M}_n(\gamma)$  は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{S}}_n(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{s}_i(\gamma) \hat{s}_i(\gamma)^\top, \quad \mathbf{M}_n(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1}(\gamma) \mathbf{Z}_{t-1}(\gamma)^\top. \quad (13)$$

条件付きワルド検定統計量  $\mathcal{W}_n(\gamma)$  に含まれる局外パラメータ  $\gamma$  の集約の方法として、極大型、平均型、指数型の3通りがしばしば用いられる：

$$\sup \mathcal{W}_n \equiv \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{W}_n(\gamma) = \max_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{W}_n(\gamma), \quad (14)$$

$$\text{ave} \mathcal{W}_n \equiv \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{W}_n(\gamma), \quad (15)$$

$$\exp \mathcal{W}_n \equiv \ln \left[ \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp \left\{ \frac{\mathcal{W}_n(\gamma)}{2} \right\} \right]. \quad (16)$$

ただし、 $\#\Gamma$  は  $\Gamma$  の要素の個数を表す。一般に、(14)式、(15)式、もしくは(16)式で与えられる検定統計量は漸近的に非標準的な確率分布に従うため、Hansen (1996) のワイルド・ブートストラップを用いて検定を実行しなければならない。 $g(\mathcal{W}_n)$  を  $\sup \mathcal{W}_n$ ,  $\text{ave} \mathcal{W}_n$ , もしくは  $\exp \mathcal{W}_n$  とすると、ブートストラップ検定の手順は次のとおりである。

第1ステップ それぞれのブートストラップ標本  $b \in \{1, \dots, B\}$  について,  $\xi_1^{(b)}, \dots, \xi_n^{(b)} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$  を生成する。

第2ステップ ブートストラップ検定統計量  $g\{\mathcal{W}_n^{(b)}\}$  を計算する。ただし,  $\mathcal{W}_n^{(b)}(\gamma)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^{(b)}(\gamma) &= \hat{\mathbf{v}}_n^{(b)}(\gamma)^\top \mathbf{M}_n(\gamma)^{-1} \mathbf{R}^\top \{ \mathbf{R} \hat{\mathbf{V}}_n(\gamma) \mathbf{R}^\top \}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{M}_n(\gamma)^{-1} \hat{\mathbf{v}}_n^{(b)}(\gamma), \\ \hat{\mathbf{v}}_n^{(b)}(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \hat{s}_i(\gamma) \xi_i^{(b)}. \end{aligned}$$

ここで,  $\mathbf{R}$ ,  $\hat{s}_i(\gamma)$ ,  $\hat{\mathbf{V}}_n(\gamma)$ ,  $\mathbf{M}_n(\gamma)$  はそれぞれ(10)式, (11)式, (12)式, (13)式で定義されている。

第3ステップ 第1および第2ステップを独立に  $B$  回繰り返して,  $g\{\mathcal{W}_n^{(1)}\}, \dots, g\{\mathcal{W}_n^{(B)}\}$  を得る。

第4ステップ ブートストラップ P 値を次式のとおり計算する。

$$\hat{p}_n^B(H_0) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{1}[g\{\mathcal{W}_n^{(b)}\} \geq g(\mathcal{W}_n)].$$

$\hat{p}_n^B(H_0) < a$  のとき帰無仮説  $H_0$  を有意水準  $100a\%$  で棄却し,  $\hat{p}_n^B(H_0) \geq a$  のとき  $H_0$  を棄却しない。ここで, 有意水準は  $a \in (0, 1)$  で与えられる。

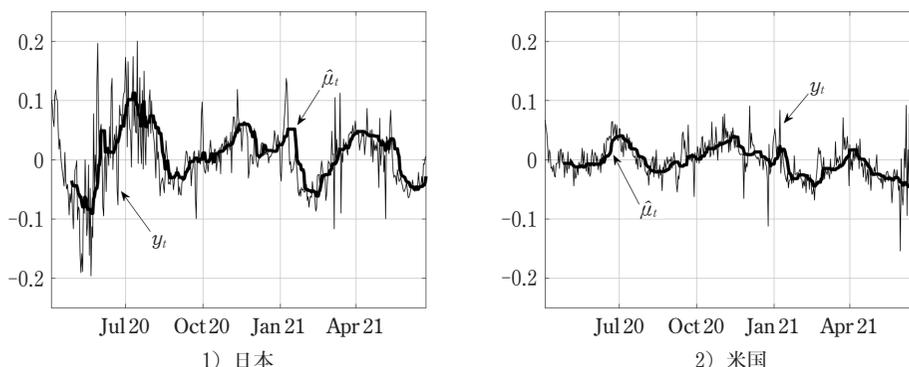
MDH2021 は, いくつかの標準的な前提条件の下で, 条件付き閾値効果の有無に対するブートストラップ検定が漸近的に望ましい性質を有することを証明した。第一に, 帰無仮説  $H_0$  が正しいとき,  $H_0$  が有意水準  $100a\%$  で棄却される確率は漸近的に  $a$  と等しい。第二に, 対立仮説  $H_1$  が正しいとき,  $H_0$  が有意水準  $100a\%$  で棄却される確率は漸近的に 1 と等しい(一致性)。詳細については MDH2021 の Theorem 2 と Corollary 3 に譲る。

## 5 CoTAR モデルによる実証分析の例

2020年初頭から現在に至るまで, 日々のニュースにはほぼ必ず新型コロナウイルスに関する統計数値が登場する。特に新規陽性者数は大きく報道され, 多くの人々がその推移を見て外出等の予定を調整している。さらに, 新規陽性者数の推移は, 投資家のポートフォリオ選択, 企業の経営戦略, 政府の感染症対策や経済政策などにも大きな影響を及ぼしていると考えられる。新型コロナウイルスの新規陽性者数をひとつの時系列として見たとき, どのようなデータ発生メカニズムが存在するだろうか。日本の陽性者数は米国をはじめとする諸外国と比べて少ないが, それはなぜなのか。これらの疑問に答えるべく, MDH2021 は提案の CoTAR モデルを用いて実証分析を行った。

MDH2021 は2020年4月4日から2021年6月23日までの446日間を標本期間と定め, 日米それぞれの新型コロナウイルス新規陽性者数(人口百万人あたり)の前日比増加率  $y_t$  に対

図1：新型コロナウイルス新規陽性者数の増加率  $y_t$  と推定された条件付き閾値  $\hat{\mu}_t$



して、次式で表される SE-CoTAR モデルを当てはめた。

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \sum_{k=1}^3 \phi_{1k} y_{t-k} + u_t & (y_{t-d} < \mu_{t-d-1}(c) \text{ のとき}), \\ \alpha_2 + \sum_{k=1}^3 \phi_{2k} y_{t-k} + u_t & (y_{t-d} \geq \mu_{t-d-1}(c) \text{ のとき}). \end{cases}$$

ただし、記憶サイズは  $m=14$  と設定されている。第1レジームは、直近14日分の局所記憶を所与として、新規陽性者数の増加率が比較的小きな値をとっている「感染減速局面」を表す。第2レジームは、新規陽性者数の増加率が比較的大きな値をとっている「感染加速局面」を表す。遅延パラメータ  $d$  の空間は  $D = \{1, \dots, 14\}$  である。現在の感染状況は約2週間前の人々の行動の結果であるという通説に従い、記憶サイズ  $m$  と遅延パラメータ  $d$  の上限  $\bar{d}$  はともに14と設定されている。パーセント点パラメータ  $c$  の空間  $C$  は、(5)式で定められる。

図1は日本と米国の分析結果を端的に示したものである。振幅の大きな細線はターゲット変数  $y_t$  の実現値、振幅の小さな太線は推定された条件付き閾値  $\hat{\mu}_t$  を表す。図1によると、日米ともに条件付き閾値  $\hat{\mu}_t$  が時間とともに変動し、ターゲット変数  $y_t$  の趨勢的变化が適切に捉えられている。

MDH2021の主要な発見は次のとおり要約される。第一に、日米両国について統計的に有意な条件付き閾値効果が検出された。つまり、新規陽性者数の増加率が閾値を下回っているとき（感染減速局面）と上回っているとき（感染加速局面）とで、新規陽性者数の増加率の時系列的特性は有意に異なる。

第二に、閾値効果は1週間程度のラグを伴って現れる。より具体的には、遅延パラメータ  $d$  の推定値は、日本の場合  $\hat{d}=10$ 、米国の場合  $\hat{d}=7$  である。つまり、今日のターゲットの時系列的特性は、約1週間前の時点が感染減速局面と加速局面のどちらに属していたかによって決まる。人々が感染状況に反応して行動を変化させるには多少の時間を要すると考え

られるため、約1週間のタイムラグが観察されたのは直観的に納得がいく。

第三に、感染減速局面に属する日数と加速局面に属する日数の比率は、日米で対照的な値をとる。日本の場合、全446日のうち57.4%が減速局面、42.6%が加速局面に属する。それに対して米国の場合、全体の48.4%が減速局面、51.6%が加速局面に属する。この対照性は、日本の人口百万人あたり新規陽性者数が米国を大幅に下回るという事実と整合的な結果である。

このように、日本は米国と比べて感染減速局面に属する日数が多いことが明らかになった。この点を掘り下げると、より一層興味深い傾向が浮かび上がる。まず、感染加速局面の持続性は日米でほぼ等しい。ある日が加速局面に該当しているとき、翌日も加速局面に該当する確率は日本で64.5%、米国で65.8%と算出された。また、加速局面の平均的な持続期間は日本で2.788日、米国で2.896日である。一方、感染減速局面の持続性は日本の方が米国よりも強い。ある日が減速局面に該当するとき、翌日も減速局面に該当する確率は日本で73.4%、米国で63.6%である。また、減速局面の平均的な持続期間は日本で3.758日、米国で2.750日である。つまり、日米の感染状況の差異は、感染加速局面よりもむしろ減速局面の持続性の差異に起因する。ひとつの仮説として、加速局面において感染を制御するのは困難もしくは不可能であり、減速局面における取り組みが一国の感染状況を左右すると示唆される。より具体的には、感染が収まりつつあるときこそ油断せず、マスク着用や外出自粛を励行することが、感染拡大防止に有効であると類推される。

## 6 結論と今後の展望

ここまで議論してきたように、MDH2021の提案したCoTARモデルは、TARモデルの自然な拡張となっており、直観的に理解しやすい形で時変閾値が導入されている。CoTARモデルの推定・検定はTARモデルとほぼ同様の方法で実行可能であり、その漸近的性質もMDH2021によって厳密に導出されている。また、CoTARモデルを日米の新型コロナウイルス新規陽性者数へ当てはめた結果、日米ともに有意な時変閾値効果が検出された。これは新型コロナウイルスの感染状況の統計学的理解や将来予測を助ける重要な発見である。今後、経済成長率、財政収支、資産価格など様々な経済変数について、CoTARモデルを用いた実証分析が行われていくと予想される。

最後に、CoTARモデルの今後の拡張可能性について議論する。第一に、1変数から多変数への一般化は十分に考えられ、それが実現すれば例えば新型コロナウイルスの新規陽性者数と新規検査件数の相互依存関係のモデル化も可能となる。第二に、TARモデルとCoTARモデルの統計的優劣を比較する検定の構築が望まれる。第4.2節で説明した条件付き閾値効果の有無の検定は、本質的にARモデルとCoTARモデルの優劣を比較する検定であると解

積される。また、ARモデルとTARモデルの優劣を比較する検定は、すでにHansen (1996)らによって確立されている。残る課題は、TARモデルとCoTARモデルの優劣を比較する検定の構築である。この課題を解決することにより、定数閾値効果と時変閾値効果の比較が可能となり、実証分析から得られるインプリケーションがより豊かなものとなるはずである。

#### 参 考 文 献

- BALKE, N. S., AND T. B. FOMBY (1997): "Threshold Cointegration," *International Economic Review*, 38, 627-645.
- BESSEC, M. (2003): "The asymmetric exchange rate dynamics in the EMS: a time-varying threshold test," *European Review of Economics and Finance*, 2, 3-40.
- CORSI, F. (2009): "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 7, 174-196.
- DUEKER, M., M. T. OWYANG, AND M. SOLA (2010): "A Time-Varying Threshold STAR Model of Unemployment and the Natural Rate," Working Paper 2010-029A, Federal Reserve Bank of St. Louis.
- DUEKER, M. J., Z. PSARADAKIS, M. SOLA, AND F. SPAGNOLO (2013): "State-Dependent Threshold Smooth Transition Autoregressive Models," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 75, 835-854.
- HANSEN, B. E. (1996): "Inference when a nuisance parameter is not identified under the null hypothesis," *Econometrica*, 64(2), 413-430.
- (2000): "Sample splitting and threshold estimation," *Econometrica*, 68, 575-603.
- MOTEGI, K., X. CAI, S. HAMORI, AND H. XU (2020): "Moving average threshold heterogeneous autoregressive (MAT-HAR) models," *Journal of Forecasting*, 39, 1035-1042.
- MOTEGI, K., J. DENNIS, AND S. HAMORI (2021): "Conditional Threshold Autoregression (CoTAR)," Working Paper at Kobe University and IDA.
- TONG, H. (1978): "On a threshold model," in *Pattern Recognition and Signal Processing*, ed. by C. H. Chen. Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam.
- YANG, L., C. LEE, AND I. CHEN (2021): "Threshold model with a time-varying threshold based on Fourier approximation," *Journal of Time Series Analysis*, 42, 406-430.